Zápočtová písemka z Geometrie 3
Varianta A

Datum: 19. 4. 2016
Jméno:

1	2	3	Σ

---

1) (3×1 b.) *Zadejte rovnicemi libovolnou afinitu v $\mathcal{A}_3$, která (pokud takové afinní zobrazení neexistuje, podejte stručné vysvětlení, proč):*

(a) *nemá žádné samodružné body;*
(b) *má jako vlastní čísla* 3, 2 *a* $2 + \mathrm{i}$*;*
(c) *zobrazuje přímku* $p : X = [0, 0, 0] + t(1, 0, 0)$ *na přímku* $p : X = [0, 0, 0] + t(1, 1, 0)$.

2) *Afinita f v $\mathcal{A}_3$ je zadána rovnicemi:*

$$\begin{aligned} f : x' &= 2x - y - z - 1 \\ y' &= + 2y - 3 \\ z' &= - y + z + 3 \end{aligned}$$

(a) (2 b.) *Vypočtěte vlastní čísla a jim příslušné vlastní vektory afinity f.*
(b) (1 b.) *Vyšetřete samodružné body zobrazení f.*
(c) (1 b.) *Uveďte repér $\mathcal{R}$, ve kterém mají matice afinity f co nejjednodušší možný tvar, a rovnice afinity vůči tomuto repéru.*
(d) (2 b.) *Vyjádřete rovnice afinity f vzhledem k bázi tvořené po řadě vektory* $(1, 0, 2)$, $(1, 2, 0)$ *a* $(2, 1, 2)$.

3) *Afinní zobrazení f prostoru $\mathcal{A}_3$ do sebe zobrazuje bod $A[0, 1, 0]$ na $A'[2, 3, -1]$, bod $B[1, -2, 0]$ na $B'[0, 2, -5]$ a má přímku $p : X = [1, -2, 1] + t(2, -3, 1)$ jako množinu samodružných bodů.*
(a) (3 b.) *Určete rovnice afinního zobrazení f.*
(b) (1 b.) *Určete obraz přímky $q : X = [-1, 1, -1] + t(-2, 3, -1)$ v afinním zobrazení f.*

Zápočtová písemka z Geometrie 3
Varianta B

Datum: 19. 4. 2016
Jméno:

1	2	3	Σ

---

1) (3×1 b.) *Zadejte rovnicemi libovolnou afinitu v $\mathcal{A}_3$, která (pokud takové afinní zobrazení neexistuje, podejte stručné vysvětlení, proč):*

(a) *má právě tři různé samodružné body;*
(b) *má jako vlastní čísla* 1 *a* 2*;*
(c) *zobrazuje vektor* $(0, 0, 1)$ *na vektor* $(1, 1, 0)$ *a bod* $[0, 0, 0]$ *je samodružný.*

2) *Afinita f v $\mathcal{A}_3$ je zadána rovnicemi:*

$$\begin{aligned} f : x' &= 6x + 3y + z - 3 \\ y' &= -2x + y - z - 3 \\ z' &= -2x - 2y + 2z + 3 \end{aligned}$$

(a) (4 b.) *Vypočtěte vlastní čísla a jim příslušné vlastní vektory afinity f.*
(b) (1 b.) *Vyšetřete samodružné body zobrazení f.*
(c) (1 b.) *Uveďte repér $\mathcal{R}$, ve kterém mají matice afinity f co nejjednodušší možný tvar, a rovnice vůči tomuto repéru.*

3) *Afinní zobrazení f prostoru $\mathcal{A}_3$ do sebe zobrazuje bod $A[1, 1, -1]$ na $A'[3, 1, -2]$, bod $B[1, -2, 0]$ na $B'[-5, 0, 0]$ a má přímku $p : X = [3, 1, -2] + t(3, -1, -1)$ jako množinu samodružných bodů.*

(a) (3 b.) *Určete rovnice afinního zobrazení f.*
(b) (1 b.) *Určete obraz přímky $q : X = [4, -3, -1] + t(-3, 1, 1)$ v afinním zobrazení f.*

Řešení A

1. (b) Neexistuje, protože vlastním číslem musí být také $2 - \mathrm{i}$ a charakteristický polynom stupně 3 nemůže mít v $\mathbb{C}$ čtyři různé kořeny.

2. (a) $\lambda_1 = 1, \mathbf{u}_1 = (1, 0, 1);$
   $\lambda_{2,3} = 2, \mathbf{u}_2 = (1, 0, 0), \mathbf{u}_3 = (0, -1, 1);$

   (b) $p : X = [4, 3, 0] + t(1, 0, 1)$

   (c) Libovolný samodružný bod a vektory $\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \mathbf{u}_3$. Matice asociovaného lineárního zobrazení je diagonální a obsahuje po řadě čísla 1,2,2; matice absolutních členů je tvořena nulami.

   (d)

$$\begin{aligned} f : x' &= 3x + y + \frac{3}{2}z + \frac{7}{2} \\ y' &= x + 3y + \frac{3}{2}z - \frac{1}{2} \\ z' &= -2x - 2y - z - 2 \end{aligned}$$

3. (a)

$$\begin{aligned} f : x' &= 3x + \frac{5}{3}y + z + \frac{1}{3} \\ y' &= 2x + y - 4z + 2 \\ z' &= -x + y + 6z - 2 \end{aligned}$$

   (b) $q' : X = [0, 2, -5] + t(-2, 3, -1)$

Řešení B

1. (a) Neexistuje, protože množinou samodružných bodů musí být afinní podprostor.

2. (a) $\lambda_1 = 2, \mathbf{u}_1 = (-1, 1, 1)$;
   $\lambda_2 = 3, \mathbf{u}_2 = (-1, 1, 0)$;
   $\lambda_3 = 4, \mathbf{u}_3 = (-2, 1, 1)$;

   (b) $X = [-2, 4, 1]$

   (c) Počátkem je bod X a vektory $\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \mathbf{u}_3$. Matice asociovaného lineárního zobrazení je diagonální a obsahuje po řadě čísla 2,3,4; matice absolutních členů je tvořena nulami.

3. (a)

$$\begin{aligned} f : x' &= 17x + 14y + 34z + 6 \\ y' &= -2x - y - 4z \\ z' &= -5x - 4y - 10z - 3 \end{aligned}$$

   (b) $q' : X = [-5, 0, 0] + t(-3, 1, 1)$