

MULTIVARIÁTNÁ ANALÝZA 2

1. KVADRATICKÉ FORMY

Definícia 1.1. Nech X_1, X_2, \dots, X_n sú nezávislé, $N(0, 1)$ rozdelené náhodné veličiny. Potom

$$Y = X_1^2 + X_2^2 + \dots + X_n^2$$

má rozdelenie χ_n^2 (centrálne chí kvadrát rozdelenie s n stupňami voľnosti).

Veta 1.2. Nech $Y \sim \chi_n^2$. Y má hustotu

$$f_n(y) = \begin{cases} \frac{1}{2^{\frac{n}{2}} \Gamma(\frac{n}{2})} e^{-\frac{y}{2}} y^{\frac{n}{2}-1} & \text{pre } y > 0, \\ 0 & \text{inde.} \end{cases}$$

Dôkaz. Pozri [Anděl, str. 79].

Poznámka. χ_n^2 rozdelenie je špeciálny prípad gama rozdelenia s parametrami a, p ($a > 0, p > 0$), ktoré má hustotu

$$f(x) = \begin{cases} \frac{a^p}{\Gamma(p)} e^{-ax} x^{p-1} & \text{pre } x > 0, \\ 0 & \text{inde.} \end{cases}$$

Označujeme ho $\Gamma(a, p)$. Platí, že χ_n^2 je rozdelenie $\Gamma(\frac{1}{2}, \frac{n}{2})$.
($\Gamma(p) = \int_0^\infty e^{-t} t^{p-1} dt$, $p > 0$.)

Definícia 1.3. Nech X_1, X_2, \dots, X_n sú nezávislé, $X_i \sim N(\mu_i, 1)$, $i = 1, 2, \dots, n$. Nech $\lambda = \sum_{i=1}^n \mu_i^2 \neq 0$. Náhodná veličina

$$Y = X_1^2 + X_2^2 + \dots + X_n^2$$

má necentrálne χ^2 rozdelenie s n stupňami voľnosti a koeficientom necentrality λ . Označujeme ho $\chi_{n,\lambda}^2$.

Veta 1.4. Nech X_1, X_2, \dots, X_n sú nezávislé, $X_i \sim N(\mu_i, 1)$, $i = 1, 2, \dots, n$. Rozdelenie pravdepodobnosti náhodnej veličiny $Y = \sum_{i=1}^n X_i^2$, (teda $\chi_{n,\lambda}^2$, kde $\lambda = \sum_{i=1}^n \mu_i^2$) závisí len od n a λ (nezávisí od jednotlivých μ_1, \dots, μ_n).

Dôkaz. Pozri [Anděl, str. 80].

Lema 1.5. Nech $X \sim N(\mu, 1)$. Náhodná veličina X^2 má hustotu

$$f_{X^2}(t) = \begin{cases} \frac{e^{-\frac{t+\mu^2}{2}}}{\sqrt{2\pi}\sqrt{t}} \left(1 + \frac{\mu^2 t}{2!} + \frac{(\mu^2 t)^2}{4!} + \dots \right) & t > 0, \\ 0 & t \leq 0. \end{cases}$$

Dôkaz. X^2 má distribučnú funkciu pre $t > 0$

$$F_{X^2}(t) = P\{X^2 < t\} = P\{-\sqrt{t} < X < \sqrt{t}\} = \int_{-\sqrt{t}}^{\sqrt{t}} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2}} dx.$$

Preto je hľadaná hustota pre $t > 0$

$$\begin{aligned} f_{X^2}(t) &= \frac{dF_{X^2}(t)}{dt} = \frac{1}{2\sqrt{t}} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(\sqrt{t}-\mu)^2}{2}} + \frac{1}{2\sqrt{t}} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(-\sqrt{t}-\mu)^2}{2}} = \\ &= \frac{e^{-\frac{t+\mu^2}{2}}}{2\sqrt{t}\sqrt{2\pi}} \left(e^{\mu\sqrt{t}} + e^{-\mu\sqrt{t}} \right) = \\ &= \frac{e^{-\frac{t+\mu^2}{2}}}{\sqrt{2\pi}\sqrt{t}} \left(1 + \frac{\mu^2 t}{2!} + \frac{(\mu^2 t)^2}{4!} + \dots \right). \end{aligned}$$

Samozrejme pre $t \leq 0$ je $f_{X^2}(t) = 0$. \square

Poznámka. Použili sme vzorec

$$\frac{d}{dy} \int_{\alpha(y)}^{\beta(y)} f(x, y) dx = \int_{\alpha(y)}^{\beta(y)} \frac{\partial f(x, y)}{\partial y} dx + \beta'(y) f[\beta(y), y] - \alpha'(y) f[\alpha(y), y].$$

Počítajme teraz charakteristickú funkciu náhodnej veličiny $\xi = X^2$.

$$\begin{aligned} \psi_{\xi}(t) &= \mathcal{E}(e^{it\xi}) = \int_0^{\infty} e^{itx} f_{\xi}(x) dx = \\ &= \int_0^{\infty} e^{itx} \frac{e^{-\frac{x+\mu^2}{2}}}{\sqrt{2\pi}\sqrt{x}} \left(1 + \frac{\mu^2 x}{2!} + \frac{(\mu^2 x)^2}{4!} + \dots \right) dx. \end{aligned}$$

Postupne pre prvý člen

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_0^{\infty} e^{itx} e^{-\frac{x+\mu^2}{2}} x^{-\frac{1}{2}} dx = \frac{e^{-\frac{\mu^2}{2}}}{\sqrt{2\pi}} \int_0^{\infty} e^{-x(\frac{1}{2}-it)} x^{-\frac{1}{2}} dx =$$

(substitúcia $x(\frac{1}{2}-it) = w$)

$$= \frac{e^{-\frac{\mu^2}{2}}}{\sqrt{2\pi}} \int_0^{\infty} e^{-w} \frac{w^{\frac{1}{2}-1}}{\sqrt{\frac{1}{2}-it}} dw = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sqrt{\frac{1}{2}-it}} e^{-\frac{\mu^2}{2}} \Gamma\left(\frac{1}{2}\right).$$

Pre druhý člen

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_0^{\infty} e^{itx} e^{-\frac{x+\mu^2}{2}} x^{-\frac{1}{2}} \frac{\mu^2 x}{2!} dx = \frac{\mu^2 e^{-\frac{\mu^2}{2}}}{2!\sqrt{2\pi}} \int_0^{\infty} e^{-x(\frac{1}{2}-it)} x^{\frac{3}{2}-1} dx =$$

(substitúcia $x(\frac{1}{2}-it) = w$)

$$= \frac{\mu^2 e^{-\frac{\mu^2}{2}}}{2!\sqrt{2\pi}} \int_0^{\infty} e^{-w} \frac{w^{\frac{3}{2}-1}}{\sqrt{(\frac{1}{2}-it)^3}} dw = \frac{\mu^2}{2!\sqrt{2\pi}\sqrt{(\frac{1}{2}-it)^3}} e^{-\frac{\mu^2}{2}} \Gamma\left(\frac{3}{2}\right).$$

Pre tretí člen

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_0^\infty e^{itx} e^{-\frac{x+\mu^2}{2}} x^{-\frac{1}{2}} \frac{(\mu^2)^2 x^2}{4!} dx = \frac{(\mu^2)^2 e^{-\frac{\mu^2}{2}}}{4! \sqrt{2\pi}} \int_0^\infty e^{-x(\frac{1}{2}-it)} x^{\frac{5}{2}-1} dx =$$

(substitúcia $x(\frac{1}{2}-it) = w$)

$$= \frac{(\mu^2)^2 e^{-\frac{\mu^2}{2}}}{4! \sqrt{2\pi}} \int_0^\infty e^{-w} \frac{w^{\frac{5}{2}-1}}{\sqrt{(\frac{1}{2}-it)^5}} dw = \frac{(\mu^2)^2}{4! \sqrt{2\pi} \sqrt{(\frac{1}{2}-it)^5}} e^{-\frac{\mu^2}{2}} \Gamma\left(\frac{5}{2}\right),$$

atď.

Dostávame

$$\begin{aligned} \psi_\xi(t) &= \frac{e^{-\frac{\mu^2}{2}}}{\sqrt{2\pi}} \left[\frac{\Gamma\left(\frac{1}{2}\right) (\mu^2)^0}{0! \left(\frac{1}{2}-it\right)^{\frac{1}{2}}} + \frac{\Gamma\left(\frac{3}{2}\right) (\mu^2)^1}{2! \left(\frac{1}{2}-it\right)^{\frac{3}{2}}} + \frac{\Gamma\left(\frac{5}{2}\right) (\mu^2)^2}{4! \left(\frac{1}{2}-it\right)^{\frac{5}{2}}} + \dots \right] = \\ &= \frac{e^{-\frac{\mu^2}{2}}}{\sqrt{\pi} \sqrt{1-2it}} \left[\frac{\sqrt{\pi} (\mu^2)^0}{0! \left(\frac{1}{2}-it\right)^0} + \frac{\sqrt{\pi} \frac{1}{2} (\mu^2)^1}{2 \cdot 1! \left(\frac{1}{2}-it\right)^1} + \frac{\sqrt{\pi} \frac{3}{2} \frac{1}{2} (\mu^2)^2}{4 \cdot 3 \cdot 2! \left(\frac{1}{2}-it\right)^2} + \right. \\ &\quad \left. + \frac{\sqrt{\pi} \frac{5}{2} \frac{3}{2} \frac{1}{2} (\mu^2)^3}{6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3! \left(\frac{1}{2}-it\right)^3} + \frac{\sqrt{\pi} \frac{7}{2} \frac{5}{2} \frac{3}{2} \frac{1}{2} (\mu^2)^4}{8 \cdot 7 \cdot 6 \cdot 5 \cdot 4! \left(\frac{1}{2}-it\right)^4} + \dots \right] = \\ &= \frac{e^{-\frac{\mu^2}{2}}}{\sqrt{1-2it}} \left[\frac{(\mu^2)^0}{0! 4^0 \left(\frac{1}{2}-it\right)^0} + \frac{(\mu^2)^1}{1! 4^1 \left(\frac{1}{2}-it\right)^1} + \frac{(\mu^2)^2}{2! 4^2 \left(\frac{1}{2}-it\right)^2} + \dots \right] = \\ (1.1) \quad &= \frac{e^{-\frac{\mu^2}{2}} e^{\frac{\mu^2}{2(1-2it)}}}{\sqrt{1-2it}} = \frac{e^{\frac{it\mu^2}{1-2it}}}{\sqrt{1-2it}}. \end{aligned}$$

Ak máme X_1, X_2, \dots, X_k nezávislé, $X_i \sim N(\mu_i, 1)$, tak charakteristická funkcia

$$(1.2) \quad \psi_{X_i^2}(t) = \frac{e^{\frac{it\mu_i^2}{1-2it}}}{\sqrt{1-2it}}$$

a charakteristická funkcia náhodnej veličiny $Y = X_1^2 + X_2^2 + \dots + X_k^2$ je

$$(1.3) \quad \psi_Y(t) = \psi_{X_1^2}(t) \psi_{X_2^2}(t) \dots \psi_{X_k^2}(t) = \frac{e^{\frac{it}{1-2it} \sum_{j=1}^k \mu_j^2}}{(1-2it)^{\frac{k}{2}}} = \frac{e^{\frac{it\lambda}{1-2it}}}{(1-2it)^{\frac{k}{2}}},$$

kde $\lambda = \sum_{j=1}^k \mu_j^2$.

Veta 1.6. *Nech náhodné premenné X_1, X_2, \dots, X_n sú nezávislé, $X_i \sim N(\mu_i, 1)$, $i = 1, 2, \dots, n$. Potom*

$$T = \sum_{i=1}^n \gamma_i X_i^2 + 2 \sum_{i=1}^n b_i X_i + c$$

má $\chi_{k,\delta}^2$ rozdelenie práve vtedy ak

- (i) $\gamma_i = 0$ alebo 1 pre $i = 1, 2, \dots, n$,
- (ii) ak $\gamma_i = 0 \Rightarrow b_i = 0$ pre $i = 1, 2, \dots, n$,
- (iii) $c = \sum_{i=1}^n b_i^2$.

Ak sú podmienky (i), (ii) a (iii) splnené, tak $k = \sum_{i=1}^n \gamma_i$ a $\delta = \sum_{i=1}^n \gamma_i (\mu_i + b_i)^2$.

Dôkaz. Porovnáme charakteristické funkcie $\psi_T(\cdot)$ a $\psi_Y(\cdot)$, kde $Y \sim \chi_{k,\delta}^2$. Platí

$$\begin{aligned} \psi_T(t) &= \mathcal{E}(e^{itT}) = \mathcal{E}\left(e^{\left[\sum_{\substack{j=1 \\ \gamma_j \neq 0}}^n \gamma_j X_j^2 + 2 \sum_{\substack{j=1 \\ \gamma_j \neq 0}}^n b_j X_j + c + 2 \sum_{\substack{j=1 \\ \gamma_j = 0}}^n b_j X_j \right]}\right) = \\ &= \mathcal{E}\left(e^{\left[\sum_{\substack{j=1 \\ \gamma_j \neq 0}}^n \gamma_j (X_j + \frac{b_j}{\gamma_j})^2 + c - \sum_{\substack{j=1 \\ \gamma_j \neq 0}}^n \frac{b_j^2}{\gamma_j} + 2 \sum_{\substack{j=1 \\ \gamma_j = 0}}^n b_j X_j \right]}\right) = \\ &= e^{\left[c - \sum_{\substack{j=1 \\ \gamma_j \neq 0}}^n \frac{b_j^2}{\gamma_j} \right]} \mathcal{E}\left(e^{i2 \sum_{\substack{j=1 \\ \gamma_j = 0}}^n b_j X_j}\right) \prod_{\substack{j=1 \\ \gamma_j \neq 0}}^n \mathcal{E}\left(e^{it \gamma_j (X_j + \frac{b_j}{\gamma_j})^2}\right) = \\ &= e^{\left[c - \sum_{\substack{j=1 \\ \gamma_j \neq 0}}^n \frac{b_j^2}{\gamma_j} \right]} \prod_{\substack{j=1 \\ \gamma_j = 0}}^n \psi_{\xi_j}(2b_j t) \prod_{\substack{j=1 \\ \gamma_j \neq 0}}^n \psi_{\xi_j^2}(\gamma_j t), \end{aligned}$$

kde $\xi_i \sim N\left(\mu_i + \frac{b_i}{\gamma_i}, 1\right)$ ak $\gamma_i \neq 0$ a $\xi_i \sim N(\mu_i, 1)$ ak $\gamma_i = 0$. Podľa (1.2) je

$$(1.4) \quad \psi_T(t) = e^{\left[c - \sum_{\substack{j=1 \\ \gamma_j \neq 0}}^n \frac{b_j^2}{\gamma_j} \right]} e^{i2t \sum_{\substack{j=1 \\ \gamma_j = 0}}^n \mu_j b_j - 2t^2 \sum_{\substack{j=1 \\ \gamma_j = 0}}^n b_j^2} \times \frac{1}{\prod_{\substack{j=1 \\ \gamma_j \neq 0}}^n \sqrt{1 - 2it\gamma_j}} e^{it \sum_{\substack{j=1 \\ \gamma_j \neq 0}}^n \frac{\gamma_j (\mu_j + \frac{b_j}{\gamma_j})^2}{1 - 2it\gamma_j}}.$$

Podľa (1.3) pre charakteristickú funkciu $Y \sim \chi_{k,\delta}^2$ platí

$$(1.5) \quad \psi_Y(t) = \frac{1}{\prod_{j=1}^k \sqrt{1 - 2it}} e^{\frac{it\delta}{1-2it}}.$$

Porovnaním (1.4) a (1.5) musí platiť pre každé $t \in \mathcal{R}$

$$\prod_{\substack{j=1 \\ \gamma_j \neq 0}}^n \sqrt{1 - 2it\gamma_j} = \prod_{l=1}^k \sqrt{1 - 2it}$$

a súčasne

$$e^{it \left(c - \sum_{\substack{j=1 \\ \gamma_j \neq 0}}^n \frac{b_j^2}{\gamma_j} \right)} e^{i2t \sum_{\gamma_j=0}^n \mu_j b_j - 2t^2 \sum_{\gamma_j=0}^n b_j^2} e^{it \sum_{\substack{j=1 \\ \gamma_j \neq 0}}^n \frac{\gamma_j \left(\mu_j + \frac{b_j}{\gamma_j} \right)^2}{1 - 2it\gamma_j}} = e^{\frac{it\delta}{1 - 2it}},$$

z čoho je jasne vidieť, ako dokončíme dôkaz. \square

Veta 1.7. *Nech $\xi \sim N_n(\mu, \mathbf{I})$, $\mathbf{A}_{n,n}$ je symetrická, $\mathbf{b} \in \mathcal{R}^n$ a $c \in \mathcal{R}$. Náhodná premenná $T = \xi' \mathbf{A} \xi + 2\mathbf{b}' \xi + c$ má $\chi_{k,\delta}^2$ rozdelenie práve vtedy ak*

- (i) $\mathbf{A}^2 = \mathbf{A}$,
- (ii) $\mathbf{b} \in \mu(\mathbf{A})$,
- (iii) $c = \mathbf{b}' \mathbf{b}$.

Ak sú podmienky (i),(ii) a (iii) splnené, tak $k = h(\mathbf{A})$, $\delta = (\mathbf{b} + \mu)' \mathbf{A} (\mathbf{b} + \mu)$.

Dôkaz. Pre \mathbf{A} existuje ortogonálna matica \mathbf{P} , že platí $\mathbf{P}' \mathbf{A} \mathbf{P} = \mathbf{\Lambda}$ (diagonálna matica), $\mathbf{P}' \mathbf{P} = \mathbf{P} \mathbf{P}' = \mathbf{I}$ (pozri napr. Rao, str. 62). Potom $\eta = \mathbf{P}' \xi \sim N(\mathbf{P}' \mu, \mathbf{I})$ a $\xi = \mathbf{P} \eta$. Preto

$$T = \xi' \mathbf{A} \xi + 2\mathbf{b}' \xi + c = \eta' \mathbf{P}' \mathbf{A} \mathbf{P} \eta + 2\mathbf{b}' \mathbf{P} \eta + c = \eta' \mathbf{\Lambda} \eta + 2\mathbf{b}' \mathbf{P} \eta + c.$$

Podľa vety 1.6 má T rozdelenie $\chi_{k,\delta}^2$ práve vtedy ak

- (i) $\{\mathbf{\Lambda}\}_{ii} = 0$ alebo 1 pre $i = 1, 2, \dots, n \Leftrightarrow \mathbf{\Lambda}^2 = \mathbf{\Lambda} \Leftrightarrow \mathbf{P}' \mathbf{A} \mathbf{P} \mathbf{P}' \mathbf{A} \mathbf{P} = \mathbf{P}' \mathbf{A}^2 \mathbf{P} = \mathbf{P}' \mathbf{A} \mathbf{P} \Leftrightarrow \mathbf{A}^2 = \mathbf{A}$,
- (ii) $\{\mathbf{\Lambda}\}_{ii} = 0 \Rightarrow \{\mathbf{P}' \mathbf{b}\}_i = 0$, čo je ekvivalentné s tým, že $\mathbf{P}' \mathbf{b} \in \mu(\mathbf{\Lambda}) \Leftrightarrow \mathbf{P} \mathbf{P}' \mathbf{b} = \mathbf{b} \in \mu(\mathbf{P} \mathbf{P}' \mathbf{A} \mathbf{P}) = \mu(\mathbf{A} \mathbf{P}) = \mu(\mathbf{A})$,
- (iii) $c = (\mathbf{b}' \mathbf{P}) \mathbf{P}' \mathbf{b} = \mathbf{b}' \mathbf{b}$.

Ak sú podmienky (i),(ii) a (iii) splnené, potom podľa vety 1.6 $k = \sum_{i=1}^n \{\mathbf{\Lambda}\}_{ii} = \text{tr} \mathbf{\Lambda} = h(\mathbf{\Lambda}) = h(\mathbf{P} \mathbf{\Lambda} \mathbf{P}') = h(\mathbf{A})$ a $\delta = \sum_{i=1}^n \{\mathbf{\Lambda}\}_{ii} (\{\mathbf{P}' \mathbf{b}\}_i + \{\mathbf{P}' \mu\}_i)^2 = (\mathbf{b}' \mathbf{P} + \mu' \mathbf{P}) \mathbf{\Lambda} (\mathbf{P}' \mathbf{b} + \mathbf{P}' \mu) = (\mathbf{b} + \mu)' \mathbf{P} \mathbf{\Lambda} \mathbf{P}' (\mathbf{b} + \mu) = (\mathbf{b} + \mu)' \mathbf{A} (\mathbf{b} + \mu)$. \square

Veta 1.8. *Nech $\xi \sim N_n(\mu, \Sigma)$, $\mathbf{A}_{n,n}$ je symetrická, $\mathbf{b} \in \mathcal{R}^n$ a $c \in \mathcal{R}$. Náhodná premenná $T = \xi' \mathbf{A} \xi + 2\mathbf{b}' \xi + c$ má $\chi_{k,\delta}^2$ rozdelenie práve vtedy ak*

- (i) $\Sigma \mathbf{A} \Sigma \mathbf{A} \Sigma = \Sigma \mathbf{A} \Sigma \Leftrightarrow (\Sigma \mathbf{A})^3 = (\Sigma \mathbf{A})^2$,
- (ii) $\Sigma(\mathbf{A} \mu + \mathbf{b}) \in \mu(\Sigma \mathbf{A} \Sigma)$,
- (iii) $(\mathbf{A} \mu + \mathbf{b})' \Sigma(\mathbf{A} \mu + \mathbf{b}) = \mu' \mathbf{A} \mu + 2\mathbf{b}' \mu + c$.

Ak sú podmienky (i),(ii) a (iii) splnené, tak $k = \text{tr}(\mathbf{A} \Sigma)$ a $\delta = (\mathbf{b} + \mathbf{A} \mu)' \Sigma \mathbf{A} \Sigma (\mathbf{b} + \mathbf{A} \mu)$.

Dôkaz. Faktorizujeme maticu $\Sigma = \mathbf{J} \mathbf{J}'$, kde \mathbf{J} je typu $n \times h(\Sigma)$ (pozri Anděl, str. 64). Vieme, že $P\{\xi = \mu + \mathbf{J} \eta\} = 1$, kde $\eta \sim N_{h(\Sigma)}(\mathbf{0}, \mathbf{I})$ (Anděl, str. 76). Teda

$$\begin{aligned} T &= \xi' \mathbf{A} \xi + 2\mathbf{b}' \xi + c = (\mu + \mathbf{J} \eta)' \mathbf{A} (\mu + \mathbf{J} \eta) + 2\mathbf{b}' (\mu + \mathbf{J} \eta) + c = \\ &= \eta' \mathbf{J}' \mathbf{A} \mathbf{J} \eta + 2(\mathbf{A} \mu + \mathbf{b})' \mathbf{J} \eta + \mu' \mathbf{A} \mu + 2\mathbf{b}' \mu + c. \end{aligned}$$

Podľa vety 1.7 má T rozdelenie $\chi_{k,\delta}^2$ práve vtedy ak

- (1) $\mathbf{J}'\mathbf{A}\mathbf{J}\mathbf{J}'\mathbf{A}\mathbf{J} = \mathbf{J}'\mathbf{A}\mathbf{J}$,
- (2) $\mathbf{J}'(\mathbf{A}\boldsymbol{\mu} + \mathbf{b}) \in \mu(\mathbf{J}'\mathbf{A}\mathbf{J})$,
- (3) $(\mathbf{A}\boldsymbol{\mu} + \mathbf{b})'\mathbf{J}\mathbf{J}'(\mathbf{A}\boldsymbol{\mu} + \mathbf{b}) = \boldsymbol{\mu}'\mathbf{A}\boldsymbol{\mu} + 2\mathbf{b}'\boldsymbol{\mu} + c$.

Ďalej platí

$$\mathbf{J}'\mathbf{A}\mathbf{J}\mathbf{J}'\mathbf{A}\mathbf{J} = \mathbf{J}'\mathbf{A}\mathbf{J} \Rightarrow \mathbf{J}\mathbf{J}'\mathbf{A}\mathbf{J}\mathbf{J}'\mathbf{A}\mathbf{J}\mathbf{J}' = \mathbf{J}\mathbf{J}'\mathbf{A}\mathbf{J}\mathbf{J}',$$

čiže

$$\boldsymbol{\Sigma}\mathbf{A}\boldsymbol{\Sigma}\mathbf{A}\boldsymbol{\Sigma} = \boldsymbol{\Sigma}\mathbf{A}\boldsymbol{\Sigma},$$

a tiež naopak

$$\boldsymbol{\Sigma}\mathbf{A}\boldsymbol{\Sigma}\mathbf{A}\boldsymbol{\Sigma} = \boldsymbol{\Sigma}\mathbf{A}\boldsymbol{\Sigma} \Rightarrow \mathbf{J}\mathbf{J}'\mathbf{A}\mathbf{J}\mathbf{J}'\mathbf{A}\mathbf{J}\mathbf{J}' = \mathbf{J}\mathbf{J}'\mathbf{A}\mathbf{J}\mathbf{J}' \Rightarrow$$

$$(\mathbf{J}'\mathbf{J})^{-1}\mathbf{J}'\mathbf{J}\mathbf{J}'\mathbf{A}\mathbf{J}\mathbf{J}'\mathbf{A}\mathbf{J}\mathbf{J}'\mathbf{J}(\mathbf{J}'\mathbf{J})^{-1} = (\mathbf{J}'\mathbf{J})^{-1}\mathbf{J}'\mathbf{J}\mathbf{J}'\mathbf{A}\mathbf{J}\mathbf{J}'\mathbf{J}(\mathbf{J}'\mathbf{J})^{-1},$$

čiže

$$\mathbf{J}'\mathbf{A}\mathbf{J}\mathbf{J}'\mathbf{A}\mathbf{J} = \mathbf{J}'\mathbf{A}\mathbf{J},$$

čo dokazuje prvú časť (i).

Ekvivalencia

$$\boldsymbol{\Sigma}\mathbf{A}\boldsymbol{\Sigma}\mathbf{A}\boldsymbol{\Sigma} = \boldsymbol{\Sigma}\mathbf{A}\boldsymbol{\Sigma} \Leftrightarrow (\boldsymbol{\Sigma}\mathbf{A})^3 = (\boldsymbol{\Sigma}\mathbf{A})^2$$

je jedným smerom (\Rightarrow) zrejímavá. Ku opaku potrebujeme nasledovné tvrdenie

$$(1.6) \quad \exists \mathbf{D}_{n,n} : \boldsymbol{\Sigma}\mathbf{A}\boldsymbol{\Sigma} = \boldsymbol{\Sigma}\mathbf{A}\boldsymbol{\Sigma}\mathbf{A}\mathbf{D}.$$

Tvrdenie (1.6) dokážeme takto:

$$h(\boldsymbol{\Sigma}\mathbf{A}\boldsymbol{\Sigma}) = h(\mathbf{J}\mathbf{J}'\mathbf{A}\mathbf{J}\mathbf{J}') \geq h((\mathbf{J}'\mathbf{J})^{-1}\mathbf{J}'\mathbf{J}\mathbf{J}'\mathbf{A}\mathbf{J}\mathbf{J}'\mathbf{J}(\mathbf{J}'\mathbf{J})^{-1}) = h(\mathbf{J}'\mathbf{A}\mathbf{J}).$$

Podľa Anděl, str. 62 je

$$(1.7) \quad h(\mathbf{J}'\mathbf{A}\mathbf{J}) = h(\mathbf{J}'\mathbf{A}\mathbf{J}\mathbf{J}'\mathbf{A}\mathbf{J}) \geq h(\mathbf{J}\mathbf{J}'\mathbf{A}\mathbf{J}\mathbf{J}'\mathbf{A}\mathbf{J}) = h(\boldsymbol{\Sigma}\mathbf{A}\boldsymbol{\Sigma}\mathbf{A}\mathbf{J}),$$

ale

$$h(\boldsymbol{\Sigma}\mathbf{A}\boldsymbol{\Sigma}\mathbf{A}\mathbf{J}) = h(\mathbf{J}\mathbf{J}'\mathbf{A}\mathbf{J}\mathbf{J}'\mathbf{A}\mathbf{J}) \geq h((\mathbf{J}'\mathbf{J})^{-1}\mathbf{J}'\mathbf{J}\mathbf{J}'\mathbf{A}\mathbf{J}\mathbf{J}'\mathbf{A}\mathbf{J}) =$$

$$(1.8) \quad = h(\mathbf{J}'\mathbf{A}\mathbf{J}\mathbf{J}'\mathbf{A}\mathbf{J}) = h(\mathbf{J}'\mathbf{A}\mathbf{J}),$$

a preto z (1.7) a (1.8)

$$h(\boldsymbol{\Sigma}\mathbf{A}\boldsymbol{\Sigma}) = h(\boldsymbol{\Sigma}\mathbf{A}\boldsymbol{\Sigma}\mathbf{A}\mathbf{J}) \leq h(\boldsymbol{\Sigma}\mathbf{A}\boldsymbol{\Sigma}\mathbf{A}) \leq h(\boldsymbol{\Sigma}\mathbf{A}\boldsymbol{\Sigma}),$$

teda

$$h(\boldsymbol{\Sigma}\mathbf{A}\boldsymbol{\Sigma}\mathbf{A}) = h(\boldsymbol{\Sigma}\mathbf{A}\boldsymbol{\Sigma}).$$

Pretože zrejme $\mu(\boldsymbol{\Sigma}\mathbf{A}\boldsymbol{\Sigma}\mathbf{A}) \subset \mu(\boldsymbol{\Sigma}\mathbf{A}\boldsymbol{\Sigma})$ a hodnoty matíc vytvárajúcich tieto podpriestory sa rovnajú, platí

$$\mu(\boldsymbol{\Sigma}\mathbf{A}\boldsymbol{\Sigma}\mathbf{A}) = \mu(\boldsymbol{\Sigma}\mathbf{A}\boldsymbol{\Sigma})$$

a dostávame vzťah (1.6).

Z predpokladu $(\Sigma \mathbf{A})^3 = (\Sigma \mathbf{A})^2$ pomocou (1.6) dostávame

$$\Sigma \mathbf{A} \Sigma \mathbf{A} \Sigma \mathbf{A} \mathbf{D} = \Sigma \mathbf{A} \Sigma \mathbf{A} \mathbf{D} \Rightarrow \Sigma \mathbf{A} \Sigma \mathbf{A} \Sigma = \Sigma \mathbf{A} \Sigma,$$

čím sme (i) úplne dokázali.

Podme teraz dokázať (ii), čiže dokázať, že

$$\mathbf{J}'(\mathbf{A}\boldsymbol{\mu} + \mathbf{b}) \in \mu(\mathbf{J}'\mathbf{A}\mathbf{J}) \Leftrightarrow \Sigma(\mathbf{A}\boldsymbol{\mu} + \mathbf{b}) \in \mu(\Sigma\mathbf{A}\Sigma).$$

Ak $\mathbf{J}'(\mathbf{A}\boldsymbol{\mu} + \mathbf{b}) \in \mu(\mathbf{J}'\mathbf{A}\mathbf{J})$, tak $\mathbf{J}\mathbf{J}'(\mathbf{A}\boldsymbol{\mu} + \mathbf{b}) \in \mu(\mathbf{J}\mathbf{J}'\mathbf{A}\mathbf{J}) = \mu(\Sigma\mathbf{A}\mathbf{J}) = \mu(\Sigma\mathbf{A}\mathbf{J}\mathbf{J}'\mathbf{A}\Sigma) = \mu(\Sigma\mathbf{A}\Sigma\mathbf{A}\Sigma) = \mu(\Sigma\mathbf{A}\Sigma)$ (podľa (i)).

Naopak ak $\Sigma(\mathbf{A}\boldsymbol{\mu} + \mathbf{b}) \in \mu(\Sigma\mathbf{A}\Sigma)$, tak $(\mathbf{J}'\mathbf{J})^{-1}\mathbf{J}'\mathbf{J}\mathbf{J}'(\mathbf{A}\boldsymbol{\mu} + \mathbf{b}) = \mathbf{J}'(\mathbf{A}\boldsymbol{\mu} + \mathbf{b}) \in \mu((\mathbf{J}'\mathbf{J})^{-1}\mathbf{J}'\mathbf{J}\mathbf{J}'\mathbf{A}\mathbf{J}\mathbf{J}') = \mu(\mathbf{J}'\mathbf{A}\mathbf{J}\mathbf{J}') \subset \mu(\mathbf{J}'\mathbf{A}\mathbf{J})$, čím sme dokázali (ii). Samozrejme (iii) už máme dokázané (je ekvivalentné (1)). Dôkaz vety už dokončíme jednoducho. Podľa vety 1.7 je totiž $k = h(\mathbf{J}\mathbf{J}'\mathbf{A}) = \text{tr}(\Sigma\mathbf{A}) = \text{tr}(\mathbf{A}\Sigma)$ a $\delta = [(\mathbf{J}'(\mathbf{A}\boldsymbol{\mu} + \mathbf{b}))]' \mathbf{J}'\mathbf{A}\mathbf{J}[\mathbf{J}'(\mathbf{A}\boldsymbol{\mu} + \mathbf{b})]] = (\mathbf{A}\boldsymbol{\mu} + \mathbf{b})' \Sigma \mathbf{A} \Sigma (\mathbf{A}\boldsymbol{\mu} + \mathbf{b})$. \square

Uvedieme bez dôkazu vety o nezávislosti kvadratických foriem. Podrobnejšie pozri [Rao, Mitra, kapitola 9].

Veta 1.9. *Nech $\mathbf{Y} \sim N_p(\boldsymbol{\mu}, \Sigma)$ a $Q_1 = \mathbf{Y}'\mathbf{A}\mathbf{Y}$, $Q_2 = \mathbf{Y}'\mathbf{B}\mathbf{Y}$ dve kvadratické formy. Nutné a postačujúce podmienky nezávislosti Q_1 a Q_2 sú*

(a) $\Sigma\mathbf{A}\Sigma\mathbf{B}\Sigma = \mathbf{0}$, $\Sigma\mathbf{A}\Sigma\mathbf{B}\boldsymbol{\mu} = \mathbf{0}$, $\Sigma\mathbf{B}\Sigma\mathbf{A}\boldsymbol{\mu} = \mathbf{0}$ a $\boldsymbol{\mu}'\mathbf{A}\Sigma\mathbf{B}\boldsymbol{\mu} = \mathbf{0}$, ak \mathbf{A} a \mathbf{B} sú symetrické, nemusia byť pozitívne semidefinítne, pričom Σ nemusí byť regulárna.

(b) $\mathbf{A}\Sigma\mathbf{B}\Sigma = \mathbf{0}$, $\mathbf{A}\Sigma\mathbf{B}\boldsymbol{\mu} = \mathbf{0}$, ak \mathbf{A} je pozitívne semidefinítne.

(c) $\mathbf{A}\Sigma\mathbf{B} = \mathbf{0}$, ak \mathbf{A} aj \mathbf{B} sú pozitívne semidefinítne.

(d) $\mathbf{A}\Sigma\mathbf{B} = \mathbf{0}$, ak Σ je regulárna, \mathbf{A} a \mathbf{B} sú symetrické, nemusia byť pozitívne semidefinítne.

Veta 1.10. *Nech $\mathbf{Y} \sim N_p(\boldsymbol{\mu}, \Sigma)$ a $Q_1 = \mathbf{Y}'\mathbf{A}\mathbf{Y} + 2\mathbf{a}'\mathbf{Y} + \alpha$, $Q_2 = \mathbf{Y}'\mathbf{B}\mathbf{Y} + 2\mathbf{b}'\mathbf{Y} + \beta$ dve lineárne-kvadratické formy. Nutné a postačujúce podmienky nezávislosti Q_1 a Q_2 sú*

(a) $\Sigma\mathbf{A}\Sigma\mathbf{B}\Sigma = \mathbf{0}$, $\Sigma\mathbf{A}\Sigma\mathbf{b} = \mathbf{0}$, $\Sigma\mathbf{B}\Sigma\mathbf{a} = \mathbf{0}$ a $\mathbf{a}'\Sigma\mathbf{b} = 0$, ak $\boldsymbol{\mu} = \mathbf{0}$, pričom Σ nemusí byť regulárna.

(b) $\mathbf{A}\Sigma\mathbf{B} = \mathbf{0}$, $\mathbf{B}\Sigma\mathbf{a} = \mathbf{0}$, $\mathbf{A}\Sigma\mathbf{b} = \mathbf{0}$ a $\mathbf{a}'\Sigma\mathbf{b} = 0$, ak Σ je regulárna, pričom $\boldsymbol{\mu}$ môže byť aj nenulový vektor.

2. WISHARTOVO ROZDELENIE

2.1. ÚVODNÉ POZNÁMKY A DEFINÍCIA

Majme $\mathbf{U}_i \sim N_p(\boldsymbol{\mu}_i, \Sigma)$, $i = 1, 2, \dots, k$, ktoré sú nezávislé, Σ je pozitívne definitná matica. Označme $\mathbf{U}_i = (U_{1i}, U_{2i}, \dots, U_{pi})'$, $\mathbf{Y}_j = (U_{j1}, U_{j2}, \dots, U_{jk})'$, $j = 1, 2, \dots, p$ a

$$\begin{pmatrix} U_{11} & U_{12} & U_{13} & \dots & U_{1k} \\ U_{21} & U_{22} & U_{23} & \dots & U_{2k} \\ \vdots & & & & \\ U_{p1} & U_{p2} & U_{p3} & \dots & U_{pk} \end{pmatrix} = \mathbf{U}'_{p,k}.$$

Teda

$$\mathcal{U}' = (\mathbf{U}_1 : \mathbf{U}_2 : \dots : \mathbf{U}_k) = \begin{pmatrix} \mathbf{Y}'_1 \\ \mathbf{Y}'_2 \\ \vdots \\ \mathbf{Y}'_p \end{pmatrix}.$$

ďalej označme

$$\mathbf{M}'_{p,k} = \begin{pmatrix} \mu_{11} & \mu_{12} & \mu_{13} & \dots & \mu_{1k} \\ \mu_{21} & \mu_{22} & \mu_{23} & \dots & \mu_{2k} \\ \vdots & & & & \\ \mu_{p1} & \mu_{p2} & \mu_{p3} & \dots & \mu_{pk} \end{pmatrix} = (\boldsymbol{\mu}_1 : \boldsymbol{\mu}_2 : \dots : \boldsymbol{\mu}_k).$$

Pre pevný vektor $\mathbf{l} \in \mathcal{R}^p$ sú náhodné veličiny

$$\mathbf{l}'\mathbf{U}_i \sim N(\mathbf{l}'\boldsymbol{\mu}_i, \mathbf{l}'\boldsymbol{\Sigma}\mathbf{l} = \sigma_i^2), \quad i = 1, 2, \dots, k$$

nezávislé (lebo \mathbf{U}_i sú nezávislé). Náhodný vektor $\mathcal{U}\mathbf{l} = {}_1\mathbf{Y}_{k,1}$ je lineárna kombinácia normálne rozdelených nezávislých náhodných vektorov, pričom

$$(2.1) \quad {}_1\mathbf{Y} \sim N_k(\mathbf{M}\mathbf{l}, \sigma_i^2 \mathbf{I}_{k,k}).$$

ak $\mathbf{b} = (b_1, b_2, \dots, b_k)'$ je vektor konštant, tak

$$(2.2) \quad \mathcal{U}'\mathbf{b} = b_1\mathbf{U}_1 + \dots + b_k\mathbf{U}_k \sim N_p(\mathbf{M}'\mathbf{b}, \mathbf{b}'\mathbf{b}\boldsymbol{\Sigma}).$$

Poznámka. Nech

$$\mathbf{A}_{m,n} = \begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & & \\ a_{m1} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}, \mathbf{B}_{r,s} = \begin{pmatrix} b_{11} & \dots & b_{1s} \\ b_{21} & \dots & b_{2s} \\ \vdots & & \\ b_{r1} & \dots & b_{rs} \end{pmatrix}.$$

Kroneckerov súčin matíc \mathbf{A} a \mathbf{B} je

$$\mathbf{A} \otimes \mathbf{B} = \begin{pmatrix} a_{11}\mathbf{B} & a_{12}\mathbf{B} & \dots & a_{1n}\mathbf{B} \\ a_{21}\mathbf{B} & a_{22}\mathbf{B} & \dots & a_{2n}\mathbf{B} \\ \vdots & & & \\ a_{m1}\mathbf{B} & a_{m2}\mathbf{B} & \dots & a_{mn}\mathbf{B} \end{pmatrix}_{mr,ns}.$$

Vlastnosti Kroneckerovho súčinu matíc pozri napr. v [Rao].

ak napíšeme “pod seba“ stĺpce matice \mathbf{K} , povieme, že sme vykonali na matici operáciu *vec*. Teda

$$\text{vec}\mathcal{U}' = \mathbf{U}_{kp,1} = \begin{pmatrix} \mathbf{U}_1 \\ \mathbf{U}_2 \\ \vdots \\ \mathbf{U}_k \end{pmatrix}.$$

Ukážte, že

$$(2.3) \quad \text{vec} \mathcal{U}' = \mathbf{U} \sim N_{kp}(\text{vec} \mathbf{M}', \mathbf{I}_{k,k} \otimes \boldsymbol{\Sigma}_{p,p})$$

a (2.2) sa dá zapísať ako

$$(2.4) \quad \mathcal{U}' \mathbf{b} = (\mathbf{b}' \otimes \mathbf{I}_{p,p}) \text{vec} \mathcal{U}' \sim N_p((\mathbf{b}' \otimes \mathbf{I}_{k,k}) \text{vec} \mathbf{M}', (\mathbf{b}' \otimes \mathbf{I}_{p,p})(\mathbf{I}_{p,p} \otimes \boldsymbol{\Sigma}_{p,p})(\mathbf{b} \otimes \mathbf{I}_{p,p})).$$

Poznámka. Nech $\mathbf{b}_1 \neq \mathbf{b}_2$, $\mathbf{b}_1, \mathbf{b}_2 \in \mathcal{R}^k$. Platí

$$\text{cov}(\mathcal{U}' \mathbf{b}_1, \mathcal{U}' \mathbf{b}_2) = (\mathbf{b}'_1 \otimes \mathbf{I}_{p,p})(\mathbf{I} \otimes \boldsymbol{\Sigma})(\mathbf{b}_2 \otimes \mathbf{I}_{p,p}) = \mathbf{b}'_1 \mathbf{b}_2 \otimes \boldsymbol{\Sigma} = \mathbf{b}'_1 \mathbf{b}_2 \boldsymbol{\Sigma}.$$

ak $\mathbf{b}'_1 \mathbf{b}_2 = 0$, t.j. ak \mathbf{b}_1 a \mathbf{b}_2 sú ortogonálne, tak $\mathcal{U}' \mathbf{b}_1$ a $\mathcal{U}' \mathbf{b}_2$ sú nes Korelované, t.j. v tomto prípade nezávislé.

Podľa predchádzajúcej poznámky ľahko dokážeme nasledujúcu lemu

Lema 2.1. Ak $\mathbf{b}_1, \mathbf{b}_2, \dots, \mathbf{b}_r$, $r \leq k$ tvorí ortonormálny systém v \mathcal{R}^k , tak

$$\mathbf{V}_1 = \mathcal{U}' \mathbf{b}_1, \dots, \mathbf{V}_r = \mathcal{U}' \mathbf{b}_r$$

sú navzájom nezávislé a majú normálne rozdelenie, pričom $\mathbf{V}_i \sim N_p(\mathbf{M}' \mathbf{b}_i, \boldsymbol{\Sigma})$.

Ľahko dostaneme aj nasledujúci dôsledok

Dôsledok 2.2. Ak $\mathbf{B}_{k,k}$ je ortogonálna matica ($\mathbf{B}\mathbf{B}' = \mathbf{B}'\mathbf{B} = \mathbf{I}$), tak $\mathbf{V}_i = (\mathbf{U}_1 \dots \mathbf{U}_k) \{\mathbf{B}\}_{.i} = \mathcal{U}' \{\mathbf{B}\}_{.i} \sim N_p(\mathbf{M}' \{\mathbf{B}\}_{.i}, \boldsymbol{\Sigma})$, $i = 1, 2, \dots, k$ a $\text{cov}(\mathbf{V}_i, \mathbf{V}_j) = (\{\mathbf{B}\}'_{.i} \otimes \mathbf{I}_{p,p})(\mathbf{I} \otimes \boldsymbol{\Sigma})(\{\mathbf{B}\}_{.j} \otimes \mathbf{I}) = \{\mathbf{B}\}'_{.i} \{\mathbf{B}\}_{.j} \otimes \boldsymbol{\Sigma} = \mathbf{0}$ pre $i \neq j$, teda $\mathbf{V}_1, \dots, \mathbf{V}_k$ sú nezávislé.

Definícia 2.3. Združené rozdelenie prvkov matice $\mathbf{S}_{p,p} = \sum_{i=1}^k \mathbf{U}_i \mathbf{U}_i' = \mathcal{U}' \mathcal{U}$ sa nazýva Wishartovo rozdelenie s k stupňami voľnosti a značí $W_p(k, \boldsymbol{\Sigma}, \mathbf{M})$. Ak $\mathbf{M} = \mathbf{0}$, jedná sa o centrálné rozdelenie, označujeme ho $W_p(k, \boldsymbol{\Sigma})$.

Poznámka.

(i) $\{\mathbf{S}\}_{ij} = \left\{ \sum_{l=1}^k \mathbf{U}_l \mathbf{U}_l' \right\}_{ij} = \sum_{l=1}^k U_{il} U_{jl} = \mathbf{Y}_i' \mathbf{Y}_j = \{\mathcal{U}' \mathcal{U}\}_{ij}$, lebo

$$\mathbf{S}_{p,p} = \begin{pmatrix} \sum_{l=1}^k U_{1l}^2 & \sum_{l=1}^k U_{1l} U_{2l} & \dots & \sum_{l=1}^k U_{1l} U_{pl} \\ \sum_{l=1}^k U_{2l} U_{1l} & \sum_{l=1}^k U_{2l}^2 & \dots & \sum_{l=1}^k U_{2l} U_{pl} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \sum_{l=1}^k U_{pl} U_{1l} & \sum_{l=1}^k U_{pl} U_{2l} & \dots & \sum_{l=1}^k U_{pl}^2 \end{pmatrix}.$$

(ii) Pre $p = 1$ a $\mu_{11} = \mu_{12} = \dots = \mu_{1k} = 0$ sú $\mathbf{U}_i = U_{1i} \sim N(0, \sigma^2)$, $i = 1, 2, \dots, k$ nezávislé, $\mathcal{U}' \mathcal{U} = \sum_{i=1}^k U_{1i}^2 \sim W_1(k, \sigma^2)$. Pretože $\frac{U_{1i}}{\sigma} \sim N(0, 1)$, má $\sum_{i=1}^k \frac{U_{1i}^2}{\sigma^2} \sim \chi_k^2$ rozdelenie a $\mathcal{U}' \mathcal{U} \sim \sigma^2 \chi_k^2$ rozdelenie.

(iii) Pre $k \geq p$ existuje hustota $W_p(k, \boldsymbol{\Sigma}, \mathbf{M})$ rozdelenia, ináč nie. Dôkaz je naznačený v [Rao, str. 641].

2.2. NIEKTORÉ VLASTNOSTI WISHARTOVHO ROZDELENIA

Lema 2.4. *Nech $\mathbf{S} \sim W_p(k, \boldsymbol{\Sigma}, \mathbf{M})$ a $\mathbf{l} \in \mathcal{R}^p$, $\mathbf{l} \neq \mathbf{0}$ je vektor konštant. Potom $\mathbf{l}'\mathbf{S}\mathbf{l} \sim \sigma_1^2 \chi_{k,\delta}^2$ ($\sigma_1^2 = \mathbf{l}'\boldsymbol{\Sigma}\mathbf{l}$, $\delta = \frac{\mathbf{l}'\mathbf{M}'\mathbf{M}\mathbf{l}}{\sigma_1^2}$).*

Dôkaz. $\mathbf{S} = \sum_{i=1}^k \mathbf{U}_i \mathbf{U}_i'$, preto $\mathbf{l}'\mathbf{S}\mathbf{l} = \sum_{i=1}^k \mathbf{l}'\mathbf{U}_i \mathbf{U}_i' \mathbf{l} = \sum_{i=1}^k (\mathbf{l}'\mathbf{U}_i)^2 = \mathbf{l}'\mathbf{Y}' \mathbf{l} \mathbf{Y} \sim \sigma_1^2 \chi_{k,\delta}^2$, kde $\delta = \frac{\mathbf{l}'\mathbf{M}'\mathbf{M}\mathbf{l}}{\sigma_1^2}$, lebo $\mathbf{l}'\mathbf{Y} \sim N_k(\mathbf{M}\mathbf{l}, \sigma_1^2 \mathbf{I}_{k,k})$. ak $\mathbf{M} = \mathbf{0}$, tak $\delta = 0$. \square

Lema 2.5. *Nech $\mathbf{U}_i \sim N_p(\mathbf{0}, \boldsymbol{\Sigma})$, $i = 1, 2, \dots, k$ sú nezávislé, $\mathbf{A}_{k,k}$ reálna symetrická matica. $\mathbf{U}'\mathbf{A}\mathbf{U} \sim W_p(r, \boldsymbol{\Sigma})$ práve vtedy ak $\forall \mathbf{l} \in \mathcal{R}^p$, $\mathbf{l} \neq \mathbf{0}$, $\mathbf{l}'\mathbf{Y}'\mathbf{A}\mathbf{l}\mathbf{Y} \sim \sigma_1^2 \chi_r^2$, ($\sigma_1^2 = \mathbf{l}'\boldsymbol{\Sigma}\mathbf{l}$, $\mathbf{l}'\mathbf{Y} = \mathbf{U}\mathbf{l}$). V tomto prípade $r = h(\mathbf{A}) = \text{tr}(\mathbf{A})$.*

Dôkaz. Z lemy 2.4 vyplýva, že ak $\mathbf{U}'\mathbf{A}\mathbf{U} \sim W_p(r, \boldsymbol{\Sigma})$, tak $\forall \mathbf{l} \in \mathcal{R}^p$ $\mathbf{l}'\mathbf{Y}'\mathbf{A}\mathbf{l}\mathbf{Y} \sim \sigma_1^2 \chi_r^2$. Samozrejme z (2.1) $\mathbf{l}'\mathbf{Y} \sim N_k(\mathbf{0}, \sigma_1^2 \mathbf{I}_{k,k})$, čiže $\frac{\mathbf{l}'\mathbf{Y}}{\sigma_1} \sim N_k(\mathbf{0}, \mathbf{I}_{k,k})$. Teda podľa vety 1.8 $\left(\frac{\mathbf{l}'\mathbf{Y}}{\sigma_1}\right)' \mathbf{A} \frac{\mathbf{l}'\mathbf{Y}}{\sigma_1} \sim \chi_r^2 \Leftrightarrow \mathbf{A}^2 = \mathbf{A}$ a v tom prípade $r = h(\mathbf{A}) = \text{tr}(\mathbf{A})$.

Naopak ak $\forall \mathbf{l} \in \mathcal{R}^p$ $\mathbf{l}'\mathbf{Y}'\mathbf{A}\mathbf{l}\mathbf{Y} \sim \sigma_1^2 \chi_r^2$, čo je podľa vety 1.8 ekvivalentné tomu, že $\mathbf{A}^2 = \mathbf{A}$, pričom v tom prípade $h(\mathbf{A}) = \text{tr}(\mathbf{A})$. \mathbf{A} je reálna symetrická matica, idempotentná a $h(\mathbf{A}) = r$. Teda \mathbf{A} je pozitívne semidefinitná a preto existuje ortonormálny systém vektorov $\mathbf{b}_1, \dots, \mathbf{b}_k \in \mathcal{R}^k$, že $\mathbf{A} = \sum_{j=1}^r \lambda_j \mathbf{b}_j \mathbf{b}_j'$, $\mathbf{I} = \sum_{j=1}^k \mathbf{b}_j \mathbf{b}_j'$ (reálne čísla $\lambda_1 \geq \lambda_2 \geq \dots \geq \lambda_r > 0$ sú vlastné čísla matice \mathbf{A} a $\mathbf{b}_1, \dots, \mathbf{b}_r$ im prislúchajúce charakteristické vektory). Z rovnosti $\mathbf{A}^2 = \mathbf{A}$ dostávame

$$\sum_{j=1}^r \lambda_j \mathbf{b}_j \mathbf{b}_j' \sum_{s=1}^r \lambda_s \mathbf{b}_s \mathbf{b}_s' = \sum_{t=1}^r \lambda_t \mathbf{b}_t \mathbf{b}_t'$$

čiže

$$\lambda_1^2 \mathbf{b}_1 \mathbf{b}_1' + \lambda_2^2 \mathbf{b}_2 \mathbf{b}_2' + \dots + \lambda_r^2 \mathbf{b}_r \mathbf{b}_r' = \lambda_1 \mathbf{b}_1 \mathbf{b}_1' + \lambda_2 \mathbf{b}_2 \mathbf{b}_2' + \dots + \lambda_r \mathbf{b}_r \mathbf{b}_r'$$

z čoho vyplýva, že $\lambda_i^2 = \lambda_i$, $i = 1, 2, \dots, r$, čiže $\lambda_1 = \lambda_2 = \dots = \lambda_r = 1$ (lebo $\lambda_i > 0$). Môžeme písať $\mathbf{A} = \sum_{j=1}^r \mathbf{b}_j \mathbf{b}_j'$ a tiež $\mathbf{U}'\mathbf{A}\mathbf{U} = \sum_{j=1}^r \mathbf{U}'\mathbf{b}_j \mathbf{b}_j' \mathbf{U} = \sum_{j=1}^r \mathbf{V}_j \mathbf{V}_j'$, pričom podľa lemy 2.1 $\mathbf{V}_i \sim N_p(\mathbf{0}, \boldsymbol{\Sigma})$ a V_1, V_2, \dots, V_r sú nezávislé. Z definície preto $\mathbf{U}'\mathbf{A}\mathbf{U} \sim W_p(r, \boldsymbol{\Sigma})$. \square

Veta 2.6. *Nech $\mathbf{S} \sim W_p(k, \boldsymbol{\Sigma})$ a $\mathbf{B}_{p,q}$ matica konštant. Potom $\mathbf{B}'\mathbf{S}\mathbf{B} \sim W_q(k, \mathbf{B}'\boldsymbol{\Sigma}\mathbf{B})$.*

Dôkaz. $\mathbf{B}'\mathbf{S}\mathbf{B} = \mathbf{B}'\mathbf{U}'\mathbf{U}\mathbf{B}$, kde

$$\mathbf{U}\mathbf{B} = \begin{pmatrix} \mathbf{U}'_1 \\ \mathbf{U}'_2 \\ \vdots \\ \mathbf{U}'_k \end{pmatrix}_{k,p} \quad \mathbf{B} = \begin{pmatrix} \mathbf{V}'_1 \\ \mathbf{V}'_2 \\ \vdots \\ \mathbf{V}'_k \end{pmatrix},$$

$\mathbf{U}_i \sim N_p(\mathbf{0}, \boldsymbol{\Sigma})$ sú nezávislé. Preto

$$\begin{pmatrix} \mathbf{V}'_1 \\ \mathbf{V}'_2 \\ \vdots \\ \mathbf{V}'_k \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathbf{U}'_1 \mathbf{B} \\ \mathbf{U}'_2 \mathbf{B} \\ \vdots \\ \mathbf{U}'_k \mathbf{B} \end{pmatrix}$$

má riadky nezávislé, $\text{cov}(\mathbf{B}'\mathbf{U}_i, \mathbf{B}'\mathbf{U}_j) = \mathbf{B}'\text{cov}(\mathbf{U}_i, \mathbf{U}_j)\mathbf{B} = \mathbf{0}$ a $\mathbf{B}'\mathbf{U}_i \sim N_q(\mathbf{0}, \mathbf{B}'\boldsymbol{\Sigma}\mathbf{B})$. Platí $\mathbf{B}'\mathbf{S}\mathbf{B} = \sum_{i=1}^k \mathbf{V}_i \mathbf{V}_i' \sim W_q(k, \mathbf{B}'\boldsymbol{\Sigma}\mathbf{B})$ (priamo z definície). \square

Dôsledok 2.7.

(a) Diagonálne submatice matice \mathbf{S} majú tiež Wishartovo rozdelenie, lebo ak

$$\mathbf{S} = \begin{pmatrix} \mathbf{S}_{11} & \mathbf{S}_{12} \\ \mathbf{S}_{21} & \mathbf{S}_{22} \end{pmatrix},$$

kde \mathbf{S}_{11} je rozmeru $l \times l$, tak

$$(\mathbf{I}_{l,l} \quad \mathbf{0}) \mathbf{S} \begin{pmatrix} \mathbf{I}_{l,l} \\ \mathbf{0} \end{pmatrix} = \mathbf{S}_{11}.$$

(b) ak $\mathbf{S} \sim W_p(k, \mathbf{I})$ a ak pre $\mathbf{B}_{p,q}$ platí $\mathbf{B}'\mathbf{B} = \mathbf{I}$, potom $\mathbf{B}'\mathbf{S}\mathbf{B} \sim W_q(k, \mathbf{I})$.

Veta 2.8. Nech $\mathbf{S} \sim W_p(k, \mathbf{\Sigma})$ a $\mathbf{a} \in \mathcal{R}^p$ je taký vektor konštant, že $\mathbf{a}'\mathbf{\Sigma}\mathbf{a} \neq 0$.

Potom $\frac{\mathbf{a}'\mathbf{S}\mathbf{a}}{\mathbf{a}'\mathbf{\Sigma}\mathbf{a}} \sim \chi_k^2$.

Dôkaz. Podľa vety 2.6 platí, že $\mathbf{a}'\mathbf{S}\mathbf{a} \sim W_1(k, \mathbf{a}'\mathbf{\Sigma}\mathbf{a})$, čo znamená podľa poznámky

(ii) pod definíciou 2.3, že $\frac{\mathbf{a}'\mathbf{S}\mathbf{a}}{\mathbf{a}'\mathbf{\Sigma}\mathbf{a}} \sim \chi_k^2$. \square

Veta 2.9. Nech $\mathbf{U}_1, \dots, \mathbf{U}_n$ je náhodný výber z $N_p(\mathbf{0}, \mathbf{\Sigma})$ (teda $\mathcal{U}'\mathcal{U} \sim W_p(n, \mathbf{\Sigma})$), $\mathbf{C}_{n,n}$ je symetrická matica. Platí

$$\mathcal{U}'\mathbf{C}\mathcal{U} \sim W_p(r, \mathbf{\Sigma}) \Leftrightarrow \mathbf{C}^2 = \mathbf{C}.$$

V takomto prípade $r = \text{tr}(\mathbf{C})$.

Dôkaz. Podľa lemy 2.5 je $\mathcal{U}'\mathbf{C}\mathcal{U} \sim W_p(r, \mathbf{\Sigma}) \Leftrightarrow \forall \mathbf{l} \in \mathcal{R}^p \quad \mathbf{l}'\mathbf{Y}'\mathbf{C} \mathbf{l}\mathbf{Y} \sim \sigma_1^2 \chi_r^2$, ($\sigma_1^2 = \mathbf{l}'\mathbf{\Sigma}\mathbf{l}$, $\mathbf{l}\mathbf{Y} = \mathcal{U}\mathbf{l}$). V tomto prípade $r = h(\mathbf{C}) = \text{tr}(\mathbf{C})$. Pretože podľa (2.1) je $\frac{\mathbf{l}\mathbf{Y}}{\sqrt{\mathbf{l}'\mathbf{\Sigma}\mathbf{l}}} \sim N_p(\mathbf{0}, \mathbf{I})$, je podľa vety 1.7 $\mathbf{l}'\mathbf{Y}'\mathbf{C} \mathbf{l}\mathbf{Y} \sim \sigma_1^2 \chi_r^2 \Leftrightarrow \frac{\mathbf{l}'\mathbf{Y}'}{\sqrt{\mathbf{l}'\mathbf{\Sigma}\mathbf{l}}} \mathbf{C} \frac{\mathbf{l}\mathbf{Y}}{\sqrt{\mathbf{l}'\mathbf{\Sigma}\mathbf{l}}} \sim \chi_r^2 \Leftrightarrow \mathbf{C}^2 = \mathbf{C}$. V tomto prípade $r = h(\mathbf{C})$. \square

Lema 2.10. Nech $\mathbf{S}_1 \sim W_p(n_1, \mathbf{\Sigma})$, $\mathbf{S}_2 \sim W_p(n_2, \mathbf{\Sigma})$. \mathbf{S}_1 a \mathbf{S}_2 sú nezávislé. Potom $\mathbf{S}_1 + \mathbf{S}_2 \sim W_p(n_1 + n_2, \mathbf{\Sigma})$.

Dôkaz. $\mathbf{S}_1 = \mathcal{U}'_1\mathcal{U}_1$, $\mathbf{S}_2 = \mathcal{U}'_2\mathcal{U}_2$, kde $\mathcal{U}'_1 = (\mathbf{U}_1 \dotsc \mathbf{U}_{n_1})$, $\mathcal{U}'_2 = (\mathbf{U}_{n_1+1} \dotsc \mathbf{U}_{n_1+n_2})$ a $\mathbf{U}_i \sim N_p(\mathbf{0}, \mathbf{\Sigma})$, $i = 1, 2, \dots, n_1 + n_2$ sú nezávislé. Preto ak označíme $\mathcal{U}' =$

$(\mathcal{U}'_1 \dotsc \mathcal{U}'_2)_{p, n_1+n_2}$, tak $\mathbf{S}_1 + \mathbf{S}_2 = (\mathcal{U}'_1\mathcal{U}_1 + \mathcal{U}'_2\mathcal{U}_2) = \mathcal{U}'\mathcal{U} \sim W_p(n_1 + n_2, \mathbf{\Sigma})$. \square

Veta 2.11. Nech $\mathbf{C}_{n,n} = \mathbf{C}'$ je p.s.d. matica konštant, $\mathbf{U}_i \sim N_p(\mathbf{0}, \mathbf{\Sigma})$, $i = 1, 2, \dots, n$ nezávislé. Platí, že $\mathcal{U}'_{p,n}\mathbf{C}\mathcal{U} \sim \sum_{i=1}^n \lambda_i W_p^{(i)}(1, \mathbf{\Sigma})$, kde $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ sú vlastné čísla matice \mathbf{C} a $W_p^{(1)}(1, \mathbf{\Sigma}), \dots, W_p^{(n)}(1, \mathbf{\Sigma})$ sú nezávislé.

Dôkaz. Môžeme písať $\mathbf{C} = \sum_{i=1}^n \lambda_i \mathbf{p}_i \mathbf{p}'_i$, $\mathbf{I} = \sum_{i=1}^n \mathbf{p}_i \mathbf{p}'_i$, pričom $\lambda_1 \geq \dots \geq \lambda_n \geq 0$ sú vlastné čísla matice \mathbf{C} a $\mathbf{p}_1, \dots, \mathbf{p}_n$ ortonormálne vektory. Teda $\mathcal{U}'\mathbf{C}\mathcal{U} = \sum_{i=1}^n \lambda_i \mathcal{U}'\mathbf{p}_i \mathbf{p}'_i \mathcal{U} = \sum_{i=1}^n \lambda_i \mathbf{V}_i \mathbf{V}'_i$, kde $\mathbf{V}_i \sim N_p(\mathbf{0}, \mathbf{\Sigma})$ a sú nezávislé (lema 2.1). Z vety 2.9 vieme, že $\mathcal{U}'\mathbf{p}_i \mathbf{p}'_i \mathcal{U} = \mathbf{V}_i \mathbf{V}'_i \sim W_p^{(i)}(1, \mathbf{\Sigma})$. \square

Lema 2.12. Pre matice príslušných rozmerov platí

$$(2.5) \quad \begin{aligned} \text{vecABC} &= (\mathbf{C}' \otimes \mathbf{A})\text{vecB}, \\ \text{trAB} &= (\text{vecB}')'\text{vecA}. \end{aligned}$$

Dôkaz. Lemu dokážte ako cvičenie.

Veta 2.13. Nech $\mathbf{U}_i \sim N_p(\boldsymbol{\mu}, \boldsymbol{\Sigma})$, $i = 1, 2, \dots, n$, $\mathbf{U}_1, \mathbf{U}_2, \dots, \mathbf{U}_n$ sú nezávislé, $\mathbf{C}_1, \mathbf{C}_2$ symetrické a idempotentné. $\mathcal{U}'\mathbf{C}_1\mathcal{U}$ a $\mathcal{U}'\mathbf{C}_2\mathcal{U}$ sú nezávislé $\Leftrightarrow \mathbf{C}_1\mathbf{C}_2 = \mathbf{0}$.

Dôkaz. ak $\mathcal{U}'\mathbf{C}_1$ a $\mathcal{U}'\mathbf{C}_2$ sú nezávislé, tak sú nezávislé aj $\mathcal{U}'\mathbf{C}_1\mathcal{U}$ a $\mathcal{U}'\mathbf{C}_2\mathcal{U}$. $\mathcal{U}'\mathbf{C}_1$ a $\mathcal{U}'\mathbf{C}_2$ sú nezávislé práve vtedy ak sú nezávislé $\mathbf{I}\mathcal{U}'\mathbf{C}_1$ a $\mathbf{I}\mathcal{U}'\mathbf{C}_2$ a to je práve vtedy ak sú nezávislé $\text{vec}(\mathbf{I}\mathcal{U}'\mathbf{C}_1)$ a $\text{vec}(\mathbf{I}\mathcal{U}'\mathbf{C}_2)$, čiže podľa lemy 2.12 ak sú nezávislé vektory $(\mathbf{C}'_1 \otimes \mathbf{I})\text{vec}\mathcal{U}'$ a $(\mathbf{C}'_2 \otimes \mathbf{I})\text{vec}\mathcal{U}'$, ktoré sú podľa (2.3) normálne rozdelené, pričom $\text{vec}\mathcal{U}' \sim N_{np}(\mathbf{0}, \mathbf{I}_{n,n} \otimes \boldsymbol{\Sigma}_{p,p})$. Pretože $(\mathbf{C}'_1 \otimes \mathbf{I})(\mathbf{I} \otimes \boldsymbol{\Sigma})(\mathbf{C}_2 \otimes \mathbf{I}) = (\mathbf{C}'_1\mathbf{C}_2 \otimes \boldsymbol{\Sigma}) = \mathbf{0}$, sú $\mathcal{U}'\mathbf{C}_1$ a $\mathcal{U}'\mathbf{C}_2$ nezávislé. Teraz už ľahko dokončíme dôkaz. \square

Veta 2.14. Nech $\mathbf{S} \sim W_p(k, \boldsymbol{\Sigma})$, $\boldsymbol{\Sigma}$ je regulárna, $k \geq p - 1$. Platí:

- (a) $\frac{\{\boldsymbol{\Sigma}^{-1}\}_{pp}}{\{\mathbf{S}^{-1}\}_{pp}} \sim \chi^2_{k-(p-1)}$ a nezávisí od $\{\mathbf{S}\}_{i,j}$ $i = 1, 2, \dots, p-1$, $j = 1, 2, \dots, p-1$.
- (b) Pre každý $\mathbf{1} \in \mathcal{R}^p, \mathbf{1} \neq \mathbf{0}$ je $\frac{\mathbf{1}'\boldsymbol{\Sigma}^{-1}\mathbf{1}}{\mathbf{1}'\mathbf{S}^{-1}\mathbf{1}} \sim \chi^2_{k-(p-1)}$.

Dôkaz. $\mathbf{S} = \sum_{i=1}^k \mathbf{U}_i\mathbf{U}_i'$, $\mathbf{U}_i \sim N_p(\mathbf{0}, \boldsymbol{\Sigma})$, \mathbf{U}_i nezávislé,

$$\mathbf{U}_i = \begin{pmatrix} U_{1i} \\ U_{2i} \\ \vdots \\ U_{p-1,i} \\ U_{pi} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathbf{U}_i^* \\ U_{pi} \end{pmatrix}, \quad i = 1, 2, \dots, k, \quad \mathbf{U}_i^* \sim N_{p-1}(\mathbf{0}, \boldsymbol{\Sigma}_{11}), \text{ kde}$$

$$\boldsymbol{\Sigma} = \begin{pmatrix} \boldsymbol{\Sigma}_{11} & \boldsymbol{\Sigma}_{12} \\ \boldsymbol{\Sigma}_{21} & \boldsymbol{\Sigma}_{22} \end{pmatrix}, \quad h(\boldsymbol{\Sigma}_{11}) = p - 1. \text{ Ďalej označme}$$

$$\mathbf{U}_{k,1} = \begin{pmatrix} U_{p1} \\ U_{p2} \\ \vdots \\ U_{pk} \end{pmatrix} \sim N_k(\mathbf{0}, \{\boldsymbol{\Sigma}\}_{pp}\mathbf{I}_{k,k}), \quad \mathbf{u}_i = \begin{pmatrix} u_{1i} \\ u_{2i} \\ \vdots \\ u_{p-1,i} \end{pmatrix}, \quad i = 1, 2, \dots, k,$$

$$\mathbf{S} = \begin{pmatrix} \sum_{i=1}^k \mathbf{U}_i^*(\mathbf{U}_i^*)' & \sum_{i=1}^k \mathbf{U}_i^*U_{pi} \\ \sum_{i=1}^k U_{pi}(\mathbf{U}_i^*)' & \sum_{i=1}^k U_{pi}^2 \end{pmatrix}.$$

Podľa lemy 4, Anděl, str. 121, $P\{\sum_{i=1}^k \mathbf{U}_i^*(\mathbf{U}_i^*)' \text{ je pozitívne definitná}\} = 1$, ak $k \geq p - 1$, teda $P\{h(\sum_{i=1}^k \mathbf{U}_i^*(\mathbf{U}_i^*)') = p - 1\} = 1$. Pre maticu

$$\mathbf{X} = \begin{pmatrix} u_{11} & u_{21} & \dots & u_{p-1,1} \\ u_{12} & u_{22} & \dots & u_{p-1,2} \\ \vdots & \vdots & \dots & \vdots \\ u_{1k} & u_{2k} & \dots & u_{p-1,k} \end{pmatrix}$$

platí

$$\sum_{i=1}^k \mathbf{u}_i\mathbf{u}_i' = \mathbf{X}'\mathbf{X}, \quad \sum_{i=1}^k U_{pi}\mathbf{u}_i' = \mathbf{U}'\mathbf{X} \quad \text{a} \quad \sum_{i=1}^k \mathbf{u}_iU_{pi} = \mathbf{X}'\mathbf{U}.$$

(a)

$$\begin{aligned} \{\mathbf{S}^{-1}\}_{pp} &= \left\{ \sum_{i=1}^k U_{pi}^2 - \sum_{i=1}^k (\mathbf{U}_i^*)' U_{pi} \left(\sum_{i=1}^k \mathbf{U}_i^* (\mathbf{U}_i^*)' \right)^{-1} \sum_{i=1}^k U_{pi} \mathbf{U}_i^* \right\}^{-1} = \\ &= \left\{ \mathbf{U}' \mathbf{U} - \sum_{i=1}^k (\mathbf{U}_i^*)' U_{pi} \left(\sum_{i=1}^k \mathbf{U}_i^* (\mathbf{U}_i^*)' \right)^{-1} \sum_{i=1}^k U_{pi} \mathbf{U}_i^* \right\}^{-1} \end{aligned}$$

(pozri anděl, str. 66). Podmienené rozdelenie $U_{p1}/\mathbf{U}_1^* = \mathbf{u}_1, \dots, \mathbf{U}_k^* = \mathbf{u}_k$ je to isté ako $U_{p1}/\mathbf{U}_1^* = \mathbf{u}_1$ (lebo U_{p1} nezávisí od $\mathbf{U}_2^*, \dots, \mathbf{U}_k^*$) a teda $U_{p1}/\mathbf{U}_1^* = \mathbf{u}_1 \sim N(0 + \Sigma_{21} \Sigma_{11}^{-1} \mathbf{u}_1, \Sigma_{22} - \Sigma_{21} \Sigma_{11}^{-1} \Sigma_{12})$, čo je $N(\Sigma_{21} \Sigma_{11}^{-1} \mathbf{u}_1, \{\Sigma^{-1}\}_{pp}^{-1})$. analogicky $U_{pi}/\mathbf{U}_i^* = \mathbf{u}_i \sim N(\Sigma_{21} \Sigma_{11}^{-1} \mathbf{u}_i, \{\Sigma^{-1}\}_{pp}^{-1})$, $i = 2, 3, \dots, k$ (pričom U_{pi}, U_{pj} pre $i \neq j$ sú nezávislé). Preto

$$\boldsymbol{\xi} = \begin{pmatrix} \xi_1 \\ \xi_2 \\ \vdots \\ \xi_k \end{pmatrix} = \mathbf{U}/\mathbf{U}_1^* = \mathbf{u}_1, \dots, \mathbf{U}_k^* = \mathbf{u}_k \sim N\left(\begin{pmatrix} \Sigma_{21} \Sigma_{11}^{-1} \mathbf{u}_1 \\ \Sigma_{21} \Sigma_{11}^{-1} \mathbf{u}_2 \\ \vdots \\ \Sigma_{21} \Sigma_{11}^{-1} \mathbf{u}_k \end{pmatrix}, \{\Sigma^{-1}\}_{pp}^{-1} \mathbf{I} \right),$$

pričom podstatné je aj to, že

$$(2.6) \quad \begin{pmatrix} \Sigma_{21} \Sigma_{11}^{-1} \mathbf{u}_1 \\ \Sigma_{21} \Sigma_{11}^{-1} \mathbf{u}_2 \\ \vdots \\ \Sigma_{21} \Sigma_{11}^{-1} \mathbf{u}_k \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathbf{u}'_1 \Sigma_{11}^{-1} \Sigma_{12} \\ \mathbf{u}'_2 \Sigma_{11}^{-1} \Sigma_{12} \\ \vdots \\ \mathbf{u}'_k \Sigma_{11}^{-1} \Sigma_{12} \end{pmatrix} = \mathbf{X} \boldsymbol{\gamma}.$$

Dostávame, že rozdelenie $\frac{1}{\{\mathbf{S}^{-1}\}_{pp}} / \mathbf{U}_1^* = \mathbf{u}_1, \dots, \mathbf{U}_k^* = \mathbf{u}_k$ je rozdelenie

$$\boldsymbol{\xi}' \boldsymbol{\xi} - \sum_{i=1}^k \mathbf{u}'_i \xi_i \left(\sum_{j=1}^k \mathbf{u}_j \mathbf{u}'_j \right)^{-1} \sum_{i=1}^k \mathbf{u}_i \xi_i = \boldsymbol{\xi}' (\mathbf{I} - \mathbf{X} (\mathbf{X}' \mathbf{X})^{-1} \mathbf{X}') \boldsymbol{\xi}.$$

Podľa vety 1.8 má kvadratická forma $\boldsymbol{\xi}' (\mathbf{I} - \mathbf{X} (\mathbf{X}' \mathbf{X})^{-1} \mathbf{X}') \boldsymbol{\xi}$ rozdelenie $\{\Sigma^{-1}\}_{pp}^{-1} \chi_{k-(p-1)}^2$, ktoré vďaka (2.6) nezávisí od podmienky (teda od $\{\mathbf{S}\}_{ij}$, $i, j \in \{1, 2, \dots, p-1\}$) a je preto aj nepodmieneným rozdelením. Dostávame, že

$$\frac{\{\Sigma^{-1}\}_{pp}}{\{\mathbf{S}^{-1}\}_{pp}} \sim \chi_{k-(p-1)}^2.$$

Pretože dôkaz sme úplne analogicky mohli urobiť pre ${}_r \mathbf{U} = (U_{r1}, U_{r2}, \dots, U_{rk})'$, $r \in \{1, 2, \dots, p\}$ platí,

$$\frac{\{\Sigma^{-1}\}_{rr}}{\{\mathbf{S}^{-1}\}_{rr}} \sim \chi_{k-(p-1)}^2, \quad r \in \{1, 2, \dots, p\}.$$

(b) Vezmime ortogonálnu maticu \mathbf{B} , ktorá má prvý riadok $\frac{1}{\|\mathbf{1}\|} \mathbf{1}'$. Podľa vety 2.6 platí $\mathbf{B} \mathbf{S} \mathbf{B}' \sim W_p(k, \mathbf{B} \boldsymbol{\Sigma} \mathbf{B}')$. Pretože

$$(\mathbf{B} \mathbf{S} \mathbf{B}')^{-1} = \mathbf{B} \mathbf{S}^{-1} \mathbf{B}', \quad (\mathbf{B} \boldsymbol{\Sigma} \mathbf{B}')^{-1} = \mathbf{B} \boldsymbol{\Sigma}^{-1} \mathbf{B}',$$

dostávame z (a)

$$\frac{\{\mathbf{B}\boldsymbol{\Sigma}^{-1}\mathbf{B}'\}_{11}}{\{\mathbf{B}\mathbf{S}^{-1}\mathbf{B}'\}_{11}} = \frac{\frac{1}{\|\mathbf{1}\|^2}\mathbf{1}'\boldsymbol{\Sigma}^{-1}\mathbf{1}}{\frac{1}{\|\mathbf{1}\|^2}\mathbf{1}'\mathbf{S}^{-1}\mathbf{1}} \sim \chi_{k-(p-1)}^2$$

(ortogonálnou transformáciou sa príslušné hodnoty v dôkaze (a) nemenia). \square

K dôkazu vety 2.16 potrebujeme nasledujúce tvrdenie:

Lema 2.15. *Nech $X \sim \chi_m^2$ a $Y \sim \chi_n^2$ sú nezávislé. Potom $\frac{X}{X+Y} \sim B\left(\frac{m}{2}, \frac{n}{2}\right)$.*

Dôkaz. Pozri Rao, vztah (3b.1.12), dokážte ako cvičenie.

(náčrt dôkazu: $U \sim \chi_m^2$, $V \sim \chi_n^2$, tak $f_U(u) = \frac{1}{2^{\frac{m}{2}}\Gamma(\frac{m}{2})}e^{-\frac{u}{2}}u^{\frac{m}{2}-1}$ pre $u > 0$,

$f_V(v) = \frac{1}{2^{\frac{n}{2}}\Gamma(\frac{n}{2})}e^{-\frac{v}{2}}v^{\frac{n}{2}-1}$ pre $v > 0$,

$$\mathbf{t} : \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} \frac{u}{u+v} \\ u+v \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y \\ z \end{pmatrix}$$

$$\boldsymbol{\tau} : \begin{pmatrix} y \\ z \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} zy \\ z(1-y) \end{pmatrix}$$

$$D_{\boldsymbol{\tau}}(y, z) = \det\left(\begin{pmatrix} z & y \\ -z & 1-y \end{pmatrix}\right) = z$$

$$f_{U,V}(u, v) = f_U(u)f_V(v), \quad f_{\mathbf{t}(U,V)}(y, z) = [2^{\frac{m}{2}}\Gamma(\frac{m}{2})]^{-1}e^{-\frac{zy}{2}}(zy)^{\frac{m}{2}-1} \times$$

$$[2^{\frac{n}{2}}\Gamma(\frac{n}{2})]^{-1}e^{-\frac{z(1-y)}{2}}[z(1-y)]^{\frac{n}{2}-1}z$$

$$f(y) = \int_0^{-\infty} f(y, z)dz = \frac{1}{B(\frac{m}{2}, \frac{n}{2})}y^{\frac{m}{2}-1}(1-y)^{\frac{n}{2}-1}$$

Veta 2.16. *Nech $\mathbf{S}_1 \sim W_p(k_1, \boldsymbol{\Sigma})$, $\mathbf{S}_2 \sim W_p(k_2, \boldsymbol{\Sigma})$ sú nezávislé, $\boldsymbol{\Sigma}$ je regulárna. ak $k_1 \geq p-1$, tak $\frac{|\mathbf{S}_1|}{|\mathbf{S}_1+\mathbf{S}_2|}$ má rozdelenie ako súčin $\eta_1 \dots \eta_p$ nezávislých náhodných veličín, $\eta_i \sim B\left(\frac{k_1-p+i}{2}, \frac{k_2}{2}\right)$ a nezávisí od $\{\mathbf{S}_1 + \mathbf{S}_2\}_{ij}$, $i, j \in \{1, 2, \dots, p-1\}$.*

Dôkaz. Označme $\mathbf{S}_1 = \sum_{i=1}^{k_1} \mathbf{U}_i \mathbf{U}_i'$, $\mathbf{S}_2 = \sum_{i=k_1+1}^{k_1+k_2} \mathbf{U}_i \mathbf{U}_i'$ kde $\mathbf{U}_i \sim N_p(\mathbf{0}, \boldsymbol{\Sigma})$, $i = 1, 2, \dots, k_1 + k_2$ a nezávislé.

$$\mathbf{U}_i = \begin{pmatrix} U_{1i} \\ U_{2i} \\ \vdots \\ U_{p-1,i} \\ U_{pi} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathbf{U}_i^* \\ U_{pi} \end{pmatrix}, \quad i = 1, 2, \dots, k_1 + k_2, \quad \mathbf{U}_i^* \sim N_{p-1}(\mathbf{0}, \boldsymbol{\Sigma}_{11}), \text{ kde}$$

$$\boldsymbol{\Sigma} = \begin{pmatrix} \boldsymbol{\Sigma}_{11} & \boldsymbol{\Sigma}_{12} \\ \boldsymbol{\Sigma}_{21} & \boldsymbol{\Sigma}_{22} \end{pmatrix}, \quad h(\boldsymbol{\Sigma}_{11}) = p-1.$$

ďalej označme

$$\mathbf{U}_{k_1+k_2,1} = \begin{pmatrix} U_{p1} \\ U_{p2} \\ \vdots \\ U_{p,k_1+k_2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} (1)\mathbf{U}_{k_1,1} \\ (2)\mathbf{U}_{k_2,1} \end{pmatrix} \sim N_{k_1+k_2}(\mathbf{0}, \{\boldsymbol{\Sigma}\}_{pp}\mathbf{I}),$$

$$\mathbf{u}_i = \begin{pmatrix} u_{1i} \\ u_{2i} \\ \vdots \\ u_{p-1,i} \end{pmatrix}, \quad i = 1, 2, \dots, k_1 + k_2,$$

$$\mathbf{S}_1 = \begin{pmatrix} \sum_{i=1}^{k_1} \mathbf{U}_i^* (\mathbf{U}_i^*)' & \sum_{i=1}^{k_1} \mathbf{U}_i^* U_{pi} \\ \sum_{i=1}^{k_1} U_{pi} (\mathbf{U}_i^*)' & \sum_{i=1}^{k_1} U_{pi}^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathbf{S}_{11} & \mathbf{S}_{12} \\ \mathbf{S}_{21} & \mathbf{S}_{22} \end{pmatrix},$$

$$\mathbf{S}_1 + \mathbf{S}_2 = \begin{pmatrix} \sum_{i=1}^{k_1+k_2} \mathbf{U}_i^* (\mathbf{U}_i^*)' & \sum_{i=1}^{k_1+k_2} \mathbf{U}_i^* U_{pi} \\ \sum_{i=1}^{k_1+k_2} U_{pi} (\mathbf{U}_i^*)' & \sum_{i=1}^{k_1+k_2} U_{pi}^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} (\mathbf{S}_1 + \mathbf{S}_2)_{11} & (\mathbf{S}_1 + \mathbf{S}_2)_{12} \\ (\mathbf{S}_1 + \mathbf{S}_2)_{21} & (\mathbf{S}_1 + \mathbf{S}_2)_{22} \end{pmatrix}.$$

Podľa lemy 4, anděl, str. 121, $P\{\sum_{i=1}^{k_1} \mathbf{U}_i^* (\mathbf{U}_i^*)' \text{ je pozitívne definitná}\} = 1$, (pretože $k_1 \geq p-1$), teda $P\{h(\sum_{i=1}^{k_1} \mathbf{U}_i^* (\mathbf{U}_i^*)') = p-1\} = 1$. (Samozrejme aj $P\{h(\sum_{i=1}^{k_1+k_2} \mathbf{U}_i^* (\mathbf{U}_i^*)') = p-1\} = 1$. ďalej označme

$$\mathbf{X}_1 = \begin{pmatrix} u_{11} & u_{21} & \dots & u_{p-1,1} \\ u_{12} & u_{22} & \dots & u_{p-1,2} \\ \vdots & & & \\ u_{1k_1} & u_{2k_1} & \dots & u_{p-1,k_1} \end{pmatrix}, \mathbf{X}_2 = \begin{pmatrix} u_{1,k_1+1} & u_{2,k_1+1} & \dots & u_{p-1,k_1+1} \\ u_{1,k_1+2} & u_{2,k_1+2} & \dots & u_{p-1,k_1+2} \\ \vdots & & & \\ u_{1,k_1+k_2} & u_{2,k_1+k_2} & \dots & u_{p-1,k_1+k_2} \end{pmatrix},$$

$$\mathbf{X} = \begin{pmatrix} \mathbf{X}_1 \\ \mathbf{X}_2 \end{pmatrix}.$$

úplne analogicky ako vo vete 2.14 (a jej dôkaze) dostávame

$$\sum_{i=1}^{k_1} \mathbf{u}_i \mathbf{u}_i' = \mathbf{X}_1' \mathbf{X}_1, \sum_{i=1}^{k_1} U_{pi} \mathbf{u}_i' = ({}^1\mathbf{U})' \mathbf{X}_1, \sum_{i=1}^{k_1} \mathbf{u}_i U_{pi} = \mathbf{X}_1' ({}^1\mathbf{U}), \sum_{i=1}^{k_1} U_{pi}^2 = ({}^1\mathbf{U})' ({}^1\mathbf{U})$$

a

$$\sum_{i=k_1+1}^{k_1+k_2} \mathbf{u}_i \mathbf{u}_i' = \mathbf{X}_2' \mathbf{X}_2, \sum_{i=k_1+1}^{k_1+k_2} U_{pi} \mathbf{u}_i' = ({}^2\mathbf{U})' \mathbf{X}_2, \sum_{i=k_1+1}^{k_1+k_2} \mathbf{u}_i U_{pi} = \mathbf{X}_2' ({}^2\mathbf{U}), \sum_{i=k_1+1}^{k_1+k_2} U_{pi}^2 = ({}^1\mathbf{U})' : ({}^2\mathbf{U})' \begin{pmatrix} ({}^1\mathbf{U}) \\ ({}^2\mathbf{U}) \end{pmatrix}.$$

Konečne

$$\{\mathbf{S}_1^{-1}\}_{pp} = \{ ({}^1\mathbf{U})' ({}^1\mathbf{U}) - \sum_{i=1}^{k_1} (\mathbf{U}_i^*)' U_{pi} (\sum_{i=1}^{k_1} \mathbf{U}_i^* (\mathbf{U}_i^*)')^{-1} \sum_{i=1}^{k_1} U_{pi} \mathbf{U}_i^* \}^{-1},$$

$$\{(\mathbf{S}_1 + \mathbf{S}_2)^{-1}\}_{pp} = \{ ({}^1\mathbf{U})' : ({}^2\mathbf{U})' \begin{pmatrix} ({}^1\mathbf{U}) \\ ({}^2\mathbf{U}) \end{pmatrix} - \sum_{i=1}^{k_1+k_2} (\mathbf{U}_i^*)' U_{pi} (\sum_{i=1}^{k_1+k_2} \mathbf{U}_i^* (\mathbf{U}_i^*)')^{-1} \sum_{i=1}^{k_1+k_2} U_{pi} \mathbf{U}_i^* \}^{-1}.$$

Pretože platí (anděl, str. 66)

$$\{\Sigma^{-1}\}_{pp} = (\Sigma_{22} - \Sigma_{21} \Sigma_{11}^{-1} \Sigma_{12})^{-1} = |\Sigma_{22} - \Sigma_{21} \Sigma_{11}^{-1} \Sigma_{12}|^{-1},$$

čiže

$$\{\Sigma^{-1}\}_{pp} = \frac{|\Sigma_{11}|}{|\Sigma_{11}| |\Sigma_{22} - \Sigma_{21} \Sigma_{11}^{-1} \Sigma_{12}|} = \frac{|\Sigma_{11}|}{|\Sigma|},$$

dostávame

$$(2.7) \quad \{\mathbf{S}_1^{-1}\}_{pp}^{-1} = \frac{|\mathbf{S}_1|}{|\mathbf{S}_{11}|} = {}^{(1)}\mathbf{U}' {}^{(1)}\mathbf{U} - \sum_{i=1}^{k_1} (\mathbf{U}_i^*)' U_{pi} \left(\sum_{i=1}^{k_1} \mathbf{U}_i^* (\mathbf{U}_i^*)' \right)^{-1} \sum_{i=1}^{k_1} U_{pi} \mathbf{U}_i^*,$$

$$(2.8) \quad \{(\mathbf{S}_1 + \mathbf{S}_2)^{-1}\}_{pp}^{-1} = \frac{|\mathbf{S}_1 + \mathbf{S}_2|}{|(\mathbf{S}_1 + \mathbf{S}_2)_{11}|} = ({}^{(1)}\mathbf{U}' : {}^{(2)}\mathbf{U}') \begin{pmatrix} {}^{(1)}\mathbf{U} \\ {}^{(2)}\mathbf{U} \end{pmatrix} - \\ - \sum_{i=1}^{k_1+k_2} (\mathbf{U}_i^*)' U_{pi} \left(\sum_{i=1}^{k_1+k_2} \mathbf{U}_i^* (\mathbf{U}_i^*)' \right)^{-1} \sum_{i=1}^{k_1+k_2} U_{pi} \mathbf{U}_i^*.$$

Zhodne ako vo vete 2.14 sa ukáže, že

$$\boldsymbol{\xi} = \begin{pmatrix} \boldsymbol{\xi}_1 \\ \boldsymbol{\xi}_2 \end{pmatrix} = \mathbf{U}/\mathbf{U}_1^* = \mathbf{u}_1, \dots, \mathbf{U}_{k_1+k_2}^* = \mathbf{u}_{k_1+k_2} \sim \\ \sim N_{k_1+k_2} \left(\begin{pmatrix} \boldsymbol{\Sigma}_{21} \boldsymbol{\Sigma}_{11}^{-1} \mathbf{u}_1 \\ \boldsymbol{\Sigma}_{21} \boldsymbol{\Sigma}_{11}^{-1} \mathbf{u}_2 \\ \vdots \\ \boldsymbol{\Sigma}_{21} \boldsymbol{\Sigma}_{11}^{-1} \mathbf{u}_{k_1+k_2} \end{pmatrix} = \mathbf{X}\boldsymbol{\gamma}, \{\boldsymbol{\Sigma}^{-1}\}_{pp}^{-1} \mathbf{I} \right),$$

pričom $\boldsymbol{\xi}_1$ je k_1 rozmerný a $\boldsymbol{\xi}_2$ je k_2 rozmerný náhodný vektor. Preto podmienené rozdelenie

$$\{(\mathbf{S}_1 + \mathbf{S}_2)^{-1}\}_{pp}^{-1} / \mathbf{U}_1^* = \mathbf{u}_1, \dots, \mathbf{U}_{k_1+k_2}^* = \mathbf{u}_{k_1+k_2}$$

je rozdelenie kvadratickej formy

$$\boldsymbol{\xi}' \boldsymbol{\xi} - \boldsymbol{\xi}' \mathbf{X} (\mathbf{X}' \mathbf{X})^{-1} \mathbf{X}' \boldsymbol{\xi} \sim \{\boldsymbol{\Sigma}^{-1}\}_{pp}^{-1} \chi_{k_1+k_2-p+1}^2,$$

pričom nezáleží na podmienke a preto je totožné s nepodmieneným rozdelením. Rozdelenie

$$\{\mathbf{S}_1^{-1}\}_{pp}^{-1} / \mathbf{U}_1^* = \mathbf{u}_1, \dots, \mathbf{U}_{k_1+k_2}^* = \mathbf{u}_{k_1+k_2},$$

ktoré je rozdelením kvadratickej formy

$$\boldsymbol{\xi}'_1 \boldsymbol{\xi}_1 - \boldsymbol{\xi}'_1 \mathbf{X}_1 (\mathbf{X}'_1 \mathbf{X}_1)^{-1} \mathbf{X}'_1 \boldsymbol{\xi}_1 = \\ = (\boldsymbol{\xi}'_1 : \boldsymbol{\xi}'_2) \left(\begin{pmatrix} \mathbf{I} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} \mathbf{X}_1 \\ \mathbf{0} \end{pmatrix} (\mathbf{X}'_1 \mathbf{X}_1)^{-1} (\mathbf{X}'_1 : \mathbf{0}) \right) \begin{pmatrix} \boldsymbol{\xi}_1 \\ \boldsymbol{\xi}_2 \end{pmatrix} = \boldsymbol{\xi}' \mathbf{A} \boldsymbol{\xi} \sim \\ \sim \{\boldsymbol{\Sigma}^{-1}\}_{pp}^{-1} \chi_{k_1-p+1}^2,$$

nezávisí na podmienke a je preto totožné s nepodmieneným rozdelením. Podľa vety 1.8 je

$$\{(\mathbf{S}_1 + \mathbf{S}_2)^{-1}\}_{pp}^{-1} - \{\mathbf{S}_1^{-1}\}_{pp}^{-1} / \mathbf{U}_1^* = \mathbf{u}_1, \dots, \mathbf{U}_{k_1+k_2}^* = \mathbf{u}_{k_1+k_2} =$$

$$\boldsymbol{\xi}' \left\{ \begin{pmatrix} \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{I}_{k_2, k_2} \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} \mathbf{X}_1 [(\mathbf{X}'_1 \mathbf{X}_1 + \mathbf{X}'_2 \mathbf{X}_2)^{-1} - (\mathbf{X}'_1 \mathbf{X}_1)^{-1}] \mathbf{X}'_1 \\ \mathbf{X}_2 (\mathbf{X}'_1 \mathbf{X}_1 + \mathbf{X}'_2 \mathbf{X}_2)^{-1} \mathbf{X}'_1 \\ \mathbf{X}_1 (\mathbf{X}'_1 \mathbf{X}_1 + \mathbf{X}'_2 \mathbf{X}_2)^{-1} \mathbf{X}'_2 \\ \mathbf{X}_2 (\mathbf{X}'_1 \mathbf{X}_1 + \mathbf{X}'_2 \mathbf{X}_2)^{-1} \mathbf{X}'_2 \end{pmatrix} \right\} \boldsymbol{\xi} =$$

$$= \boldsymbol{\xi}' \mathbf{B} \boldsymbol{\xi} \sim \{\boldsymbol{\Sigma}^{-1}\}_{pp}^{-1} \chi_{k_2}^2,$$

nezáleží od podmienky a je preto opäť totožné s nepodmieneným rozdelením. Mimo toho ľahko sa ukáže, že

$$\{(\mathbf{S}_1 + \mathbf{S}_2)^{-1}\}_{pp}^{-1} - \{\mathbf{S}_1^{-1}\}_{pp}^{-1} / \mathbf{U}_1^* = \mathbf{u}_1, \dots, \mathbf{U}_{k_1+k_2}^* = \mathbf{u}_{k_1+k_2}$$

nezávisí od

$$\{\mathbf{S}_1^{-1}\}_{pp}^{-1} / \mathbf{U}_1^* = \mathbf{u}_1, \dots, \mathbf{U}_{k_1+k_2}^* = \mathbf{u}_{k_1+k_2}$$

(lebo $\mathbf{A}\mathbf{B} = \mathbf{0}$). Preto

$$\frac{\{\mathbf{S}_1^{-1}\}_{pp}^{-1}}{\{(\mathbf{S}_1 + \mathbf{S}_2)^{-1}\}_{pp}^{-1} - \{\mathbf{S}_1^{-1}\}_{pp}^{-1} + \{\mathbf{S}_1^{-1}\}_{pp}^{-1}} / \mathbf{U}_1^* = \mathbf{u}_1, \dots, \mathbf{U}_{k_1+k_2}^* = \mathbf{u}_{k_1+k_2}$$

je rozdelené ako

$$(2.9) \quad \frac{\chi_{k_1-p+1}^2}{\chi_{k_1-p+1}^2 + \chi_{k_2}^2},$$

pričom $\chi_{k_2}^2$ a $\chi_{k_1-p+1}^2$ v (2.9) sú nezávislé. Podľa lemy 2.15 má preto

$\frac{\{\mathbf{S}_1^{-1}\}_{pp}^{-1}}{\{(\mathbf{S}_1 + \mathbf{S}_2)^{-1}\}_{pp}^{-1}}$ rozdelenie $B\left(\frac{k_1-p+1}{2}, \frac{k_2}{2}\right)$ a nezávisí od $\{\mathbf{S}_1 + \mathbf{S}_2\}_{ij}$, $i, j \in \{1, 2, \dots, p-1\}$.

Označme hlavný determinat rádu r matice $\mathbf{C}_{p,p}$, teda $\det \begin{pmatrix} c_{11} & c_{12} & \dots & c_{1r} \\ c_{21} & c_{22} & \dots & c_{2r} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ c_{r1} & c_{r2} & \dots & c_{rr} \end{pmatrix}$ ako $|\mathbf{C}|_r$, $r \in \{1, 2, \dots, p\}$. Využijúc (2.7) a (2.8) dostávame, že rozdelenie

$$\begin{aligned} & \frac{|\mathbf{S}_1|}{|\mathbf{S}_1 + \mathbf{S}_2|} / \mathbf{U}_1^* = \mathbf{u}_1, \dots, \mathbf{U}_{k_1+k_2}^* = \mathbf{u}_{k_1+k_2} = \\ & = \frac{|\mathbf{S}_1|_p}{|\mathbf{S}_1 + \mathbf{S}_2|_p} \frac{|\mathbf{S}_1|_{p-1}}{|\mathbf{S}_1 + \mathbf{S}_2|_{p-1}} \dots \frac{|\mathbf{S}_1|_1}{|\mathbf{S}_1 + \mathbf{S}_2|_1} / \mathbf{U}_1^* = \mathbf{u}_1, \dots, \mathbf{U}_{k_1+k_2}^* = \mathbf{u}_{k_1+k_2}, \end{aligned}$$

pričom

$$= \frac{|\mathbf{S}_1|_p}{|\mathbf{S}_1 + \mathbf{S}_2|_p} / \mathbf{U}_1^* = \mathbf{u}_1, \dots, \mathbf{U}_{k_1+k_2}^* = \mathbf{u}_{k_1+k_2} \sim B\left(\frac{k_1-p+1}{2}, \frac{k_2}{2}\right)$$

a nezávisí od

$$\frac{|\mathbf{S}_1|_{p-1}}{|\mathbf{S}_1 + \mathbf{S}_2|_{p-1}} / \mathbf{U}_1^* = \mathbf{u}_1, \dots, \mathbf{U}_{k_1+k_2}^* = \mathbf{u}_{k_1+k_2},$$

ktoré má $B\left(\frac{k_1-p+1}{2}, \frac{k_2}{2}\right)$ rozdelenie nezávislé od podmienky, atď. Teda $\frac{|\mathbf{S}_1|}{|\mathbf{S}_1 + \mathbf{S}_2|}$ má rozdelenie ako súčin $\eta_1 \dots \eta_p$ navzájom nezávislých náhodných veličín, pričom $\eta_i \sim B\left(\frac{k_1-p+i}{2}, \frac{k_2}{2}\right)$. \square

Veta 2.17. ak $\mathbf{U}_1, \dots, \mathbf{U}_n$ sú nezávislé, $N_p(\boldsymbol{\mu}, \boldsymbol{\Sigma})$ rozdelené, $\mathbf{S} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (\mathbf{U}_i - \bar{\mathbf{U}})(\mathbf{U}_i - \bar{\mathbf{U}})'$, kde $\bar{\mathbf{U}} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \mathbf{U}_i$, tak $n\mathbf{S} \sim W_p(n-1, \boldsymbol{\Sigma})$.

Dôkaz. (pozri aj Vetu 2.9) $n\mathbf{S} = \sum_{i=1}^n (\mathbf{U}_i - \bar{\mathbf{U}})(\mathbf{U}_i - \bar{\mathbf{U}})' = \sum_{i=1}^n \mathbf{U}_i \mathbf{U}_i' - n\bar{\mathbf{U}}\bar{\mathbf{U}}' = \mathcal{U}'\mathcal{U} -$

$\frac{1}{n}\mathcal{U}'\mathbf{1}_{n,1}\mathbf{1}'_{1,n}\mathcal{U} = \mathcal{U}'(\mathbf{I} - \frac{1}{n}\mathbf{1}\mathbf{1}')\mathcal{U} = \mathcal{U}'\mathbf{A}\mathcal{U} = \tilde{\mathcal{U}}'\mathbf{A}\tilde{\mathcal{U}}$, kde $\tilde{\mathcal{U}}' = (\mathbf{U}_1 - \boldsymbol{\mu}, \dots, \mathbf{U}_n - \boldsymbol{\mu})$, lebo $(\boldsymbol{\mu}, \dots, \boldsymbol{\mu})\mathbf{A} = \mathbf{0}$. Podľa lemy 2.5 $\tilde{\mathcal{U}}'\mathbf{A}\tilde{\mathcal{U}} \sim W_p(r, \boldsymbol{\Sigma}) \Leftrightarrow \forall \mathbf{l} \in \mathcal{R}^p \mathbf{l}'\tilde{\mathcal{U}}'\mathbf{A}\tilde{\mathcal{U}}\mathbf{l} \sim (\mathbf{l}'\boldsymbol{\Sigma}\mathbf{l})\chi_r^2$, pričom v tomto prípade $r = h(\mathbf{A}) = \text{tr}(\mathbf{A})$. Pretože

$$\tilde{\mathcal{U}}\mathbf{l} = \begin{pmatrix} (\mathbf{U}_1 - \boldsymbol{\mu})'\mathbf{l} \\ (\mathbf{U}_2 - \boldsymbol{\mu})'\mathbf{l} \\ \vdots \\ (\mathbf{U}_n - \boldsymbol{\mu})'\mathbf{l} \end{pmatrix} = {}_1\tilde{\mathbf{Y}} \sim N_n(\mathbf{0}, (\mathbf{l}'\boldsymbol{\Sigma}\mathbf{l})\mathbf{I})$$

(pozri (2.1)), má $\mathbf{l}'\tilde{\mathcal{U}}'\mathbf{A}\tilde{\mathcal{U}}\mathbf{l}$ rozdelenie χ_r^2 (podľa vety 1.8) práve vtedy ak $\mathbf{A}^2 = \mathbf{A}$. V tomto prípade $r = h(\mathbf{A}) = \text{tr}(\mathbf{A})$. Je zrejmé, že v našom prípade $\mathbf{A}^2 = \mathbf{A}$ a $r = h(\mathbf{A}) = \text{tr}(\mathbf{A}) = n-1$, preto $n\mathbf{S} \sim W_p(n-1, \boldsymbol{\Sigma})$. \square

Veta 2.18. ak $\mathbf{U}_1, \dots, \mathbf{U}_n$ sú nezávislé, $N_p(\boldsymbol{\mu}, \boldsymbol{\Sigma})$ rozdelené, tak $\bar{\mathbf{U}} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \mathbf{U}_i$ a $n\mathbf{S} = \sum_{i=1}^n \mathbf{U}_i \mathbf{U}_i' - n\bar{\mathbf{U}}\bar{\mathbf{U}}'$ sú nezávislé, pričom $\bar{\mathbf{U}} \sim N_p(\boldsymbol{\mu}, \frac{1}{n}\boldsymbol{\Sigma})$ a $n\mathbf{S} \sim W_p(n-1, \boldsymbol{\Sigma})$.

Dôkaz. Nech $\mathbf{C}_{n,n}$ je ortogonálna matica taká, že jej n -ty stĺpec je $(\frac{1}{\sqrt{n}}, \dots, \frac{1}{\sqrt{n}})'$. Označme

$$(\mathbf{U}_1 \dot{\vdots} \mathbf{U}_n)\mathbf{C} = (\mathbf{V}_1 \dot{\vdots} \mathbf{V}_n).$$

Potom $\mathbf{V}_n = \frac{1}{\sqrt{n}}(\mathbf{U}_1 + \dots + \mathbf{U}_n) = \sqrt{n}\bar{\mathbf{U}}$ resp. $\bar{\mathbf{U}} = \frac{1}{\sqrt{n}}\mathbf{V}_n$,

$$\begin{aligned} n\mathbf{S} &= \sum_{i=1}^n \mathbf{U}_i \mathbf{U}_i' - n\bar{\mathbf{U}}\bar{\mathbf{U}}' = (\mathbf{U}_1 \dot{\vdots} \mathbf{U}_n) \begin{pmatrix} \mathbf{U}_1' \\ \mathbf{U}_2' \\ \vdots \\ \mathbf{U}_n' \end{pmatrix} - n\frac{1}{\sqrt{n}}\mathbf{V}_n\frac{1}{\sqrt{n}}\mathbf{V}_n' = \\ &= (\mathbf{V}_1 \dot{\vdots} \mathbf{V}_n)\mathbf{C}'\mathbf{C} \begin{pmatrix} \mathbf{V}_1' \\ \mathbf{V}_2' \\ \vdots \\ \mathbf{V}_n' \end{pmatrix} - \mathbf{V}_n\mathbf{V}_n' = \sum_{i=1}^n \mathbf{V}_i\mathbf{V}_i' - \mathbf{V}_n\mathbf{V}_n' = \sum_{i=1}^{n-1} \mathbf{V}_i\mathbf{V}_i'. \end{aligned}$$

Pretože $\mathbf{V}_1, \dots, \mathbf{V}_n$ sú nezávislé, dostávame tvrdenie lemy (pomocou vety 2.17). \square

3. HOTELLINGOVO T^2 ROZDELENIE

Nech $\mathbf{S}_{p,p}$ je matica náhodných veličín (náhodná matica) $\mathbf{d}_{p,1}$ náhodný vektor nezávislý na \mathbf{S} , $\mathbf{S} \sim W_p(k, \boldsymbol{\Sigma})$, $\mathbf{d} \sim N_p(\boldsymbol{\delta}, c^{-1}\boldsymbol{\Sigma})$. Hotellingova zovšeobecnená štatistika T^2 je definovaná ako

$$T^2 = ck\mathbf{d}'\mathbf{S}^{-1}\mathbf{d} = \frac{k\mathbf{d}'\mathbf{S}^{-1}\mathbf{d}}{\mathbf{d}'\boldsymbol{\Sigma}^{-1}\mathbf{d}}c\mathbf{d}'\boldsymbol{\Sigma}^{-1}\mathbf{d}.$$

V nasledujúcom budeme uvažovať $\boldsymbol{\delta} = \mathbf{0}$, $c = 1$, $\boldsymbol{\Sigma} = \mathbf{I}$, teda $\mathbf{S} \sim W_p(k, \mathbf{I})$, $\mathbf{d} \sim N_p(\mathbf{0}, \mathbf{I})$. Hotellingovo $T^2(p, k)$ rozdelenie je

$$T^2 = k\mathbf{d}'\mathbf{S}^{-1}\mathbf{d}$$

a píšeme $k\mathbf{d}'\mathbf{S}^{-1}\mathbf{d} \sim T^2(p, k)$.

Veta 3.1. *Nech $\mathbf{X} \sim N_p(\boldsymbol{\mu}, \boldsymbol{\Sigma})$ a $\mathbf{S} \sim W_p(k, \boldsymbol{\Sigma})$ sú navzájom nezávislé, $\boldsymbol{\Sigma}$ regulárna. Potom*

$$k(\mathbf{X} - \boldsymbol{\mu})' \mathbf{S}^{-1} (\mathbf{X} - \boldsymbol{\mu}) \sim T^2(p, k).$$

Dôkaz. $\boldsymbol{\Sigma} = \mathbf{U}\boldsymbol{\Lambda}\mathbf{U}'$, $\mathbf{I} = \mathbf{U}\mathbf{U}'$, $\boldsymbol{\Lambda} = \text{diag}\{\lambda_1, \dots, \lambda_p\}$, $\lambda_1 \geq \lambda_2 \geq \dots \geq \lambda_p > 0$, $\boldsymbol{\Sigma}^{-\frac{1}{2}} = \mathbf{U}\text{diag}\{\lambda_1^{-\frac{1}{2}}, \dots, \lambda_p^{-\frac{1}{2}}\}\mathbf{U}'$, $\boldsymbol{\Sigma}^{\frac{1}{2}} = \mathbf{U}\text{diag}\{\lambda_1^{\frac{1}{2}}, \dots, \lambda_p^{\frac{1}{2}}\}\mathbf{U}'$. Položíme $\mathbf{d}^* = \boldsymbol{\Sigma}^{-\frac{1}{2}}(\mathbf{X} - \boldsymbol{\mu})$, $\mathbf{S}^* = \boldsymbol{\Sigma}^{-\frac{1}{2}}\mathbf{S}\boldsymbol{\Sigma}^{-\frac{1}{2}}$, teda $(\mathbf{S}^*)^{-1} = \boldsymbol{\Sigma}^{\frac{1}{2}}\mathbf{S}^{-1}\boldsymbol{\Sigma}^{\frac{1}{2}}$. Zrejme $\mathbf{d}^* \sim N_p(\mathbf{0}, \mathbf{I})$, $\mathbf{S}^* \sim W_p(k, \mathbf{I})$ a preto podľa definície $k(\mathbf{d}^*)'(\mathbf{S}^*)^{-1}\mathbf{d}^* = k(\mathbf{X} - \boldsymbol{\mu})'\mathbf{S}^{-1}(\mathbf{X} - \boldsymbol{\mu}) \sim T^2(p, k)$. \square

Dôsledok 3.2. *Majme $\mathbf{U}_1, \dots, \mathbf{U}_n$ nezávislé, $\mathbf{U}_i \sim N_p(\boldsymbol{\mu}, \boldsymbol{\Sigma})$, $\boldsymbol{\Sigma}$ regulárna, $\bar{\mathbf{U}} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \mathbf{U}_i$, $\mathbf{S} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (\mathbf{U}_i - \bar{\mathbf{U}})(\mathbf{U}_i - \bar{\mathbf{U}})'$, $\mathbf{S}_* = \frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^n (\mathbf{U}_i - \bar{\mathbf{U}})(\mathbf{U}_i - \bar{\mathbf{U}})'$. Potom*

$$(n-1)(\bar{\mathbf{U}} - \boldsymbol{\mu})' \mathbf{S}_*^{-1} (\bar{\mathbf{U}} - \boldsymbol{\mu}) = n(\bar{\mathbf{U}} - \boldsymbol{\mu})' \mathbf{S}_*^{-1} (\bar{\mathbf{U}} - \boldsymbol{\mu}) \sim T^2(p, n-1).$$

Dôkaz. $\bar{\mathbf{U}} \sim N_p(\boldsymbol{\mu}, \frac{1}{n}\boldsymbol{\Sigma})$, teda $\sqrt{n}\bar{\mathbf{U}} \sim N_p(\sqrt{n}\boldsymbol{\mu}, \boldsymbol{\Sigma})$, $\mathbf{S}_* = \frac{n}{n-1}\mathbf{S}$, čiže $(n-1)\mathbf{S}_*^{-1} = n\mathbf{S}^{-1}$, ďalej $n\mathbf{S} \sim W_p(n-1, \boldsymbol{\Sigma})$ (pozri vetu 2.17), $\bar{\mathbf{U}}$ a \mathbf{S} sú nezávislé (veta 2.18), teda

$$\begin{aligned} (n-1)\sqrt{n}(\bar{\mathbf{U}} - \boldsymbol{\mu})'(n\mathbf{S})^{-1}\sqrt{n}(\bar{\mathbf{U}} - \boldsymbol{\mu}) &= (n-1)(\bar{\mathbf{U}} - \boldsymbol{\mu})'\mathbf{S}_*^{-1}(\bar{\mathbf{U}} - \boldsymbol{\mu}) = \\ &= n(\bar{\mathbf{U}} - \boldsymbol{\mu})'\mathbf{S}_*^{-1}(\bar{\mathbf{U}} - \boldsymbol{\mu}) \sim T^2(p, n-1). \quad \square \end{aligned}$$

Veta 3.3.

$$T^2(p, m) = \frac{mp}{m-p+1} F_{p, m-p+1}.$$

Dôkaz. Podľa definície má $T^2(p, m)$ rozdelenie náhodná veličina $m\mathbf{d}'\mathbf{S}^{-1}\mathbf{d}$, kde $\mathbf{d} \sim N_p(\mathbf{0}, \mathbf{I})$, $\mathbf{S} \sim W_p(m, \mathbf{I})$. Teda náhodná veličina

$$(3.1) \quad \frac{m\mathbf{d}'\mathbf{S}^{-1}\mathbf{d}}{\mathbf{d}'\mathbf{d}} \mathbf{d}'\mathbf{d} = m \frac{\mathbf{d}'\mathbf{d}}{\frac{\mathbf{d}'\mathbf{d}}{\mathbf{d}'\mathbf{S}^{-1}\mathbf{d}}}.$$

Podľa vety 2.14 (b) menovateľ v (3.1) nezáleží od \mathbf{d} a má χ_{m-p+1}^2 rozdelenie (pre ľubovoľnú realizáciu náhodného vektora \mathbf{d} má χ_{m-p+1}^2 rozdelenie), čitateľ v (3.1) má podľa vety 1.7 χ_p^2 rozdelenie. Preto (3.1) je podiel dvoch nezávislých náhodných veličín, s χ^2 rozdelením, a síce rozdelenie (3.1) je

$$T^2(p, m) = \frac{m\chi_p^2}{\chi_{m-p+1}^2} = \frac{mp \frac{\chi_p^2}{p}}{(m-p+1) \frac{\chi_{m-p+1}^2}{m-p+1}} = \frac{mp}{m-p+1} F_{p, m-p+1}. \quad \square$$

Lema 3.4. Súčin k navzájom nezávislých náhodných veličín s rozdelením $B(\gamma_i, \delta_i)$, $i = 1, 2, \dots, k$ takých, že $\gamma_i = \gamma_{i+1} + \delta_{i+1}$, $i = 1, 2, \dots, k-1$ má rozdelenie $B(\gamma_k, \delta_1 + \dots + \delta_k)$.

Dôkaz. Pozri viac v Rao, 3a.3.

Lema 3.5. Nech $\mathbf{d} \sim N_p(\mathbf{0}, \mathbf{I})$ a $\mathbf{S} \sim W_p(m, \mathbf{I})$ sú nezávislé, teda $m\mathbf{d}'\mathbf{S}^{-1}\mathbf{d} \sim T^2(p, m)$, $m \geq p-1$. Platí

$$\left(1 + \frac{T^2(p, m)}{m}\right)^{-1} = \frac{|\mathbf{S}|}{|\mathbf{S} + \mathbf{d}\mathbf{d}'|} \sim B\left(\frac{m-p+1}{2}, \frac{p}{2}\right).$$

Dôkaz. Podľa anděl, str. 63 pre determinant štvorcovej matice $\begin{pmatrix} \mathbf{S} & \mathbf{d} \\ \mathbf{d}' & -1 \end{pmatrix}$ platí

$$\begin{vmatrix} \mathbf{S} & \mathbf{d} \\ \mathbf{d}' & -1 \end{vmatrix} = -|\mathbf{S} + \mathbf{d}\mathbf{d}'| = -|\mathbf{S}|(1 + \mathbf{d}'\mathbf{S}^{-1}\mathbf{d}),$$

teda

$$\left(1 + \frac{T^2(p, m)}{m}\right)^{-1} = (1 + \mathbf{d}'\mathbf{S}^{-1}\mathbf{d})^{-1} = \frac{|\mathbf{S}|}{|\mathbf{S} + \mathbf{d}\mathbf{d}'|},$$

pričom $\mathbf{S} \sim W_p(m, \mathbf{I})$, $\mathbf{d}\mathbf{d}' \sim W_p(1, \mathbf{I})$, (nezávisí od \mathbf{S}) a podľa lemy 2.10 $\mathbf{S} + \mathbf{d}\mathbf{d}' \sim W_p(m+1, \mathbf{I})$. Preto podľa vety 2.16 má $\frac{|\mathbf{S}|}{|\mathbf{S} + \mathbf{d}\mathbf{d}'|}$ rozdelenie ako súčin navzájom nezávislých náhodných veličín s rozdelením beta a parametrami

$$\left(\frac{m-p+1}{2}, \frac{1}{2}\right), \left(\frac{m-p+2}{2}, \frac{1}{2}\right), \dots, \left(\frac{m}{2}, \frac{1}{2}\right).$$

Podľa lemy 3.4 má tento súčin $B\left(\frac{m-p+1}{2}, \frac{p}{2}\right)$ rozdelenie. \square

Dôsledok 3.6. Nech $\bar{\mathbf{X}}$ a \mathbf{S} je aritmetický priemer a výberová kovariančná matica z výberu rozsahu n z rozdelenia $N_p(\boldsymbol{\mu}, \boldsymbol{\Sigma})$. Potom

$$\frac{n-p}{p}(\bar{\mathbf{X}} - \boldsymbol{\mu})'\mathbf{S}^{-1}(\bar{\mathbf{X}} - \boldsymbol{\mu}) \sim F_{p, n-p}.$$

Dôkaz. Podľa dôsledku 3.2 má $(n-1)(\bar{\mathbf{X}} - \boldsymbol{\mu})'\mathbf{S}^{-1}(\bar{\mathbf{X}} - \boldsymbol{\mu}) \sim T^2(p, n-1)$ rozdelenie, čiže podľa vety 3.3 má

$$\begin{aligned} \frac{n-p}{p}(\bar{\mathbf{X}} - \boldsymbol{\mu})'\mathbf{S}^{-1}(\bar{\mathbf{X}} - \boldsymbol{\mu}) &\sim \frac{n-p}{p(n-1)}T^2(p, n-1) = \\ &= \frac{n-p}{p(n-1)} \frac{p(n-1)}{n-1-p+1} F_{p, n-1-p+1} = F_{p, n-p} \end{aligned}$$

rozdelenie. \square

4. INÉ ROZDELENIA VYSKYTUJÚCE SA PRI
MULTIVARIÁTNÝCH ŠTATISTICKÝCH ANALÝZACH

Definícia 4.1. *Nech $\mathbf{A} \sim W_p(m, \mathbf{I})$, $\mathbf{B} \sim W_p(n, \mathbf{I})$ sú nezávislé, $m > p - 1$. Potom hovoríme, že náhodná veličina*

$$\Lambda = \frac{|\mathbf{A}|}{|\mathbf{A} + \mathbf{B}|} = |\mathbf{I} + \mathbf{A}^{-1}\mathbf{B}|^{-1}$$

má Wilksovo lambda-rozdelenie s parametrami p, m, n . Označujeme ho $\Lambda(p, m, n)$

Veta 4.2. *Wilksovo $\Lambda(p, m, n)$ rozdelenie, $m > p - 1$, je totožné s rozdelením súčinnu $\eta_1 \dots \eta_p$ nezávislých náhodných veličín, pričom $\eta_i \sim B\left(\frac{m-p+i}{2}, \frac{n}{2}\right)$.*

Dôkaz. ak $\mathbf{A} \sim W_p(m, \mathbf{I})$, $\mathbf{B} \sim W_p(n, \mathbf{I})$ sú nezávislé, tak podľa vety 2.16 má

$$\Lambda = \frac{|\mathbf{A}|}{|\mathbf{A} + \mathbf{B}|} = |\mathbf{I} + \mathbf{A}^{-1}\mathbf{B}|^{-1}$$

rovnaké rozdelenie ako súčin $\eta_1 \dots \eta_p$ nezávislých náhodných veličín, pričom $\eta_i \sim B\left(\frac{m-p+i}{2}, \frac{n}{2}\right)$. \square

Poznámka. ak $\mathbf{S}_1 \sim W_p(k_1, \mathbf{I})$, $\mathbf{S}_2 \sim W_p(k_2, \mathbf{I})$ sú nezávislé, $k_1 \geq p - 1$, tak

$$\Lambda = \frac{|\mathbf{S}_1|}{|\mathbf{S}_1 + \mathbf{S}_2|}$$

má rozdelenie rovnaké ako súčin $\eta_1 \dots \eta_p$ nezávislých náhodných veličín, pričom $\eta_i \sim B\left(\frac{k_1-p+i}{2}, \frac{k_2}{2}\right)$, čo je podľa vety 2.16 to isté ako rozdelenie

$$\frac{|\mathbf{G}_1|}{|\mathbf{G}_1 + \mathbf{G}_2|},$$

kde $\mathbf{G}_1 \sim W_p(k_1, \mathbf{\Sigma})$, $\mathbf{G}_2 \sim W_p(k_2, \mathbf{\Sigma})$ sú nezávislé, $\mathbf{\Sigma}$ je regulárna a $k_1 \geq p - 1$. Teda Λ nezáleží od $\mathbf{\Sigma}$ a môžeme ju zdefinovať ako

$$\Lambda = \frac{|\mathbf{G}_1|}{|\mathbf{G}_1 + \mathbf{G}_2|},$$

kde $\mathbf{G}_1 \sim W_p(k_1, \mathbf{\Sigma})$, $\mathbf{G}_2 \sim W_p(k_2, \mathbf{\Sigma})$ sú nezávislé, $\mathbf{\Sigma}$ je regulárna a $k_1 \geq p - 1$.

Poznámka. ak $\mathbf{S} \sim W_p(n-1, \mathbf{\Sigma})$, $\mathbf{d} \sim N_p(\mathbf{0}, \mathbf{\Sigma})$ sú nezávislé, tak Wilksovo lambda-rozdelenie s parametrami $p, n-1, 1$ je to isté ako rozdelenie náhodnej veličiny $\frac{|\mathbf{S}|}{|\mathbf{S} + \mathbf{d}\mathbf{d}'|}$, teda (podľa lemy 3.5) $B\left(\frac{n-p}{2}, \frac{p}{2}\right)$.

Zo vzťahov medzi beta rozdelením a F rozdelením možno odvodiť vzťahy medzi Λ a F rozdelením:

$$(a) \quad \frac{1 - \Lambda(p, m, 1)}{\Lambda(p, m, 1)} \sim \frac{p}{m - p + 1} F_{p, m-p+1}$$

$$\begin{aligned}
\text{(b)} \quad & \frac{1 - \Lambda(1, m, n)}{\Lambda(1, m, n)} \sim \frac{n}{m} F_{n, m} \\
\text{(c)} \quad & \frac{1 - \sqrt{\Lambda(p, m, 2)}}{\sqrt{\Lambda(p, m, 2)}} \sim \frac{p}{m - p + 1} F_{2p, 2(m-p+1)} \\
\text{(d)} \quad & \frac{1 - \sqrt{\Lambda(2, m, n)}}{\sqrt{\Lambda(2, m, n)}} \sim \frac{n}{m - 1} F_{2n, 2(m-1)}.
\end{aligned}$$

Pre ostatné hodnoty n a p za podmienky, že m je veľké, možno použiť Bartlettovu asymptotickú aproximáciu

$$- \left\{ m - \frac{1}{2}(p - n + 1) \right\} \ln \Lambda(p, m, n) \sim \chi_{np}^2.$$

Pri hľadaní simultánnych intervalov spoľahlivosti parametrov multivariátnych lineárnych modelov sa používa nasledovné rozdelenie.

Definícia 4.3. *Nech $\mathbf{A} \sim W_p(m, \Sigma)$, $\mathbf{B} \sim W_p(n, \Sigma)$ sú nezávislé, $m > p - 1$, Σ je pozitívne definitná. Rozdelenie najväčšej vlastnej hodnoty θ matice $(\mathbf{A} + \mathbf{B})^{-1}\mathbf{B}$ označujeme $\theta(p, m, n)$.*

Podľa Rao, str. 588 toto rozdelenie nezávisí od Σ . Poznamenávame tiež, že θ môžeme definovať ako najväčší koreň rovnice

$$|\mathbf{B} - \theta(\mathbf{A} + \mathbf{B})| = 0.$$

ak λ je vlastná hodnota $\mathbf{A}^{-1}\mathbf{B}$, tak $\frac{\lambda}{1 + \lambda}$ je vlastná hodnota $(\mathbf{A} + \mathbf{B})^{-1}\mathbf{B}$. Keďže ide o monotónnu funkciu premennej λ , θ je dané vzťahom

$$\theta = \frac{\lambda_1}{1 + \lambda_1},$$

kde λ_1 značí najväčšiu vlastnú hodnotu matice $\mathbf{A}^{-1}\mathbf{B}$. Pretože $\lambda_1 > 0$, platí $0 < \theta < 1$. Vzťahy medzi rozdeleniami θ , Λ a F sú:

$$\begin{aligned}
\text{(a)} \quad & \theta(p, m, n) \quad \text{a} \quad \theta(n, m + n - p, p) \quad \text{majú rovnaké rozdelenie,} \\
\text{(b)} \quad & \frac{\theta(1, m, n)}{1 - \theta(1, m, n)} = \frac{1 - \Lambda(1, m, n)}{\Lambda(1, m, n)} \sim \frac{n}{m} F_{n, m}, \\
\text{(c)} \quad & \frac{\theta(p, m, 1)}{1 - \theta(p, m, 1)} = \frac{1 - \Lambda(p, m, 1)}{\Lambda(p, m, 1)} \sim \frac{p}{m - p + 1} F_{p, m-p+1}.
\end{aligned}$$

5. METÓDA MAXIMÁLNEJ VIEROHODNOSTI A TEST POMEROM VIEROHODNOSTI

Združenú funkciu hustoty rozdelenia náhodného výberu $\mathbf{X}_{np,1} = (\mathbf{X}'_1, \dots, \mathbf{X}'_n)'$ uvažovanú pri danom \mathbf{x} (realizácia $\mathbf{X} \in \mathcal{R}^p$) ako funkciu vektorového parametra $\boldsymbol{\theta} \in \mathcal{R}^q$ nazývame funkciou vierohodnosti

$$L(\mathbf{x}; \boldsymbol{\theta}) = \prod_{i=1}^n f(\mathbf{x}_i; \boldsymbol{\theta}),$$

resp. jej logaritmus, teda

$$l(\mathbf{x}, \boldsymbol{\theta}) = l(\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \dots, \mathbf{x}_n, \boldsymbol{\theta}) = \ln L(\mathbf{x}; \boldsymbol{\theta}) = \sum_{i=1}^n \ln f(\mathbf{x}_i; \boldsymbol{\theta}).$$

Vierohodnostnými rovnicami rozumieme systém

$$\sum_{i=1}^n \frac{\partial \ln f(\mathbf{x}_i, \boldsymbol{\theta})}{\partial \theta_k} = 0, \quad k = 1, 2, \dots, q.$$

Majme náhodný výber $\mathbf{X} = (\mathbf{X}'_1, \mathbf{X}'_2, \dots, \mathbf{X}'_n)'$, kde $\mathbf{X}_i \sim N_p(\boldsymbol{\mu}, \boldsymbol{\Sigma})$, $\boldsymbol{\Sigma}$ je regulárna. Potom

$$L(\mathbf{x}; \boldsymbol{\mu}, \boldsymbol{\Sigma}) = |2\pi\boldsymbol{\Sigma}|^{-\frac{n}{2}} e^{-\frac{1}{2} \sum_{i=1}^n (\mathbf{x}_i - \boldsymbol{\mu})' \boldsymbol{\Sigma}^{-1} (\mathbf{x}_i - \boldsymbol{\mu})},$$

čiže

$$l(\mathbf{x}; \boldsymbol{\mu}, \boldsymbol{\Sigma}) = \ln L(\mathbf{x}; \boldsymbol{\mu}, \boldsymbol{\Sigma}) = -\frac{n}{2} \ln |2\pi\boldsymbol{\Sigma}| - \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n (\mathbf{x}_i - \boldsymbol{\mu})' \boldsymbol{\Sigma}^{-1} (\mathbf{x}_i - \boldsymbol{\mu}).$$

Platí

$$\begin{aligned} (\mathbf{x}_i - \boldsymbol{\mu})' \boldsymbol{\Sigma}^{-1} (\mathbf{x}_i - \boldsymbol{\mu}) &= (\mathbf{x}_i - \bar{\mathbf{x}} + \bar{\mathbf{x}} - \boldsymbol{\mu})' \boldsymbol{\Sigma}^{-1} (\mathbf{x}_i - \bar{\mathbf{x}} + \bar{\mathbf{x}} - \boldsymbol{\mu}) = \\ &= (\mathbf{x}_i - \bar{\mathbf{x}})' \boldsymbol{\Sigma}^{-1} (\mathbf{x}_i - \bar{\mathbf{x}}) + (\bar{\mathbf{x}} - \boldsymbol{\mu})' \boldsymbol{\Sigma}^{-1} (\bar{\mathbf{x}} - \boldsymbol{\mu}) + \\ &\quad + 2(\mathbf{x}_i - \bar{\mathbf{x}})' \boldsymbol{\Sigma}^{-1} (\bar{\mathbf{x}} - \boldsymbol{\mu}), \end{aligned}$$

čiže

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^n (\mathbf{x}_i - \boldsymbol{\mu})' \boldsymbol{\Sigma}^{-1} (\mathbf{x}_i - \boldsymbol{\mu}) &= \sum_{i=1}^n (\mathbf{x}_i - \bar{\mathbf{x}})' \boldsymbol{\Sigma}^{-1} (\mathbf{x}_i - \bar{\mathbf{x}}) + n(\bar{\mathbf{x}} - \boldsymbol{\mu})' \boldsymbol{\Sigma}^{-1} (\bar{\mathbf{x}} - \boldsymbol{\mu}) + \\ + 2 \sum_{i=1}^n (\mathbf{x}_i - \bar{\mathbf{x}})' \boldsymbol{\Sigma}^{-1} (\bar{\mathbf{x}} - \boldsymbol{\mu}) &= \text{tr} \sum_{i=1}^n (\mathbf{x}_i - \bar{\mathbf{x}})' \boldsymbol{\Sigma}^{-1} (\mathbf{x}_i - \bar{\mathbf{x}}) + n(\bar{\mathbf{x}} - \boldsymbol{\mu})' \boldsymbol{\Sigma}^{-1} (\bar{\mathbf{x}} - \boldsymbol{\mu}) = \\ &= \text{tr} \left[\boldsymbol{\Sigma}^{-1} \left\{ \sum_{i=1}^n (\mathbf{x}_i - \bar{\mathbf{x}})(\mathbf{x}_i - \bar{\mathbf{x}})' \right\} \right] + n(\bar{\mathbf{x}} - \boldsymbol{\mu})' \boldsymbol{\Sigma}^{-1} (\bar{\mathbf{x}} - \boldsymbol{\mu}) = \\ &= n \text{tr} \left\{ \boldsymbol{\Sigma}^{-1} \mathbf{S}^{(real)} \right\} + n(\bar{\mathbf{x}} - \boldsymbol{\mu})' \boldsymbol{\Sigma}^{-1} (\bar{\mathbf{x}} - \boldsymbol{\mu}), \end{aligned}$$

lebo

$$\begin{aligned} \mathbf{S}^{(real)} &= \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (\mathbf{x}_i - \bar{\mathbf{x}})(\mathbf{x}_i - \bar{\mathbf{x}})' \quad \text{a} \quad 2 \sum_{i=1}^n (\mathbf{x}_i - \bar{\mathbf{x}})' \boldsymbol{\Sigma}^{-1} (\bar{\mathbf{x}} - \boldsymbol{\mu}) = \\ &= 2 \left\{ n \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \mathbf{x}'_i \boldsymbol{\Sigma}^{-1} (\bar{\mathbf{x}} - \boldsymbol{\mu}) - n \bar{\mathbf{x}}' \boldsymbol{\Sigma}^{-1} (\bar{\mathbf{x}} - \boldsymbol{\mu}) \right\} = 0. \end{aligned}$$

Dostávame

$$l(\mathbf{x}; \boldsymbol{\mu}, \boldsymbol{\Sigma}) = -\frac{n}{2} \ln |2\pi\boldsymbol{\Sigma}| - \frac{n}{2} \text{tr} \left\{ \boldsymbol{\Sigma}^{-1} \mathbf{S}^{(real)} \right\} - \frac{n}{2} \text{tr} \left\{ \boldsymbol{\Sigma}^{-1} (\bar{\mathbf{x}} - \boldsymbol{\mu})(\bar{\mathbf{x}} - \boldsymbol{\mu})' \right\}.$$

ak $n \geq p + 1$, tak odhady metódou maximálnej vierohodnosti sú

$$\hat{\boldsymbol{\mu}} = \bar{\mathbf{X}}, \quad \hat{\boldsymbol{\Sigma}} = \mathbf{S}$$

(pozri Rao, str. 575,576).

Definícia 5.1. $\mathbf{X} = (\mathbf{X}'_1, \mathbf{X}'_2, \dots, \mathbf{X}'_n)'$ je náhodný výber z rozdelenia závislého od parametra $\boldsymbol{\theta}$. Testujeme $H_0 : \boldsymbol{\theta} \in \Omega_0 \not\asymp H_1 : \boldsymbol{\theta} \in \Omega_1$. Test pomerom vierohodnosti hypotézy H_0 oproti H_1 má testovaciu štatistiku (LR-štatistiku t.j. likelihood ratio štatistiku)

$$\lambda(\mathbf{x}) = \frac{L_0}{L} = \frac{\max_{\boldsymbol{\theta} \in \Omega_0} L(\boldsymbol{\theta})}{\max_{\boldsymbol{\theta} \in \Omega_1} L(\boldsymbol{\theta})}.$$

Jeho kritická oblasť na hladine významnosti α je $R = \{\mathbf{x} : \lambda(\mathbf{x}) < c\}$, kde c je určené tak, aby $\sup_{\boldsymbol{\theta} \in \Omega_0} P_{\boldsymbol{\theta}}\{\mathbf{X} \in R\} = \alpha$.

Veta 5.2. Nech λ je testovacia štatistika pre test pomerom vierohodnosti $H_0 : \boldsymbol{\theta} \in \Omega_0 \not\asymp H_1 : \boldsymbol{\theta} \in \Omega_1$ (Ω_1 je oblasť v \mathcal{R}^q , Ω_0 je s -rozmerná podoblasť Ω_1 , $q > s$). Za určitých podmienok regulárnosti pre každý $\boldsymbol{\theta} \in \Omega_0$ má $-2 \ln \lambda(\mathbf{X})$ asymptoticky (pre $n \rightarrow \infty$) rozdelenie χ^2_{q-s} ($q-s$ možno chápať ako počet reštrikcií na parametre $\theta_1, \dots, \theta_q$).

Ilustrácia:

(a) Nech $\mathbf{X} = (\mathbf{X}'_1, \mathbf{X}'_2, \dots, \mathbf{X}'_n)'$ je náhodný výber z $N_p(\boldsymbol{\mu}, \boldsymbol{\Sigma})$, $\boldsymbol{\Sigma}$ je známa pozitívne definitná matica.

$$H_0 : \boldsymbol{\mu} = \boldsymbol{\mu}_0 \not\asymp H_1 : \boldsymbol{\mu} \neq \boldsymbol{\mu}_0.$$

Potom

$$\begin{aligned} L(\mathbf{x}; \boldsymbol{\mu}, \boldsymbol{\Sigma}) &= |2\pi\boldsymbol{\Sigma}|^{-\frac{n}{2}} e^{-\frac{1}{2} \sum_{i=1}^n (\mathbf{x}_i - \boldsymbol{\mu})' \boldsymbol{\Sigma}^{-1} (\mathbf{x}_i - \boldsymbol{\mu})} = \\ &= |2\pi\boldsymbol{\Sigma}|^{-\frac{n}{2}} e^{\frac{n}{2} \text{tr} \{ \boldsymbol{\Sigma}^{-1} \mathbf{S}^{(real)} \}} e^{-\frac{n}{2} (\bar{\mathbf{x}} - \boldsymbol{\mu})' \boldsymbol{\Sigma}^{-1} (\bar{\mathbf{x}} - \boldsymbol{\mu})}. \end{aligned}$$

ak platí H_0 , tak $\boldsymbol{\mu} = \boldsymbol{\mu}_0$ a

$$\begin{aligned} \max_{\boldsymbol{\mu} = \boldsymbol{\mu}_0} L(\mathbf{x}; \boldsymbol{\mu}, \boldsymbol{\Sigma}) &= L(\mathbf{x}; \boldsymbol{\mu}_0, \boldsymbol{\Sigma}) = \\ &= |2\pi\boldsymbol{\Sigma}|^{-\frac{n}{2}} e^{-\frac{n}{2} \text{tr} [\boldsymbol{\Sigma}^{-1} \mathbf{S}^{(real)}]} e^{-\frac{n}{2} (\bar{\mathbf{x}} - \boldsymbol{\mu}_0)' \boldsymbol{\Sigma}^{-1} (\bar{\mathbf{x}} - \boldsymbol{\mu}_0)} \end{aligned}$$

(je to jediné číslo). ak $\boldsymbol{\mu}$ "nie je ohraničená", $q = p$, teda $\max_{\boldsymbol{\mu} \in \mathcal{R}^p} L(\mathbf{x}; \boldsymbol{\mu}, \boldsymbol{\Sigma})$ sa dosahuje pre $\boldsymbol{\mu} = \hat{\boldsymbol{\mu}} = \bar{\mathbf{x}}$ a preto

$$\begin{aligned} \max_{\boldsymbol{\mu} \in \mathcal{R}^p} L(\mathbf{x}; \boldsymbol{\mu}, \boldsymbol{\Sigma}) &= L(\mathbf{x}; \hat{\boldsymbol{\mu}}^{(real)}, \boldsymbol{\Sigma}) = \\ &= |2\pi\boldsymbol{\Sigma}|^{-\frac{n}{2}} e^{-\frac{n}{2} \text{tr} [\boldsymbol{\Sigma}^{-1} \mathbf{S}^{(real)}]} e^{-\frac{n}{2} (\bar{\mathbf{x}} - \hat{\boldsymbol{\mu}}^{(real)})' \boldsymbol{\Sigma}^{-1} (\bar{\mathbf{x}} - \hat{\boldsymbol{\mu}}^{(real)})} = \\ &= |2\pi\boldsymbol{\Sigma}|^{-\frac{n}{2}} e^{-\frac{n}{2} \text{tr} [\boldsymbol{\Sigma}^{-1} \mathbf{S}^{(real)}]}. \end{aligned}$$

Preto testovacia štatistika (vlastne jej realizácia) je

$$\begin{aligned} -2 \ln \lambda(\mathbf{x}) &= -2 \ln \frac{|2\pi\boldsymbol{\Sigma}|^{-\frac{n}{2}} e^{-\frac{n}{2} \text{tr} [\boldsymbol{\Sigma}^{-1} \mathbf{S}^{(real)}]} e^{-\frac{n}{2} (\bar{\mathbf{x}} - \boldsymbol{\mu}_0)' \boldsymbol{\Sigma}^{-1} (\bar{\mathbf{x}} - \boldsymbol{\mu}_0)}}{|2\pi\boldsymbol{\Sigma}|^{-\frac{n}{2}} e^{-\frac{n}{2} \text{tr} [\boldsymbol{\Sigma}^{-1} \mathbf{S}^{(real)}]}} = \\ &= n(\bar{\mathbf{x}} - \boldsymbol{\mu}_0)' \boldsymbol{\Sigma}^{-1} (\bar{\mathbf{x}} - \boldsymbol{\mu}_0). \end{aligned}$$

Je to realizácia štatistiky $n(\bar{\mathbf{X}} - \boldsymbol{\mu}_0)' \boldsymbol{\Sigma}^{-1} (\bar{\mathbf{X}} - \boldsymbol{\mu}_0)$, ktorá má za platnosti H_0 podľa vety 1.8 χ_p^2 rozdelenie. (Poznamenávame len, že $h(\Omega_0) = s = 0$, teda aj podľa tvrdenia vety 5.2 sedí pre asymptotiku, že $q - s = p - 0 = p$.)

(b) (Hotellingov jednovýberový T^2 -test.) Majme náhodný výber $\mathbf{X} = (\mathbf{X}'_1, \mathbf{X}'_2, \dots, \mathbf{X}'_n)'$ z $N_p(\boldsymbol{\mu}, \boldsymbol{\Sigma})$, $\boldsymbol{\Sigma}$ je neznáma pozitívne definitná matica.

$$H_0 : \boldsymbol{\mu} = \boldsymbol{\mu}_0 \quad \text{vs} \quad H_1 : \boldsymbol{\mu} \neq \boldsymbol{\mu}_0.$$

$\boldsymbol{\Sigma}$ sa musí odhadnúť vzhľadom na H_0 ako aj "bez ohraničenia". Dá sa ukázať, že odhady získané metódou maximálnej vierohodnosti (ich realizácie) sú

$$\text{za platnosti } H_0 : \hat{\boldsymbol{\mu}}^{(real)} = \boldsymbol{\mu}_0, \hat{\boldsymbol{\Sigma}}^{(real)} = \mathbf{S}^{(real)} + \mathbf{d}\mathbf{d}', \text{ kde } \mathbf{d} = \bar{\mathbf{x}} - \boldsymbol{\mu}_0,$$

$$\text{"bez ohraničenia": } \hat{\boldsymbol{\mu}}^{(real)} = \bar{\mathbf{x}}, \hat{\boldsymbol{\Sigma}}^{(real)} = \mathbf{S}^{(real)}.$$

Dostávame, že za platnosti H_0

$$\begin{aligned} \max_{\boldsymbol{\mu}=\boldsymbol{\mu}_0} L(\mathbf{x}; \boldsymbol{\mu}, \boldsymbol{\Sigma}) &= L(\mathbf{x}; \boldsymbol{\mu}_0, \mathbf{S}^{(real)} + \mathbf{d}\mathbf{d}') = \\ &= \frac{1}{(2\pi)^{\frac{np}{2}} |\mathbf{S}^{(real)} + \mathbf{d}\mathbf{d}'|^{\frac{n}{2}}} e^{-\frac{n}{2} \{tr(\mathbf{S}^{(real)} + \mathbf{d}\mathbf{d}')^{-1} \mathbf{S}^{(real)} + \mathbf{d}'(\mathbf{S}^{(real)} + \mathbf{d}\mathbf{d}')^{-1} \mathbf{d}\}} = \\ &= \frac{1}{(2\pi)^{\frac{np}{2}} |\mathbf{S}^{(real)} + \mathbf{d}\mathbf{d}'|^{\frac{n}{2}}} e^{-\frac{n}{2} tr(\mathbf{S}^{(real)} + \mathbf{d}\mathbf{d}')^{-1} (\mathbf{S}^{(real)} + \mathbf{d}\mathbf{d}')} = \\ &= \frac{1}{(2\pi)^{\frac{np}{2}} |\mathbf{S}^{(real)} + \mathbf{d}\mathbf{d}'|^{\frac{n}{2}}} e^{-\frac{np}{2}}. \end{aligned}$$

ďalej

$$\begin{aligned} \max_{\boldsymbol{\mu} \in \mathcal{R}^p} L(\mathbf{x}; \boldsymbol{\mu}, \boldsymbol{\Sigma}) &= L(\mathbf{x}; \bar{\mathbf{x}}, \mathbf{S}^{(real)}) = \\ &= \frac{1}{(2\pi)^{\frac{np}{2}} |\mathbf{S}^{(real)}|^{\frac{n}{2}}} e^{\{-\frac{n}{2} tr(\mathbf{S}^{(real)})^{-1} \mathbf{S}^{(real)} - \frac{n}{2} (\bar{\mathbf{x}} - \bar{\mathbf{x}})' (\mathbf{S}^{(real)})^{-1} (\bar{\mathbf{x}} - \bar{\mathbf{x}})\}} = \\ &= \frac{1}{(2\pi)^{\frac{np}{2}} |\mathbf{S}^{(real)}|^{\frac{n}{2}}} e^{-\frac{np}{2}}, \end{aligned}$$

teda testovacia štatistika (LR - štatistika) je

$$\begin{aligned} -2 \ln \lambda(\mathbf{X}) &= -2 \ln \left(\frac{|\mathbf{S}|}{|\mathbf{S} + (\bar{\mathbf{X}} - \boldsymbol{\mu}_0)(\bar{\mathbf{X}} - \boldsymbol{\mu}_0)'|} \right)^{\frac{n}{2}} = \\ (5.1) \quad &= -n \ln \left(\frac{|\mathbf{S}|}{|\mathbf{S} + (\bar{\mathbf{X}} - \boldsymbol{\mu}_0)(\bar{\mathbf{X}} - \boldsymbol{\mu}_0)'|} \right). \end{aligned}$$

Za platnosti H_0 je $\sqrt{n}(\bar{\mathbf{X}} - \boldsymbol{\mu}_0) \sim N_p(\mathbf{0}, \boldsymbol{\Sigma})$; podľa vety 2.18 $n\mathbf{S} \sim W_p(n-1, \boldsymbol{\Sigma})$, pričom $\sqrt{n}(\bar{\mathbf{X}} - \boldsymbol{\mu}_0)$ a $n\mathbf{S}$ sú nezávislé. Preto podľa poznámky za vetou 4.2

$$\frac{|n\mathbf{S}|}{|n\mathbf{S} + n(\bar{\mathbf{X}} - \boldsymbol{\mu}_0)(\bar{\mathbf{X}} - \boldsymbol{\mu}_0)'|} = \frac{|\mathbf{S}|}{|\mathbf{S} + (\bar{\mathbf{X}} - \boldsymbol{\mu}_0)(\bar{\mathbf{X}} - \boldsymbol{\mu}_0)'|}$$

má $\Lambda(p, n-1, 1)$ rozdelenie. Podľa lemy 3.5 je to totožné s rozdelením $(1 + \frac{T^2(p, n-1)}{n-1})^{-1}$, čo je rozdelenie náhodnej veličiny $(1 + (\bar{\mathbf{X}} - \boldsymbol{\mu}_0)' \mathbf{S}^{-1} (\bar{\mathbf{X}} - \boldsymbol{\mu}_0))^{-1}$ (pozri dôkaz lemy 3.5) a podľa poznámky za vetou 4.2 to je $B\left(\frac{n-p}{2}, \frac{p}{2}\right)$ rozdelenie.

asymptoticky má teda podľa vety 5.2

$$-2 \ln \lambda(\mathbf{X}) = -n \ln \left(\frac{|\mathbf{S}|}{|\mathbf{S} + (\bar{\mathbf{X}} - \boldsymbol{\mu}_0)(\bar{\mathbf{X}} - \boldsymbol{\mu}_0)'|} \right) = n \ln(1 + (\bar{\mathbf{X}} - \boldsymbol{\mu}_0)' \mathbf{S}^{-1} (\bar{\mathbf{X}} - \boldsymbol{\mu}_0))$$

χ_p^2 rozdelenie.

ak chceme použiť neasymptotický test, tak za platnosti H_0 má náhodná veličina

$$(1 + (\bar{\mathbf{X}} - \boldsymbol{\mu}_0)' \mathbf{S}^{-1} (\bar{\mathbf{X}} - \boldsymbol{\mu}_0))^{-1}$$

$B\left(\frac{n-p}{2}, \frac{p}{2}\right)$ rozdelenie, alebo podľa dôsledku 3.6 má za platnosti H_0 štatistika

$$\frac{n-p}{p} (\bar{\mathbf{X}} - \boldsymbol{\mu}_0)' \mathbf{S}^{-1} (\bar{\mathbf{X}} - \boldsymbol{\mu}_0)$$

$F_{p, n-p}$ rozdelenie.

(c) Hypotézu

$$H_0 : \boldsymbol{\Sigma} = \boldsymbol{\Sigma}_0 \quad \text{vs} \quad H_1 : \boldsymbol{\Sigma} \neq \boldsymbol{\Sigma}_0$$

($\boldsymbol{\mu}$ nepoznáme), pričom máme výber z $N_p(\boldsymbol{\mu}, \boldsymbol{\Sigma})$ rozdelenia o rozsahu n testujeme tak, že získame odhady metódou maximálnej vierohodnosti.

Za platnosti H_0 : $\hat{\boldsymbol{\mu}}^{(real)} = \bar{\mathbf{x}}$, $\hat{\boldsymbol{\Sigma}} = \boldsymbol{\Sigma}_0$,

“bez ohraničenia“ : $\hat{\boldsymbol{\mu}}^{(real)} = \bar{\mathbf{x}}$, $\hat{\boldsymbol{\Sigma}}^{(real)} = \mathbf{S}^{(real)}$.

Preto za platnosti H_0 je

$$\max_{\boldsymbol{\Sigma} = \boldsymbol{\Sigma}_0} l(\mathbf{x}; \boldsymbol{\mu}, \boldsymbol{\Sigma}) = l(\mathbf{x}; \bar{\mathbf{x}}, \boldsymbol{\Sigma}_0) = -\frac{np}{2} \ln 2\pi - \frac{n}{2} \ln |\boldsymbol{\Sigma}_0| - \frac{n}{2} \text{tr}(\boldsymbol{\Sigma}_0^{-1} \mathbf{S}^{(real)})$$

a “bez ohraničenia“ je

$$\max_{\boldsymbol{\mu}, \boldsymbol{\Sigma}} l(\mathbf{x}; \boldsymbol{\mu}, \boldsymbol{\Sigma}) = l(\mathbf{x}; \bar{\mathbf{x}}, \mathbf{S}^{(real)}) = -\frac{np}{2} \ln 2\pi - \frac{n}{2} \ln |\mathbf{S}^{(real)}| - \frac{np}{2}.$$

Teda testovacia LR - štatistika je

$$-2 \ln \lambda(\mathbf{X}) = n \text{tr}(\boldsymbol{\Sigma}_0^{-1} \mathbf{S}) - n \ln |\mathbf{S} \boldsymbol{\Sigma}_0^{-1}| - np.$$

Táto náhodná veličina má zložité rozdelenie, ale asymptoticky má χ_m^2 rozdelenie, kde $m = \frac{1}{2}p(p+1)$.

(d) Hypotézu

$$H_0 : \boldsymbol{\Sigma}_{12} = \mathbf{0}$$

($\boldsymbol{\mu}$ nepoznáme), pričom máme výber z $N_p(\boldsymbol{\mu}, \boldsymbol{\Sigma})$ rozdelenia o rozsahu n testujeme tak, že normálne rozdelený náhodný vektor rozdelíme na podvektory s p_1 a p_2

zložkami, $p_1 + p_2 = p$. Predpokladajme rovnaké delenie kovariančnej matice $\Sigma = \begin{pmatrix} \Sigma_{11} & \Sigma_{12} \\ \Sigma_{21} & \Sigma_{22} \end{pmatrix}$. Dá sa ukázať, že odhady metódou maximálnej vierohodnosti za

platnosti H_0 sú: $\hat{\boldsymbol{\mu}} = \bar{\mathbf{X}}$, $\hat{\Sigma} = \begin{pmatrix} \mathbf{S}_{11} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{S}_{22} \end{pmatrix}$ (\mathbf{S}_{11} a \mathbf{S}_{22} sú príslušné submatice matice \mathbf{S}). Test pomerom vierohodnosti má testovaciu štatistiku

$$\begin{aligned} -2 \ln \lambda(\mathbf{X}) &= 2 \left\{ -\frac{np}{2} \ln 2\pi - \frac{n}{2} \ln |\mathbf{S}| - \frac{n}{2} \text{tr}(\mathbf{S}^{-1}\mathbf{S}) + \frac{np}{2} \ln 2\pi + \right. \\ &+ \frac{n}{2} \ln |\mathbf{S}_{11}||\mathbf{S}_{22}| + \frac{n}{2} \text{tr} \begin{pmatrix} \mathbf{S}_{11}^{-1} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{S}_{22}^{-1} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathbf{S}_{11} & \mathbf{S}_{12} \\ \mathbf{S}_{21} & \mathbf{S}_{22} \end{pmatrix} \left. \right\} = n \ln \frac{|\mathbf{S}_{11}||\mathbf{S}_{22}|}{|\mathbf{S}|} = \\ &= -n \ln \frac{|\mathbf{S}|}{|\mathbf{S}_{11}||\mathbf{S}_{22}|} = -n \ln \frac{|\mathbf{S}_{11}||\mathbf{S}_{22} - \mathbf{S}_{21}\mathbf{S}_{11}^{-1}\mathbf{S}_{12}|}{|\mathbf{S}_{11}||\mathbf{S}_{22}|} = -n \ln |\mathbf{I} - \mathbf{S}_{22}^{-1}\mathbf{S}_{21}\mathbf{S}_{11}^{-1}\mathbf{S}_{12}|. \end{aligned}$$

Tato štatistika má asymptoticky χ^2 rozdelenie s $p_1 p_2$ stupňami voľnosti ($p_1 p_2 = q$, $s = 0$).

(e) Hypotéza

$$H_0 : \Sigma = \text{diag} \quad (\text{špeciálny prípad (c)})$$

($\boldsymbol{\mu}$ nepoznáme), pričom máme výber z $N_p(\boldsymbol{\mu}, \Sigma)$ rozdelenia o rozsahu n je tá istá ako hypotéza

$$H_0 : \mathbf{R} = \mathbf{I}$$

(\mathbf{R} je korelačná matica). Tvrdí, že zložky vektora \mathbf{X} sú nezávislé. Test pomerom vierohodnosti má testovaciu štatistiku (jej realizáciu)

$$-2 \ln \lambda = -n \ln |\mathbf{R}_{\mathbf{X}, \mathbf{X}}|$$

($\mathbf{R}_{\mathbf{X}, \mathbf{X}}$ je výberová korelačná matica). Táto štatistika má asymptoticky χ^2 rozdelenie s $\frac{1}{2}p(p-1)$ stupňami voľnosti.

6. LINEÁRNY MODEL A METÓDA NAJMENŠÍCH ŠTVORCOV

6.1. ÚVOD

Majme lineárny regresný model (LRM)

$$(6.1) \quad \mathbf{Y}_{n,1} = \mathbf{X}_{n,p} \boldsymbol{\beta}_{p,1} + \boldsymbol{\varepsilon}_{n,1},$$

$$\mathcal{E}(\boldsymbol{\varepsilon}) = \mathbf{0}, \quad \text{cov}(\boldsymbol{\varepsilon}) = \sigma^2 \mathbf{I}.$$

Veta 6.1. $\sum_{i=1}^n \varepsilon_i^2 = \boldsymbol{\varepsilon}'\boldsymbol{\varepsilon} = (\mathbf{Y} - \mathbf{X}\boldsymbol{\beta})'(\mathbf{Y} - \mathbf{X}\boldsymbol{\beta})$ nadobúda minimum (vzhľadom na $\boldsymbol{\beta}$) pre $\hat{\boldsymbol{\beta}}$, ktoré je (ľubovoľným) riešením normálnych rovníc

$$(6.2) \quad \mathbf{X}'\mathbf{X}\boldsymbol{\beta} = \mathbf{X}'\mathbf{Y}.$$

Toto minimum je rovnaké pre všetky riešenia rovníc (6.2).

Dôkaz. $\mu(\mathbf{X}') = \mu(\mathbf{X}'\mathbf{X}) \implies \mathbf{X}'\mathbf{Y} \in \mu(\mathbf{X}'\mathbf{X}) \implies$ (6.2) sú vždy riešiteľné. Ich ľubovoľné riešenie označme $\hat{\boldsymbol{\beta}}$. Platí

$$(\mathbf{Y} - \mathbf{X}\boldsymbol{\beta})'(\mathbf{Y} - \mathbf{X}\boldsymbol{\beta}) = (\mathbf{Y} - \mathbf{X}\hat{\boldsymbol{\beta}} + \mathbf{X}\hat{\boldsymbol{\beta}} - \mathbf{X}\boldsymbol{\beta})'(\mathbf{Y} - \mathbf{X}\hat{\boldsymbol{\beta}} + \mathbf{X}\hat{\boldsymbol{\beta}} - \mathbf{X}\boldsymbol{\beta}) =$$

$$(\mathbf{Y} - \mathbf{X}\hat{\boldsymbol{\beta}})'(\mathbf{Y} - \mathbf{X}\hat{\boldsymbol{\beta}}) + (\hat{\boldsymbol{\beta}} - \boldsymbol{\beta})'\mathbf{X}'\mathbf{X}(\hat{\boldsymbol{\beta}} - \boldsymbol{\beta}) \geq (\mathbf{Y} - \mathbf{X}\hat{\boldsymbol{\beta}})'(\mathbf{Y} - \mathbf{X}\hat{\boldsymbol{\beta}}).$$

Teraz už dôkaz ľahko dokončíme. \square

Označme ešte

$$\hat{\mathbf{Y}} = \mathbf{X}\hat{\boldsymbol{\beta}}$$

a

$$R_0^2 = (\mathbf{Y} - \mathbf{X}\hat{\boldsymbol{\beta}})'(\mathbf{Y} - \mathbf{X}\hat{\boldsymbol{\beta}}) = \mathbf{Y}'(\mathbf{I} - \mathbf{X}(\mathbf{X}'\mathbf{X})^{-1}\mathbf{X}')\mathbf{Y}.$$

6.2. MATICA PLÁNU \mathbf{X} MÁ PLNÚ HODNOSŤ

Nech $h(\mathbf{X}_{n,p}) = p \leq n$.

Veta 6.2. *Majme LRM (6.1), pričom $h(\mathbf{X}) = p$. Platí*

$$(a) \hat{\boldsymbol{\beta}} = (\mathbf{X}'\mathbf{X})^{-1}\mathbf{X}'\mathbf{Y}, \quad \mathcal{E}(\hat{\boldsymbol{\beta}}) = \boldsymbol{\beta}$$

$$(b) \text{cov}\hat{\boldsymbol{\beta}} = \sigma^2(\mathbf{X}'\mathbf{X})^{-1}.$$

Dôkaz. Pozri Anděl.

Veta 6.3. *Pre ľubovoľné $\mathbf{p} \in \mathcal{R}^p$ má odhad $\widehat{\mathbf{p}'\boldsymbol{\beta}} = \mathbf{p}'\hat{\boldsymbol{\beta}}$ minimálnu disperziu zo všetkých lineárnych nevychýlených odhadov funkcie $\mathbf{p}'\boldsymbol{\beta}$.*

Dôkaz. Pozri anděl.

Veta 6.4.

$$\mathcal{E}\left(\frac{R_0^2}{n-p}\right) = \sigma^2.$$

Dôkaz.

$$\begin{aligned} \mathcal{E}\left(\frac{R_0^2}{n-p}\right) &= \frac{1}{n-p}\mathcal{E}(\mathbf{Y}'(\mathbf{I} - \mathbf{X}(\mathbf{X}'\mathbf{X})^{-1}\mathbf{X}')\mathbf{Y}) = \\ &= \frac{1}{n-p}\{[\boldsymbol{\beta}'\mathbf{X}'(\mathbf{I} - \mathbf{X}(\mathbf{X}'\mathbf{X})^{-1}\mathbf{X}')\mathbf{X}\boldsymbol{\beta} + \text{tr}[(\mathbf{I} - \mathbf{X}(\mathbf{X}'\mathbf{X})^{-1}\mathbf{X}')\sigma^2\mathbf{I}]]\} = \sigma^2. \quad \square \end{aligned}$$

Veta 6.5. *V LRM (6.1) nech $\mathbf{Y} \sim N_n(\mathbf{X}\boldsymbol{\beta}, \sigma^2\mathbf{I})$, $h(\mathbf{X}) = p < n$ Platí*

$$(a) \hat{\boldsymbol{\beta}} \sim N_n(\boldsymbol{\beta}, \sigma^2(\mathbf{X}'\mathbf{X})^{-1}),$$

$$(b) \frac{R_0^2}{\sigma^2} \sim \chi_{n-p}^2,$$

$$(c) \hat{\boldsymbol{\beta}} \text{ a } R_0^2 \text{ sú nezávislé,}$$

$$(d) (\hat{\boldsymbol{\beta}} - \boldsymbol{\beta})'\mathbf{X}'\mathbf{X}(\hat{\boldsymbol{\beta}} - \boldsymbol{\beta}) \sim \sigma^2\chi_p^2 \text{ a nezávisí od } R_0^2.$$

Dôkaz.

(a) zrejmé;

(b) $\frac{R_0^2}{\sigma^2} = \mathbf{Y}'\frac{\mathbf{I} - \mathbf{X}(\mathbf{X}'\mathbf{X})^{-1}\mathbf{X}'}{\sigma^2}\mathbf{Y} = (\mathbf{Y} - \mathbf{X}\boldsymbol{\beta})'\frac{\mathbf{I} - \mathbf{X}(\mathbf{X}'\mathbf{X})^{-1}\mathbf{X}'}{\sigma^2}(\mathbf{Y} - \mathbf{X}\boldsymbol{\beta})$ má $\chi_{h(\mathbf{I} - \mathbf{X}(\mathbf{X}'\mathbf{X})^{-1}\mathbf{X}')}^2$ rozdelenie podľa vety 1.8;

(c) $(\mathbf{X}'\mathbf{X})^{-1}\mathbf{X}'\mathbf{Y}$ a $\mathbf{Y}'\frac{\mathbf{I} - \mathbf{X}(\mathbf{X}'\mathbf{X})^{-1}\mathbf{X}'}{\sigma^2}\mathbf{Y}$ sú nezávislé, lebo $\frac{\mathbf{I} - \mathbf{X}(\mathbf{X}'\mathbf{X})^{-1}\mathbf{X}'}{\sigma^2}$ je pozitívne semidefinitná matica a $(\mathbf{X}'\mathbf{X})^{-1}\mathbf{X}'\sigma^2\mathbf{I}\frac{\mathbf{I} - \mathbf{X}(\mathbf{X}'\mathbf{X})^{-1}\mathbf{X}'}{\sigma^2} = \mathbf{0}$, teda podľa anděl, str. 81 (alebo podľa vety 1.10) sú $\hat{\boldsymbol{\beta}}$ a R_0^2 nezávislé;

(d) $(\hat{\beta} - \beta)' \frac{\mathbf{X}'\mathbf{X}}{\sigma^2} (\hat{\beta} - \beta) = (\mathbf{Y} - \mathbf{X}\beta)' \frac{\mathbf{X}(\mathbf{X}'\mathbf{X})^{-1}\mathbf{X}'}{\sigma^2} (\mathbf{Y} - \mathbf{X}\beta)$ má podľa vety 1.8 χ_p^2 rozdelenie; $R_0^2 = (\mathbf{Y} - \mathbf{X}\hat{\beta})'(\mathbf{Y} - \mathbf{X}\hat{\beta}) = (\mathbf{Y} - \mathbf{X}\beta)'(\mathbf{I} - \mathbf{X}(\mathbf{X}'\mathbf{X})^{-1}\mathbf{X}')(\mathbf{Y} - \mathbf{X}\beta)$ a podľa vety 1.9 sú $(\hat{\beta} - \beta)' \mathbf{X}'\mathbf{X}(\hat{\beta} - \beta)$ a R_0^2 nezávislé. \square

Poznámka. Hypotézu

$$H_0 : \beta = \beta_0 \quad \text{vs} \quad H_1 : \beta \neq \beta_0$$

testujeme štatistikou

$$\frac{(\hat{\beta} - \beta_0)' \mathbf{X}'\mathbf{X}(\hat{\beta} - \beta_0)}{R_0^2} \frac{n-p}{p},$$

ktorá má za platnosti H_0 rozdelenie $F_{p,n-p}$.

Zadefinujeme

$$R_H^2 = \min_{\beta: \mathbf{A}\beta = \mathbf{c}} (\mathbf{Y} - \mathbf{X}\beta)'(\mathbf{Y} - \mathbf{X}\beta).$$

Veta 6.6. *Nech $\mathbf{A}_{q,p}$ má hodnotu $h(\mathbf{A}) = q$, $\mathbf{c} \in \mathcal{R}^q$. Platí (za predpokladu normality rozdelenia \mathbf{Y})*

- (a) $R_H^2 - R_0^2 = (\mathbf{A}\hat{\beta} - \mathbf{c})'(\mathbf{A}(\mathbf{X}'\mathbf{X})^{-1}\mathbf{A}')^{-1}(\mathbf{A}\hat{\beta} - \mathbf{c})$,
- (b) $\mathcal{E}(R_H^2 - R_0^2) = \sigma^2 q + (\mathbf{A}\beta - \mathbf{c})'(\mathbf{A}(\mathbf{X}'\mathbf{X})^{-1}\mathbf{A}')^{-1}(\mathbf{A}\beta - \mathbf{c})$,
- (c) ak platí $\mathbf{A}\beta = \mathbf{c}$, tak $F = \frac{n-p}{q} \frac{R_H^2 - R_0^2}{R_0^2}$ má $F_{q,n-p}$ rozdelenie.

Dôkaz. Platí

$$(\mathbf{Y} - \mathbf{X}\beta)'(\mathbf{Y} - \mathbf{X}\beta) = (\mathbf{Y} - \mathbf{X}\hat{\beta})'(\mathbf{Y} - \mathbf{X}\hat{\beta}) + (\hat{\beta} - \beta)' \mathbf{X}'\mathbf{X}(\hat{\beta} - \beta)$$

(pozri aj v dôkaze vety 6.1).

$$\begin{aligned} R_H^2 &= \min_{\beta: \mathbf{A}\beta = \mathbf{c}} (\mathbf{Y} - \mathbf{X}\beta)'(\mathbf{Y} - \mathbf{X}\beta) = \\ &= \min_{\beta: \mathbf{A}\beta = \mathbf{c}} \left[(\mathbf{Y} - \mathbf{X}\hat{\beta})'(\mathbf{Y} - \mathbf{X}\hat{\beta}) + (\hat{\beta} - \beta)' \mathbf{X}'\mathbf{X}(\hat{\beta} - \beta) \right] = \\ &= (\mathbf{Y} - \mathbf{X}\hat{\beta})'(\mathbf{Y} - \mathbf{X}\hat{\beta}) + \min_{\beta: \mathbf{A}\beta = \mathbf{c}} (\hat{\beta} - \beta)' \mathbf{X}'\mathbf{X}(\hat{\beta} - \beta). \end{aligned}$$

Hľadáme teda

$$\min_{\beta: \mathbf{A}\beta = \mathbf{c}} (\hat{\beta} - \beta)' \mathbf{X}'\mathbf{X}(\hat{\beta} - \beta),$$

čiže

$$\min_{\beta: \mathbf{A}\beta = \mathbf{c}} \left[\hat{\beta}' \mathbf{X}'\mathbf{X}\hat{\beta} - 2\hat{\beta}' \mathbf{X}'\mathbf{X}\beta + \beta' \mathbf{X}'\mathbf{X}\beta \right].$$

Metódou neurčitých Lagrangeových multiplikátorov dostávame

$$\Phi(\beta, \lambda) = \hat{\beta}' \mathbf{X}'\mathbf{X}\hat{\beta} - 2\hat{\beta}' \mathbf{X}'\mathbf{X}\beta + \beta' \mathbf{X}'\mathbf{X}\beta + 2\lambda'(\mathbf{A}\beta - \mathbf{c})$$

$$\frac{\partial \Phi}{\partial \beta} = -2\mathbf{X}'\mathbf{X}\hat{\beta} + 2\mathbf{X}'\mathbf{X}\beta + 2\mathbf{A}'\lambda = \mathbf{0}$$

$$\frac{\partial \Phi}{\partial \boldsymbol{\lambda}} = 2(\mathbf{A}\boldsymbol{\beta} - \mathbf{c}) = \mathbf{0}$$

(lebo $\frac{\partial \mathbf{m}'\mathbf{x}}{\partial \mathbf{x}} = \mathbf{m}$, $\frac{\partial \mathbf{x}'\mathbf{M}\mathbf{x}}{\partial \mathbf{x}} = 2\mathbf{M}\mathbf{x}$, pozri Rao, str.98).

Dostávame rovnice

$$\begin{aligned}\mathbf{X}'\mathbf{X}\boldsymbol{\beta} + \mathbf{A}'\boldsymbol{\lambda} &= \mathbf{X}'\mathbf{X}\hat{\boldsymbol{\beta}} \\ \mathbf{A}\boldsymbol{\beta} &= \mathbf{c},\end{aligned}$$

ktorých riešenie $\hat{\boldsymbol{\beta}}_H$ nás zaujíma. Platí postupne

$$\begin{aligned}\hat{\boldsymbol{\beta}}_H &= -(\mathbf{X}'\mathbf{X})^{-1}\mathbf{A}'\boldsymbol{\lambda} + \hat{\boldsymbol{\beta}} \\ \mathbf{A}\hat{\boldsymbol{\beta}} - \mathbf{c} &= \mathbf{A}(\mathbf{X}'\mathbf{X})^{-1}\mathbf{A}'\boldsymbol{\lambda} \\ (\mathbf{A}(\mathbf{X}'\mathbf{X})^{-1}\mathbf{A}')^{-1}(\mathbf{A}\hat{\boldsymbol{\beta}} - \mathbf{c}) &= \boldsymbol{\lambda},\end{aligned}$$

teda

$$\hat{\boldsymbol{\beta}}_H = \hat{\boldsymbol{\beta}} - (\mathbf{X}'\mathbf{X})^{-1}\mathbf{A}'(\mathbf{A}(\mathbf{X}'\mathbf{X})^{-1}\mathbf{A}')^{-1}(\mathbf{A}\hat{\boldsymbol{\beta}} - \mathbf{c}).$$

Preto

$$R_H^2 - R_0^2 = \min_{\boldsymbol{\beta}: \mathbf{A}\boldsymbol{\beta}=\mathbf{c}} (\mathbf{Y} - \mathbf{X}\boldsymbol{\beta})'(\mathbf{Y} - \mathbf{X}\boldsymbol{\beta}) - (\mathbf{Y} - \mathbf{X}\hat{\boldsymbol{\beta}})'(\mathbf{Y} - \mathbf{X}\hat{\boldsymbol{\beta}}) =$$

$$\begin{aligned}\min_{\boldsymbol{\beta}: \mathbf{A}\boldsymbol{\beta}=\mathbf{c}} (\hat{\boldsymbol{\beta}} - \boldsymbol{\beta})'\mathbf{X}'\mathbf{X}(\hat{\boldsymbol{\beta}} - \boldsymbol{\beta}) &= (\hat{\boldsymbol{\beta}} - \hat{\boldsymbol{\beta}}_H)'\mathbf{X}'\mathbf{X}(\hat{\boldsymbol{\beta}} - \hat{\boldsymbol{\beta}}_H) = \\ &= (\mathbf{A}\hat{\boldsymbol{\beta}} - \mathbf{c})'(\mathbf{A}(\mathbf{X}'\mathbf{X})^{-1}\mathbf{A}')^{-1}(\mathbf{A}\hat{\boldsymbol{\beta}} - \mathbf{c}).\end{aligned}$$

(b) Zrejme $\mathbf{A}\hat{\boldsymbol{\beta}} - \mathbf{c} \sim N_q(\mathbf{A}\boldsymbol{\beta} - \mathbf{c}, \sigma^2\mathbf{A}(\mathbf{X}'\mathbf{X})^{-1}\mathbf{A}')$. Preto

$$\begin{aligned}\mathcal{E}(R_H^2 - R_0^2) &= (\mathbf{A}\boldsymbol{\beta} - \mathbf{c})'(\mathbf{A}(\mathbf{X}'\mathbf{X})^{-1}\mathbf{A}')^{-1}(\mathbf{A}\boldsymbol{\beta} - \mathbf{c}) + \\ &\quad + \text{tr}[(\mathbf{A}(\mathbf{X}'\mathbf{X})^{-1}\mathbf{A}')^{-1}\sigma^2\mathbf{A}(\mathbf{X}'\mathbf{X})^{-1}\mathbf{A}'] = \\ &= \sigma^2q + (\mathbf{A}\boldsymbol{\beta} - \mathbf{c})'(\mathbf{A}(\mathbf{X}'\mathbf{X})^{-1}\mathbf{A}')^{-1}(\mathbf{A}\boldsymbol{\beta} - \mathbf{c}).\end{aligned}$$

(c) ak platí H : $\mathbf{A}\boldsymbol{\beta} = \mathbf{c}$, tak $\mathbf{A}\hat{\boldsymbol{\beta}} - \mathbf{c} \sim N_q(\mathbf{0}, \sigma^2\mathbf{A}(\mathbf{X}'\mathbf{X})^{-1}\mathbf{A}')$ a

$$\begin{aligned}(\mathbf{A}\hat{\boldsymbol{\beta}} - \mathbf{c})' \frac{(\mathbf{A}(\mathbf{X}'\mathbf{X})^{-1}\mathbf{A}')^{-1}}{\sigma^2} (\mathbf{A}\hat{\boldsymbol{\beta}} - \mathbf{c}) &= \\ = (\mathbf{A}\hat{\boldsymbol{\beta}} - \mathbf{c})' \frac{(\mathbf{A}(\mathbf{X}'\mathbf{X})^{-1}\mathbf{A}')^{-\frac{1}{2}} \mathbf{I} [(\mathbf{A}(\mathbf{X}'\mathbf{X})^{-1}\mathbf{A}')^{-\frac{1}{2}}]' }{\sigma^2} (\mathbf{A}\hat{\boldsymbol{\beta}} - \mathbf{c}) &= \\ = \frac{R_H^2 - R_0^2}{\sigma^2} \sim \chi_q^2\end{aligned}$$

(podľa vety 1.8). Vo vete 6.5 sme dokázali, že $\frac{R_0^2}{\sigma^2} \sim \chi_{n-p}^2$. ďalej máme

$$R_0^2 = \mathbf{Y}'(\mathbf{I} - \mathbf{X}(\mathbf{X}'\mathbf{X})^{-1}\mathbf{X}')(\mathbf{I} - \mathbf{X}(\mathbf{X}'\mathbf{X})^{-1}\mathbf{X}')\mathbf{Y}.$$

Pretože

$$\text{cov}((\mathbf{A}(\mathbf{X}'\mathbf{X})^{-1}\mathbf{A}')^{-\frac{1}{2}}(\mathbf{A}\hat{\boldsymbol{\beta}} - \mathbf{c}), (\mathbf{I} - \mathbf{X}(\mathbf{X}'\mathbf{X})^{-1}\mathbf{X}')\mathbf{Y}) = \mathbf{0},$$

sú $R_H^2 - R_0^2$ a R_0^2 nezávislé. Za platnosti $H : \mathbf{A}\boldsymbol{\beta} = \mathbf{c}$ má

$$(6.3) \quad F = \frac{\frac{R_H^2 - R_0^2}{\sigma^2 q}}{\frac{R_0^2}{\sigma^2(n-p)}} = \frac{n-p}{q} \frac{R_H^2 - R_0^2}{R_0^2}$$

$F_{q, n-p}$ rozdelenie. \square

Poznámka. Hypotézu

$$H : \mathbf{A}_{q,p}\boldsymbol{\beta} = \mathbf{c}_{q,1}$$

testujeme pomocou štatistiky (6.3).

Príklad. Testovanie hypotézy

$$H_0 : \mathbf{A}'_i\boldsymbol{\beta} = c_i \quad \not\asymp \quad H_1 : \mathbf{A}'_i\boldsymbol{\beta} \neq c_i.$$

Testovacia štatistika je

$$t_i = \frac{\mathbf{A}'_i\hat{\boldsymbol{\beta}} - \mathbf{A}'_i\boldsymbol{\beta}}{s\sqrt{\mathbf{A}'_i(\mathbf{X}'\mathbf{X})^{-1}\mathbf{A}_i}} = \frac{\mathbf{A}'_i\hat{\boldsymbol{\beta}} - c_i}{s\sqrt{\mathbf{A}'_i(\mathbf{X}'\mathbf{X})^{-1}\mathbf{A}_i}} \sim t_{n-p},$$

kde $s^2 = \frac{R_0^2}{n-p}$. Vskutku $R_0^2 \sim \sigma^2\chi_{n-p}^2$ (podľa vety 6.5 (b)). Za platnosti H_0 je $\mathbf{A}'_i\hat{\boldsymbol{\beta}} \sim N(\mathbf{A}'_i\boldsymbol{\beta} = c_i, \sigma^2\mathbf{A}'_i(\mathbf{X}'\mathbf{X})^{-1}\mathbf{A}_i)$ (pomocou vety 6.5 (a)), R_0^2 a $\hat{\boldsymbol{\beta}}$ su nezávislé (podľa vety 6.5 (c)), teda

$$\frac{\frac{\mathbf{A}'_i\hat{\boldsymbol{\beta}} - c_i}{\sigma\sqrt{\mathbf{A}'_i(\mathbf{X}'\mathbf{X})^{-1}\mathbf{A}_i}}}{\sqrt{\frac{R_0^2}{\sigma^2(n-p)}}} = \frac{\mathbf{A}'_i\hat{\boldsymbol{\beta}} - c_i}{s\sqrt{\mathbf{A}'_i(\mathbf{X}'\mathbf{X})^{-1}\mathbf{A}_i}} \sim t_{n-p}.$$

100(1 - α)%–ný interval spoľahlivosti pre $\mathbf{A}'_i\boldsymbol{\beta}$ je

$$\left(\mathbf{A}'_i\hat{\boldsymbol{\beta}} - t_{n-p}(1 - \frac{\alpha}{2})s\sqrt{\mathbf{A}'_i(\mathbf{X}'\mathbf{X})^{-1}\mathbf{A}_i}, \mathbf{A}'_i\hat{\boldsymbol{\beta}} + t_{n-p}(1 - \frac{\alpha}{2})s\sqrt{\mathbf{A}'_i(\mathbf{X}'\mathbf{X})^{-1}\mathbf{A}_i} \right).$$

ak chceme testovať, či súčasne platí

$$H_0 : \mathbf{A}'_i\boldsymbol{\beta} = c_i \quad i = 1, 2, \dots, k \quad \not\asymp \quad H_1 : \exists i \in \{1, 2, \dots, k\} \mathbf{A}'_i\boldsymbol{\beta} \neq c_i.$$

potom sú tu možnosti:

(a) Bonferroniho metóda je založená na tzv. Bonferroniho nerovnosti, ktorá tvrdí, že ak E_1, E_2, \dots, E_k sú náhodné udalosti, tak

$$P\left(\bigcap_{i=1}^k E_i\right) \geq 1 - \sum_{i=1}^k P(E_i^C) = 1 - \sum_{i=1}^k (1 - P(E_i)).$$

Dôkaz tejto nerovnosti sa zakladá na rovnosti $(\bigcap_{i=1}^k E_i)^C = \bigcup_{i=1}^k E_i^C$, z ktorej vyplýva, že

$$P\left(\bigcap_{i=1}^k E_i\right) = 1 - P\left[\left(\bigcap_{i=1}^k E_i\right)^C\right] = 1 - P\left(\bigcup_{i=1}^k E_i^C\right) \geq 1 - \sum_{i=1}^k (1 - P(E_i)),$$

čo vyplýva zo subaditívnosti pravdepodobnostnej miery P , a síce $P\left(\bigcup_{i=1}^k E_i^C\right) \leq \sum_{i=1}^k P(E_i^C)$. Pomocou Bonferroniho nerovnosti dostávame

$$P\left(\bigcap_{i=1}^k \left\{ \mathbf{A}'_i \boldsymbol{\beta} \in \left(\mathbf{A}'_i \hat{\boldsymbol{\beta}} \pm t_{n-p} \left(1 - \frac{\alpha}{2k}\right) s \sqrt{\mathbf{A}'_i (\mathbf{X}'\mathbf{X})^{-1} \mathbf{A}_i} \right) \right\}\right) \geq 1 - k \frac{\alpha}{k} = 1 - \alpha.$$

(b) Metóda maximálneho modulu.

Nech $\mathbf{A}'_1 \hat{\boldsymbol{\beta}}, \dots, \mathbf{A}'_k \hat{\boldsymbol{\beta}}$ sú nezávislé, t.j. $\mathbf{A}'_i (\mathbf{X}'\mathbf{X})^{-1} \mathbf{A}'_j = 0$ pre $i \neq j$,

$t_i = \frac{\mathbf{A}'_i \hat{\boldsymbol{\beta}} - c_i}{s \sqrt{\mathbf{A}'_i (\mathbf{X}'\mathbf{X})^{-1} \mathbf{A}_i}} \sim t_{n-p}$, $i = 1, 2, \dots, k$, nech ďalej $v(k, n-p, \alpha)$ je α -kritická hodnota rozdelenia $\max_{1 \leq i \leq k} |t_i|$, teda

$$1 - \alpha = P\left\{ \max_{1 \leq i \leq k} |t_i| \leq v(k, n-p, \alpha) \right\} = P\{|t_i| \leq v(k, n-p, \alpha) \quad \forall i\}.$$

Pravdepodobnosť, že k intervalov

$$\mathbf{A}'_i \hat{\boldsymbol{\beta}} \pm v(k, n-p, \alpha) s \sqrt{\mathbf{A}'_i (\mathbf{X}'\mathbf{X})^{-1} \mathbf{A}_i}, \quad i = 1, 2, \dots, k$$

súčasne pokryje všetkých k lineárnych kombinácií $\mathbf{A}'_i \boldsymbol{\beta}$ je $1 - \alpha$. Hodnoty $v(k, n-p, \alpha)$ sú napr. v Lamoš, Potocký, tab. VII. ak sú $\mathbf{A}'_i \hat{\boldsymbol{\beta}}$ lineárne závislé, treba v nahradiť inou hodnotou, pozri napr. Hahn, Hendrickson, Biometrika 58, 1971. Intervaly v tomto prípade zostanú rovnaké.

(c) Scheffeho metóda.

Je založená na vete 6.8, ktorá zase vychádza z nasledujúcej lemy

Lema 6.7. *Nech $\mathbf{M}_{t,t}$ je pozitívne definitná matica. Pre ľubovoľný $\mathbf{x} \in \mathcal{R}^t$ platí*

$$\mathbf{x}'\mathbf{M}\mathbf{x} \leq 1 \iff (\mathbf{h}'\mathbf{x})^2 \leq \mathbf{h}'\mathbf{M}^{-1}\mathbf{h} \quad \forall \mathbf{h} \in \mathcal{R}^t.$$

Dôkaz. pozri anděl, str. 147.

Veta 6.8. Nech lineárny priestor $\mathcal{B} \subset \mathcal{R}^p$ je generovaný vektormi $\mathbf{a}_1, \dots, \mathbf{a}_k$, čiže $\mathcal{B} = \mu(\mathbf{a}_1 \dotsc \mathbf{a}_k)_{p,k}$ a nech $h(\mathbf{a}_1 \dotsc \mathbf{a}_k) = k$. Potom

$$P \left\{ |\mathbf{a}'\hat{\boldsymbol{\beta}} - \mathbf{a}'\boldsymbol{\beta}| \leq s \sqrt{k F_{k,n-p}(1-\alpha) \mathbf{a}'(\mathbf{X}'\mathbf{X})^{-1} \mathbf{a}} \quad \forall \mathbf{a} \in \mathcal{B} \right\} = 1 - \alpha.$$

Dôkaz. Označme $\mathbf{A}' = (\mathbf{a}_1 \dotsc \mathbf{a}_k)$, teda $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} \mathbf{a}'_1 \\ \vdots \\ \mathbf{a}'_k \end{pmatrix}_{k,p}$, pričom $h(\mathbf{A}) = k$. Podľa vety 6.6 (c) má

$$\begin{aligned} & \frac{(n-p)(\mathbf{A}\hat{\boldsymbol{\beta}} - \mathbf{A}\boldsymbol{\beta})'(\mathbf{A}(\mathbf{X}'\mathbf{X})^{-1}\mathbf{A}')^{-1}(\mathbf{A}\hat{\boldsymbol{\beta}} - \mathbf{A}\boldsymbol{\beta})}{k(n-p)s^2} = \\ & = \frac{(\mathbf{A}\hat{\boldsymbol{\beta}} - \mathbf{A}\boldsymbol{\beta})'(\mathbf{A}(\mathbf{X}'\mathbf{X})^{-1}\mathbf{A}')^{-1}(\mathbf{A}\hat{\boldsymbol{\beta}} - \mathbf{A}\boldsymbol{\beta})}{ks^2} \sim F_{k,n-p} \end{aligned}$$

rozdelenie. Teda

$$P \left\{ (\mathbf{A}\hat{\boldsymbol{\beta}} - \mathbf{A}\boldsymbol{\beta})' \frac{(\mathbf{A}(\mathbf{X}'\mathbf{X})^{-1}\mathbf{A}')^{-1}}{ks^2 F_{k,n-p}(1-\alpha)} (\mathbf{A}\hat{\boldsymbol{\beta}} - \mathbf{A}\boldsymbol{\beta}) \leq 1 \right\} = 1 - \alpha$$

a podľa lemy 6.7 je

$$P \left\{ \left[\mathbf{h}'(\mathbf{A}\hat{\boldsymbol{\beta}} - \mathbf{A}\boldsymbol{\beta}) \right]^2 \leq [ks^2 F_{k,n-p}(1-\alpha)] \mathbf{h}'\mathbf{A}(\mathbf{X}'\mathbf{X})^{-1}\mathbf{A}'\mathbf{h} \quad \forall \mathbf{h} \in \mathcal{R}^k \right\} = 1 - \alpha,$$

čiže

$$P \left\{ \left[(\mathbf{A}'\mathbf{h})'(\hat{\boldsymbol{\beta}} - \boldsymbol{\beta}) \right]^2 \leq ks^2 F_{k,n-p}(1-\alpha) (\mathbf{A}'\mathbf{h})'(\mathbf{X}'\mathbf{X})^{-1}\mathbf{A}'\mathbf{h} \quad \forall \mathbf{h} \in \mathcal{R}^k \right\} = 1 - \alpha,$$

čo je to isté ako

$$P \left\{ (\mathbf{a}'\hat{\boldsymbol{\beta}} - \mathbf{a}'\boldsymbol{\beta})^2 \leq ks^2 F_{k,n-p}(1-\alpha) \mathbf{a}'(\mathbf{X}'\mathbf{X})^{-1} \mathbf{a} \quad \forall \mathbf{a} \in \mu(\mathbf{A}') = \mathcal{B} \right\} = 1 - \alpha. \quad \square$$

6.3. MATICA PLÁNU \mathbf{X} NEMÁ PLNÚ HODNOSŤ

Nech $h(\mathbf{X}_{n,p}) = r < p \leq n$.

Normálne rovnice majú veľa rôznych riešení, pričom jedno riešenie $\hat{\boldsymbol{\beta}}$ nemôžeme považovať za odhad $\boldsymbol{\beta}$. Treba odstrániť nejednoznačnosť. Robí sa to nasledujúcim spôsobom. Uvažujme maticu $\mathbf{B}_{p-r,p}$, ktorej riadky sú nezávislé, t.j. $h(\mathbf{B}) = p - r$, pričom tieto riadky nezávisia od riadkov matice plánu \mathbf{X} . Preto $h \begin{pmatrix} \mathbf{X} \\ \mathbf{B} \end{pmatrix}_{n+p-r,p} = p$

(matica plnej hodnosti v stĺpcoch). Pre maticu $\begin{pmatrix} \mathbf{X}_{n,p} \\ \mathbf{B}_{p-r,p} \end{pmatrix} = \mathbf{F}_{n+p-r,p}$ platí, že $h(\mathbf{F}) = p$. Preto $p \times p$ matica $\mathbf{F}'\mathbf{F} = (\mathbf{X}' \ \mathbf{B}') \begin{pmatrix} \mathbf{X} \\ \mathbf{B} \end{pmatrix} = \mathbf{X}'\mathbf{X} + \mathbf{B}'\mathbf{B}$ je regulárna

($\mu(\mathbf{F}'\mathbf{F}) = \mu(\mathbf{F}')$, čiže aj $h(\mathbf{F}'\mathbf{F}) = h(\mathbf{F}') = h(\mathbf{F}) = p$). K normálnym rovniciam $\mathbf{X}'\mathbf{X}\boldsymbol{\beta} = \mathbf{X}'\mathbf{Y}$ pridáme rovnice $\mathbf{B}'\mathbf{B}\boldsymbol{\beta} = \mathbf{0}$ a dostávame

$$\mathbf{X}'\mathbf{X}\boldsymbol{\beta} + \mathbf{B}'\mathbf{B}\boldsymbol{\beta} = \mathbf{F}'\mathbf{F}\boldsymbol{\beta} = \mathbf{X}'\mathbf{Y},$$

ktorých riešenie

$$\hat{\boldsymbol{\beta}} = (\mathbf{F}'\mathbf{F})^{-1}\mathbf{X}'\mathbf{Y}$$

je jediné. Pre toto $\hat{\boldsymbol{\beta}}$ platí

$$\mathcal{E}(\hat{\boldsymbol{\beta}}) = (\mathbf{F}'\mathbf{F})^{-1}\mathbf{X}'\mathbf{X}\boldsymbol{\beta} = (\mathbf{F}'\mathbf{F})^{-1}(\mathbf{X}'\mathbf{X} + \mathbf{B}'\mathbf{B})\boldsymbol{\beta} = \boldsymbol{\beta}.$$

Dostávame teda “zúženie“ systému normálnych rovníc, ktorý má takto jediné riešenie (postup pri analýze rozptylu).

Definícia 6.9. $\mathbf{A}'\boldsymbol{\beta}$ je lineárne nevychýlene odhadnuteľná ak existuje pre ňu lineárny nevychýlený odhad, t.j. ak existuje $\mathbf{l} \in \mathcal{R}^n$, že $\mathcal{E}_{\boldsymbol{\beta}}(\mathbf{l}'\mathbf{Y}) = \mathbf{A}'\boldsymbol{\beta} \quad \forall \boldsymbol{\beta} \in \mathcal{R}^p$.

Lema 6.10. $\mathbf{A}'\boldsymbol{\beta}$ je lineárne nevychýlene odhadnuteľná práve vtedy ak $\mathbf{A} \in \mu(\mathbf{X}')$.

Dôkaz. nájdete v anděl.

Veta 6.11. Nech $\mathbf{A}'\boldsymbol{\beta}$ je lineárne nevychýlene odhadnuteľná, $\hat{\boldsymbol{\beta}}$ je ľubovoľné riešenie normálnych rovníc, t.j. $\mathbf{X}'\mathbf{X}\hat{\boldsymbol{\beta}} = \mathbf{X}'\mathbf{Y}$. Potom

(a) $\mathbf{A}'\hat{\boldsymbol{\beta}}$ je jednoznačný,

(b) $\mathbf{A}'\hat{\boldsymbol{\beta}}$ je NNLO (najlepši nevychýlený lineárny odhad) $\mathbf{A}'\boldsymbol{\beta}$, t.j. pre každý iný lineárny nevychýlený odhad $\widetilde{\mathbf{A}}'\boldsymbol{\beta}$ funkcie $\mathbf{A}'\boldsymbol{\beta}$ platí $\mathcal{D}(\widetilde{\mathbf{A}}'\boldsymbol{\beta}) - \mathcal{D}(\mathbf{A}'\hat{\boldsymbol{\beta}}) \geq 0$.

Dôkaz. Nájdete v anděl.

Skôr ako ukážeme test hypotézy $H : \mathbf{A}\boldsymbol{\beta} = \mathbf{0}$, dokážeme si dve lemy.

Lema 6.12. Nech $\mathbf{A}_{m,k}, \mathbf{B}_{n,k}$ sú ľubovoľné pevné matice, $h(\mathbf{B}) = r \leq \min\{n, k\}$. Platí

$$(6.4) \quad h\left(\begin{array}{c} \mathbf{A} \\ \mathbf{B} \end{array}\right) = h[\mathbf{A}(\mathbf{I} - \mathbf{B}'(\mathbf{B}\mathbf{B}')^{-1}\mathbf{B})] + h(\mathbf{B}).$$

Dôkaz. Matica $(\mathbf{B}'\mathbf{I} - \mathbf{B}'(\mathbf{B}\mathbf{B}')^{-1}\mathbf{B})_{k,n+k}$ má hodnotu k , lebo každý stĺpec matice \mathbf{B}' , teda $\mathbf{B}'\mathbf{e}_i$ je kolmý na všetky stĺpce matice $\mathbf{I} - \mathbf{B}'(\mathbf{B}\mathbf{B}')^{-1}\mathbf{B}$, teda na $(\mathbf{I} - \mathbf{B}'(\mathbf{B}\mathbf{B}')^{-1}\mathbf{B})\mathbf{e}_j$, $j = 1, 2, \dots, k$. lebo $\mathbf{e}_i'\mathbf{B}(\mathbf{I} - \mathbf{B}'(\mathbf{B}\mathbf{B}')^{-1}\mathbf{B})\mathbf{e}_j = 0$, $j = 1, 2, \dots, k$. Teda \mathbf{B}' má r lineárne nezávislých stĺpcov, $\mathbf{I} - \mathbf{B}'(\mathbf{B}\mathbf{B}')^{-1}\mathbf{B}$ má $k - r$ lineárne nezávislých stĺpcov (lebo $h(\mathbf{I} - \mathbf{B}'(\mathbf{B}\mathbf{B}')^{-1}\mathbf{B}) = k - r$). Tiež $\mathbf{B}'\mathbf{e}_i$ je kolmé na $(\mathbf{I} - \mathbf{B}'(\mathbf{B}\mathbf{B}')^{-1}\mathbf{B})\mathbf{e}_j$, $j \in \{1, 2, \dots, k\}$, teda $(\mathbf{B}'\mathbf{I} - \mathbf{B}'(\mathbf{B}\mathbf{B}')^{-1}\mathbf{B})_{k,n+k}$ má k lineárne nezávislých stĺpcov, teda $h(\mathbf{B}'\mathbf{I} - \mathbf{B}'(\mathbf{B}\mathbf{B}')^{-1}\mathbf{B}) = k$ (plná hodnota v riadkoch). Teraz

$$\begin{aligned} h\left(\begin{array}{c} \mathbf{A} \\ \mathbf{B} \end{array}\right) &= h\left(\begin{array}{c} \mathbf{A} \\ \mathbf{B} \end{array}\right) (\mathbf{B}'\mathbf{I} - \mathbf{B}'(\mathbf{B}\mathbf{B}')^{-1}\mathbf{B}) = h\left(\begin{array}{cc} \mathbf{A}\mathbf{B}' & \mathbf{A}(\mathbf{I} - \mathbf{B}'(\mathbf{B}\mathbf{B}')^{-1}\mathbf{B}) \\ \mathbf{B}\mathbf{B}' & \mathbf{0} \end{array}\right) = \\ &= h\left[\left(\begin{array}{cc} \mathbf{I} & -\mathbf{A}\mathbf{B}'(\mathbf{B}\mathbf{B}')^{-1} \\ \mathbf{0} & \mathbf{I} \end{array}\right) \left(\begin{array}{cc} \mathbf{A}\mathbf{B}' & \mathbf{A}(\mathbf{I} - \mathbf{B}'(\mathbf{B}\mathbf{B}')^{-1}\mathbf{B}) \\ \mathbf{B}\mathbf{B}' & \mathbf{0} \end{array}\right)\right] = \\ &= h\left(\begin{array}{cc} \mathbf{0} & \mathbf{A}(\mathbf{I} - \mathbf{B}'(\mathbf{B}\mathbf{B}')^{-1}\mathbf{B}) \\ \mathbf{B}\mathbf{B}' & \mathbf{0} \end{array}\right) = h(\mathbf{B}) + h[\mathbf{A}(\mathbf{I} - \mathbf{B}'(\mathbf{B}\mathbf{B}')^{-1}\mathbf{B})]. \quad \square \end{aligned}$$

Lema 6.13. ak $h(\mathbf{X}_{n,p}) = r < p \leq n$, $\mathbf{A}_{q,p}$ má hodnotu $h(\mathbf{A}) = q$, $h\left(\begin{smallmatrix} \mathbf{X} \\ \mathbf{A} \end{smallmatrix}\right) = r + q$ (riadky \mathbf{A} sú lineárne nezávislé s riadkami \mathbf{X}), tak ľubovoľné $\boldsymbol{\theta} \in \mu(\mathbf{X})$ sa dá písať ako $\mathbf{X}\boldsymbol{\delta}$, kde $\mathbf{A}\boldsymbol{\delta} = \mathbf{0}$.

Dôkaz. Zrejme $\mu(\mathbf{X}) \supset \mu(\mathbf{X}(\mathbf{I} - \mathbf{A}'(\mathbf{A}\mathbf{A}')^{-1}\mathbf{A}))$. ale podľa (6.4) je hodnota $h(\mathbf{X}(\mathbf{I} - \mathbf{A}'(\mathbf{A}\mathbf{A}')^{-1}\mathbf{A})) = h\left(\begin{smallmatrix} \mathbf{X} \\ \mathbf{A} \end{smallmatrix}\right) - h(\mathbf{A}) = r + q - q = r = h(\mathbf{X})$, teda $\mu(\mathbf{X}) = \mu(\mathbf{X}(\mathbf{I} - \mathbf{A}'(\mathbf{A}\mathbf{A}')^{-1}\mathbf{A}))$ t.j. každé $\boldsymbol{\theta} \in \mu(\mathbf{X})$ sa dá písať ako $\mathbf{X}\boldsymbol{\delta}$, kde $\mathbf{A}\boldsymbol{\delta} = \mathbf{0}$. \square

ak chceme testovať $H : \mathbf{A}\boldsymbol{\beta} = \mathbf{0}$ keď $h(\mathbf{X}) = r < p$, $h(\mathbf{A}_{q,p}) = q$, pričom $h\left(\begin{smallmatrix} \mathbf{X} \\ \mathbf{A} \end{smallmatrix}\right) = r + q$, tak podľa lemy 6.13

$$R_H^2 = \min_{\boldsymbol{\beta}: \mathbf{A}\boldsymbol{\beta}=\mathbf{0}} (\mathbf{Y} - \mathbf{X}\boldsymbol{\beta})'(\mathbf{Y} - \mathbf{X}\boldsymbol{\beta}) = \min_{\boldsymbol{\gamma}} (\mathbf{Y} - \mathbf{X}\boldsymbol{\gamma})'(\mathbf{Y} - \mathbf{X}\boldsymbol{\gamma}) = R_0^2$$

a H_0 nevieme testovať (podľa vety 6.6).

Definícia 6.14. Hypotéza $H_0 : \mathbf{A}\boldsymbol{\beta} = \mathbf{0}$ je testovateľná, ak riadky matice \mathbf{A} sú lineárne kombinácie riadkov matice \mathbf{X} , t.j. ak existuje matica $\mathbf{M}_{q,n}$, že $\mathbf{A} = \mathbf{M}\mathbf{X}$.

Poznámka. Hypotéza $H_0 : \mathbf{A}\boldsymbol{\beta} = \mathbf{0}$ je testovateľná, ak každá lineárna kombinácia $\mathbf{A}'_i\boldsymbol{\beta} = \{\mathbf{A}\}_i\boldsymbol{\beta}$ je lineárne nevychýlene odhadnuteľná.

Poznámka. ak máme $H_0 : \mathbf{A}\boldsymbol{\beta} = \mathbf{c}$, tak vezmime $\boldsymbol{\beta}_0$ – ľubovoľné riešenie systému $\mathbf{A}\boldsymbol{\beta} = \mathbf{c}$ a vytvoríme $\boldsymbol{\delta} = \boldsymbol{\beta} - \boldsymbol{\beta}_0$. Model $\mathbf{Y} = \mathbf{X}\boldsymbol{\beta} + \boldsymbol{\varepsilon}$ prepíšeme na model $\mathbf{Y} - \mathbf{X}\boldsymbol{\beta}_0 = \mathbf{X}(\boldsymbol{\beta} - \boldsymbol{\beta}_0) + \boldsymbol{\varepsilon}$, čiže (pri označení observačného vektora $\mathbf{Y}^* = \mathbf{Y} - \mathbf{X}\boldsymbol{\beta}_0$) dostávame model $\mathbf{Y}^* = \mathbf{X}\boldsymbol{\delta} + \boldsymbol{\varepsilon}$. V tomto modeli testujeme hypotézu $\mathbf{A}\boldsymbol{\delta} = \mathbf{0}$. Pôvodná hypotéza $H_0 : \mathbf{A}\boldsymbol{\beta} = \mathbf{c}$ je teda testovateľná práve vtedy ak hypotéza $\mathbf{A}\boldsymbol{\delta} = \mathbf{0}$ je testovateľná v “novom” modeli, teda ak $\mathbf{A} = \mathbf{M}\mathbf{X}$.

Veta 6.15. Nech $H_0 : \mathbf{A}\boldsymbol{\beta} = \mathbf{c}$, kde $\mathbf{A}_{q,p}$ má hodnotu $h(\mathbf{A}) = q \leq r$, je testovateľná, t.j. $\mathbf{A} = \mathbf{M}\mathbf{X}$ (\mathbf{Y} je normálne rozdelený). Nech

$$R_0^2 = \min_{\boldsymbol{\beta}} (\mathbf{Y} - \mathbf{X}\boldsymbol{\beta})'(\mathbf{Y} - \mathbf{X}\boldsymbol{\beta}),$$

$$R_H^2 = \min_{\boldsymbol{\beta}: \mathbf{A}\boldsymbol{\beta}=\mathbf{c}} (\mathbf{Y} - \mathbf{X}\boldsymbol{\beta})'(\mathbf{Y} - \mathbf{X}\boldsymbol{\beta}).$$

ak H_0 platí, tak

(a) $R_H^2 - R_0^2 = (\mathbf{A}\hat{\boldsymbol{\beta}} - \mathbf{c})'(\mathbf{A}(\mathbf{X}'\mathbf{X})^{-1}\mathbf{A}')^{-1}(\mathbf{A}\hat{\boldsymbol{\beta}} - \mathbf{c})$, kde $\hat{\boldsymbol{\beta}}$ je ľubovoľné riešenie normálnych rovníc $\mathbf{X}'\mathbf{X}\boldsymbol{\beta} = \mathbf{X}'\mathbf{Y}$,

$$(b) \frac{n-r}{q} \frac{R_H^2 - R_0^2}{R_0^2} \sim F_{q,n-r}.$$

Dôkaz. pozri anděl.

7. VIACROZMERNÁ REGRESNÁ ANALÝZA

7.1. ÚVOD

Na každom z n objektov robíme merania p znakov. Výsledky meraní na i -tom

objekte sú realizácie náhodného vektora

$$\mathbf{Y}'_i = (Y_{i1}Y_{i2}\dots Y_{ip}) = (x_{i1}x_{i2}\dots x_{iq}) \begin{pmatrix} \beta_{11} & \beta_{12} & \dots & \beta_{1p} \\ \beta_{21} & \beta_{22} & \dots & \beta_{2p} \\ \vdots & & & \\ \beta_{q1} & \beta_{q2} & \dots & \beta_{qp} \end{pmatrix} + \varepsilon'_i,$$

pričom Y_{il} je meranie l -tého znaku na i -tom objekte. Všetky merania dávajú maticu $\mathbf{Y}_{n,p}$ náhodných veličín (jej i -ty riadok značí p meraní na i -tom objekte), teda

$$\mathbf{Y} = \begin{pmatrix} Y_{11} & Y_{12} & \dots & Y_{1p} \\ Y_{21} & Y_{22} & \dots & Y_{2p} \\ \vdots & & & \\ Y_{n1} & Y_{n2} & \dots & Y_{np} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_{11} & x_{12} & \dots & x_{1q} \\ x_{21} & x_{22} & \dots & x_{2q} \\ \vdots & & & \\ x_{n1} & x_{n2} & \dots & x_{nq} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \beta_{11} & \beta_{12} & \dots & \beta_{1p} \\ \beta_{21} & \beta_{22} & \dots & \beta_{2p} \\ \vdots & & & \\ \beta_{q1} & \beta_{q2} & \dots & \beta_{qp} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \varepsilon'_1 \\ \varepsilon'_2 \\ \vdots \\ \varepsilon'_n \end{pmatrix}$$

čiže

$$(7.1) \quad \mathbf{Y}_{n,p} = \mathbf{X}_{n,q} \mathbf{B}_{q,p} + \varepsilon_{n,p}.$$

V modeli (7.1) je $\mathbf{X}_{n,q}$ daná pevná známa matica, \mathbf{B} matica neznámych parametrov, $\varepsilon_i = (\varepsilon_{i1}\varepsilon_{i2}\dots\varepsilon_{ip})'$ je chybový vektor na i -tom objekte a

$$\varepsilon_{n,p} = \begin{pmatrix} \varepsilon_{11} & \varepsilon_{12} & \dots & \varepsilon_{1p} \\ \varepsilon_{21} & \varepsilon_{22} & \dots & \varepsilon_{2p} \\ \vdots & & & \\ \varepsilon_{n1} & \varepsilon_{n2} & \dots & \varepsilon_{np} \end{pmatrix}$$

je matica náhodných chýb. Platí $\varepsilon_i \sim N_p(\mathbf{0}, \mathbf{\Sigma})$, $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \dots, \varepsilon_n$ sú navzájom nezávislé, $\mathbf{B}_{q,p} = (\beta_1, \dots, \beta_p)$. Vektor meraní i -tého znaku je $(Y_{1i}Y_{2i}\dots Y_{ni})' = \mathbf{Z}_i \in \mathcal{R}^n$, $i = 1, 2, \dots, p$. Teda

$$\mathcal{E}(\mathbf{Z}_j) = \mathbf{X}_{n,q} \beta_j, \quad \beta_j = \begin{pmatrix} \beta_{1j} \\ \beta_{2j} \\ \vdots \\ \beta_{qj} \end{pmatrix} \in \mathcal{R}^q,$$

$$\text{cov}(\mathbf{Z}_j) = \sigma_{jj} \mathbf{I}, \quad j = 1, 2, \dots, p,$$

$$\sigma_{jj} = \{\mathbf{\Sigma}\}_{jj}$$

$$\begin{aligned} \text{cov}(\mathbf{Z}_i, \mathbf{Z}_j) &= \begin{pmatrix} \text{cov}(Y_{1i}, Y_{1j}) & \text{cov}(Y_{1i}, Y_{2j}) & \dots & \text{cov}(Y_{1i}, Y_{nj}) \\ \text{cov}(Y_{2i}, Y_{1j}) & \text{cov}(Y_{2i}, Y_{2j}) & \dots & \text{cov}(Y_{2i}, Y_{nj}) \\ \vdots & & & \\ \text{cov}(Y_{ni}, Y_{1j}) & \text{cov}(Y_{ni}, Y_{2j}) & \dots & \text{cov}(Y_{ni}, Y_{nj}) \end{pmatrix} = \\ &= \begin{pmatrix} \sigma_{ij} & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \sigma_{ij} & & 0 \\ \vdots & & & \\ 0 & 0 & \dots & \sigma_{ij} \end{pmatrix} = \sigma_{ij} \mathbf{I}_{n,n} = \{\mathbf{\Sigma}\}_{ij} \mathbf{I}_{n,n}. \end{aligned}$$

Iné vyjadrenie modelu je

$$vec\mathbf{Y} = \mathbf{Z}_{np,1} = \begin{pmatrix} \mathbf{Z}_1 \\ \mathbf{Z}_2 \\ \vdots \\ \mathbf{Z}_p \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathbf{X} & \mathbf{0} & \dots & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{X} & \dots & \mathbf{0} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \dots & \mathbf{X} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \beta_1 \\ \beta_2 \\ \vdots \\ \beta_p \end{pmatrix}_{pq,1} + vec\boldsymbol{\varepsilon},$$

čiže

$$vec\mathbf{Y} = (\mathbf{I}_{p,p} \otimes \mathbf{X}_{n,q})vec\mathbf{B} + vec\boldsymbol{\varepsilon},$$

$$cov(vec\mathbf{Y}) = \boldsymbol{\Sigma}_{p,p} \otimes \mathbf{I}_{n,n}.$$

ak $h(\mathbf{X}) = q < n$, tak najlepší lineárny nevychýlený odhad β_i je

$$\hat{\beta}_i = (\mathbf{X}'\mathbf{X})^{-1}\mathbf{X}'\mathbf{Z}_i$$

a nevychýlený odhad σ_{ii} je

$$\frac{\mathbf{Z}_i'(\mathbf{I} - \mathbf{X}(\mathbf{X}'\mathbf{X})^{-1}\mathbf{X}')\mathbf{Z}_i}{n - q} = \frac{R_0^2(i, i)}{n - q} = \hat{\sigma}_{ii}.$$

Teda NNLO parametrov \mathbf{B} je

$$\hat{\mathbf{B}} = (\mathbf{X}'\mathbf{X})^{-1}\mathbf{X}'\mathbf{Y}.$$

Označme

$$R_0^2(i, j) = (\mathbf{Z}_i - \mathbf{X}\hat{\beta}_i)'(\mathbf{Z}_j - \mathbf{X}\hat{\beta}_j).$$

Pre vektor $\mathbf{Z}_i + \mathbf{Z}_j$ platí

$$\mathcal{E}(\mathbf{Z}_i + \mathbf{Z}_j) = \mathbf{X}(\beta_i + \beta_j), \quad cov(\mathbf{Z}_i + \mathbf{Z}_j) = (\sigma_{ii} + 2\sigma_{ij} + \sigma_{jj})\mathbf{I}.$$

NNLO $\beta_i + \beta_j$ je

$$(\mathbf{X}'\mathbf{X})^{-1}\mathbf{X}'(\mathbf{Z}_i + \mathbf{Z}_j) = \hat{\beta}_i + \hat{\beta}_j.$$

Nevychýleným odhadom

$$\begin{aligned} \sigma_{ii} + \widehat{2\sigma_{ij}} + \sigma_{jj} &= \frac{(\mathbf{Z}_i + \mathbf{Z}_j)'(\mathbf{I} - \mathbf{X}(\mathbf{X}'\mathbf{X})^{-1}\mathbf{X}')(\mathbf{Z}_i + \mathbf{Z}_j)}{n - q} = \\ &= \frac{R_0^2(i, i)}{n - q} + \frac{R_0^2(j, j)}{n - q} + 2\frac{R_0^2(i, j)}{n - q}, \end{aligned}$$

teda nevychýleným odhadom σ_{ij} je

$$\hat{\sigma}_{ij} = \frac{R_0^2(i, j)}{n - q}.$$

Matica

$$\mathbf{R}_0 = \begin{pmatrix} R_0^2(1, 1) & R_0^2(1, 2) & \dots & R_0^2(1, p) \\ R_0^2(2, 1) & R_0^2(2, 2) & \dots & R_0^2(2, p) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ R_0^2(p, 1) & R_0^2(p, 2) & \dots & R_0^2(p, p) \end{pmatrix}$$

je zvyškovou maticou súčtov štvorcov a súčinov. Nevychýleným odhadom matice Σ je teda

$$\hat{\Sigma} = \frac{1}{n-q} \mathbf{R}_0.$$

Dá sa písať

$$\mathbf{R}_0 = \mathbf{Y}'(\mathbf{I} - \mathbf{X}(\mathbf{X}'\mathbf{X})^{-1}\mathbf{X}')\mathbf{Y} = \mathbf{Y}'\mathbf{P}\mathbf{Y}.$$

ak sú merania na jednotlivých objektoch nezávislé a majú mnohorozmerné normálne rozdelenie s tou istou kovariančnou maticou Σ , potom môžeme považovať $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \dots, \varepsilon_n$ za náhodný výber z $N_p(\mathbf{0}, \Sigma)$. V takom prípade má $\text{vec}\varepsilon$ rozdelenie $N_{np}(\mathbf{0}, \Sigma_{p,p} \otimes \mathbf{I}_{n,n})$ (vyplýva z definície mnohorozmerného normálneho rozdelenia). Preto v takom prípade $\text{vec}\mathbf{Y} \sim N_{np}((\mathbf{I}_{p,p} \otimes \mathbf{X})\text{vec}\mathbf{B}, \Sigma_{p,p} \otimes \mathbf{I}_{n,n})$. Platí veta

Veta 7.1. *Nech v modeli (7.1) je $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \dots, \varepsilon_n$ náhodný výber z $N_p(\mathbf{0}, \Sigma)$. Potom*

(a) $\hat{\mathbf{B}}$ má normálne rozdelenie (rozumie sa tým, že $\text{vec}\hat{\mathbf{B}}$ má mnohorozmerné normálne rozdelenie).

(b) $\mathbf{Y}'\mathbf{P}\mathbf{Y} \sim W_p(n-q, \Sigma)$

(c) $\hat{\mathbf{B}}$ a $\hat{\Sigma}$ sú nezávislé (rozumie sa tým, že $\text{vec}\hat{\mathbf{B}}$ a $\text{vec}\hat{\Sigma}$ sú nezávislé).

Dôkaz.

(a) Pretože $\hat{\mathbf{B}} = (\mathbf{X}'\mathbf{X})^{-1}\mathbf{X}'\mathbf{Y}$, je $\text{vec}\hat{\mathbf{B}} = \text{vec}(\mathbf{X}'\mathbf{X})^{-1}\mathbf{X}'\mathbf{Y} = \text{vec}(\mathbf{X}'\mathbf{X})^{-1}\mathbf{X}'\mathbf{Y}\mathbf{I} = (\mathbf{I} \otimes (\mathbf{X}'\mathbf{X})^{-1}\mathbf{X}')\text{vec}\mathbf{Y}$, z čoho je tvrdenie (a) evidentné.

(b) $\mathbf{Y}'\mathbf{P}\mathbf{Y} = \mathbf{Y}'\mathbf{P}'\mathbf{P}\mathbf{Y} = (\mathbf{P}\mathbf{Y})'\mathbf{P}(\mathbf{X}\mathbf{B} + \varepsilon) = \varepsilon'\mathbf{P}\varepsilon \sim W_p(w, \Sigma) \iff \mathbf{P}^2 = \mathbf{P}$, (pozri vetu 2.9), čo je splnené. V tomto prípade $w = \text{tr}\mathbf{P} = n - q$

(c) $\text{vec}\hat{\mathbf{B}} = (\mathbf{I} \otimes (\mathbf{X}'\mathbf{X})^{-1}\mathbf{X}')\text{vec}\mathbf{Y}$ a $\text{vec}\hat{\Sigma} = \frac{1}{n-q}\text{vec}\mathbf{R}_0 = \frac{1}{n-q}\text{vec}(\mathbf{Y}'(\mathbf{I} - \mathbf{X}(\mathbf{X}'\mathbf{X})^{-1}\mathbf{X}')\mathbf{Y}) = \frac{1}{n-q}\text{vec}(\mathbf{Y}'(\mathbf{I} - \mathbf{X}(\mathbf{X}'\mathbf{X})^{-1}\mathbf{X}')(\mathbf{I} - \mathbf{X}(\mathbf{X}'\mathbf{X})^{-1}\mathbf{X}')\mathbf{Y})$. Stačí ak ukážeme, že $(\mathbf{I} \otimes (\mathbf{X}'\mathbf{X})^{-1}\mathbf{X}')\text{vec}\mathbf{Y}$ a $\text{vec}(\mathbf{I} - \mathbf{X}(\mathbf{X}'\mathbf{X})^{-1}\mathbf{X}')\mathbf{Y} = (\mathbf{I} \otimes (\mathbf{I} - \mathbf{X}(\mathbf{X}'\mathbf{X})^{-1}\mathbf{X}')\text{vec}\mathbf{Y}$ sú nezávislé. Pretože

$$\begin{aligned} & (\mathbf{I} \otimes (\mathbf{X}'\mathbf{X})^{-1}\mathbf{X}')[\text{cov}(\text{vec}\mathbf{Y})](\mathbf{I} \otimes (\mathbf{I} - \mathbf{X}(\mathbf{X}'\mathbf{X})^{-1}\mathbf{X}')) = \\ & = (\mathbf{I} \otimes (\mathbf{X}'\mathbf{X})^{-1}\mathbf{X}')(\Sigma \otimes \mathbf{I})(\mathbf{I} \otimes (\mathbf{I} - \mathbf{X}(\mathbf{X}'\mathbf{X})^{-1}\mathbf{X}')) = \mathbf{0}, \end{aligned}$$

dostávame aj tretie tvrdenie vety. \square

7.2. TESTOVANIE HYPOTÉZ

V modeli

$$\mathbf{Y}_{n,p} = \mathbf{X}_{n,q}\mathbf{B}_{q,p} + \varepsilon_{n,p},$$

kde $h(\mathbf{X}) = q(\leq n)$, $\varepsilon = \begin{pmatrix} \varepsilon'_1 \\ \varepsilon'_2 \\ \vdots \\ \varepsilon'_n \end{pmatrix}$, pričom $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \dots, \varepsilon_n$ je náhodný výber z $N_p(\mathbf{0}, \Sigma)$,

testujeme hypotézu

$$H_0 : \mathbf{C}_1\mathbf{B} = \mathbf{D},$$

\mathbf{C}_1 je známa $g \times q$ matica, $h(\mathbf{C}_1) = g$, \mathbf{D} je známa $g \times p$ matica.

Veta 7.2. V modeli (7.1) nech $h(\mathbf{X}) = q$, $n - q \geq p - 1$, Σ je regulárna, \mathbf{B}_0 je ľubovoľné riešenie rovníc $\mathbf{C}_1\mathbf{B} = \mathbf{D}$. Označme $\mathbf{Y}_+ = \mathbf{Y} - \mathbf{X}\mathbf{B}_0$. Za platnosti $H_0 : \mathbf{C}_1\mathbf{B} = \mathbf{D}$, $(h(\mathbf{C}_1) = g)$ má

$$\Lambda = \frac{|\mathbf{Y}'\mathbf{P}\mathbf{Y}|}{|\mathbf{Y}'\mathbf{P}\mathbf{Y} + \mathbf{Y}'_+\mathbf{P}_2\mathbf{Y}_+|}$$

Wilksovo $\Lambda(p, n - q, g)$ rozdelenie, pričom $\mathbf{P} = \mathbf{I} - \mathbf{X}(\mathbf{X}'\mathbf{X})^{-1}\mathbf{X}'$, $\mathbf{P}_2 = \mathbf{X}(\mathbf{X}'\mathbf{X})^{-1}\mathbf{C}'_1(\mathbf{C}_1(\mathbf{X}'\mathbf{X})^{-1}\mathbf{C}'_1)^{-1}\mathbf{C}_1(\mathbf{X}'\mathbf{X})^{-1}\mathbf{X}'$.

Dôkaz.

$$\mathbf{Y}'\mathbf{P}\mathbf{Y} = (\mathbf{X}\mathbf{B} + \boldsymbol{\varepsilon})'\mathbf{P}(\mathbf{X}\mathbf{B} + \boldsymbol{\varepsilon}) = \boldsymbol{\varepsilon}'\mathbf{P}\boldsymbol{\varepsilon}.$$

Podľa vety 2.9 má $\mathbf{Y}'\mathbf{P}\mathbf{Y}$ rozdelenie $W_p(r, \Sigma)$ práve vtedy ak $\mathbf{P}^2\mathbf{P}$, pričom v takomto prípade $r = \text{tr}\mathbf{P}$. Ľahko sa vidí, že naozaj $\mathbf{P}^2\mathbf{P}$ a $r = \text{tr}\mathbf{P} = n - q$, teda $\mathbf{Y}'\mathbf{P}\mathbf{Y} \sim W_p(n - q, \Sigma)$. Tiež platí

$$\mathbf{Y}'_+\mathbf{P}_2\mathbf{Y}_+ = (\mathbf{Y} - \mathbf{X}\mathbf{B}_0)'\mathbf{X}(\mathbf{X}'\mathbf{X})^{-1}\mathbf{C}'_1(\mathbf{C}_1(\mathbf{X}'\mathbf{X})^{-1}\mathbf{C}'_1)^{-1}\mathbf{C}_1(\mathbf{X}'\mathbf{X})^{-1}\mathbf{X}'(\mathbf{Y} - \mathbf{X}\mathbf{B}_0)$$

a za platnosti H_0 je

$$\begin{aligned} & \mathbf{Y}'_+\mathbf{P}_2\mathbf{Y}_+ = \\ & = (\mathbf{X}(\mathbf{B} - \mathbf{B}_0) + \boldsymbol{\varepsilon})'\mathbf{X}(\mathbf{X}'\mathbf{X})^{-1}\mathbf{C}'_1(\mathbf{C}_1(\mathbf{X}'\mathbf{X})^{-1}\mathbf{C}'_1)^{-1}\mathbf{C}_1(\mathbf{X}'\mathbf{X})^{-1}\mathbf{X}'(\mathbf{X}(\mathbf{B} - \mathbf{B}_0) + \boldsymbol{\varepsilon}) = \\ & = \boldsymbol{\varepsilon}'\mathbf{X}(\mathbf{X}'\mathbf{X})^{-1}\mathbf{C}'_1(\mathbf{C}_1(\mathbf{X}'\mathbf{X})^{-1}\mathbf{C}'_1)^{-1}\mathbf{C}_1(\mathbf{X}'\mathbf{X})^{-1}\mathbf{X}'\boldsymbol{\varepsilon}. \end{aligned}$$

Podľa vety 2.9 má $\mathbf{Y}'_+\mathbf{P}_2\mathbf{Y}_+$ rozdelenie $W_p(g, \Sigma)$. Podľa vety 2.13 sú $\mathbf{Y}'\mathbf{P}\mathbf{Y}$ a $\mathbf{Y}'_+\mathbf{P}_2\mathbf{Y}_+$ nezávislé, lebo

$$(\mathbf{I} - \mathbf{X}(\mathbf{X}'\mathbf{X})^{-1}\mathbf{X}')\mathbf{X}(\mathbf{X}'\mathbf{X})^{-1}\mathbf{C}'_1(\mathbf{C}_1(\mathbf{X}'\mathbf{X})^{-1}\mathbf{C}'_1)^{-1}\mathbf{C}_1(\mathbf{X}'\mathbf{X})^{-1}\mathbf{X}' = \mathbf{0}.$$

Podľa poznámky pod vetou 4.2 má

$$\frac{|\mathbf{Y}'\mathbf{P}\mathbf{Y}|}{|\mathbf{Y}'\mathbf{P}\mathbf{Y} + \mathbf{Y}'_+\mathbf{P}_2\mathbf{Y}_+|}$$

Wilksovo $\Lambda(p, n - q, g)$ rozdelenie. \square

Hypotézu $H_0 : \mathbf{C}_1\mathbf{B} = \mathbf{D}$ teda testujeme pomocou $\Lambda(p, n - q, g)$ rozdelenia. Zamietame ju pre malé hodnoty Λ .

Poznámka. Podobne v modeli (7.1), kde $h(\mathbf{X}) = q$, Σ je regulárna, môžeme testovať všeobecnejšiu hypotézu

$$H_0 : \mathbf{C}_1\mathbf{B}\mathbf{M}_1 = \mathbf{D},$$

kde \mathbf{M}_1 je známa $p \times r$ matica s $h(\mathbf{M}_1) = r$. Z modelu (7.1) totiž vyplýva model

$$(7.2) \quad \mathbf{Y}_{n,p}\mathbf{M}_1 = \mathbf{X}_{n,q}\mathbf{B}_{q,p}\mathbf{M}_1 + \boldsymbol{\varepsilon}_{n,p}\mathbf{M}_1,$$

v ktorom je matica observácií $\mathbf{Y}\mathbf{M}_1$, matica plánu \mathbf{X} a matica “neznámych parametrov“ $\mathbf{B}\mathbf{M}_1$, pričom $\boldsymbol{\varepsilon}'\boldsymbol{\varepsilon} \sim W_p(n, \Sigma)$ a podľa vety 2.6 má $\mathbf{M}'_1\boldsymbol{\varepsilon}'\boldsymbol{\varepsilon}\mathbf{M}_1 \sim W_p(r, \mathbf{M}'_1\Sigma\mathbf{M}_1)$ rozdelenie. $(\boldsymbol{\varepsilon}\mathbf{M}_1)'$ je preto náhodný výber z $N_p(\mathbf{0}, \mathbf{M}'_1\Sigma\mathbf{M}_1)$ rozdelenia. Teraz už úplne analogicky ako vo vete 7.2 dostávame, že za platnosti $H_0 : \mathbf{C}_1\mathbf{B}\mathbf{M}_1 = \mathbf{D}$ má

$$\frac{|\mathbf{E}|}{|\mathbf{H} + \mathbf{E}|}$$

$\Lambda(r, n - q, g)$ rozdelenie, pričom $\mathbf{E} = (\mathbf{Y}\mathbf{M}_1)'\mathbf{P}(\mathbf{Y}\mathbf{M}_1)$ a $\mathbf{H} = [(\mathbf{Y} - \mathbf{X}\mathbf{B}_0)\mathbf{M}_1]'\mathbf{P}_2[(\mathbf{Y} - \mathbf{X}\mathbf{B}_0)\mathbf{M}_1]$.

7.3. INTERVALY SPOĽAHLIVOSTI PRE PARAMETRE MODELU

Pomocou kapitoly 7.2 nájdeme intervaly spoľahlivosti pre lineárne kombinácie $\mathbf{b}'\mathbf{C}_1\mathbf{B}\mathbf{A}$ (alebo $\mathbf{b}'\mathbf{C}_1\mathbf{B}\mathbf{M}_1\mathbf{A}$) v prípadoch, že \mathbf{A}, \mathbf{b} sú pevne dané; \mathbf{A} je pevne dané a pre každé \mathbf{b} ; pre každé \mathbf{A}, \mathbf{b} .

Nech \mathbf{B} sú skutočné parametre (ich skutočná hodnota). Položíme tentokrát $\mathbf{Y}_+ = \mathbf{Y} - \mathbf{X}\mathbf{B}$. Nech $\mathbf{A} \in \mathcal{R}^p$, $\mathbf{b} \in \mathcal{R}^g$ sú pevne dané. Podľa lemy 2.12

$$\begin{aligned} \mathbf{b}'\mathbf{C}_1(\mathbf{X}'\mathbf{X})^{-1}\mathbf{X}'\mathbf{Y}_+\mathbf{A} &= \text{vec}(\mathbf{b}'\mathbf{C}_1(\mathbf{X}'\mathbf{X})^{-1}\mathbf{X}'\mathbf{Y}_+\mathbf{A}) = \\ &= \text{vec}(\mathbf{b}'\mathbf{C}_1(\mathbf{X}'\mathbf{X})^{-1}\mathbf{X}'\boldsymbol{\varepsilon}\mathbf{A}) = (\mathbf{A}' \otimes \mathbf{b}'\mathbf{C}_1(\mathbf{X}'\mathbf{X})^{-1}\mathbf{X}')\text{vec}\boldsymbol{\varepsilon}, \end{aligned}$$

pričom $\text{cov}(\text{vec}\boldsymbol{\varepsilon}) = \text{cov}(\text{vec}\mathbf{Y}) = \boldsymbol{\Sigma}_{p,p} \otimes \mathbf{I}_{n,n}$ (pozri kapitolu 7.1). Preto

$$\begin{aligned} \mathcal{D}(\mathbf{b}'\mathbf{C}_1(\mathbf{X}'\mathbf{X})^{-1}\mathbf{X}'\mathbf{Y}_+\mathbf{A}) &= \mathcal{D}((\mathbf{A}' \otimes \mathbf{b}'\mathbf{C}_1(\mathbf{X}'\mathbf{X})^{-1}\mathbf{X}')\text{vec}\boldsymbol{\varepsilon}) = \\ &= (\mathbf{A}' \otimes \mathbf{b}'\mathbf{C}_1(\mathbf{X}'\mathbf{X})^{-1}\mathbf{X}')(\boldsymbol{\Sigma} \otimes \mathbf{I})(\mathbf{A} \otimes \mathbf{X}(\mathbf{X}'\mathbf{X})^{-1}\mathbf{C}'_1\mathbf{b}) = (\mathbf{A}'\boldsymbol{\Sigma}\mathbf{A})(\mathbf{b}'\mathbf{C}_1(\mathbf{X}'\mathbf{X})^{-1}\mathbf{C}'_1\mathbf{b}). \end{aligned}$$

Už v kapitole 7.2 sme ukázali, že $\mathbf{Y}'\mathbf{P}\mathbf{Y} = \mathbf{Y}'(\mathbf{I} - \mathbf{X}(\mathbf{X}'\mathbf{X})^{-1}\mathbf{X}')\mathbf{Y} \sim W_p(n-q, \boldsymbol{\Sigma})$ a teda pre $\mathbf{A} \neq \mathbf{0}$ je podľa vety 2.8

$$\frac{\mathbf{A}'\mathbf{Y}'\mathbf{P}\mathbf{Y}\mathbf{A}}{\mathbf{A}'\boldsymbol{\Sigma}\mathbf{A}} \sim \chi_{n-q}^2.$$

Samozrejme

$$\frac{\mathbf{A}'\mathbf{Y}'\mathbf{P}\mathbf{Y}\mathbf{A}}{\mathbf{A}'\boldsymbol{\Sigma}\mathbf{A}} \sim \chi_{n-q}^2 = \frac{\mathbf{A}'\boldsymbol{\varepsilon}'\mathbf{P}\boldsymbol{\varepsilon}\mathbf{A}}{\mathbf{A}'\boldsymbol{\Sigma}\mathbf{A}} = \frac{(\boldsymbol{\varepsilon}\mathbf{A})'\mathbf{P}\boldsymbol{\varepsilon}\mathbf{A}}{\mathbf{A}'\boldsymbol{\Sigma}\mathbf{A}}$$

a

$$\mathbf{b}'\mathbf{C}_1(\mathbf{X}'\mathbf{X})^{-1}\mathbf{X}'\mathbf{Y}_+\mathbf{A} = \mathbf{b}'\mathbf{C}_1(\mathbf{X}'\mathbf{X})^{-1}\mathbf{X}'\boldsymbol{\varepsilon}\mathbf{A},$$

pričom $\boldsymbol{\varepsilon}\mathbf{A} = \begin{pmatrix} \boldsymbol{\varepsilon}'_1\mathbf{A} \\ \boldsymbol{\varepsilon}'_2\mathbf{A} \\ \vdots \\ \boldsymbol{\varepsilon}'_n\mathbf{A} \end{pmatrix} \sim N_n(\mathbf{0}, (\mathbf{A}'\boldsymbol{\Sigma}\mathbf{A})\mathbf{I}_{n,n})$. Podľa vety 1.10 sú

$$\frac{\mathbf{A}'\mathbf{Y}'\mathbf{P}\mathbf{Y}\mathbf{A}}{\mathbf{A}'\boldsymbol{\Sigma}\mathbf{A}} \quad \text{a} \quad \mathbf{b}'\mathbf{C}_1(\mathbf{X}'\mathbf{X})^{-1}\mathbf{X}'\mathbf{Y}_+\mathbf{A}$$

nezávislé, lebo

$$\frac{\mathbf{P}}{\mathbf{A}'\boldsymbol{\Sigma}\mathbf{A}}(\mathbf{A}'\boldsymbol{\Sigma}\mathbf{A})\mathbf{I}_2\frac{1}{2}\mathbf{X}(\mathbf{X}'\mathbf{X})^{-1}\mathbf{C}'_1\mathbf{b} = \mathbf{0}.$$

Pretože $\mathbf{b}'\mathbf{C}_1(\mathbf{X}'\mathbf{X})^{-1}\mathbf{X}'\mathbf{Y}_+\mathbf{A} = \mathbf{b}'\mathbf{C}_1(\mathbf{X}'\mathbf{X})^{-1}\mathbf{X}'\boldsymbol{\varepsilon}\mathbf{A}$ má

$N_1(0, (\mathbf{A}'\boldsymbol{\Sigma}\mathbf{A})(\mathbf{b}'\mathbf{C}_1(\mathbf{X}'\mathbf{X})^{-1}\mathbf{C}'_1\mathbf{b}))$ rozdelenie, má $\frac{(\mathbf{b}'\mathbf{C}_1(\mathbf{X}'\mathbf{X})^{-1}\mathbf{X}'\mathbf{Y}_+\mathbf{A})^2}{(\mathbf{b}'\mathbf{C}_1(\mathbf{X}'\mathbf{X})^{-1}\mathbf{C}'_1\mathbf{b})(\mathbf{A}'\boldsymbol{\Sigma}\mathbf{A})}$ rozdelenie χ_1^2 a je nezávislé od $\frac{\mathbf{A}'\mathbf{Y}'\mathbf{P}\mathbf{Y}\mathbf{A}}{\mathbf{A}'\boldsymbol{\Sigma}\mathbf{A}}$, ktoré má χ_{n-q}^2 rozdelenie. Dostávame, že

$$\frac{(\mathbf{b}'\mathbf{C}_1(\mathbf{X}'\mathbf{X})^{-1}\mathbf{X}'\mathbf{Y}_+\mathbf{A})^2}{(\mathbf{b}'\mathbf{C}_1(\mathbf{X}'\mathbf{X})^{-1}\mathbf{C}'_1\mathbf{b})(\mathbf{A}'\mathbf{Y}'\mathbf{P}\mathbf{Y}\mathbf{A})} \sim \frac{1}{n-q}F_{1,n-q}.$$

Pre pevné $\mathbf{A} \in \mathcal{R}^p$, $\mathbf{b} \in \mathcal{R}^g$

$$P \left\{ \frac{(\mathbf{b}'\mathbf{C}_1(\mathbf{X}'\mathbf{X})^{-1}\mathbf{X}'\mathbf{Y}\mathbf{A} - \mathbf{b}'\mathbf{C}_1(\mathbf{X}'\mathbf{X})^{-1}\mathbf{X}'\mathbf{X}\mathbf{B}\mathbf{A})^2}{(\mathbf{b}'\mathbf{C}_1(\mathbf{X}'\mathbf{X})^{-1}\mathbf{C}'_1\mathbf{b})(\mathbf{A}'\mathbf{Y}'\mathbf{P}\mathbf{Y}\mathbf{A})} \leq \frac{1}{n-q} F_{1,n-q}(1-\alpha) \right\} = 1-\alpha,$$

čiže

$$P \left\{ (\mathbf{b}'\mathbf{C}_1(\mathbf{X}'\mathbf{X})^{-1}\mathbf{X}'\mathbf{Y}\mathbf{A} - \mathbf{b}'\mathbf{C}_1\mathbf{B}\mathbf{A})^2 \leq \frac{1}{n-q} F_{1,n-q}(1-\alpha) \mathbf{b}'\mathbf{C}_1(\mathbf{X}'\mathbf{X})^{-1}\mathbf{C}'_1\mathbf{b}\mathbf{A}'\mathbf{Y}'\mathbf{P}\mathbf{Y}\mathbf{A} \right\} = 1-\alpha,$$

čo je to isté ako

$$(7.3) \quad P \left\{ \mathbf{b}'\mathbf{C}_1\mathbf{B}\mathbf{A} \in \left(\mathbf{b}'\mathbf{C}_1(\mathbf{X}'\mathbf{X})^{-1}\mathbf{X}'\mathbf{Y}\mathbf{A} - \sqrt{\frac{1}{n-q} F_{1,n-q}(1-\alpha) \mathbf{b}'\mathbf{C}_1(\mathbf{X}'\mathbf{X})^{-1}\mathbf{C}'_1\mathbf{b}\mathbf{A}'\mathbf{Y}'\mathbf{P}\mathbf{Y}\mathbf{A}}, \mathbf{b}'\mathbf{C}_1(\mathbf{X}'\mathbf{X})^{-1}\mathbf{X}'\mathbf{Y}\mathbf{A} + \sqrt{\frac{1}{n-q} F_{1,n-q}(1-\alpha) \mathbf{b}'\mathbf{C}_1(\mathbf{X}'\mathbf{X})^{-1}\mathbf{C}'_1\mathbf{b}\mathbf{A}'\mathbf{Y}'\mathbf{P}\mathbf{Y}\mathbf{A}} \right) \right\} = 1-\alpha.$$

Poznámka. Tento výsledok dostaneme aj keď uvažujeme regresný model $\mathbf{Y}\mathbf{A} = \mathbf{X}\mathbf{B}\mathbf{A} + \boldsymbol{\varepsilon}\mathbf{A}$, kde observačný vektor je $\mathbf{Y}\mathbf{A}$, vektor parametrov je $\mathbf{B}\mathbf{A}$ a chybový vektor $\boldsymbol{\varepsilon}\mathbf{A}$ (pozri príklad za vzťahom (6.3)).

Hľadáme teraz intervaly spoľahlivosti, ktoré súčasne pokrývajú všetky $\mathbf{b}'\mathbf{C}_1\mathbf{B}\mathbf{A}$, kde $\mathbf{A} \in \mathcal{R}^p$ je pevné, ale \mathbf{b} sa mení a môže byť ľubovoľné z \mathcal{R}^g . Budeme potrebovať nasledujúcu lemu.

Lema 7.3. *Nech $\mathbf{A}_{t,t}, \mathbf{N}_{t,t}$ sú symetrické matice, pričom \mathbf{N} je pozitívne definitná. Potom*

a.) pre ľubovoľné $\mathbf{c} \in \mathcal{R}^t$, $\mathbf{c} \neq \mathbf{0}$

$$(7.4) \quad \max_{\substack{\mathbf{x} \in \mathcal{R}^t \\ \mathbf{x} \neq \mathbf{0}}} \frac{(\mathbf{c}'\mathbf{x})^2}{\mathbf{x}'\mathbf{N}\mathbf{x}} = \mathbf{c}'\mathbf{N}^{-1}\mathbf{c},$$

pričom maximum sa dosahuje pre $\mathbf{x} = \mathbf{N}^{-1}\mathbf{c}$;

b.)

$$(7.5) \quad \max_{\substack{\mathbf{x} \in \mathcal{R}^t \\ \mathbf{x} \neq \mathbf{0}}} \frac{\mathbf{x}'\mathbf{A}\mathbf{x}}{\mathbf{x}'\mathbf{N}\mathbf{x}} = \lambda_1,$$

kde λ_1 je najväčšia vlastná hodnota matice $\mathbf{A}\mathbf{N}^{-1}$.

Dôkaz. Schwarzova nerovnosť tvrdí, že pre ľubovoľné dva vektory $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in \mathcal{R}^t$ platí $(\mathbf{x}'\mathbf{y})^2 \leq \mathbf{x}'\mathbf{x} \mathbf{y}'\mathbf{y}$. Maticu \mathbf{N} môžeme písať ako $\mathbf{N}^{\frac{1}{2}}\mathbf{N}^{\frac{1}{2}}$, maticu \mathbf{N}^{-1} môžeme písať ako $\mathbf{N}^{-\frac{1}{2}}\mathbf{N}^{-\frac{1}{2}}$ (pozri anďel, str. 64). Preto pre vektory $\mathbf{u} = \mathbf{N}^{\frac{1}{2}}\mathbf{x}$, $\mathbf{v} = \mathbf{N}^{-\frac{1}{2}}\mathbf{y}$ (\mathbf{x}, \mathbf{y} ľubovoľné z \mathcal{R}^t) platí

$$(\mathbf{u}'\mathbf{v})^2 = (\mathbf{x}'\mathbf{N}^{\frac{1}{2}}\mathbf{N}^{-\frac{1}{2}}\mathbf{y})^2 = (\mathbf{x}'\mathbf{y})^2 \leq \mathbf{u}'\mathbf{u} \mathbf{v}'\mathbf{v} = \mathbf{x}'\mathbf{N}\mathbf{x} \mathbf{y}'\mathbf{N}^{-1}\mathbf{y},$$

čiže pre ľubovoľné $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in \mathcal{R}^t$

$$(7.6) \quad (\mathbf{x}'\mathbf{y})^2 \leq \mathbf{x}'\mathbf{N}\mathbf{x} \mathbf{y}'\mathbf{N}^{-1}\mathbf{y}.$$

a.) Vezmime ľubovoľné $\mathbf{c} \in \mathcal{R}^t$, $\mathbf{c} \neq \mathbf{0}$. Pre každé $\mathbf{x} \in \mathcal{R}^t$ platí zo (7.6)

$$(\mathbf{c}'\mathbf{x})^2 \leq \mathbf{x}'\mathbf{N}\mathbf{x} \mathbf{c}'\mathbf{N}^{-1}\mathbf{c},$$

čiže pre každé $\mathbf{x} \in \mathcal{R}^t$, $\mathbf{x} \neq \mathbf{0}$ platí

$$\frac{(\mathbf{c}'\mathbf{x})^2}{\mathbf{x}'\mathbf{N}\mathbf{x}} \leq \mathbf{c}'\mathbf{N}^{-1}\mathbf{c},$$

teda

$$\max_{\substack{\mathbf{x} \in \mathcal{R}^t \\ \mathbf{x} \neq \mathbf{0}}} \frac{(\mathbf{c}'\mathbf{x})^2}{\mathbf{x}'\mathbf{N}\mathbf{x}} \leq \mathbf{c}'\mathbf{N}^{-1}\mathbf{c},$$

pričom je ľahko vidieť, že maximum sa dosahuje pre $\mathbf{x} = \mathbf{N}^{-1}\mathbf{c}$.

b.) Označme $\lambda_1 \geq \lambda_2 \geq \dots \geq \lambda_t$ korene rovnice $|\mathbf{A} - \lambda\mathbf{N}| = 0$. Pretože

$$|\mathbf{A} - \lambda\mathbf{N}| = 0 \iff |\mathbf{A}\mathbf{N}^{-1} - \lambda\mathbf{I}||\mathbf{N}| = 0 \iff |\mathbf{A}\mathbf{N}^{-1} - \lambda\mathbf{I}| = 0,$$

sú $\lambda_1, \dots, \lambda_t$ aj práve všetky vlastné hodnoty matice $\mathbf{A}\mathbf{N}^{-1}$. Podľa Rao, 1c.3 (II) existuje matica \mathbf{R} , ktorá je regulárna a platí

$$(7.7) \quad \mathbf{A} = \mathbf{R}^{-1'}\mathbf{\Lambda}\mathbf{R}^{-1}, \quad \mathbf{N} = \mathbf{R}^{-1'}\mathbf{R}^{-1},$$

kde

$$\mathbf{\Lambda} = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & & \\ \vdots & & & \\ 0 & & & \lambda_t \end{pmatrix}.$$

Pretože každý vektor $\mathbf{x} \in \mathcal{R}^t$ môžeme písať ako $\mathbf{R}^{-1}\mathbf{u}$, $\mathbf{u} \in \mathcal{R}^t$ (čiže $\mathcal{R}^t = \{\mathbf{R}^{-1}\mathbf{u}, \mathbf{u} \in \mathcal{R}^t\}$), platí zo (7.7)

$$\max_{\substack{\mathbf{u} \in \mathcal{R}^t \\ \mathbf{u} \neq \mathbf{0}}} \frac{\mathbf{u}'\mathbf{A}\mathbf{u}}{\mathbf{u}'\mathbf{N}\mathbf{u}} = \max_{\substack{\mathbf{u} \in \mathcal{R}^t \\ \mathbf{u} \neq \mathbf{0}}} \frac{\mathbf{u}'\mathbf{R}^{-1'}\mathbf{\Lambda}\mathbf{R}^{-1}\mathbf{u}}{\mathbf{u}'\mathbf{R}^{-1'}\mathbf{R}^{-1}\mathbf{u}} = \max_{\substack{\mathbf{x} \in \mathcal{R}^t \\ \mathbf{x} \neq \mathbf{0}}} \frac{\mathbf{x}'\mathbf{\Lambda}\mathbf{x}}{\mathbf{x}'\mathbf{x}} = \lambda_1,$$

lebo

$$\frac{\mathbf{x}'\mathbf{\Lambda}\mathbf{x}}{\mathbf{x}'\mathbf{x}} = \frac{\sum_{i=1}^t \lambda_i x_i^2}{\sum x_i^2} \leq \lambda_1 \frac{\sum x_i^2}{\sum x_i^2} = \lambda_1$$

a rovnosť sa dosahuje napr. pre $\mathbf{x} = (1, 0, \dots, 0)'$. \square

Podľa (7.4) sa maximum výrazu

$$(7.8) \quad \frac{(\mathbf{b}'\mathbf{C}_1(\mathbf{X}'\mathbf{X})^{-1}\mathbf{X}'\mathbf{Y} + \mathbf{A})^2}{(\mathbf{b}'\mathbf{C}_1(\mathbf{X}'\mathbf{X})^{-1}\mathbf{C}_1\mathbf{b})(\mathbf{A}'\mathbf{Y}'\mathbf{P}\mathbf{Y}\mathbf{A})}$$

dosahuje vzhľadom na \mathbf{b} (\mathbf{A} je pevné, teda $\mathbf{C}_1(\mathbf{X}'\mathbf{X})^{-1}\mathbf{X}'\mathbf{Y}_+\mathbf{A}$ je “fixné“) ak

$$\mathbf{b} = (\mathbf{C}_1(\mathbf{X}'\mathbf{X})^{-1}\mathbf{C}'_1)^{-1}\mathbf{C}_1(\mathbf{X}'\mathbf{X})^{-1}\mathbf{X}'\mathbf{Y}_+\mathbf{A}$$

a toto maximum je

$$(7.9) \quad \frac{\mathbf{A}'\mathbf{Y}'_+[\mathbf{X}(\mathbf{X}'\mathbf{X})^{-1}\mathbf{C}'_1(\mathbf{C}_1(\mathbf{X}'\mathbf{X})^{-1}\mathbf{C}'_1)^{-1}\mathbf{C}_1(\mathbf{X}'\mathbf{X})^{-1}\mathbf{X}'\mathbf{Y}_+\mathbf{A}]}{\mathbf{A}'\mathbf{Y}'\mathbf{P}\mathbf{Y}\mathbf{A}} =$$

$$= \frac{\mathbf{A}'[\mathbf{Y}'_+\mathbf{P}_2\mathbf{Y}_+]\mathbf{A}}{\mathbf{A}'\mathbf{E}\mathbf{A}} = \frac{\mathbf{A}'\mathbf{H}\mathbf{A}}{\mathbf{A}'\mathbf{E}\mathbf{A}}.$$

Ľahko sa ukáže (pozri vetu 7.2 a vetu 2.9), že $\mathbf{H} = \mathbf{Y}'_+\mathbf{P}_2\mathbf{Y}_+ \sim W_p(g, \mathbf{\Sigma})$ (tentokrát $\mathbf{Y}_+ = \mathbf{Y} - \mathbf{X}\mathbf{B}$), $\mathbf{E} = \mathbf{Y}'\mathbf{P}\mathbf{Y} \sim W_p(n - q, \mathbf{\Sigma})$, pričom \mathbf{H} a \mathbf{E} sú nezávislé (podľa vety 2.13). Preto podľa vety 2.8 má

$$\frac{\mathbf{A}'\mathbf{H}\mathbf{A}}{\mathbf{A}'\mathbf{\Sigma}\mathbf{A}} \sim \chi_g^2$$

a

$$\frac{\mathbf{A}'\mathbf{E}\mathbf{A}}{\mathbf{A}'\mathbf{\Sigma}\mathbf{A}} \sim \chi_{n-q}^2$$

a posledné dve náhodné veličiny sú nezávislé. Dostávame, že

$$(7.10) \quad \frac{n - q}{g} \frac{\mathbf{A}'\mathbf{H}\mathbf{A}}{\mathbf{A}'\mathbf{E}\mathbf{A}} \sim F_{g, n-q}.$$

Zo vzťahov (7.8) a (7.10) dostávame, že pre pevné $\mathbf{A} \in \mathcal{R}^p$

$$P \left\{ \frac{(\mathbf{b}'\mathbf{C}_1(\mathbf{X}'\mathbf{X})^{-1}\mathbf{X}'\mathbf{Y}_+\mathbf{A})^2}{(\mathbf{b}'\mathbf{C}_1(\mathbf{X}'\mathbf{X})^{-1}\mathbf{C}'_1\mathbf{b})(\mathbf{A}'\mathbf{Y}'\mathbf{P}\mathbf{Y}\mathbf{A})} \leq \right.$$

$$\left. \leq \frac{g}{n - q} F_{g, n-q}(1 - \alpha) \quad \text{pre každé } \mathbf{b} \in \mathcal{R}^g \right\} = 1 - \alpha,$$

čiže

$$P \left\{ (\mathbf{b}'\mathbf{C}_1(\mathbf{X}'\mathbf{X})^{-1}\mathbf{X}'\mathbf{Y}\mathbf{A} - \mathbf{b}'\mathbf{C}_1\mathbf{B}\mathbf{A})^2 \leq \right.$$

$$\left. \leq \frac{g}{n - q} F_{g, n-q}(1 - \alpha) \mathbf{b}'\mathbf{C}_1(\mathbf{X}'\mathbf{X})^{-1}\mathbf{C}'_1\mathbf{b}\mathbf{A}'\mathbf{Y}'\mathbf{P}\mathbf{Y}\mathbf{A} \quad \text{pre každé } \mathbf{b} \in \mathcal{R}^g \right\} =$$

$$= 1 - \alpha.$$

Teda intervaly spoľahlivosti, ktoré súčasne pokrývajú všetky kombinácie $\mathbf{b}'\mathbf{C}_1\mathbf{B}\mathbf{A}$ (\mathbf{A} pevné, $\mathbf{b} \in \mathcal{R}^g$ sa mení) s pravdepodobnosťou $1 - \alpha$ sú

$$(7.11) \quad \mathbf{b}'\mathbf{C}_1(\mathbf{X}'\mathbf{X})^{-1}\mathbf{X}'\mathbf{Y}\mathbf{A} \pm \sqrt{\frac{g}{n - q} F_{g, n-q}(1 - \alpha) \mathbf{b}'\mathbf{C}_1(\mathbf{X}'\mathbf{X})^{-1}\mathbf{C}'_1\mathbf{b}\mathbf{A}'\mathbf{Y}'\mathbf{P}\mathbf{Y}\mathbf{A}}.$$

Poznámka. Tento výsledok sa zhoduje s vetou 6.8 (Scheffeho metóda), ak uvažujeme regresný model $\mathbf{Y}\mathbf{A} = \mathbf{X}\mathbf{B}\mathbf{A} + \varepsilon\mathbf{A}$.

Teraz preberme prípad, keď “sa menia“ vektory \mathbf{A} aj \mathbf{b} ($\mathbf{A} \in \mathcal{R}^p$, $\mathbf{b} \in \mathcal{R}^g$). Podľa (7.5) je

$$\max_{\substack{\mathbf{A} \in \mathcal{R}^p \\ \mathbf{A} \neq \mathbf{0}}} \frac{\mathbf{A}'\mathbf{H}\mathbf{A}}{\mathbf{A}'\mathbf{E}\mathbf{A}} = \lambda_1,$$

kde λ_1 je najväčšia vlastná hodnota matice $\mathbf{H}\mathbf{E}^{-1}$. Poznamenávame len, že $\mathbf{E} \sim W_p(n-q, \mathbf{\Sigma})$ a preto $\mathbf{E} = \sum_{i=1}^{n-q} \xi_i \xi_i'$, kde $\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_{n-q}$ sú nezávislé $N_p(\mathbf{0}, \mathbf{\Sigma})$ rozdelené a podľa anděl, str.121 platí pre $n-q \geq p$, že $P\{\mathbf{E} \text{ je pozitívne definitná matica}\} = 1$. Podľa Kubáček, Kubáčková, Volaufová, str. 445 je $\mathbf{H} + \mathbf{E}$ pozitívne definitná matica (\mathbf{H} je pozitívne semidefinitná a \mathbf{E} je pozitívne definitná matica). Preto $\lambda = -1$ nemôže byť vlastným číslom matice $\mathbf{H}\mathbf{E}^{-1}$. ak by totiž -1 bola vlastným číslom matice $\mathbf{H}\mathbf{E}^{-1}$, tak $|\mathbf{H}\mathbf{E}^{-1} + \mathbf{I}| = 0$, ale $|\mathbf{H}\mathbf{E}^{-1} + \mathbf{I}| = |(\mathbf{H} + \mathbf{E})\mathbf{E}^{-1}| = |\mathbf{H} + \mathbf{E}||\mathbf{E}^{-1}| \neq 0$. ďalej máme, že $\lambda (\neq -1)$ je vlastným číslom matice $\mathbf{H}\mathbf{E}^{-1}$ práve vtedy ak

$$\begin{aligned} |\mathbf{H}\mathbf{E}^{-1} - \lambda\mathbf{I}| = 0 &\iff \left(\frac{1}{1+\lambda}\right)^p |\mathbf{H}\mathbf{E}^{-1} - \lambda\mathbf{I}||\mathbf{E}| = 0 \iff \\ &\iff \left(\frac{1}{1+\lambda}\right)^p |\mathbf{H} - \lambda\mathbf{E}| = 0 \iff |\mathbf{H}\frac{1}{1+\lambda} - \frac{\lambda}{1+\lambda}\mathbf{E}| = 0 \iff \\ &\iff |\mathbf{H}\left(1 - \frac{1}{1+\lambda}\right) - \frac{\lambda}{1+\lambda}\mathbf{E}| = 0 \iff |\mathbf{H} - \frac{\lambda}{1+\lambda}(\mathbf{H} + \mathbf{E})| = 0 \iff \\ &\iff |(\mathbf{H} + \mathbf{E})[(\mathbf{H} + \mathbf{E})^{-1}\mathbf{H} - \frac{\lambda}{1+\lambda}\mathbf{I}]| = 0 \iff |(\mathbf{H} + \mathbf{E})^{-1}\mathbf{H} - \frac{\lambda}{1+\lambda}\mathbf{I}| = 0, \end{aligned}$$

čiže práve vtedy ak $\frac{\lambda}{1+\lambda}$ je vlastné číslo matice $(\mathbf{H} + \mathbf{E})^{-1}\mathbf{H}$. Funkcia $\frac{\lambda}{1+\lambda}$ je rastúca pre $\lambda \in (-\infty, \infty)$, preto ak λ_1 je najväčšia vlastná hodnota matice $\mathbf{H}\mathbf{E}^{-1}$, tak $\frac{\lambda_1}{1+\lambda_1}$ je najväčšia vlastná hodnota matice $(\mathbf{H} + \mathbf{E})^{-1}\mathbf{H}$. Nasledujúce ekvivalencie nám dokazujú, že λ je vlastná hodnota $\mathbf{E}^{-1}\mathbf{H}$ práve vtedy ak je vlastnou hodnotou $\mathbf{H}\mathbf{E}^{-1}$:

$$\begin{aligned} (7.12) \quad |\mathbf{H}\mathbf{E}^{-1} - \lambda\mathbf{I}| = 0 &\iff |\mathbf{H}\mathbf{E}^{-\frac{1}{2}} - \lambda\mathbf{E}^{\frac{1}{2}}||\mathbf{E}^{-\frac{1}{2}}| = 0 \iff \\ &\iff |\mathbf{E}^{\frac{1}{2}}||\mathbf{E}^{-\frac{1}{2}}\mathbf{H}\mathbf{E}^{-\frac{1}{2}} - \lambda\mathbf{I}||\mathbf{E}^{-\frac{1}{2}}| = 0 \iff |\mathbf{E}^{-\frac{1}{2}}||\mathbf{E}^{-\frac{1}{2}}\mathbf{H}\mathbf{E}^{-\frac{1}{2}} - \lambda\mathbf{I}||\mathbf{E}^{\frac{1}{2}}| = 0 \iff \\ &\iff |\mathbf{E}^{-1}\mathbf{H} - \lambda\mathbf{I}| = 0. \end{aligned}$$

ak λ je vlastná hodnota matice $\mathbf{E}^{-1}\mathbf{H}$ (teda práve aj matice $\mathbf{H}\mathbf{E}^{-1}$), tak zo (7.12) je $\lambda \geq 0$. Preto $\theta = \frac{\lambda_1}{1+\lambda_1}$ - najväčšia vlastná hodnota matice $(\mathbf{H} + \mathbf{E})^{-1}\mathbf{H}$ musí byť v intervale $(0, 1)$. Keď θ považujeme za náhodnú premennú (najväčšiu vlastnú hodnotu náhodnej matice $(\mathbf{H} + \mathbf{E})^{-1}\mathbf{H}$), tak θ má podľa definície 4.3 $\theta(p, n-q, g)$ rozdelenie. Platí tiež pre α -kritickú hodnotu rozdelenia θ , t.j. pre také θ_α , že $P\{\theta > \theta_\alpha\} = \alpha$, že

$$P\{\theta \leq \theta_\alpha\} = 1 - \alpha,$$

čiže

$$P\left\{\frac{\lambda_1}{1+\lambda_1} = \theta \leq \theta_\alpha\right\} = 1 - \alpha,$$

$$P\{\lambda_1 \leq (1 + \lambda_1)\theta_\alpha\} = 1 - \alpha,$$

$$P\{\lambda_1(1 - \theta_\alpha) \leq \theta_\alpha\} = 1 - \alpha,$$

$$(7.13) \quad P\{\lambda_1 \leq \frac{\theta_\alpha}{1 - \theta_\alpha}\} = 1 - \alpha$$

(pretože $\lambda_1 \geq 0$, je $\theta \in (0, 1)$). Vráťme sa teraz k (7.9). ak $\mathbf{A} \in \mathcal{R}^p$, $\mathbf{A} \neq \mathbf{0}$ (pevné), tak

$$\max_{\substack{\mathbf{b} \in \mathcal{R}^g \\ \mathbf{b} \neq \mathbf{0}}} \frac{(\mathbf{b}'\mathbf{C}_1(\mathbf{X}'\mathbf{X})^{-1}\mathbf{X}'\mathbf{Y} + \mathbf{A})^2}{(\mathbf{b}'\mathbf{C}_1(\mathbf{X}'\mathbf{X})^{-1}\mathbf{C}'_1\mathbf{b})(\mathbf{A}'\mathbf{Y}'\mathbf{P}\mathbf{Y}\mathbf{A})} = \frac{\mathbf{A}'\mathbf{H}\mathbf{A}}{\mathbf{A}'\mathbf{E}\mathbf{A}}.$$

(pozri (7.10)). Podľa (7.5) je zase

$$\max_{\substack{\mathbf{A} \in \mathcal{R}^p \\ \mathbf{A} \neq \mathbf{0}}} \frac{\mathbf{A}'\mathbf{H}\mathbf{A}}{\mathbf{A}'\mathbf{E}\mathbf{A}} = \lambda_1,$$

kde λ_1 je najväčšia vlastná hodnota matice $\mathbf{E}^{-1}\mathbf{H}$. Podľa (7.13) $P\{\lambda_1 \leq \frac{\theta_\alpha}{1 - \theta_\alpha}\} = 1 - \alpha$. Preto

$$\begin{aligned} & P\left\{(\mathbf{b}'\mathbf{C}_1(\mathbf{X}'\mathbf{X})^{-1}\mathbf{X}'\mathbf{Y}\mathbf{A} - \mathbf{b}'\mathbf{C}_1\mathbf{B}\mathbf{A})^2 \leq \right. \\ & \left. \leq \frac{\theta_\alpha}{1 - \theta_\alpha} \mathbf{b}'\mathbf{C}_1(\mathbf{X}'\mathbf{X})^{-1}\mathbf{C}'_1\mathbf{b}\mathbf{A}'\mathbf{Y}'\mathbf{P}\mathbf{Y}\mathbf{A} \quad \text{pre každé } \mathbf{A} \in \mathcal{R}^p \text{ a každé } \mathbf{b} \in \mathcal{R}^g \right\} = \\ & = 1 - \alpha, \end{aligned}$$

čiže intervaly spoľahlivosti, ktoré súčasne pokrývajú všetky lineárne kombinácie $\mathbf{b}'\mathbf{C}_1\mathbf{B}\mathbf{A}$ s pravdepodobnosťou $1 - \alpha$ sú

$$\mathbf{b}'\mathbf{C}_1(\mathbf{X}'\mathbf{X})^{-1}\mathbf{X}'\mathbf{Y}\mathbf{A} \pm \sqrt{\frac{\theta_\alpha}{1 - \theta_\alpha} \mathbf{b}'\mathbf{C}_1(\mathbf{X}'\mathbf{X})^{-1}\mathbf{C}'_1\mathbf{b}\mathbf{A}'\mathbf{Y}'\mathbf{P}\mathbf{Y}\mathbf{A}}.$$

ak chceme vedieť intervaly spoľahlivosti pre lineárne kombinácie $\mathbf{b}'\mathbf{C}_1\mathbf{B}\mathbf{M}_1\mathbf{A}$, kde \mathbf{M}_1 je matica $p \times r$ s hodnotou $h(\mathbf{M}_1) = r$, postupujeme tak, že vytvoríme model (7.2) a v ňom postupujeme úplne analogicky ako v tejto kapitole.

Príklad (Lamoš, Potocký, str.246). V tabuľke sú uvedené hmotnosť pšenice Y_i a hmotnosť slamy Z_i z i -teho pozemku, $i = 1, 2, \dots, 7$. $x_{1i} = 1$, $i = 1, 2, \dots, 7$ a x_{2i} znamená množstvo hnojiva použitého na i -tom pozemku. Za predpokladu, že závislosť Y_i a Z_i od x_{1i} a x_{2i} je lineárna, nájdite regresné koeficienty. Potom testujte hypotézu o tom, či závislosť je významná, t.j. overte, či $\beta_2 = \gamma_2 = 0$. Hladina významnosti $\alpha = 0.05$.

pozemok	1	2	3	4	5	6	7
Y	30	35	31	18	28	18	29
Z	35	38	30	20	30	22	28
x_2	15	21	18	9	14	9	12

Riešene. Model je

$$Y_i = \beta_1 x_{1i} + \beta_2 x_{2i}$$

$$Z_i = \gamma_1 x_{1i} + \gamma_2 x_{2i}$$