MASARYKOVA UNIVERZITA
Přírodovědecká fakulta

DIPLOMOVÁ PRÁCE

Brno 2017 Mai Phuong Truongová

MASARYKOVA UNIVERZITA
Přírodovědecká fakulta
Ústav matematiky a statistiky

Matematika neživotního pojištění: teorie a příklady

Diplomová práce

Mai Phuong Truongová

Vedoucí práce: doc. RNDr. Martin Kolář, Ph.D. **Brno 2017**

Bibliografický záznam

Autorka:	Mai Phuong Truongová Přírodovědecká fakulta, Masarykova univerzita Ústav matematiky a statistiky
Název práce:	Matematika neživotního pojištění: teorie a příklady
Vedoucí práce:	doc. RNDr. Martin Kolář, Ph.D.
Studijní program:	Matematika
Studijní obor:	Finanční matematika
Akademický rok:	2016/2017
Počet stran:	x + 156
Klíčová slova:	rozdělení pravděpodobnosti; třídy rozdělení $(a, b, 0)$ a $(a, b, 1)$; složená rozdělení; směsi rozdělení; kolektivní model rizika; Panjerova rekurze; diskretizace spojitého rozdělení; teorie ruinování; stochastické procesy; Poissonův proces; Cramér-Lundbergův model; adjustační koeficient; integrodiferenciální rovnice; Cramérův asymptotický vzorec a Tijmsova aproximace; Brownův pohyb

Bibliographic Entry

Author:	Mai Phuong Truongová Faculty of Science, Masaryk University Department of Mathematics and Statistics
Title of Thesis:	Mathematics of non-life insurance: theory and exercises
Supervisor:	doc. RNDr. Martin Kolář, Ph.D.
Degree Programme:	Mathematics
Field of Study:	Financial Mathematics
Academic Year:	2016/2017
Number of Pages:	x + 156
Keywords:	probability distributions; $(a, b, 0)$ and $(a, b, 1)$ classes; compound distributions; mixture distributions; collective risk model; Panjer recursion; discretization of the continuous distribution; ruin theory; stochastic processes; Poisson process; Cramér-Lundberg model; adjustment coefficient; integrodifferential equation; Cramer's asymptotic ruin formula and Tijms' approximation; Brownian motion

Abstrakt

Cílem této diplomové práce je představit matematické techniky využívané v neživotním pojištění, a to nejen formou teorie, ale i formou řešených, případně neřešených příkladů opatřených výsledky.
První kapitola obsahuje přehled diskrétních pravděpodobnostních rozdělení patřících do třídy rozdělení $(a, b, 0)$. Jejím rozšířením získáme obecnější třídu rozdělení $(a, b, 1)$. Druhá kapitola se věnuje diskrétním složeným rozdělením a seznamuje nás s Panjerovou rekurzí. Předmětem další kapitoly jsou směsi rozdělení. Stěžejní část práce tvoří čtvrtá a pátá kapitola zabývající se teorií rizika. Čtvrtá kapitola podrobně popisuje kolektivní model rizika, zahrnuje též aproximaci rozdělení škodního úhrnu a diskretizaci spojitého rozdělení výše pojistných nároků. Poslední kapitola studuje teorii ruinování a s ním související procesy, včetně složeného Poissonova procesu, jenž je základem Cramér-Lundbergova modelu. V případě, kdy je přímá kalkulace pravděpodobnosti ruinování obtížná, nám může být nápomocen Cramérův asymptotický vzorec a Tijmsova aproximace. V závěru práce uvedeme Brownův pohyb do souvislosti s teorií ruinování.

Abstract

The aim of this diploma thesis is to introduce mathematical techniques used in non-life insurance, not only in a form of theory, but also in a form of solved, alternatively unsolved exercises with results.
The first chapter contains the summary of the discrete probability distributions belonging to the $(a, b, 0)$ class. By extension of the $(a, b, 0)$ class we will gain the more general $(a, b, 1)$ class. The second chapter is devoted to the discrete compound distributions and makes us familiar with Panjer recursion. The mixture distributions are the object of the next chapter. The fourth and fifth chapters are the key parts of this thesis, they deal with risk theory. The fourth chapter describes the collective risk model in detail, it also includes the approximation of the aggregate claims distribution and the discretization of the continuous claim amount distribution. The last chapter studies the ruin theory and related processes, including the compound Poisson process which is the base of Cramér-Lundber model. In case when a direct calculation of ruin probability is difficult, Cramér's asymptotic ruin formula and Tijms' approximation can be very helpful. At the end of this work we will connect the Brownian motion with the ruin theory.

MASARYKOVA UNIVERZITA
Přírodovědecká fakulta

ZADÁNÍ DIPLOMOVÉ PRÁCE

Akademický rok: 2014/2015

Ústav: Ústav matematiky a statistiky

Studentka: Bc. Mai Phuong Truongová

Program: Matematika

Obor: Finanční matematika

Ředitel *Ústavu matematiky a statistiky* PřF MU Vám ve smyslu Studijního a zkušebního řádu MU určuje diplomovou práci s tématem:

Téma práce: Matematika neživotního pojištění: teorie a příklady

Téma práce anglicky: Mathematics of non-life insurance: theory and exercises

Oficiální zadání:
Práce se bude věnovat matematickým technikám využívaným v neživotním pojištění. V jednotlivých kapitolách bude nejdříve shrnuta potřebná teorie, následovaná souborem řešených, případně i neřešených příkladů.

Literatura:
KLUGMAN, Stuart A., Harry H. PANJER a Gordon E. WILLMOT. *Loss models :from data to decisions.* 4th ed. Hoboken, N.J.: John Wiley & Sons, 2012. xiv,511 s. ISBN 9781118315323.

Jazyk závěrečné práce:

Vedoucí práce: doc. RNDr. Martin Kolář, Ph.D.

Datum zadání práce: 25. 9. 2014

V Brně dne: 23. 10. 2014

Souhlasím se zadáním (podpis, datum):

4. 11. 2014 Truong ....
Bc. Mai Phuong Truongová
studentka

....
doc. RNDr. Martin Kolář, Ph.D.
vedoucí práce

o. z. ....
prof. RNDr. Jiří Rosický, DrSc.
ředitel Ústavu matematiky a statistiky

Poděkování

Ráda bych na tomto místě srdečně poděkovala panu doc. RNDr. Martinovi Kolářovi, Ph.D. za vedení mé diplomové práce, za jeho vstřícnost, trpělivost, přátelský přístup a především za jeho odborné rady, cenné připomínky a za čas, jenž mi věnoval. Mé díky dále patří Mgr. Márii Šimkové za ochotu a zpětnou vazbu ke zpracovanému textu. Děkuji tímto také všem svým přátelům a rodině za psychickou podporu během celého studia.

Prohlášení

Prohlašuji, že jsem diplomovou práci na téma „Matematika neživotního pojištění: teorie a příklady“ vypracovala samostatně a výhradně s využitím citované literatury a uvedených zdrojů.

V Brně dne 1. ledna 2017 ....
autorčin vlastnoruční podpis

Obsah

Úvod

V každém věku jsme den co den vystaveni mnohým nepředvídatelným nebezpečím, jež mohou způsobit nejen újmy na našem zdraví, ale mohou též ohrozit naše životy a vyvolat značnou škodu na majetku. Před negativními dopady nahodilých událostí, před tzv. pojistnými riziky (povodeň, pracovní úraz, vandalismus, odcizení majetku apod.), nás chrání pojištění.

Komerční pojišťovny nabízejí velké množství pojistných produktů týkajících se jak životního, tak neživotního pojištění. Neživotní pojištění na rozdíl od životního pracuje s absolutně náhodnými jevy. Nejsme zde schopni říci, zda dojde k pojistné události či nikoliv. U životního pojištění si však můžeme být jisti, že pojistná událost (smrt, dožití) v budoucnosti jednoznačně nastane. Rozsah pojišťovaných rizik neživotního pojištění je tedy velmi obsáhlý.

Jelikož pojišťovna na sebe přebírá rizika svých klientů, musí se logicky zabývat jejich problematikou a studovat zákonitosti, kterým podléhají. Snahou každé pojišťovny je zachovat si solventnost, udržet si finanční stabilitu a předejít tak bankrotu. Pojistná matematika proto tvoří jednu z nejdůležitějších profesních složek současného pojišťovnictví.

Tato práce se zaměřuje na matematické techniky využívané v neživotním pojištění. Do jisté míry navazuje na bakalářskou práci Pojistná matematika v příkladech[1] a rozšiřuje znalosti z oblasti teorie rizika.

Text je rozčleněn do pěti kapitol, z nichž každá obsahuje podkapitolu s řešenými i neřešenými příklady, které jsou opatřeny výsledky.

V úvodní kapitole si zopakujeme diskrétní rozdělení pravděpodobnosti a navážeme třídou rozdělení $(a, b, 0)$. Úpravou pravděpodobnosti v nule ji rozšíříme na třídu rozdělení $(a, b, 1)$.

Následující kapitola se zabývá diskrétními složenými rozděleními, především složeným Poissonovým rozdělením hojně využívaným v pojistné praxi k popisu počtu škod. Dočteme se zde také o Panjerově rekurzi, jež nám oproti klasické konvoluční metodě usnadňuje práci při určování pravděpodobností

[1] [20]

funkce diskrétního složeného rozdělení.

Další, v pořadí již třetí, kapitola se věnuje směsím rozdělení. Hrají důležitou roli například při modelování heterogenity v rámci jednotlivých tarifních skupin automobilového pojištění.

Předmětem čtvrté kapitoly je kolektivní model rizika, jenž slouží k modelování celkové výše škod vzniklé během stanoveného časového období v rámci jednoho pojistného kmene. Zprvu věnujeme pozornost modelům počtu pojistných událostí a výše pojistných nároků, poté se plně soustředíme na model agregovaných škod. Od distribuční, generující, charakteristické a moment generující funkce agregované škody, přes její číselné charakteristiky se dostáváme k aproximaci rozdělení škodního úhrnu a Panjerově rekurzi. Závěrečná část této kapitoly se zaobírá diskretizací spojitého rozdělení, zmiňuje se o zaokrouhlovací metodě a metodě shody lokálních momentů.

Poslední kapitola studuje modely kolektivního rizika v dlouhém období. Seznamuje nás se stochastickými procesy a zavádí pojmy související s teorií ruinování. Dále pojednává o modelech ruinování v diskrétním a spojitém čase a rozebírá známý Cramér-Lundbergův model, jenž je založený na složeném Poissonově procesu. Zhruba v druhé polovině kapitoly se dovídáme o integrodiferenciálních rovnicích, Cramérově asymptotickém vzorci a Tijmsově aproximaci. V závěru práce se zamyslíme nad souvislostí mezi Brownovým pohybem a teorií ruinování.

Kapitola 1

Diskrétní rozdělení

Cílem této kapitoly je zopakovat si základní typy diskrétních rozdělení pravděpodobnosti a seznámit se s třídami rozdělení $(a, b, 0)$ a $(a, b, 1)$.

Diskrétní rozdělení hrají v pojistné matematice důležitou roli, zejména při popisu počtu pojistných událostí za stanovené časové období. Abychom pochopili otázky týkající se pojistného plnění, budou pro nás podstatné nejen informace o počtu pojistných nároků, ale také o rozsahu jednotlivých nároků. Popis celkových ztrát nám pak umožňuje zabývat se problematikou modifikace pojistné smlouvy[1].

Počet škod v praxi nenabývá záporných hodnot, budeme proto uvažovat množinu přirozených čísel s 0, tj. množinu $\mathbb{N}_0$.

Definice 1.1. Nechť $(\Omega, \mathcal{A}, P)$[2] je pravděpodobnostní prostor. Pak zobrazení $N : \Omega \to \{k_1, k_2, \dots\}$, kde $\{k_1, k_2, \dots\}$ je diskrétní podmnožina množiny $\mathbb{R}$, nazýváme diskrétní náhodnou veličinou.

Definice 1.2. Nechť N je diskrétní náhodná veličina udávající počet škod. Pak funkci $p_N(k) = P(N = k), k \in \mathbb{N}_0$, nazýváme pravděpodobnostní funkcí diskrétní náhodné veličiny N.

Definice 1.3. Nechť N je diskrétní náhodná veličina s hodnotami na množině $\mathbb{N}_0$ a nechť $p_N(k)$ je její pravděpodobnostní funkce. Potom generující funkce náhodné veličiny N je definována vztahem

$$G_N(s) = \sum_{k=0}^{\infty} p_N(k) \cdot s^k = \mathrm{E}(s^N), \quad s \in \mathbb{R}. \tag{1.1}$$

[1] O modifikaci pojistné smlouvy více pojednává [14].

[2] Ω je prostor všech elementárních jevů, $\mathcal{A} = 2^\Omega$ je systém všech podmnožin množiny Ω a P je pravděpodobnost (viz [6])

Věta 1.4. *Mějme diskrétní náhodnou veličinu N s generující funkcí $G_N(s)$. Pak platí*

$$\mathrm{E}(N) = G'_N(1). \tag{1.2}$$

$$\textit{Obecně: } \underbrace{\mathrm{E}\big(N(N-1)\dots(N-m+1)\big)}_{m\text{-tý faktoriální moment}} = G_N^{(m)}(1). \tag{1.3}$$

Věta 1.5. *Nechť $S = N_1 + N_2 + \dots + N_n$, kde $N_1, N_2, \dots, N_n$ jsou navzájem nezávislé náhodné veličiny, jež nabývají hodnot na množině $\mathbb{N}_0$. Potom*

$$G_S(s) = G_{N_1}(s) \cdot G_{N_2}(s) \cdot \ldots \cdot G_{N_n}(s). \tag{1.4}$$

Definice 1.6. Moment generující funkce diskrétní náhodné veličiny N je definována vztahem

$$M_N(t) = \sum_{k=0}^{\infty} p_N(k) \cdot \mathrm{e}^{tk} = \mathrm{E}(\mathrm{e}^{tN}), \quad t \geq 0. \tag{1.5}$$

Lemma 1.7. *Pro každé $m \in \mathbb{N}$ platí*

$$\mathrm{E}(N^m) = M_N^{(m)}(0). \tag{1.6}$$

1.1 Poissonovo rozdělení

Definice 1.8. Diskrétní náhodná veličina N má Poissonovo rozdělení s parametrem $\lambda > 0$, píšeme $N \sim Po(\lambda)$, jestliže pravděpodobnostní funkce je tvaru

$$p_N(k) = \begin{cases} \mathrm{e}^{-\lambda} \cdot \frac{\lambda^k}{k!}, & k = 0, 1, 2, \dots, \\ 0, & \text{jinak.} \end{cases} \tag{1.7}$$

Poissonovo rozdělení popisuje výskyt řídkých jevů za určitou jednotku času, například počet pojistných nároků během jednoho pojistného období. Je limitou binomického rozdělení $N_n \sim Bi(n, \upsilon_n)$ pro $n \to \infty, \upsilon_n \to 0$ a při konstantní střední hodnotě $\mathrm{E}(N_n) = n\upsilon_n = \lambda > 0$. N udává počet úspěchů při velkém množství nezávislých pokusů s malou pravděpodobností úspěchu.

Generující funkce:

$$G_N(s) = \sum_{k=0}^{\infty} \mathrm{e}^{-\lambda} \cdot \frac{\lambda^k}{k!} \cdot s^k = \mathrm{e}^{-\lambda} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(\lambda s)^k}{k!} = \mathrm{e}^{\lambda \cdot (s-1)}. \tag{1.8}$$

Střední hodnotu a ***rozptyl*** lze odvodit z generující funkce:

$$\mathrm{E}(N) = G_N'(1) = \lambda, \tag{1.9}$$

$$\mathrm{Var}(N) = \mathrm{E}\big(N(N-1)\big)+\mathrm{E}(N)-\big(\mathrm{E}(N)\big)^2 = G_N''(1)+G_N'(1)-\big(G_N'(1)\big)^2 = \lambda. \tag{1.10}$$

Užitečné vlastnosti Poissonova rozdělení shrneme do následujících dvou vět.

Věta 1.9. *Nechť $N_1, N_2, \ldots, N_n$ jsou nezávislé náhodné veličiny z Poissonova rozdělení s parametry $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n$. Potom $N = N_1 + N_2 + \cdots + N_n$ má také Poissonovo rozdělení s parametrem $\lambda = \lambda_1 + \lambda_2 + \cdots + \lambda_n$.*

Důkaz. Generující funkce součtu nezávislých náhodných veličin je součinem jednotlivých generujících funkcí – viz věta 1.5.

Pro součet náhodných veličin z Poissonova rozdělení máme

$$\begin{aligned} G_N(s) = \prod_{i=1}^{n} G_{N_i}(s) = \prod_{i=1}^{n} \mathrm{e}^{\lambda_i\cdot(s-1)} = \mathrm{e}^{\sum_{i=1}^{n}\lambda_i\cdot(s-1)} = \\ = \mathrm{e}^{(\lambda_1+\lambda_2+\cdots+\lambda_n)\cdot(s-1)} = \mathrm{e}^{\lambda(s-1)}, \end{aligned}$$

kde $\lambda = \lambda_1 + \lambda_2 + \cdots + \lambda_n$. Generující funkce je jednoznačně určena, proto se N musí řídit Poissonovým rozdělením s parametrem λ. ■

Věta 1.10. *Předpokládejme, že náhodná veličina N vyjadřující počet pojistných nároků se řídí Poissonovým rozdělením se střední hodnotou λ. Dále předpokládejme, že každý nárok může být rozdělen do m tříd s pravděpodobnostmi $p_1, p_2, \ldots, p_m$ a všechny nároky jsou si navzájem nezávislé. Potom náhodné veličiny $N_1, N_2, \ldots, N_m$ vyjadřující počet nároků v jednotlivých třídách $1, 2, \ldots, m$ jsou si vzájemně nezávislé a řídí se Poissonovým rozdělením se středními hodnotami $\lambda p_1, \lambda p_2, \ldots, \lambda p_m$.*

Důkaz. Pro pevné $N = n$ je podmíněné sdružené rozdělení $(N_1, N_2, \ldots, N_m)$ multinomickým rozdělením s parametry $(n, p_1, p_2, \ldots, p_m)$.

Sdružená pravděpodobnostní funkce je dána

$$\begin{aligned} p_{N_1,N_2,\ldots,N_m}(n_1, n_2, \ldots, n_m) &= P(N_1 = n_1, N_2 = n_2, \ldots, N_m = n_m) = \\ &= P(N_1 = n_1, \ldots, N_m = n_m | N = n) \cdot P(N = n) = \\ &= \frac{n!}{n_1! \cdot n_2! \cdot \ldots \cdot n_m!} \cdot p_1^{n_1} \cdot p_2^{n_2} \cdot \ldots \cdot p_m^{n_m} \cdot \mathrm{e}^{-\lambda}\frac{\lambda^n}{n!} = \\ &= \prod_{i=1}^{m} \mathrm{e}^{-\lambda p_i} \cdot \frac{(\lambda p_i)^{n_i}}{n_i!}. \end{aligned}$$

Poznámka.

$$\sum_{i=1}^{m} n_i = n, \sum_{i=1}^{m} p_i = 1, \quad \text{odsud} \quad \lambda^n = \prod_{i=1}^{m} \lambda^{n_i}, \mathrm{e}^{-\lambda} = \prod_{i=1}^{m} \mathrm{e}^{-\lambda p_i}$$

Pro pevné $N = n$ je podmíněné marginální rozdělení náhodné veličiny N_i binomickým rozdělením s parametry (n, p_i) pro $i = 1, 2, \ldots, m$.

Marginální pravděpodobnostní funkce náhodné veličiny N_i je

$$\begin{aligned} p_{N_i}(n_i) &= P(N_i = n_i) = \sum_{n=n_i}^{\infty} P(N_i = n_i | N = n) \cdot P(N = n) = \\ &= \sum_{n=n_i}^{\infty} \binom{n}{n_i} \cdot p_i^{n_i} \cdot (1-p_i)^{n-n_i} \cdot \mathrm{e}^{-\lambda} \cdot \frac{\lambda^n}{n!} = \\ &= \mathrm{e}^{-\lambda} \sum_{n=n_i}^{\infty} \frac{n!}{(n-n_i)! \cdot n_i!} \cdot p_i^{n_i} \cdot (1-p_i)^{n-n_i} \cdot \overbrace{\frac{\lambda^n}{n!}}^{\lambda^n = \lambda^{n-n_i} \cdot \lambda^{n_i}} = \\ &= \mathrm{e}^{-\lambda} \cdot \frac{(\lambda p_i)^{n_i}}{n_i!} \cdot \underbrace{\sum_{n=n_i}^{\infty} \frac{(\lambda(1-p_i))^{n-n_i}}{(n-n_i)!}}_{= \mathrm{e}^{\lambda(1-p_i)}} = \mathrm{e}^{-\lambda+\lambda-\lambda p_i} \cdot \frac{(\lambda p_i)^{n_i}}{n_i!} = \\ &= \mathrm{e}^{-\lambda p_i} \cdot \frac{(\lambda p_i)^{n_i}}{n_i!}, \end{aligned}$$

tedy $N_i \sim Po(\lambda p_i)$. Sdružená pravděpodobnostní funkce je součinem marginálních pravděpodobnostních funkcí, z čehož plyne nezávislost náhodných veličin $N_1, N_2, \ldots, N_m$. ■

Druhá vlastnost je využívána především při modelování pojistných rizik, kdy předpokládáme, že počet pojistných nároků pro pevně stanovené časové období má Poissonovo rozdělení a že nároky mohou být rozděleny do m různých tříd.

Nároky můžeme klasifikovat například podle rozsahu na ty, které překročí určitý limit a na ty, jež limit nepřesáhnou. Rozdělení pojistných nároků překračujících stanovený limit má jiný parametr Poissonova rozdělení než rozdělení nároků nacházejících se pod limitem.

1.2 Geometrické rozdělení

Náhodná veličina N udává počet neúspěchů před prvním úspěchem v nezávislých pokusech a υ značí pravděpodobnost úspěchu.

Definice 1.11. Diskrétní náhodná veličina N se řídí geometrickým rozdělením s parametrem $\upsilon \in (0,1)$, zapisujeme $N \sim Ge(\upsilon)$, jestliže lze její pravděpodobnostní funkci psát ve tvaru

$$p_N(k) = \begin{cases} \upsilon \cdot (1-\upsilon)^k, & k = 0,1,\dots, \\ 0, & \text{jinak}, \end{cases} \tag{1.11}$$

resp. ve tvaru

$$p_N(k) = \begin{cases} \frac{\beta^k}{(1+\beta)^{k+1}}, & k = 0,1,\dots, \\ 0, & \text{jinak} \end{cases} \tag{1.12}$$

pro $\upsilon = \frac{1}{1+\beta}$, tj. $\beta = \frac{1-\upsilon}{\upsilon} > 0$.

Generující funkce:

$$\begin{aligned} G_N(s) &= \sum_{k=0}^{\infty} \upsilon \cdot \big((1-\upsilon)\cdot s\big)^k = \frac{\upsilon}{1-s(1-\upsilon)}, \text{ resp.} \\ G_N(s) &= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(\beta s)^k}{(1+\beta)^{k+1}} = \frac{1}{1-\beta(s-1)}. \end{aligned} \tag{1.13}$$

Střední hodnota a ***rozptyl***:

$$\mathrm{E}(N) = \frac{1-\upsilon}{\upsilon} = \beta, \tag{1.14}$$

$$\mathrm{Var}(N) = \frac{1-\upsilon}{\upsilon^2} = \beta(1+\beta). \tag{1.15}$$

Popisuje-li geometrické rozdělení počet pojistných nároků, pak můžeme jeho vlastnost bez paměti interpretovat následujícím způsobem. Mějme alespoň n nároků, potom pravděpodobnostní rozdělení počtu nároků převyšující číslo n na n nezávisí.

Poznámka. Jsou-li $N_1^*, N_2^*, \dots, N_m^*$ nezávislé a geometricky rozdělené náhodné veličiny s parametrem υ, pak náhodná veličina $N = \sum_{j=1}^{m} N_j^*$ má negativně binomické rozdělení s parametry m a υ.

1.3 Negativně binomické rozdělení

Negativně binomické rozdělení, známé také jako Pólyovo rozdělení, bývá ve velké míře používáno jako alternativa Poissonova rozdělení.

Náhodná veličina N udává počet neúspěchů před m-tým úspěchem v nezávislých pokusech a υ představuje pravděpodobnost úspěchu. Tato interpretace je možná pouze pro $m \in \mathbb{N}$.

Definice 1.12. Diskrétní náhodná veličina N má negativně binomické rozdělení s parametry $m > 0$ a $\upsilon \in (0, 1)$, píšeme $N \sim NeBi(m, \upsilon)$, je-li pravděpodobnostní funkce tvaru

$$p_N(k) = \begin{cases} \binom{k+m-1}{k} \upsilon^m (1-\upsilon)^k, & k = 0, 1, \ldots, \\ 0, & \text{jinak}, \end{cases} \tag{1.16}$$

resp. tvaru

$$p_N(k) = \begin{cases} \binom{k+m-1}{k} \left(\frac{1}{1+\beta}\right)^m \left(\frac{\beta}{1+\beta}\right)^k, & k = 0, 1, \ldots, \\ 0, & \text{jinak} \end{cases} \tag{1.17}$$

pro $\upsilon = \frac{1}{1+\beta}$, tj. $\beta = \frac{1-\upsilon}{\upsilon} > 0$.

Generující funkce:

$$G_N(s) = \sum_{k=0}^{\infty} \binom{k+m-1}{k} \upsilon^m (1-\upsilon)^k \cdot s^k = \left(\frac{\upsilon}{1 - s(1-\upsilon)}\right)^m, \text{ resp.}$$

$$G_N(s) = \sum_{k=0}^{\infty} \binom{k+m-1}{k} \left(\frac{1}{1+\beta}\right)^m \left(\frac{\beta}{1+\beta}\right)^k \cdot s^k = \left(\frac{1}{1 - \beta(s-1)}\right)^m. \tag{1.18}$$

Střední hodnota a ***rozptyl***:

$$\mathrm{E}(N) = m \cdot \frac{1-\upsilon}{\upsilon} = m\beta, \tag{1.19}$$

$$\mathrm{Var}(N) = m \cdot \frac{1-\upsilon}{\upsilon^2} = m\beta(1+\beta). \tag{1.20}$$

Negativně binomické rozdělení je oproti Poissonovu flexibilnější díky m a β. β nabývá pouze kladných hodnot, proto je rozptyl negativně binomického rozdělení větší než jeho střední hodnota (tuto vlastnost nazýváme **overdispersion**). Liší se tak od Poissonova rozdělení, kde se střední hodnota a rozptyl rovnají (**equidispersion**). Rozhodujeme-li se při modelování počtu pojistných událostí, jaké pravděpodobnostní rozdělení použít, pak je nám nápomocen vztah mezi těmito číselnými charakteristikami.

1.4 Binomické rozdělení

Binomické rozdělení je dalším typem diskrétního rozdělení, jež je vhodné pro modelování počtu pojistných nároků. Odlišuje se od předchozích rozdělení tím, že jeho střední hodnota je větší než rozptyl (**underdispersion**).

Definice 1.13. Diskrétní náhodná veličina N se řídí binomickým rozdělením s parametry $n \in \mathbb{N}$ a $v \in (0,1)$, zapisujeme $N \sim Bi(n,v)$, pokud je pravděpodobnostní funkce tvaru

$$p_N(k) = \begin{cases} \binom{n}{k} v^k (1-v)^{n-k}, & k = 0,1,\dots,n, \\ 0, & \text{jinak.} \end{cases} \tag{1.21}$$

Pro představu si uveďme životní pojištění, kde parametr n udává počet stejných, na sobě nezávislých pojistných nároků, které mohou být uplatněny klienty z téže úmrtnostní třídy.

Výskyt škody u jednotlivců sleduje alternativní[3] neboli Bernoulliho rozdělení s parametrem v. Bernoulliho rozdělení je speciálním případem binomického rozdělení pro $n = 1$. Generující funkce pro jednotlivce je dána tímto vztahem

$$G_{N'}(s) = (1-v)s^0 + vs^1 = 1 + v(s-1).$$

Generující funkci pro homogenní třídu o n klientech získáme vynásobením generujících funkcí jednotlivých klientů dle věty 1.5.

Generující funkce:

$$G_N(s) = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} v^k (1-v)^{n-k} \cdot s^k = \big(1 + v(s-1)\big)^n. \tag{1.22}$$

Nosič[4] pravděpodobnostní funkce binomického rozložení je konečný, proto je použití tohoto rozdělení užitečné v případech, kdy máme horní hranici pro rozsah možných hodnot.

[3] Řekneme, že diskrétní náhodná veličina N má alternativní rozdělení s parametrem $v \in (0,1)$, píšeme $N \sim Alt(v)$, je-li její pravděpodobnostní funkce

$$p_N(k) = \begin{cases} v, & k = 1, \\ 1-v, & k = 0, \\ 0, & \text{jinak.} \end{cases}$$

[4] Nosičem funkce chápeme množinu $\mathrm{supp} f = \{x \in \mathbb{R} : f(x) \neq 0\}$.

Například u modelování počtu automobilových nehod na jednu smlouvu uzavřenou na rok je prakticky nemožné, aby počet škod převýšil hodnotu 12, tedy aby každý měsíc nastala událost. Pravděpodobnost, že dojde k více než 12 nehodám je tak nízká, že nebude mít vliv na rozhodnutí, jež pojišťovna učiní.

Střední hodnota a ***rozptyl***:

$$\mathrm{E}(N) = nv, \tag{1.23}$$

$$\mathrm{Var}(N) = nv(1-v). \tag{1.24}$$

1.5 Třída rozdělení $(a, b, 0)$

Definice 1.14. Nechť $p_N(k) = P(N = k)$ je pravděpodobnostní funkce diskrétní náhodné veličiny N. Řekneme, že je členem třídy rozdělení $(a, b, 0)$, jestliže existují reálné konstanty a a b takové, že platí

$$\frac{p_N(k)}{p_N(k-1)} = a + \frac{b}{k} \quad \text{pro } k = 1, 2, 3, \ldots \tag{1.25}$$

Výše uvedený vztah určuje podíl mezi dvěma po sobě jdoucími pravděpodobnostmi diskrétního rozdělení. Pravděpodobnost $p_N(0)$ dopočítáme z podmínky $\sum_{k=0}^{\infty} p_N(k) = 1$.

Do třídy obecných dvouparametrických rozdělení $(a, b, 0)$ patří Poissonovo rozdělení, geometrické rozdělení, negativně binomické a binomické rozdělení. Jednotlivá rozdělení mají jednoznačně určenou počáteční hodnotu $p_N(0)$ i parametry a a b (viz tabulka 1.1).

Rozdělení	$p_N(0)$	a	b
Poissonovo	$\mathrm{e}^{-\lambda}$	0	λ
Binomické	$(1-v)^n$	$-\frac{v}{1-v}$	$(n+1) \cdot \frac{v}{1-v}$
Negativně	v^m	$1-v$	$(m-1) \cdot (1-v)$
binomické	$(1+\beta)^{-m}$	$\frac{\beta}{1+\beta}$	$(m-1) \cdot \frac{\beta}{1+\beta}$
Geometrické	v	$1-v$	0
	$(1+\beta)^{-1}$	$\frac{\beta}{1+\beta}$	0

Tabulka 1.1: Diskrétní rozdělení třídy $(a, b, 0)$
Zdroj: [14], vlastní odvození

Formule (1.25) nám poskytuje návod, jak určit vhodný model pro konkrétní datový soubor. Můžeme ji přepsat do tvaru

$$\frac{p_N(k)}{p_N(k-1)} \cdot k = ak + b, \quad k = 1, 2, 3, \ldots \tag{1.26}$$

Podíl $\frac{p_N(k)}{p_N(k-1)}$ lze odhadnout na základě pozorovaných četností n_k a n_{k-1} hodnot k a $k-1$, tedy:

$$\frac{\widehat{p_N(k)}}{\widehat{p_N(k-1)}} \cdot k = \frac{n_k}{n_{k-1}} \cdot k. \tag{1.27}$$

Graf procházející body $\left[k, k \cdot \frac{n_k}{n_{k-1}}\right]$ by měl přibližně vykazovat lineární průběh. Podle směrnice a dané přímky pak zvolíme vhodný model – z tabulky 1.1 je patrné, že směrnice je nulová pro Poissonovo rozdělení, záporná pro binomické rozdělení a kladná pro negativně binomické rozdělení. Tento postup používáme pro datové soubory s velkým množstvím pozorování.

1.6 Třída rozdělení $(a, b, 1)$

Rozdělení zmíněná v předchozích sekcích často nepopisují adekvátně data, s nimiž se v praxi setkáváme. Může to být zapříčiněno chvostem negativně binomického rozdělení, který není dostatečně těžký nebo tím, že rozdělení z třídy $(a, b, 0)$ nejsou schopna vystihnout tvar dat v jistých částech rozdělení.

Tato podkapitola se věnuje problematice rozložení pravděpodobnosti v nule. V pojistné praxi tím máme na mysli pravděpodobnost, že nenastane žádná pojistná událost během stanoveného časového období.

U pojištění s malou pravděpodobností výskytu škod (např. pojištění odpovědnosti, pojištění majetku...) je pravděpodobnost v nule největší. Naším cílem bude ji dobře vystihnout zvoleným modelem.

Úpravou pravděpodobnosti v nule lze třídu rozdělení $(a, b, 0)$ zobecnit a rozšířit na třídu $(a, b, 1)$.

Definice 1.15. Nechť $p_N(k)$ je pravděpodobnostní funkce diskrétní náhodné veličiny N. Řekneme, že je členem třídy rozdělení $(a, b, 1)$ za předpokladu, že existují konstanty $a, b \in \mathbb{R}$ takové, že

$$\frac{p_N(k)}{p_N(k-1)} = a + \frac{b}{k} \quad \text{pro } k = 2, 3, \ldots \tag{1.28}$$

Třída $(a, b, 1)$ se odlišuje od třídy $(a, b, 0)$ pouze tím, že rekurze začíná v hodnotě $p_N(1)$, nikoliv v $p_N(0)$.

Suma $\sum_{k=1}^{\infty} p_N(k)$ může nabývat libovolných hodnot na intervalu $(0, 1\rangle$. Zbývající pravděpodobnost je v $k = 0$, jelikož platí

$$p_N(0) + \sum_{k=1}^{\infty} p_N(k) = 1.$$

U třídy $(a, b, 1)$ budeme rozlišovat dvě podtřídy rozdělení podle $p_N(0)$. Je-li $p_N(0) = 0$, hovoříme o rozdělení useknutém v nule. V případě, že $p_N(0) > 0$, mluvíme o rozložení modifikovaném v nule.

V obou podtřídách budeme stále uvažovat Poissonovo, geometrické, negativně binomické a binomické rozdělení.

Pravděpodobnostní funkci v nule useknutých rozdělení označíme $p_N^T(k)$, pro v nule modifikovaná rozložení budeme používat značení $p_N^M(k)$.

1.6.1 Rozdělení modifikovaná v nule

Na rozdělení modifikovaná v nule lze pohlížet jako na směs rozdělení třídy $(a, b, 0)$ a degenerovaného rozdělení[5] se všemi pravděpodobnostmi soustředěnými v nule.

Nechť $G_N(s) = \sum_{k=0}^{\infty} p_N(k) \cdot s^k$ je generující funkce rozdělení z třídy $(a, b, 0)$ a nechť $G_N^M(s) = \sum_{k=0}^{\infty} p_N^M(k) \cdot s^k$ značí generující funkci příslušného v nule modifikovaného rozdělení třídy $(a, b, 1)$. Platí, že

$$p_N^M(k) = c \cdot p_N(k) \quad \text{pro } k = 1, 2, \ldots; c \in \mathbb{R}^+$$

a $p_N^M(0)$ je libovolně zvolené z intervalu $(0, 1)$. Potom

$$\begin{aligned} G_N^M(s) &= p_N^M(0) + \sum_{k=1}^{\infty} p_N^M(k) \cdot s^k = \\ &= p_N^M(0) + c \cdot \sum_{k=1}^{\infty} p_N(k) \cdot s^k = \\ &= p_N^M(0) + c \cdot \big(G_N(s) - p_N(0)\big). \end{aligned} \tag{1.29}$$

[5]Diskrétní náhodná veličina N se řídí degenerovaným rozdělením s parametrem $\mu \in \mathbb{R}$, píšeme $N \sim Dg(\mu)$, je-li pravděpodobnostní funkce tvaru

$$p_N(k) = \begin{cases} 1, & k = \mu; \mu \in \mathbb{R}, \\ 0, & \text{jinak.} \end{cases}$$

Z platnosti vztahu $G_N^M(1) = G_N(1) = 1$ plyne

$$1 = p_N^M(0) + c \cdot \big(1 - p_N(0)\big).$$

Odtud

$$c = \frac{1 - p_N^M(0)}{1 - p_N(0)}.$$

Tudíž

$$p_N^M(k) = \frac{1 - p_N^M(0)}{1 - p_N(0)} \cdot p_N(k) \quad \text{pro } k = 1, 2, \dots \tag{1.30}$$

Dostáváme generující funkci modifikovaného rozdělení

$$\begin{aligned} G_N^M(s) &= p_N^M(0) + c \cdot \big(G_N(s) - p_N(0)\big) = \\ &= p_N^M(0) + \frac{1 - p_N^M(0)}{1 - p_N(0)} \cdot \big(G_N(s) - p_N(0)\big) = \\ &= \frac{p_N^M(0) - p_N(0)}{1 - p_N(0)} + \frac{1 - p_N^M(0)}{1 - p_N(0)} \cdot G_N(s) = \\ &= \frac{p_N^M(0) - 1 + 1 - p_N(0)}{1 - p_N(0)} + \frac{1 - p_N^M(0)}{1 - p_N(0)} \cdot G_N(s) = \\ &= \left(1 - \frac{1 - p_N^M(0)}{1 - p_N(0)}\right) + \frac{1 - p_N^M(0)}{1 - p_N(0)} \cdot G_N(s), \end{aligned} \tag{1.31}$$

což je vážený průměr generující funkce degenerovaného rozložení a generující funkce odpovídajícího členu třídy $(a, b, 0)$.

1.6.2 Rozdělení useknutá v nule

V nule useknuté rozdělení můžeme chápat jako speciální typ v nule modifikovaného rozdělení se stanovenou hodnotou $p_N^M(0) = 0$.

Nechť $G_N^T(s)$ označuje generující funkci v nule useknutého rozdělení. Potom z (1.30), (1.31) a $p_N^M(0) = 0$ získáme

$$p_N^T(k) = \frac{p_N(k)}{1 - p_N(0)} \quad \text{pro } k = 1, 2, \dots, \tag{1.32}$$

$$G_N^T(s) = \frac{G_N(s) - p_N(0)}{1 - p_N(0)}. \tag{1.33}$$

Vztah mezi pravděpodobnostními funkcemi, resp. generujícími funkcemi v nule useknutého a v nule modifikovaného rozložení je zjevné z (1.29), (1.30), (1.32)

$$p_N^M(k) = \big(1 - p_N^M(0)\big) \cdot p_N^T(k) \quad \text{pro } k = 1, 2, \ldots, \text{resp.} \tag{1.34}$$

$$G_N^M(s) = p_N^M(0) + \big(1 - p_N^M(0)\big) \cdot G_N^T(s). \tag{1.35}$$

Generující funkce v nule modifikovaného rozdělení je váženým průměrem generujících funkcí degenerovaného rozdělení a v nule useknutého rozdělení.

Rozšířené useknuté negativně binomické (ETNB[6]) rozdělení

Třída $(a, b, 1)$ oproti třídě $(a, b, 0)$ připouští další rozdělení. Hovoříme o tzv. rozšířeném useknutém negativně binomickém rozdělení, u něhož je množina možných hodnot parametru m rozšířena z $m > 0$ na $m > -1$, přičemž $m \neq 0$.

Pravděpodobnostní funkce ETNB rozdělení je dána

$$p_N^T(k) = \begin{cases} \frac{\binom{k+m-1}{k} \cdot (1-v)^k}{v^{-m}-1}, & k = 1, 2, \ldots; v \in (0, 1), \\ 0, & \text{jinak,} \end{cases} \tag{1.36}$$

resp.

$$p_N^T(k) = \begin{cases} \frac{\binom{k+m-1}{k} \cdot \left(\frac{\beta}{1+\beta}\right)^k}{(1+\beta)^m - 1} = \frac{(k+m-1) \cdot \ldots \cdot (m+1) \cdot m}{k! \cdot ((1+\beta)^m - 1)} \cdot \left(\frac{\beta}{1+\beta}\right)^k, & k = 1, 2, \ldots; \beta = \frac{1-v}{v} > 0, \\ 0, & \text{jinak.} \end{cases} \tag{1.37}$$

Pro ETNB rozdělení platí

$$\begin{aligned} &p_N(0) = 0, \\ &a = 1 - v = \frac{\beta}{1+\beta}, \\ &b = (m-1) \cdot (1-v) = (m-1) \cdot \frac{\beta}{1+\beta} \quad \text{pro } v \in (0, 1), \beta > 0, m > -1 \wedge m \neq 0. \end{aligned} \tag{1.38}$$

[6]ETNB distribution – Extended Truncated Negative Binomial distribution

Stačí ukázat, že rozdělení ETNB splňuje podmínky třídy $(a, b, 1)$, tj. že pro libovolnou počáteční hodnotu $p_N(1)$ platí, že pravděpodobnosti získané rekursivní formulí $p_N(k) = p_N(k-1) \cdot (a + \frac{b}{k})$ pro $k = 2, 3, \ldots$ jsou kladné a že $\sum_{k=1}^{\infty} p_N(k) < \infty$.

Logaritmické rozdělení

Logaritmické rozdělení je limitním případem ETNB rozdělení pro $m \to 0$. Neexistuje k němu odpovídající rozdělení ve třídě $(a, b, 0)$.

Jeho pravděpodobnostní funkci lze vyjádřit ve tvaru

$$p_N^T(k) = \begin{cases} -\frac{(1-v)^k}{k \cdot \ln(v)}, & k = 1, 2, \ldots; v \in (0, 1), \\ 0, & \text{jinak}, \end{cases} \tag{1.39}$$

resp.

$$p_N^T(k) = \begin{cases} \frac{\beta^k}{k(1+\beta)^k \ln(1+\beta)}, & k = 1, 2, \ldots; \beta = \frac{1-v}{v} > 0, \\ 0, & \text{jinak}. \end{cases} \tag{1.40}$$

Logaritmické rozdělení má

$$\begin{aligned} p_N(0) &= 0, \\ a &= 1 - v = \frac{\beta}{1+\beta}, \\ b &= v - 1 = -\frac{\beta}{1+\beta} \quad \text{pro } v \in (0, 1), \beta > 0. \end{aligned} \tag{1.41}$$

Přehled všech rozdělení třídy $(a, b, 1)$ shrneme do tabulky.

Rozdělení	$p_N(0)$	a	b	parametry
Poissonovo	$\mathrm{e}^{-\lambda}$	0	λ	$\lambda > 0$
ZT Poissonovo	0	0	λ	$\lambda > 0$
ZM Poissonovo	libovolné	0	λ	$\lambda > 0$

Rozdělení	$p_N(0)$	a	b	parametry
Binomické	$(1-v)^n$	$-\frac{v}{1-v}$	$(n+1)\cdot\frac{v}{1-v}$	$v\in(0,1); n\in\mathbb{N}$
ZT binomické	0	$-\frac{v}{1-v}$	$(n+1)\cdot\frac{v}{1-v}$	$v\in(0,1); n\in\mathbb{N}$
ZM binomické	libovolné	$-\frac{v}{1-v}$	$(n+1)\cdot\frac{v}{1-v}$	$v\in(0,1); n\in\mathbb{N}$
Negativně	v^m	$1-v$	$(m-1)\cdot(1-v)$	$v\in(0,1); m>0;$
binomické	$(1+\beta)^{-m}$	$\frac{\beta}{1+\beta}$	$(m-1)\cdot\frac{\beta}{1+\beta}$	$\beta>0$
ETNB	0	$1-v$	$(m-1)\cdot(1-v)$	$v\in(0,1);$
				$m>-1\wedge m\neq 0;$
	0	$\frac{\beta}{1+\beta}$	$(m-1)\cdot\frac{\beta}{1+\beta}$	$\beta>0$
ZM ETNB	libovolné	$1-v$	$(m-1)\cdot(1-v)$	$v\in(0,1);$
				$m>-1\wedge m\neq 0;$
	libovolné	$\frac{\beta}{1+\beta}$	$(m-1)\cdot\frac{\beta}{1+\beta}$	$\beta>0$
Logaritmické	0	$1-v$	$v-1$	$v\in(0,1);$
	0	$\frac{\beta}{1+\beta}$	$-\frac{\beta}{1+\beta}$	$\beta>0$
ZM logaritmické	libovolné	$1-v$	$v-1$	$v\in(0,1);$
	libovolné	$\frac{\beta}{1+\beta}$	$-\frac{\beta}{1+\beta}$	$\beta>0$
Geometrické	v	$1-v$	0	$v\in(0,1);$
	$(1+\beta)^{-1}$	$\frac{\beta}{1+\beta}$	0	$\beta>0$
ZT geometrické	0	$1-v$	0	$v\in(0,1);$
	0	$\frac{\beta}{1+\beta}$	0	$\beta>0$
ZM geometrické	libovolné	$1-v$	0	$v\in(0,1);$
	libovolné	$\frac{\beta}{1+\beta}$	0	$\beta>0$

ZT – Zero Truncated (v nule uříznuté), ZM – Zero Modified (v nule modifikované)

Tabulka 1.2: Diskrétní rozdělení třídy $(a, b, 1)$

Zdroj: [14], vlastní odvození

1.7 Příklady

Příklad 1.1. Ukažte pomocí generující funkce, že Poissonovo rozdělení s parametrem $\lambda > 0$ je limitou negativně binomického rozdělení s parametry $m > 0, \beta > 0$ pro $m \to \infty, \beta \to 0$ a $m\beta = \lambda$.

Řešení:
Generující funkce negativně binomického rozdělení je

$$G_N(s) = \left(\frac{1}{1-\beta(s-1)}\right)^m.$$

$m\beta = \lambda \Leftrightarrow \beta = \frac{\lambda}{m}$, v limitě necháme $m \to \infty$

$$\lim_{m\to\infty}\left(\frac{1}{1-\beta(s-1)}\right)^m = \lim_{m\to\infty}\left(\frac{1}{1-\frac{\lambda}{m}(s-1)}\right)^m = \lim_{m\to\infty}\left(1-\frac{\lambda(s-1)}{m}\right)^{-m} =$$
$$= \exp\left\{\lim_{m\to\infty}\left[-m\cdot\ln\left(1-\frac{\lambda(s-1)}{m}\right)\right]\right\} = \mathrm{e}^{\lambda(s-1)},$$

což je generující funkce Poissonova rozdělení.

mezivýpočet:

$$\lim_{m\to\infty}\left[-m\cdot\ln\left(1-\frac{\lambda(s-1)}{m}\right)\right] = \lim_{m\to\infty}\left(\frac{\ln\left(1-\frac{\lambda(s-1)}{m}\right)}{-\frac{1}{m}}\right) =$$
$$= -\lim_{m\to\infty}\left(\frac{\ln\left(1-\frac{\lambda(s-1)}{m}\right)}{\frac{1}{m}}\right) \overset{\text{L'Hosp.}}{=}$$
$$\overset{\text{L'Hosp.}}{=} -\lim_{m\to\infty}\frac{\frac{1}{1-\frac{\lambda(s-1)}{m}}\cdot\left(\frac{m-(m-\lambda s+\lambda)\cdot 1}{m^2}\right)}{-\frac{1}{m^2}} =$$
$$= \lim_{m\to\infty}\frac{\frac{m}{m-\lambda s+\lambda}\cdot\frac{\lambda s-\lambda}{m^2}}{\frac{1}{m^2}} = \lim_{m\to\infty}\frac{\lambda(s-1)m}{m-\lambda(s-1)} \overset{\text{L'Hosp.}}{=}$$
$$\overset{\text{L'Hosp.}}{=} \lim_{m\to\infty}\frac{\lambda(s-1)}{1} = \lambda(s-1).$$

✍

Příklad 1.2. Určete reálné koeficienty a, b Poissonova rozdělení.

Řešení:
Pravděpodobnostní funkce Poissonova rozdělení:

$$p_N(k) = \mathrm{e}^{-\lambda} \cdot \frac{\lambda^k}{k!}, \quad k = 0, 1, 2, \ldots$$

Podle (1.25)

$$\frac{p_N(k)}{p_N(k-1)} = \frac{\mathrm{e}^{-\lambda} \cdot \frac{\lambda^k}{k!}}{\mathrm{e}^{-\lambda} \cdot \frac{\lambda^{k-1}}{(k-1)!}} = \frac{\lambda^k}{k!} \cdot \frac{(k-1)!}{\lambda^{k-1}} = \frac{\lambda}{k},$$

odtud $a = 0, b = \lambda$.

✍

Příklad 1.3. Pro pojistný kmen o 9 461 klientovi máme v tabulce zaznamenány pozorované četnosti škod na jednu smlouvu

počet nehod k	počet pojistných smluv n_k
0	7 840
1	1 317
2	239
3	42
4	14
5	4
6	4
7	1
8 a více	0
Celkem	9 461

Určete rozdělení z třídy $(a, b, 0)$ vhodné k modelování počtu nehod.

Řešení:
Spočítáme hodnoty $k \cdot \frac{n_k}{n_{k-1}}$:

$k = 0$: $-$

$k = 1$: $0,167985$

$k = 2$: $0,362946$

$k = 3$:	$0,527197$
$k = 4$:	$1,\overline{333333}$
$k = 5$:	$1,428571$
$k = 6$:	6
$k = 7$:	$1,750000$
$k = 8$ a více:	0

Podle vypočítaných hodnot připadá v úvahu buď Poissonovo, nebo negativně binomické rozdělení.

Spočítejme si střední hodnotu a rozptyl počtu nehod na jednu smlouvu:

$$\mathrm{E}(N) \doteq \frac{1}{9\,461} \cdot (1\,317 + 2 \cdot 239 + 3 \cdot 42 + 4 \cdot 14 + 5 \cdot 4 + 6 \cdot 4 + 7) = 0,214354;$$
$$\mathrm{Var}(N) \doteq \frac{1}{9\,460} \cdot \big((0 - 0,214354)^2 \cdot 7\,840 + \cdots + (7 - 0,214354)^2 \cdot 1\big) = 0,288931.$$

V porovnání je $\mathrm{E}(N) < \mathrm{Var}(N)$, a proto se k modelování jeví jako nejvhodnější negativně binomické rozdělení.

✍

Příklad 1.4. Uvažujme náhodnou veličinu N z negativně binomického rozdělení s parametry $m = 2,5$ a $\beta = 0,5$. Určete koeficienty $a, b \in \mathbb{R}$ a pravděpodobnostní funkci v $k = 0, 1, 2, 3$. Dále určete její v nule useknutou a v nule modifikovanou verzi s $p_N^M(0) = 0,6$.

Řešení:
Z tabulky 1.1:

$$p_N(0) = (1+\beta)^{-m} = 1,5^{-2,5} \doteq 0,362887;$$
$$a = \frac{\beta}{1+\beta} = \frac{1}{2} \cdot \frac{2}{3} = \frac{1}{3};$$
$$b = (m-1) \cdot \frac{\beta}{1+\beta} = \frac{3}{2} \cdot \frac{1}{3} = \frac{1}{2}.$$

Dle rekurentní formule (1.25) pak vypočítáme

$$p_N(1) = p_N(0) \cdot \left(a + \frac{b}{1}\right) = 0,362887 \cdot \left(\frac{1}{3} + \frac{1}{2}\right) \doteq 0,302406;$$

$$p_N(2) = p_N(1) \cdot \left(a + \frac{b}{2}\right) = 0,302406 \cdot \left(\frac{1}{3} + \frac{1}{4}\right) \doteq 0,176404;$$
$$p_N(3) = p_N(2) \cdot \left(a + \frac{b}{3}\right) = 0,176404 \cdot \left(\frac{1}{3} + \frac{1}{6}\right) \doteq 0,088202.$$

Pro v nule useknutou verzi dostaneme

$$\begin{aligned}
p_N^T(0) &= 0;\\
p_N^T(1) &= \frac{p_N(1)}{1 - p_N(0)} = \frac{0,302406}{1 - 0,362887} \doteq 0,474650;\\
p_N^T(2) &= p_N^T(1) \cdot \left(a + \frac{b}{2}\right) = 0,474650 \cdot \left(\frac{1}{3} + \frac{1}{4}\right) \doteq 0,276879;\\
p_N^T(3) &= p_N^T(2) \cdot \left(a + \frac{b}{3}\right) = 0,276879 \cdot \left(\frac{1}{3} + \frac{1}{6}\right) \doteq 0,138440.
\end{aligned}$$

Pro v nule modifikovanou verzi obdržíme

$$\begin{aligned}
p_N^M(0) &= 0,6;\\
p_N^M(1) &= \frac{1 - p_N^M(0)}{1 - p_N(0)} \cdot p_N(1) = \frac{1 - 0,6}{1 - 0,362887} \cdot 0,302406 \doteq 0,189860;\\
p_N^M(2) &= p_N^T(1) \cdot \left(a + \frac{b}{2}\right) = 0,189860 \cdot \left(\frac{1}{3} + \frac{1}{4}\right) \doteq 0,110752;\\
p_N^M(3) &= p_N^T(2) \cdot \left(a + \frac{b}{3}\right) =,110752 \cdot \left(\frac{1}{3} + \frac{1}{6}\right) \doteq 0,055376.
\end{aligned}$$

Příklad 1.5. Nechť je náhodná veličina N z ETNB rozdělení s parametry $m = -0,5$ a $\beta = 1$. Určete $p_N^T(k)$ a $p_N^M(k)$ s $p_N^M(0) = 0,6$ pro $k = 0, 1, 2, 3$.

Řešení:

Z tabulky 1.2 plyne

$$\begin{aligned}
p_N^T(0) &= 0;\\
a &= \frac{\beta}{1+\beta} = \frac{1}{2};\\
b &= (m-1) \cdot \frac{\beta}{1+\beta} = -\frac{3}{2} \cdot \frac{1}{2} = -\frac{3}{4}.
\end{aligned}$$

Pravděpodobnost $p_N^T(1)$ získáme z (1.37)

$$p_N^T(1) = \frac{-0,5 \cdot 1}{2^{0,5} - (1+1)} \doteq 0,853553.$$

Další pravděpodobnosti jsou

$$p_N^T(2) = p_N^T(1) \cdot \left(a + \frac{b}{2}\right) \doteq 0,106694;$$
$$p_N^T(3) = p_N^T(2) \cdot \left(a + \frac{b}{3}\right) \doteq 0,026674.$$

Pro v nule modifikované ETNB rozdělení máme

$$p_N^M(0) = 0,6;$$
$$p_N^M(1) = \left(1 - p_N^M(0)\right) \cdot p_N^T(1) = (1 - 0,6) \cdot 0,853553 \doteq 0,341421;$$
$$p_N^M(2) = \left(1 - p_N^M(0)\right) \cdot p_N^T(2) = 0,4 \cdot 0,106694 \doteq 0,042678;$$
$$p_N^M(3) = \left(1 - p_N^M(0)\right) \cdot p_N^T(3) = 0,4 \cdot 0,026674 \doteq 0,010670.$$

✍

Příklad 1.6. Určete generující funkci, střední hodnotu a rozptyl useknutého geometrického rozdělení.

Řešení:

$$p_N(k) = \frac{\beta^k}{(1+\beta)^{k+1}}, \quad k = 0, 1, 2, \ldots,$$
$$p_N^T(k) = \frac{p_N(k)}{1 - p_N(0)} = \frac{\frac{\beta^k}{(1+\beta)^{k+1}}}{1 - \frac{1}{1+\beta}} = \frac{\beta^{k-1}}{(1+\beta)^k}.$$

Generující funkce může být získána dvěma způsoby

$$G_N^T(s) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\beta^{k-1}}{(1+\beta)^k} \cdot s^k = \sum_{k=1}^{\infty} \beta^{-1} \cdot \left(\frac{\beta s}{1+\beta}\right)^k = \frac{1}{\beta} \cdot \frac{\beta s}{1+\beta-\beta s} = \frac{s}{1+\beta-\beta s}$$
$$\left(\text{pozn.: } \sum_{k=1}^{\infty} \left(\frac{\beta s}{1+\beta}\right)^k \text{ je konvergentní, je-li } \left|\frac{\beta s}{1+\beta}\right| < 1\right),$$

$$G_N^T(s) = \frac{G_N(s) - p_N(0)}{1 - p_N(0)} = \frac{\big(1 - \beta(s-1)\big)^{-1} - (1+\beta)^{-1}}{1 - (1+\beta)^{-1}} = \frac{\frac{1}{1+\beta-\beta s} - \frac{1}{1+\beta}}{\frac{\beta}{1+\beta}} =$$
$$= \frac{s}{1+\beta-\beta s}.$$

Střední hodnotu a rozptyl získáme

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}s} G_N^T(s) = \frac{1 \cdot \big(1+\beta-\beta s\big) - s \cdot (-\beta)}{\big(1+\beta-\beta s\big)^2} = \frac{1+\beta-\beta s+\beta s}{\big(1+\beta-\beta s\big)^2} = \frac{1+\beta}{\big(1+\beta-\beta s\big)^2},$$
$$\mathrm{E}^T(N) = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}s} G_N^T(s)\Big|_{s=1} = \frac{1+\beta}{(1+\beta-\beta)^2} = 1+\beta,$$
$$\frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}s^2} G_N^T(s) = \frac{2\beta(1+\beta)\cdot(1+\beta-\beta s)}{(1+\beta-\beta s)^4} = \frac{2\beta(1+\beta)}{(1+\beta-\beta s)^3},$$
$$\mathrm{Var}^T(N) = \frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}s^2} G_N^T(s)\Big|_{s=1} + \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}s} G_N^T(s)\Big|_{s=1} - \left(\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}s} G_N^T(s)\Big|_{s=1}\right)^2 =$$
$$= 2\beta + 2\beta^2 + 1 + \beta - 1 - 2\beta - \beta^2 = \beta\cdot(1+\beta).$$

Tvary s parametrem $\upsilon = \frac{1}{1+\beta}$:

$$G_N^T(s) = \frac{s\upsilon}{1+s(\upsilon-1)},$$
$$\mathrm{E}^T(N) = \frac{1}{\upsilon},$$
$$\mathrm{Var}^T(N) = \frac{1-\upsilon}{\upsilon^2}.$$

✍

Příklad 1.7. Ukažte, že generující funkce logaritmického rozdělení je dána $G_N^T(s) = 1 - \frac{\ln(1-\beta(s-1))}{\ln(1+\beta)}$. Dále nalezněte vztahy pro výpočet střední hodnoty a rozptylu tohoto rozdělení.

Řešení:

$$p_N^T(k) = \frac{\beta^k}{k(1+\beta)^k \cdot \ln(1+\beta)}, \quad k = 1, 2, \ldots,$$

$$
\begin{aligned}
G_N^T(s) &= \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(\beta s)^k}{k(1+\beta)^k \cdot \ln(1+\beta)} = \frac{1}{\ln(1+\beta)} \cdot \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k} \cdot \left(\frac{\beta s}{1+\beta}\right)^k = \\
&= \frac{1}{\ln(1+\beta)} \cdot \left(-\ln\left(\frac{1+\beta-\beta s}{1+\beta}\right)\right) = \frac{1}{\ln(1+\beta)} \cdot \left(\ln\left(\frac{1+\beta}{1+\beta-\beta s}\right)\right) = \\
&= \frac{1}{\ln(1+\beta)} \cdot \big(\ln(1+\beta) - \ln(1+\beta-\beta s)\big) = 1 - \frac{\ln(1-\beta(s-1))}{\ln(1+\beta)} \\
&\left(\text{pozn.: } \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k} \cdot \left(\frac{\beta s}{1+\beta}\right)^k \text{ je konvergentní, je-li } \left|\frac{\beta s}{1+\beta}\right| \le 1 \wedge \frac{\beta s}{1+\beta} \neq 1\right).
\end{aligned}
$$

Střední hodnotu a rozptyl vypočítáme

$$
\begin{aligned}
\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}s} G_N^T(s) &= -\frac{\frac{1}{1+\beta-\beta s} \cdot (-\beta) \cdot \ln(1+\beta)}{\big(\ln(1+\beta)\big)^2} = \frac{\beta}{\ln(1+\beta) \cdot (1+\beta-\beta s)}, \\
\mathrm{E}^T(N) &= \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}s} G_N^T(s)\Big|_{s=1} = \frac{\beta}{\ln(1+\beta)}, \\
\frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}s^2} G_N^T(s) &= \frac{-\beta \cdot \big(-\beta \ln(1+\beta)\big)}{\big(\ln(1+\beta) \cdot (1+\beta-\beta s)\big)^2} = \frac{\beta^2}{\ln(1+\beta) \cdot (1+\beta-\beta s)^2}, \\
\mathrm{Var}^T(N) &= \frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}s^2} G_N^T(s)\Big|_{s=1} + \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}s} G_N^T(s)\Big|_{s=1} - \left(\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}s} G_N^T(s)\Big|_{s=1}\right)^2 = \\
&= \frac{\beta^2}{\ln(1+\beta)} + \frac{\beta}{\ln(1+\beta)} - \frac{\beta^2}{\big(\ln(1+\beta)\big)^2} = \\
&= \frac{\beta^2 \ln(1+\beta) + \beta\big(\ln(1+\beta)\big) - \beta^2}{\big(\ln(1+\beta)\big)^2} = \frac{\beta(1+\beta)\ln(1+\beta) - \beta^2}{\ln^2(1+\beta)} = \\
&= \frac{\beta \cdot \big((1+\beta)\ln(1+\beta) - \beta\big)}{\ln^2(1+\beta)}.
\end{aligned}
$$

✍

Příklad 1.8. Nalezněte generující funkci v nule modifikovaného geometrického rozdělení.

Řešení:
Platí

$$
G_N^M(s) = p_N^M(0) + \big(1 - p_N^M(0)\big) \cdot G_N^T(s),
$$

$G_N^T(s)$ jsme získali v příkladu 1.6:

$$G_N^T(s) = \frac{s}{1-\beta(s-1)}.$$

$$\begin{aligned}
G_N^M(s) &= p_N^M(0) + \left(1 - p_N^M(0)\right) \cdot \frac{s}{1-\beta(s-1)} = \\
&= \frac{p_N^M(0) - p_N^M(0)\cdot\beta(s-1) + s - s\cdot p_N^M(0)}{1-\beta(s-1)} = \\
&= \frac{-p_N^M(0)\cdot(s-1) - p_N^M(0)\cdot\beta(s-1) + s}{1-\beta(s-1)} = \\
&= \frac{-p_N^M(0)\cdot(s-1) - p_N^M(0)\cdot\beta(s-1) + (s-1) + 1}{1-\beta(s-1)} = \\
&= \frac{-(s-1)\cdot\left(p_N^M(0) + p_N^M(0)\cdot\beta - 1\right) + 1}{1-\beta(s-1)} = \\
&= \frac{1 - \left(p_N^M(0) + p_N^M(0)\cdot\beta - 1\right)\cdot(s-1)}{1-\beta(s-1)}.
\end{aligned}$$

✍

Cvičení

1. Dokažte větu 1.4.

   $$\left[\text{Nápověda: } G_N^{(m)}(s) = \sum_{l=0}^{\infty} p_N(l)\cdot l\cdot(l-1)\cdot\ldots\cdot(l-m+1)\cdot s^{l-m}\right]$$

2. Dokažte větu 1.5.

   [Nápověda: Vyjděte z definice 1.3.]

3. Nalezněte vztah mezi generující a moment generující funkcí diskrétní náhodné veličiny N.

   $[G_N(s) = M_N(\ln(s))]$

4. Dokažte lemma 1.7.

   $$\left[\text{Nápověda: } M_N^{(j)}(t)\Big|_{t=0} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\mathrm{d}^{(j)}}{\mathrm{d}t^j} p_N(k)\cdot \mathrm{e}^{tk}\Big|_{t=0},\ \ j = 1, 2, \ldots, m\right]$$

5. Pomocí generující funkce dokažte, že Poissonovo rozdělení s parametrem $\lambda > 0$ je limitou binomického rozdělení s $n \in \mathbb{N}, v \in (0,1)$ pro $n \to \infty, v \to 0$ a $nv = \lambda$.

   $\left[\text{Nápověda: } \lim\limits_{n\to\infty}\left(1 + \frac{\lambda(s-1)}{n}\right)^n\right]$

6. Určete reálné koeficienty a, b všech pravděpodobnostních rozdělení z třídy $(a, b, 0)$, kromě Poissonova rozdělení.

   [Hodnoty jsou uvedeny v tabulce 1.1.]

7. Pro níže uvedený datový soubor rozhodněte, jaké rozdělení z třídy $(a, b, 0)$ byste použili k modelování počtu nehod.

počet nehod k	počet pojistných smluv n_k
0	861
1	121
2	13
3	3
4	1
5	0
6	1
7 a více	0

   [$\mathrm{E}(N) = 0,166000$; $\mathrm{Var}(N) = 0,224669$;
   negativně binomické rozdělení]

8. Mějme tabulku pozorovaných četností škod na jednu smlouvu

počet nehod k	počet pojistných smluv n_k
0	9 048
1	905
2	45
3	2
4 a více	0

   Jaké rozdělení z třídy $(a, b, 0)$ byste doporučili k modelování škod?

[E(N) $= 0,100100$; Var(N) $= 0,100290$; Poissonovo rozdělení]

9. Uvažujme náhodnou veličinu N, jež se řídí Poissonovým rozdělením s parametrem $\lambda = 0,7$. Určete pravděpodobnostní funkci v $k = 0,1,2,3$ a její v nule useknutou verzi.

[$p_N(0) \doteq 0,496585; p_N(1) \doteq 0,347610; p_N(2) \doteq 0,121664;$
$p_N(3) \doteq 0,028388; p_N^T(0) = 0; p_N^T(1) \doteq 0,690504;$
$p_N^T(2) \doteq 0,241676; p_N^T(3) \doteq 0,056391$]

10. Mějme náhodnou veličinu N z Poissonova rozdělení s parametrem $\lambda = \frac{1}{4}$. Vypočtěte pravděpodobnostní funkci v $k = 0,1,2,3,4$. Dále určete $p_N^T(k)$ a $p_N^M(k)$, uvažujeme-li $p_N^M(0) = 0,7$.

[$p_N(0) \doteq 0,778801; p_N(1) \doteq 0,194700; p_N(2) \doteq 0,024338;$
$p_N(3) \doteq 0,002028; p_N(4) \doteq 0,000127; p_N^T(0) = 0;$
$p_N^T(1) \doteq 0,880203; p_N^T(2) \doteq 0,110025; p_N^T(3) \doteq 0,009169;$
$p_N^T(4) \doteq 0,000573; p_N^M(1) \doteq 0,264061; p_N^M(2) \doteq 0,033008;$
$p_N^M(3) \doteq 0,002751; p_N^M(4) \doteq 0,000172$]

11. Nechť je N náhodná veličina z negativně binomického rozdělení s parametry $m = 2, \beta = 0,45$. Nalezněte $p_N(k), p_N^T(k)$ a $p_N^M(k)$ s $p_N^M(0) = 0,5$ pro $k = 0,1,2,3,4,5$.

[$p_N(0) \doteq 0,475624; p_N(1) \doteq 0,295215; p_N(2) \doteq 0,137428;$
$p_N(3) \doteq 0,056867; p_N(4) \doteq 0,022060; p_N(5) \doteq 0,008215;$
$p_N^T(0) = 0; p_N^T(1) \doteq 0,562983; p_N^T(2) \doteq 0,262078;$
$p_N^T(3) \doteq 0,108446; p_N^T(4) \doteq 0,042070; p_N^T(5) \doteq 0,015667;$
$p_N^M(1) \doteq 0,281492; p_N^M(2) \doteq 0,131039; p_N^M(3) \doteq 0,054223;$
$p_N^M(4) \doteq 0,021035; p_N^M(5) \doteq 0,007834$]

12. Uvažujme náhodnou veličinu N z binomického rozdělení s parametry $n = 6$ a $\upsilon = 0,25$. Pro $k = 0,1,2,3$ určete $p_N(k), p_N^T(k)$ a $p_N^M(k)$, kde $p_N^M(0) = 0,3$.

$$[p_N(0) \doteq 0{,}177979; p_N(1) \doteq 0{,}355958; p_N(2) \doteq 0{,}296631;$$
$$p_N(3) \doteq 0{,}131838; p_N^T(0) = 0; p_N^T(1) \doteq 0{,}433028;$$
$$p_N^T(2) \doteq 0{,}360857; p_N^T(3) \doteq 0{,}160381; p_N^M(1) \doteq 0{,}303120;$$
$$p_N^M(2) \doteq 0{,}252600; p_N^M(3) \doteq 0{,}112267]$$

13. Mějme náhodnou veličinu N, jež se řídí logaritmickým rozdělením s parametrem $\upsilon = 0{,}4$. Nalezněte $p_N^T(k)$ a $p_N^M(k)$, kde $p_N^M(0) = 0{,}55$ pro $k = 0, 1, 2, 3, 4$.

$$[p_N^T(0) = 0; p_N^T(1) \doteq 0{,}654814; p_N^T(2) \doteq 0{,}196444;$$
$$p_N^T(3) \doteq 0{,}078578; p_N^T(4) \doteq 0{,}035360; p_N^M(1) \doteq 0{,}294666;$$
$$p_N^M(2) \doteq 0{,}088400; p_N^M(3) \doteq 0{,}035360; p_N^M(4) \doteq 0{,}015912]$$

14. Nalezněte generují funkci useknutého Poissonova a useknutého binomického rozdělení.

$$\left[G_N^T(s) = \tfrac{\mathrm{e}^{\lambda s}-1}{\mathrm{e}^{\lambda}-1}; G_N^T(s) = \tfrac{(1+\upsilon(s-1))^n-(1-\upsilon)^n}{1-(1-\upsilon)^n}\right]$$

15. Určete vztahy pro výpočet střední hodnoty a rozptylu obou rozdělení z předchozího příkladu.

$$\left[\mathrm{E}^T(N) = \tfrac{\lambda \mathrm{e}^{\lambda}}{\mathrm{e}^{\lambda}-1}, \mathrm{Var}^T(N) = \tfrac{\lambda \mathrm{e}^{\lambda}(\mathrm{e}^{\lambda}-\lambda-1)}{(\mathrm{e}^{\lambda}-1)^2};\right.$$
$$\left.\mathrm{E}^T(N) = \tfrac{n\upsilon}{1-(1-\upsilon)^n}, \mathrm{Var}^T(N) = \tfrac{n\upsilon((1-\upsilon)-(1-\upsilon)^n\cdot(n\upsilon-\upsilon+1))}{(1-(1-\upsilon)^n)^2}\right]$$

16. Najděte generující funkci, střední hodnotu i rozptyl ETNB rozdělení.

$$\left[G_N^T(s) = \tfrac{(1-\beta(s-1))^{-m}-(1+\beta)^{-m}}{1-(1+\beta)^{-m}}, \mathrm{E}^T(N) = \tfrac{m\beta}{1-(1+\beta)^{-m}},\right.$$
$$\left.\mathrm{Var}(N) = \tfrac{m\beta\cdot((1+\beta)-(1+\beta)^{-m}\cdot(1+\beta+m\beta))}{(1-(1+\beta)^{-m})^2}\right]$$

Kapitola 2

Diskrétní složená rozdělení

Třídu diskrétních rozdělení lze rozšířit o další členy procesem skládání dvou libovolných diskrétních rozložení.

Definice 2.1. Nechť N je diskrétní náhodná veličina s generující funkcí $G_N(s)$ a nechť $M_1, M_2, \ldots$ jsou IID[1] (vzájemně nezávislé, stejně rozdělené) diskrétní náhodné veličiny s generující funkcí $G_M(s)$. Dále předpokládejme, že M_i pro $i = 1, 2, \ldots$ nezávisejí na N. Potom je generující funkce složené náhodné veličiny $S = M_1 + M_2 + \cdots + M_N$ tvaru

$$G_S(s) = G_N\big(G_M(s)\big) \quad \text{pro } s \in \mathbb{R}, \tag{2.1}$$

kde $G_N(s)$ představuje generující funkci primárního rozložení a $G_M(s)$ generující funkci sekundárního rozložení.

V pojistné praxi udává náhodná veličina N počet různých škod, jež mohou vzniknout v rámci jednoho portfolia a náhodné proměnné M_i, $i = 1, 2, \ldots, N$, představují počet uplatněných pojistných nároků z i-té vzniklé škody. Tudíž náhodná veličina S udává celkový počet nároků uplatněných v rámci daného portfolia.

[1]IID – Independent Identical Distibuted

Pravděpodobnost, že dojde právě ke k pojistným nárokům na pojistném kmeni lze vyjádřit

$$\begin{aligned} P(S=k) &= \sum_{n=0}^{\infty} P(S=k|N=n)\cdot P(N=n) = \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} P(M_1+M_2+\cdots+M_N=k|N=n)\cdot P(N=n) = \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} P(M_1+M_2+\cdots+M_n=k)\cdot P(N=n). \end{aligned} \tag{2.2}$$

Označme $g_S(n) = P(S=n)$, $q_M(n) = P(M=n)$ a $p_N(n) = P(N=n)$. Potom můžeme (2.2) zapsat

$$g_S(k) = \sum_{n=0}^{\infty} q_M^{*n}(k)\cdot p_N(n), \tag{2.3}$$

kde $q_M^{*n}(k)$ je n-násobná konvoluce funkce $q_M(k)$ pro $k \in \mathbb{N}_0$, jedná se o pravděpodobnost, že součet n IID náhodných veličin s pravděpodobnostní funkcí $q_M(k)$ nabude hodnoty k.

Věta 2.2. (Panjerova rekurze) *Je-li primární rozdělení členem třídy* $(a,b,0)$, *pak platí rekurentní vztah*

$$g_S(k) = \frac{1}{1-a\cdot q_M(0)}\cdot\sum_{j=1}^{k}\left(a+\frac{jb}{k}\right)q_M(j)\cdot g_S(k-j), \quad k=1,2,\ldots \tag{2.4}$$

Důkaz. Ze vztahu (1.25) plyne

$$\begin{aligned} p_N(n) &= \left(a+\frac{b}{n}\right)\cdot p_N(n-1) \quad \text{pro } n=1,2,\ldots \\ p_N(n) &= a\cdot p_N(n-1)+\frac{b}{n}\cdot p_N(n-1) \\ n\cdot p_N(n) &= a\cdot n\cdot p_N(n-1)+b\cdot p_N(n-1)-a\cdot p_N(n-1)+a\cdot p_N(n-1) \\ n\cdot p_N(n) &= a\cdot(n-1)\cdot p_N(n-1)+(a+b)\cdot p_N(n-1) \end{aligned}$$

Obě strany rovnice vynásobíme $\big(G_M(s)\big)^{n-1} \cdot G'_M(s)$ a sečteme přes n

$$\begin{aligned}
&\sum_{n=1}^{\infty} n \cdot p_N(n) \cdot \big(G_M(s)\big)^{n-1} \cdot G'_M(s) = \\
&= a \sum_{n=1}^{\infty} (n-1) \cdot p_N(n-1) \cdot \big(G_M(s)\big)^{n-1} \cdot G'_M(s) + \\
&+ (a+b) \sum_{n=1}^{\infty} p_N(n-1) \cdot \big(G_M(s)\big)^{n-1} \cdot G'_M(s).
\end{aligned}$$

Jelikož $G_S(s) = \sum_{n=0}^{\infty} \big(G_M(s)\big)^n \cdot p_N(n)$, můžeme předchozí vztah přepsat

$$\begin{aligned}
\sum_{n=1}^{\infty} p_N(n) \cdot \Big[\big(G_M(s)\big)^n\Big]' = a &\sum_{n=0}^{\infty} n \cdot p_N(n) \cdot \big(G_M(s)\big)^n \cdot G'_M(s) + \\
&+ (a+b) \sum_{n=0}^{\infty} p_N(n) \cdot \big(G_M(s)\big)^n \cdot G'_M(s).
\end{aligned}$$

Tudíž

$$\begin{aligned}
G'_S(s) &= a \sum_{n=0}^{\infty} n \cdot \big(G_M(s)\big)^{n-1} \cdot G'_M(s) \cdot p_N(n) \cdot G_M(s) + \\
&+ (a+b) \sum_{n=0}^{\infty} p_N(n) \cdot \big(G_M(s)\big)^n \cdot G'_M(s) = \\
&= a \cdot G'_S(s) \cdot G_M(s) + (a+b) \cdot G_S(s) \cdot G'_M(s).
\end{aligned}$$

Každou stranu rovnice můžeme rozepsat do tvaru

$$\begin{aligned}
k \cdot g_S(k) \cdot s^{k-1} = a &\sum_{j=0}^{k} (k-j) \cdot q_M(j) \cdot g_S(k-j) \cdot s^{k-1} + \\
&+ (a+b) \sum_{j=0}^{k} j \cdot q_M(j) \cdot g_S(k-j) \cdot s^{k-1} \quad \text{pro } k = 1, 2, \ldots
\end{aligned}$$

Porovnáme koeficienty u s^{k-1} a dostaneme

$$k \cdot g_S(k) = a\sum_{j=0}^{k}(k-j)\cdot q_M(j)\cdot g_S(k-j) + (a+b)\sum_{j=0}^{k} j\cdot q_M(j)\cdot g_S(k-j) =$$

$$= ak\cdot q_M(0)\cdot g_S(k) + a\sum_{j=1}^{k}(k-j)\cdot q_M(j)\cdot g_S(k-j)+$$

$$+ (a+b)\sum_{j=1}^{k} j\cdot q_M(j)\cdot g_S(k-j) =$$

$$= ak\cdot q_M(0)\cdot g_S(k) + a\sum_{j=1}^{k}(k-j+j)\cdot q_M(j)\cdot g_S(k-j)+$$

$$+ b\sum_{j=1}^{k} j\cdot q_M(j)\cdot g_S(k-j) =$$

$$= ak\cdot q_M(0)\cdot g_S(k) + ak\sum_{j=1}^{k} q_M(j)\cdot g_S(k-j) + b\sum_{j=1}^{k} j\cdot q_M(j)\cdot g_S(k-j)$$

Vidíme, že

$$k\cdot g_S(k)\cdot\big(1-a\cdot q_M(0)\big) = k\sum_{j=1}^{k} a\cdot q_M(j)\cdot g_S(k-j) + \sum_{j=1}^{k} jb\cdot q_M(j)\cdot g_S(k-j)$$

$$g_S(k) = \frac{1}{1-a\cdot q_M(0)}\cdot\sum_{j=1}^{k}\left(a+\frac{jb}{k}\right)q_M(j)\cdot g_S(k-j).$$

■

Věta 2.3. *Je-li primární rozdělení členem třídy* $(a,b,1)$*, potom*

$$g_S(k) = \frac{\big[p_N(1)-(a+b)\cdot p_N(0)\big]\cdot q_M(k) + \sum_{j=1}^{k}\left(a+\frac{jb}{k}\right)q_M(j)\cdot g_S(k-j)}{1-a\cdot q_M(0)} \tag{2.5}$$

pro $k = 1, 2, \ldots$

Důkaz. Analogie důkazu věty 2.2. ■

Výše uvedené rekurentní formule v sobě nezahrnují konvoluci, tím výrazně ulehčují naše výpočty. Abychom je mohli použít, musíme znát počáteční hodnotu $g_S(0)$. Způsob, jak $g_S(0)$ získat, je zmíněn v následující větě.

Věta 2.4. *Pro každé složené rozložení platí*

$$g_S(0) = G_N\big(q_M(0)\big), \tag{2.6}$$

kde $G_N(s)$ je generující funkce primárního rozložení a $q_M(0)$ je pravděpodobnost, že náhodná veličina M ze sekundárního rozložení nabude hodnoty 0, tj. $P(M = 0)$.

Střední hodnota a rozptyl

Očekávání složené náhodné veličiny $S = \sum_{i=1}^{N} M_i$ vypočítáme ze znalosti vlastnosti podmíněné střední hodnoty[2] náhodné veličiny S za podmínky $N = n$. Mějme na paměti, že M_i pro $i = 1, 2, \dots$ nezávisejí na N.

$$\begin{aligned} \mathrm{E}(S) = \mathrm{E}[\mathrm{E}(S|N)] &= \sum_{n=0}^{\infty} \mathrm{E}(S|N = n) \cdot P(N = n) = \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} \mathrm{E}(M_1 + M_2 + \dots + M_N|N = n) \cdot P(N = n) = \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} \mathrm{E}(M_1 + M_2 + \dots + M_n) \cdot P(N = n) = \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} \mathrm{E}(M) \cdot n \cdot P(N = n) = \mathrm{E}(M) \cdot \mathrm{E}(N). \end{aligned} \tag{2.7}$$

Podobně odvodíme rozptyl[3] náhodné veličiny S

$$\begin{aligned} \mathrm{Var}(S) &= \mathrm{E}[\mathrm{Var}(S|N)] + \mathrm{Var}[\mathrm{E}(S|N)] = \\ &= \mathrm{E}\big(N \cdot \mathrm{Var}(M)\big) + \mathrm{Var}\big(N \cdot \mathrm{E}(M)\big) = \\ &= \mathrm{E}(N) \cdot \mathrm{Var}(M) + \mathrm{Var}(N) \cdot \big(\mathrm{E}(M)\big)^2. \end{aligned} \tag{2.8}$$

[2]Nechť X a Y jsou náhodné veličiny a nechť existuje střední hodnota $\mathrm{E}(X)$, pak $\mathrm{E}(X) = \mathrm{E}[\mathrm{E}(X|Y)]$.

[3]Nechť X a Y jsou náhodné veličiny a nechť existuje rozptyl $\mathrm{Var}(X)$, potom platí $\mathrm{Var}(X) = \mathrm{E}[\mathrm{Var}(X|Y)] + \mathrm{Var}[\mathrm{E}(X|Y)]$.

Moment generující funkce

Analogickým postupem obdržíme moment generující funkci veličiny S

$$\begin{aligned} M_S(t) &= \mathrm{E}(\mathrm{e}^{tS}) = \mathrm{E}[\mathrm{E}(\mathrm{e}^{tS}|N)] = \sum_{n=0}^{\infty} \mathrm{E}(\mathrm{e}^{tS}|N=n)\cdot P(N=n) = \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} \mathrm{E}\big(\mathrm{e}^{t(M_1+M_2+\cdots+M_N)}|N=n\big)\cdot P(N=n) = \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} \mathrm{E}\big(\mathrm{e}^{t(M_1+M_2+\cdots+M_n)}\big)\cdot P(N=n) = \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} \big(M_M(t)\big)^n \cdot P(N=n) = \mathrm{E}\big([M_M(t)]^N\big) = \\ &= \mathrm{E}\big(\mathrm{e}^{N\cdot\ln(M_M(t))}\big) = M_N\big(\ln[M_M(t)]\big),\ t\geq 0. \end{aligned} \tag{2.9}$$

2.1 Diskrétní složené Poissonovo rozdělení

Toto rozdělení je považováno za nejdůležitější diskrétní složené rozdělení, neboť právě Poissonovo rozložení bývá nejčastěji využíváno k popisu počtu škod, které mohou být příčinou vzniku pojistných událostí.

Definice 2.5. Nechť mají IID náhodné veličiny $M_1, M_2, \ldots$ společnou distribuční funkci[4] $F_M(k)$ a nechť jsou nezávislé na N. Pak náhodný součet $S = \sum_{i=1}^{N} M_i$ má složené Poissonovo rozdělení[5] s parametry λ a $F_M(k)$, značíme $S \sim CPo\big(\lambda, F_M(k)\big)$, jestliže se N řídí Poissonovým rozdělením s parametrem $\lambda > 0$, tedy

$$P(N=n) = \begin{cases} \mathrm{e}^{-\lambda}\cdot\frac{\lambda^n}{n!}, & n = 0,1,2,\ldots, \\ 0, & \text{jinak.} \end{cases} \tag{2.10}$$

[4] Nechť X je náhodná veličina definovaná na pravděpodob. prostoru $(\Omega, \mathcal{A}, P)$. Pak funkci $F_X(x) = P(X \leq x), x \in \mathbb{R}$, nazýváme distribuční funkcí náhodné veličiny X.

[5] Compound Poisson distribution

Pravděpodobnost, že nedojde k žádné pojistné události na pojistném kmeni s primárním Poissonovým rozložením, vyplývá z věty 2.4

$$g_S(0) = \mathrm{e}^{\lambda\cdot(q_M(0)-1)} \tag{2.11}$$

a pravděpodobnost, že v portfoliu nastane právě k pojistných událostí, vypočítáme dle věty 2.2, kde $a = 0$ a $b = \lambda$ (viz tabulka 1.1)

$$g_S(k) = \frac{\lambda}{k}\sum_{j=1}^{k} j \cdot q_M(j) \cdot g_S(k-j), \quad k = 1, 2, \dots \tag{2.12}$$

Připomeňme si, že $N \sim Po(\lambda)$ má $G_N(s) = \mathrm{e}^{\lambda\cdot(s-1)}$ a $\mathrm{E}(N) = \mathrm{Var}(N) = \lambda$.

Generující funkce:

$$G_S(s) = \mathrm{e}^{\lambda\cdot(G_M(s)-1)} \quad \text{pro } s \in \mathbb{R}, \tag{2.13}$$

kde $G_M(s)$ je generující funkce sekundárního rozdělení.

Moment generující funkce:

$$M_S(t) = \mathrm{e}^{\lambda\cdot(M_M(t)-1)} \quad \text{pro } t \geq 0, \tag{2.14}$$

kde $M_M(t)$ je moment generující funkce sekundárního rozložení.

Střední hodnota a ***rozptyl***:

$$\mathrm{E}(S) = \mathrm{E}(M) \cdot \mathrm{E}(N) = \lambda \mathrm{E}(M), \tag{2.15}$$

$$\begin{aligned} \mathrm{Var}(S) &= \mathrm{E}(N) \cdot \mathrm{Var}(M) + \mathrm{Var}(N) \cdot \big(\mathrm{E}(M)\big)^2 = \\ &= \lambda \mathrm{Var}(M) + \lambda\big(\mathrm{E}(M)\big)^2 = \lambda\big[\mathrm{Var}(M) + \big(\mathrm{E}(M)\big)^2\big] = \\ &= \lambda\big[\mathrm{E}(M^2) - \big(\mathrm{E}(M)\big)^2 + \big(\mathrm{E}(M)\big)^2\big] = \lambda \mathrm{E}(M^2). \end{aligned} \tag{2.16}$$

Věta 2.6. *Nechť $S_1, S_2, \dots, S_n$ jsou vzájemně nezávislé náhodné veličiny. Dále nechť S_j má složené Poissonovo rozdělení s parametrem λ_j pro primární rozdělení a se sekundárním rozdělením $\{q_j(k) : k \in \mathbb{N}_0\}$ pro $j = 1, 2, \dots, n$.*

Potom součet $S = S_1+S_2+\cdots+S_n$ má také složené Poissonovo rozdělení s parametrem $\lambda = \lambda_1+\lambda_2+\cdots+\lambda_n$ a sekundárním rozdělením $\{q_S(k) \,:\, k \in \mathbb{N}_0\}$, kde

$$q_S(k) = \frac{\lambda_1 q_1(k) + \lambda_2 q_2(k) + \cdots + \lambda_n q_n(k)}{\lambda} = \frac{1}{\lambda} \cdot \sum_{j=1}^{n} \lambda_j q_j(k),\ k = 0, 1, \ldots \tag{2.17}$$

Důkaz. Nechť $G_j(s) = \sum_{k=0}^{\infty} q_j(k) \cdot s^k$, $j = 1, 2, \ldots, n$, je generující funkce sekundárního rozdělení. Pak S_j má generující funkci

$$G_{S_j}(s) = \mathrm{e}^{\lambda_j \cdot (G_j(s)-1)}.$$

Díky nezávislosti $S_1, S_2, \ldots, S_n$ platí

$$\begin{aligned} G_S(s) &= \prod_{j=1}^{n} G_{S_j}(s) = \prod_{j=1}^{n} \mathrm{e}^{\lambda_j \cdot (G_j(s)-1)} = \exp\Big\{\sum_{j=1}^{n} \lambda_j \cdot \big(G_j(s) - 1\big)\Big\} = \\ &= \exp\Big\{\sum_{j=1}^{n} \lambda_j \cdot G_j(s) - \underbrace{\sum_{j=1}^{n} \lambda_j}_{=\lambda}\Big\} = \exp\Big\{\Big[\sum_{j=1}^{n} \lambda_j \cdot G_j(s)\Big] - \lambda\Big\} = \\ &= \exp\left\{\lambda \cdot \left(\Big[\sum_{j=1}^{n} \frac{\lambda_j}{\lambda} \cdot G_j(s)\Big] - 1\right)\right\}. \end{aligned}$$

Získali jsme tak generující funkci složeného Poissonova rozložení s parametrem λ pro primární rozdělení a se sekundárním rozdělením, jež má generující funkci ve tvaru $\frac{1}{\lambda} \sum_{j=1}^{n} \lambda_j \cdot G_j(s)$. Z jednoznačnosti generující funkce plyne platnost vztahu (2.17). ■

Předchozí věta je zobecněním věty 1.9 a má pro praxi dva důležité důsledky

- Mějme n různých, vzájemně nezávislých portfolií, kde se celkový počet nároků jednotlivých portfolií řídí složeným Poissonovým rozložením. Potom se celkový počet nároků vzniklý kombinací těchto n portfolií bude také řídit složeným Poissonovým rozložením.

- Uvažujeme-li pojistné portfolio na dobu n let a předpokládáme-li, že celkové počty nároků jednotlivých let jsou si navzájem nezávislé a mají složené Poissonovo rozdělení, pak celkový počet nároků vzniklý za n let bude mít také složené Poissonovo rozdělení.

Příklady diskrétních složených Poissonových rozdělení

Negativně binomické rozdělení

Jedním ze způsobů, jak obdržet negativně binomické rozdělení je složit primární Poissonovo a sekundární logaritmické rozdělení.

Generující funkce negativně binomického rozdělení je dána ve tvaru

$$G_{N'}(s) = \left(\frac{1}{1-\beta(s-1)}\right)^m, \quad m > 0, \beta > 0, s \in \mathbb{R}.$$

Ověřme, že generující funkce složeného rozložení $G_S(s) = G_N(G_M(s))$ pro $s \in \mathbb{R}$, kde $G_N(s)$ představuje generující funkci Poissonova rozložení s parametrem $\lambda > 0$ a $G_M(s)$ generující funkci logaritmického rozložení s parametrem $\beta > 0$, je totožná s generující funkcí negativně binomického rozložení.

$$G_S(s) = \exp\left\{\lambda\left(-\frac{\ln\big(1-\beta(s-1)\big)}{\ln(1+\beta)}\right)\right\} = \exp\left\{\ln\big(1-\beta(s-1)\big)\cdot\frac{-\lambda}{\ln(1+\beta)}\right\} =$$

$$= \left(\exp\left\{\ln\big(1-\beta(s-1)\big)\right\}\right)^{\frac{-\lambda}{\ln(1+\beta)}} = \big(1-\beta(s-1)\big)^{\frac{-\lambda}{\ln(1+\beta)}} =$$

$$= \left(\frac{1}{1-\beta(s-1)}\right)^{\frac{\lambda}{\ln(1+\beta)}}.$$

Odsud vidíme, že pro $m = \frac{\lambda}{\ln(1+\beta)} > 0$ se $G_{N'}(s) = G_S(s)$.

Dále si spočítejme $G_M(0)$

$$G_M(0) = 1 - \frac{\ln\big(1-\beta\cdot(-1)\big)}{\ln(1+\beta)} = 0.$$

Nyní jsme již schopni odvodit $g_S(0)$

$$g_S(0) = G_N\big(G_M(0)\big) = \mathrm{e}^{\lambda\cdot(0-1)} = \mathrm{e}^{-\lambda}.$$

Ukažme, že pro $m = \frac{\lambda}{\ln(1+\beta)}$ je $g_S(0)$ je shodné s $p_N(0)$, kde $p_N(0)$ je pravděpodobnostní funkce negativně binomického rozdělení.

$$p_N(0) = \underbrace{\binom{0+m-1}{0}}_{=1} \cdot \left(\frac{1}{1+\beta}\right)^m \cdot \underbrace{\left(\frac{\beta}{1+\beta}\right)^0}_{=1} = (1+\beta)^{-m},$$

$$g_S(0) = \mathrm{e}^{-\lambda} = \mathrm{e}^{-\lambda\cdot\frac{\ln(1+\beta)}{\ln(1+\beta)}} = \big(\exp\big\{\ln(1+\beta)\big\}\big)^{-\frac{\lambda}{\ln(1+\beta)}} = (1+\beta)^{-\frac{\lambda}{\ln(1+\beta)}}.$$

Podle (2.12) je zřejmé

$$\begin{aligned} g_S(k) &= \frac{\lambda}{k}\sum_{j=1}^{k} j \cdot \frac{\beta^j}{j(1+\beta)^j\ln(1+\beta)} \cdot g_S(k-j) = \\ &= \frac{\lambda}{k}\sum_{j=1}^{k} \frac{\beta^j}{(1+\beta)^j\ln(1+\beta)} \cdot g_S(k-j) \quad \text{pro } k = 1, 2, \ldots \end{aligned}$$

Další rozdělení

Složené rozdělení	**Poisson-binomické rozdělení**
Primární rozdělení	Poissonovo rozdělení
Sekundární rozdělení	binomické rozdělení
Parametry	$\lambda > 0; v \in (0,1), n \in \mathbb{N}$
$g_S(0)$	$g_S(0) = \mathrm{e}^{\lambda\cdot((1-v)^n-1)}$
$g_S(k)$	$g_S(k) = \frac{\lambda}{k}\sum_{j=1}^{k} j \cdot \binom{n}{j} v^j (1-v)^{n-j} \cdot g_S(k-j)$

Složené rozdělení	**Neymanovo rozdělení typu A**
Primární rozdělení	Poissonovo rozdělení (parametr λ_1)
Sekundární rozdělení	Poissonovo rozdělení (parametr λ_2)
Parametry	$\lambda_1 > 0; \lambda_2 > 0$
$g_S(0)$	$g_S(0) = \mathrm{e}^{\lambda_1 \cdot (\mathrm{e}^{-\lambda_2} - 1)}$
$g_S(k)$	$g_S(k) = \frac{\lambda_1 \cdot \mathrm{e}^{-\lambda_2}}{k} \sum_{j=1}^{k} j \cdot \frac{\lambda_2^j}{j!} \cdot g_S(k-j)$
Složené rozdělení	**Poisson-ETNB rozdělení**
Primární rozdělení	Poissonovo rozdělení
Sekundární rozdělení	ETNB rozdělení
Parametry	$\lambda > 0; \upsilon \in (0,1),$ resp. $\beta > 0, m > -1, m \neq 0$
$g_S(0)$	$g_S(0) = \mathrm{e}^{-\lambda}$
$g_S(k)$	$g_S(k) = \frac{\lambda}{k} \sum_{j=1}^{k} j \cdot \frac{\binom{j+m-1}{j} \cdot (1-\upsilon)^j}{\upsilon^{-m} - 1} \cdot g_S(k-j),$ $g_S(k) = \frac{\lambda}{k} \sum_{j=1}^{k} j \cdot \frac{(j+m-1) \cdot \ldots \cdot (m+1) \cdot m}{j! \cdot ((1+\beta)^m - 1)} \cdot \left(\frac{\beta}{1+\beta}\right)^j \cdot g_S(k-j)$
Složené rozdělení	**Rozdělení Polya-Aeppli**
Primární rozdělení	Poissonovo rozdělení
Sekundární rozdělení	ETNB rozdělení
Parametry	$\lambda > 0; \upsilon \in (0,1),$ resp. $\beta > 0, m = 1$
$g_S(0)$	$g_S(0) = \mathrm{e}^{-\lambda}$
$g_S(k)$	$g_S(k) = \frac{\lambda \cdot \upsilon}{k} \sum_{j=1}^{k} j \cdot (1-\upsilon)^{j-1} \cdot g_S(k-j),$ $g_S(k) = \frac{\lambda}{k} \sum_{j=1}^{k} j \cdot \frac{\beta^{j-1}}{(1+\beta)^j} \cdot g_S(k-j)$

Tabulka 2.1: Příklady diskrétních složených Poissonových rozdělení
Zdroj: vlastní konstrukce na základě poznatků získaných z citov. literatury

2.2 Diskrétní složené geometrické rozdělení

Definice 2.7. Nechť mají IID náhodné veličiny $M_1, M_2, \ldots$ distribuční funkci $F_M(k)$ a nechť jsou nezávislé na N. Potom řekneme, že náhodná veličina $S = \sum_{i=1}^{N} M_i$ má složené geometrické rozložení[6] s parametry υ a $F_M(k)$, píšeme $S \sim CGe\big(\upsilon, F_M(k)\big)$, má-li N geometrické rozložení s parametrem $\upsilon \in (0,1)$, tj.

$$P(N=n) = \begin{cases} \upsilon \cdot (1-\upsilon)^n, & n = 0,1,\ldots, \\ 0, & \text{jinak} \end{cases} = \begin{cases} \frac{\beta^n}{(1+\beta)^{n+1}}, & n = 0,1,\ldots; \beta > 0, \\ 0, & \text{jinak.} \end{cases} \tag{2.18}$$

Pravděpodobnosti $g_S(0)$ a $g_S(k)$ $\Big[a = 1-\upsilon = \frac{\beta}{1+\beta}, b = 0\Big]$:

$$\begin{aligned} g_S(0) &= \frac{\upsilon}{1 - q_M(0)\cdot(1-\upsilon)} = \frac{\upsilon}{1 - q_M(0) + \upsilon \cdot q_M(0)}, \\ g_S(0) &= \frac{1}{1 - \beta \cdot \big(q_M(0) - 1\big)} = \frac{1}{1 + \beta - \beta \cdot q_M(0)} \end{aligned} \tag{2.19}$$

$$\begin{aligned} g_S(k) &= \frac{1}{1 - (1-\upsilon)\cdot q_M(0)} \sum_{j=1}^{k} (1-\upsilon)\cdot q_M(j) \cdot g_S(k-j) = \\ &= \frac{1-\upsilon}{1 - (1-\upsilon)\cdot q_M(0)} \sum_{j=1}^{k} q_M(j) \cdot g_S(k-j), \\ g_S(k) &= \frac{1}{1 - \frac{\beta}{1+\beta}\cdot q_M(0)} \sum_{j=1}^{k} \left(\frac{\beta}{1+\beta}\right) \cdot q_M(j) \cdot g_S(k-j) = \\ &= \frac{\beta}{1 + \beta - \beta \cdot q_M(0)} \sum_{j=1}^{k} q_M(j) \cdot g_S(k-j) \quad \text{pro } k = 1,2,\ldots \end{aligned} \tag{2.20}$$

Víme, že $N \sim Ge(\upsilon)$ má $G_N(s) = \frac{\upsilon}{1-s(1-\upsilon)} = \frac{1}{1-\beta(s-1)}$, $\mathrm{E}(N) = \frac{1-\upsilon}{\upsilon} = \beta$ a $\mathrm{Var}(N) = \frac{1-\upsilon}{\upsilon^2} = \beta(1+\beta)$.

[6] Compound geometric distribution

Generující funkce:

$$
\begin{aligned}
G_S(s) &= \frac{\upsilon}{1 - G_M(s)\cdot(1-\upsilon)}, \\
G_S(s) &= \frac{1}{1 - \beta\cdot\big(G_M(s) - 1\big)} \quad \text{pro } s \in \mathbb{R}.
\end{aligned}
\tag{2.21}
$$

Moment generující funkce:

$$
\begin{aligned}
M_S(t) &= \frac{\upsilon}{1 - M_M(t)\cdot(1-\upsilon)}, \\
M_S(t) &= \frac{1}{1 - \beta\cdot\big(M_M(t) - 1\big)} \quad \text{pro } t \geq 0.
\end{aligned}
\tag{2.22}
$$

Střední hodnota a ***rozptyl***:

$$
\mathrm{E}(S) = \mathrm{E}(M)\cdot\mathrm{E}(N) = \frac{1-\upsilon}{\upsilon}\cdot\mathrm{E}(M) = \beta\cdot\mathrm{E}(M), \tag{2.23}
$$

$$
\begin{aligned}
\mathrm{Var}(S) &= \mathrm{E}(N)\cdot\mathrm{Var}(M) + \mathrm{Var}(N)\cdot\big(\mathrm{E}(M)\big)^2 = \\
&= \frac{1-\upsilon}{\upsilon}\cdot\mathrm{Var}(M) + \frac{1-\upsilon}{\upsilon^2}\cdot\big(\mathrm{E}(M)\big)^2 = \\
&= \beta\cdot\mathrm{Var}(M) + \beta\cdot(1+\beta)\cdot\big(\mathrm{E}(M)\big)^2.
\end{aligned}
\tag{2.24}
$$

Příklady diskrétních složených geometrických rozdělení

Složené rozdělení	**Geometrické-Poissonovo rozdělení**
Primární rozdělení	geometrické rozdělení
Sekundární rozdělení	Poissonovo rozdělení
Parametry	$\upsilon \in (0,1),$ resp. $\beta > 0; \lambda > 0$
$g_S(0)$	$g_S(0) = \frac{\upsilon}{1-\mathrm{e}^{-\lambda}\cdot(1-\upsilon)},$ $g_S(0) = \frac{1}{1+\beta-\beta\cdot\mathrm{e}^{-\lambda}}$
$g_S(k)$	$g_S(k) = \frac{\mathrm{e}^{-\lambda}\cdot(1-\upsilon)}{1-\mathrm{e}^{-\lambda}\cdot(1-\upsilon)}\sum_{j=1}^{k}\frac{\lambda^j}{j!}\cdot g_S(k-j),$ $g_S(k) = \frac{\beta\cdot\mathrm{e}^{-\lambda}}{1+\beta-\beta\cdot\mathrm{e}^{-\lambda}}\sum_{j=1}^{k}\frac{\lambda^j}{j!}\cdot g_S(k-j)$

Složené rozdělení	**Geometrické-ETNB rozdělení**
Primární rozdělení	Geometrické rozdělení (parametr υ_1, resp. β_1)
Sekundární rozdělení	ETNB rozdělení (parametr υ_2, resp. β_2)
Parametry	$\upsilon_1 \in (0,1)$, resp. $\beta_1 > 0$; $\upsilon_2 \in (0,1)$, resp. $\beta_2 > 0, m > -1, m \neq 0$
$g_S(0)$	$g_S(0) = \upsilon_1$, $g_S(0) = \frac{1}{1+\beta_1}$
$g_S(k)$	$g_S(k) = (1-\upsilon_1)\sum_{j=1}^{k} \frac{\binom{j+m-1}{j}\cdot(1-\upsilon_2)^j}{\upsilon_2^{-m}-1} \cdot g_S(k-j)$, $g_S(k) = \frac{\beta_1}{1+\beta_1}\sum_{j=1}^{k} \frac{(j+m-1)\cdot\ldots\cdot(m+1)\cdot m}{j!\cdot((1+\beta_2)^m-1)} \cdot \left(\frac{\beta_2}{1+\beta_2}\right)^j \cdot g_S(k-j)$

Tabulka 2.2: Příklady diskrétních složených geometrických rozdělení
Zdroj: vlastní konstrukce na základě poznatků získaných z citov. literatury

2.3 Další diskrétní složená rozdělení

Podobně jako jsme odvodili složené Poissonovo a složené geometrické rozdělení odvodíme i **složené binomické** a **složené negativně binomické rozdělení**.

Nechť IID náhodné veličiny $M_1, M_2, \ldots$ mají společnou distribuční funkci $F_M(k)$ a nechť nezávisejí na náhodné veličině $N \sim Bi(n, \upsilon)$. Pak náhodný součet $S = \sum_{i=1}^{N} M_i$ se řídí složeným binomickým rozdělením[7] s parametry $n \in \mathbb{N}, \upsilon \in (0,1)$ a $F_M(k)$, tj. $S \sim CBi(n, \upsilon, F_M(k))$.

Nechť IID náhodné veličiny $M_1, M_2, \ldots$ mají distribuční funkci $F_M(k)$ a nechť jsou nezávislé na $N \sim NeBi(m, \upsilon)$. Pak veličina $S = \sum_{i=1}^{N} M_i$ má složené negativně binomické rozdělení[8] s parametry $m > 0, \upsilon \in (0,1)$ a $F_M(k)$, píšeme $S \sim CNeBi(m, \upsilon, F_M(k))$.

[7] Compound binomial distribution
[8] Compound negative binomial distribution

Složené binomické rozdělení	**Složené negativně binomické rozdělení**
$\upsilon \in (0,1), n \in \mathbb{N}$	$m > 0, \upsilon \in (0,1)$, resp. $\beta > 0$
$g_S(0) = \big(1 - \upsilon \cdot (q_M(0) - 1)\big)^n$	$g_S(0) = \left(\frac{\upsilon}{1-q_M(0)\cdot(1-\upsilon)}\right)^m$, $g_S(0) = \left(\frac{1}{1-\beta\cdot(q_M(0)-1)}\right)^m$
$a = -\frac{\upsilon}{1-\upsilon}, b = (n+1)\cdot\frac{\upsilon}{1-\upsilon}$	$a = 1 - \upsilon = \frac{\beta}{1+\beta}, b = (m-1)\cdot(1-\upsilon) = (m-1)\cdot\frac{\beta}{1+\beta}$
$g_S(k) = \frac{\upsilon}{1-\upsilon+\upsilon\cdot q_M(0)} \sum_{j=1}^{k} \frac{j\cdot(n+1)-k}{k} \cdot q_M(j)\cdot g_S(k-j)$	$g_S(k) = \frac{1-\upsilon}{1-(1-\upsilon)\cdot q_M(0)} \sum_{j=1}^{k} \frac{k+j\cdot(m-1)}{k} \cdot q_M(j)\cdot g_S(k-j)$, $g_S(k) = \frac{\beta}{1+\beta+\beta q_M(0)} \sum_{j=1}^{k} \frac{k+j\cdot(m+1)}{k} \cdot q_M(j)\cdot g_S(k-j)$
$G_S(s) = \big(1 + \upsilon\cdot(G_M(s) - 1)\big)^n$	$G_S(s) = \left(\frac{\upsilon}{1-G_M(s)\cdot(1-\upsilon)}\right)^m$, $G_S(s) = \left(\frac{1}{1-\beta\cdot(G_M(s)-1)}\right)^m$
$M_S(t) = \big(1 + \upsilon\cdot(M_M(t) - 1)\big)^n$	$M_S(t) = \left(\frac{\upsilon}{1-M_M(t)\cdot(1-\upsilon)}\right)^m$, $M_S(t) = \left(\frac{1}{1-\beta\cdot(M_M(t)-1)}\right)^m$
$\mathrm{E}(S) = n\cdot\upsilon\cdot\mathrm{E}(M)$	$\mathrm{E}(S) = m\cdot\frac{1-\upsilon}{\upsilon}\cdot\mathrm{E}(M) = m\cdot\beta\cdot\mathrm{E}(M)$
$\mathrm{Var}(S) = n\cdot\upsilon\cdot\mathrm{E}(M^2) - n\cdot\upsilon^2\cdot\big(\mathrm{E}(M)\big)^2$	$\mathrm{Var}(S) = m\cdot\frac{1-\upsilon}{\upsilon}\cdot\Big[\mathrm{Var}(M) + \frac{1}{\upsilon}\cdot\big(\mathrm{E}(M)\big)^2\Big] =$ $= m\cdot\beta\cdot\mathrm{E}(M^2) + m\cdot\beta^2\cdot\big(\mathrm{E}(M)\big)^2$

Tabulka 2.3: Složené binomické a složené negativně binomické rozdělení
Zdroj: vlastní konstrukce na základě poznatků získaných z citov. literatury

2.4 Příklady

Příklad 2.1. Dokažte, že v nule modifikované rozdělení je složené rozdělení.

Řešení:
Nechť je primárním rozdělením Bernoulliho rozdělení, jehož generující funkce je tvaru $G_N(s) = 1 + \upsilon(s-1)$. Mějme libovolné sekundární rozdělení s generující funkcí $G_M(s)$. Potom je generující funkce složeného rozdělení

$$G_S(s) = G_N\big(G_M(s)\big) = 1 + \upsilon\big(G_M(s) - 1\big) = 1 - \upsilon + \upsilon G_M(s).$$

Podle (1.31) je $1 - \upsilon + \upsilon G_M(s)$ generující funkcí v nule modifikovaného rozdělení pro

$$\upsilon = \frac{1 - p_M^M(0)}{1 - p_M(0)}.$$

V nule modifikované rozdělení má $p_M^M(0)$ libovolně zvolené na intervalu $(0,1)$ a $p_M(0)$ určené sekundárním rozdělením.

✍

Příklad 2.2. Vypočtěte pravděpodobnostní funkci Poisson-ETNB rozdělení v $k = 0, 1, 2, 3$. $\lambda = 3$ je parametr Poissonova rozdělení, $m = -0,5; \beta = 1$ jsou parametry ETNB rozdělení.

Řešení:
Sekundární ETNB rozdělení má podle příkladu 1.5

$$q_M(0) = 0; \quad q_M(1) \doteq 0,853553; \quad q_M(2) \doteq 0,106694; \quad q_M(3) \doteq 0,026674.$$

Podle (2.11): $g_S(0) = \mathrm{e}^{\lambda\cdot(q_M(0)-1)} = \mathrm{e}^{3\cdot(0-1)} = \mathrm{e}^{-3} \doteq 0,049787$. Platí

$$g_S(k) = \frac{\lambda}{k}\sum_{j=1}^{k} j \cdot q_M(j) \cdot g_S(k-j), \quad k = 1, 2, \dots,$$

tedy

$g_S(1) = 3 \cdot \big(1 \cdot q_M(1) \cdot g_S(0)\big) \doteq 0,127488;$

$g_S(2) = 1,5 \cdot \big(1 \cdot q_M(1) \cdot g_S(1) + 2 \cdot q_M(2) \cdot g_S(0)\big) \doteq 0,179163;$

$g_S(3) = 1 \cdot \big(1 \cdot q_M(1) \cdot g_S(2) + 2 \cdot q_M(2) \cdot g_S(1) + 3 \cdot q_M(3) \cdot g_S(0)\big) \doteq 0,184114.$

✍

Příklad 2.3. Počet nehod za jeden rok má Poissonovo rozdělení s $\lambda = 3$ a počet vozidel poškozených v jednotlivých nehodách má binomické rozdělení s parametry $n = 6, \upsilon = \frac{1}{3}$. Jaká je pravděpodobnost, že celkový počet poškozených vozidel bude 2?

Řešení:
Z tabulky 2.1:

$$g_S(k) = \frac{\lambda}{k} \sum_{j=1}^{k} j \cdot \binom{n}{j} \upsilon^j (1-\upsilon)^{n-j} \cdot g_S(k-j),$$
$$g_S(0) = \mathrm{e}^{\lambda((1-\upsilon)^n - 1)}.$$

Odsud

$g_S(0) = \mathrm{e}^{3 \cdot ((1-\frac{1}{3})^6 - 1)} \doteq 0,064789;$

$g_S(1) = 3 \cdot \left(1 \cdot \binom{6}{1} \left(\frac{1}{3}\right)^1 \left(\frac{2}{3}\right)^5 \cdot g_S(0)\right) \doteq 0,051191;$

$g_S(2) = \frac{3}{2}\left(1 \cdot \binom{6}{1} \left(\frac{1}{3}\right)^1 \left(\frac{2}{3}\right)^5 \cdot g_S(1) + 2 \cdot \binom{6}{2} \left(\frac{1}{3}\right)^2 \left(\frac{2}{3}\right)^4 \cdot g_S(0)\right) \doteq 0,048663.$

Pravděpodobnost, že celkový počet poškozených vozidel bude dva, je 4,8663 %.

✍

Příklad 2.4. Nalezněte generující funkci Poisson-ETNB rozdělení a ukažte, že má tvar jako generující funkce Poisson-negativně binomického rozdělení.

Řešení:
Podle příkladu 16 ze Cvičení kapitoly 1 víme, že je generující funkce ETNB rozdělení

$$G_M(s) = \frac{(1-\beta(s-1))^{-m} - (1+\beta)^{-m}}{1-(1+\beta)^{-m}}, \quad \beta > 0, m > -1, m \neq 0.$$

Generující funkce Poisson-ETNB rozdělení pak bude tvaru

$$\begin{aligned}
G_S(s) &= \exp\left\{\lambda \cdot \left(\frac{(1-\beta(s-1))^{-m} - (1+\beta)^{-m}}{1-(1+\beta)^{-m}} - 1\right)\right\} = \\
&= \exp\left\{\lambda \cdot \left(\frac{\big(1-\beta(s-1)\big)^{-m} - (1+\beta)^{-m} - 1 + (1+\beta)^{-m}}{1-(1+\beta)^{-m}}\right)\right\} = \\
&= \exp\left\{\lambda \cdot \left(\frac{\big(1-\beta(s-1)\big)^{-m} - 1}{1-(1+\beta)^{-m}}\right)\right\} = \exp\Big\{\mu \cdot \big(1-\beta(s-1)\big)^{-m} - 1\Big\},
\end{aligned}$$

kde $\mu = \frac{\lambda}{1-(1+\beta)^{-m}} > 0$.

Obdrželi jsme generující funkci složeného Poissonova rozdělení se střední hodnotou μ pro primární rozdělení a s generující funkcí $\big(1-\beta(s-1)\big)^{-m}$ pro sekundární rozdělení. Víme, že $\big(1-\beta(s-1)\big)^{-m}$ je generující funkce negativně binomického rozdělení[9].

✍

Příklad 2.5. Nalezněte $\mathrm{E}(S)$ a $\mathrm{Var}(S)$ pro následující složená rozdělení:

a) Poisson-binomické,

b) Poisson-ETNB.

Řešení:

Připomeňme si, že S, jež se řídí (diskrétním) složeným Poissonovým rozdělením, má $\mathrm{E}(S) = \lambda\mathrm{E}(M)$ a $\mathrm{Var}(S) = \lambda\mathrm{E}(M^2)$.

a)

$$\mathrm{E}(S) = \lambda\mathrm{E}(M) \overset{(1.23)}{=} \lambda n v.$$

[9]Viz 1.18.

$$\begin{aligned}
\mathrm{E}(M^2) &= M_M''(0) = \frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}t^2}\big((1+\upsilon\mathrm{e}^t-\upsilon)^n\big)\big|_{t=0} = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\big(n(1+\upsilon\mathrm{e}^t-\upsilon)^{n-1}\upsilon\mathrm{e}^t\big)\big|_{t=0} = \\
&= \big(n\upsilon\mathrm{e}^t\cdot(1+\upsilon\mathrm{e}^t-\upsilon)^{n-1} + n\upsilon\mathrm{e}^t\cdot(n-1)(1+\upsilon\mathrm{e}^t-\upsilon)^{n-2}\cdot\upsilon\mathrm{e}^t\big)\big|_{t=0} = \\
&= \Big(n\upsilon\mathrm{e}^t\big((1+\upsilon\mathrm{e}^t-\upsilon)^{n-1} + \upsilon\mathrm{e}^t(n-1)(1+\upsilon\mathrm{e}^t-\upsilon)^{n-2}\big)\Big)\big|_{t=0} = \\
&= \Big(n\upsilon\big((1+\upsilon-\upsilon)^{n-1} + \upsilon(n-1)(1+\upsilon-\upsilon)^{n-2}\big)\Big) = \\
&= n\upsilon\big(1+(n-1)\upsilon\big).
\end{aligned}$$

$$\mathrm{Var}(S) = \lambda\mathrm{E}(M^2) = \lambda n\upsilon\big(1+(n-1)\upsilon\big) = \mathrm{E}(S)\big(1+(n-1)\upsilon\big).$$

b)

$$\mathrm{E}(S) = \lambda\mathrm{E}(M) \overset{\text{př. 16; Cvičení kap.1}}{=} \lambda\cdot\frac{m\beta}{1-(1+\beta)^{-m}}.$$

$$\begin{aligned}
\mathrm{E}(M^2) &= M_M''(0) = \frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}t^2}\left(\frac{\big(1-\beta(\mathrm{e}^t-1)\big)^{-m}-(1+\beta)^{-m}}{1-(1+\beta)^{-m}}\right)\Bigg|_{t=0} = \\
&= \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\frac{m\beta\mathrm{e}^t\big(1-\beta(\mathrm{e}^t-1)\big)^{-m-1}}{1-(1+\beta)^{-m}}\right)\Bigg|_{t=0} = \\
&= \left(\frac{m\beta\mathrm{e}^t\Big[\big(1-\beta(\mathrm{e}^t-1)\big)^{-m-1}+\beta\mathrm{e}^t\big(1-\beta(\mathrm{e}^t-1)\big)^{-m-2}(m+1)\Big]}{1-(1+\beta)^{-m}}\right)\Bigg|_{t=0} = \\
&= \frac{m\beta\cdot\Big[\big(1-\beta+\beta\big)^{-m-1}+\beta(m+1)\big(1-\beta+\beta\big)^{-m-2}\Big]}{1-(1+\beta)^{-m}} = \\
&= \frac{m\beta\big(1+\beta(m+1)\big)}{1-(1+\beta)^{-m}}.
\end{aligned}$$

$$\mathrm{Var}(S) = \lambda\mathrm{E}(M^2) = \lambda\cdot\frac{m\beta\big(1+\beta(m+1)\big)}{1-(1+\beta)^{-m}} = \mathrm{E}(S)\big(1+\beta(m+1)\big).$$

✍

Příklad 2.6. Nalezněte vztah pro výpočet koeficientu šikmosti náhodného součtu $S=\sum_{i=1}^{N} M_i$, jež má diskrétní složené Poissonovo rozdělení.

Řešení:
Začneme úvahou o $M_S(t)$:

$$M_S(t) = \sum_{k=0}^{\infty} P(S=k)\mathrm{e}^{tk},$$
$$M_S'(t) = \sum_{k=0}^{\infty} P(S=k)\mathrm{e}^{tk} \cdot k.$$

Platí[10] $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\ln\big(M_S(t)\big) = \frac{M_S'(t)}{M_S(t)}$, tedy

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\ln\big(M_S(t)\big) = \frac{M_S'(t)}{M_S(t)} = \frac{\sum\limits_{k=0}^{\infty} P(S=k)\mathrm{e}^{tk}\cdot k}{\sum\limits_{k=0}^{\infty} P(S=k)\mathrm{e}^{tk}}.$$

Pro $t=0$:

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\ln\big(M_S(t)\big)\Big|_{t=0} = \frac{\sum\limits_{k=0}^{\infty} P(S=k)\mathrm{e}^{0}\cdot k}{\sum\limits_{k=0}^{\infty} P(S=k)\mathrm{e}^{0}} = \frac{\sum\limits_{k=0}^{\infty} P(S=k)\cdot k}{\underbrace{\sum\limits_{k=0}^{\infty} P(S=k)}_{=1}} = \mathrm{E}(S).$$

Analogickým způsobem obdržíme druhý i třetí centrální moment

$$\frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}t^2}\ln\big(M_S(t)\big)\Big|_{t=0} = \frac{M_S''(t)\cdot M_S(t) - \big(M_S'(t)\big)^2}{\big(M_S(t)\big)^2}\Bigg|_{t=0} = \left[\frac{M_S''(t)}{M_S(t)} - \left(\frac{M_S'(t)}{M_S(t)}\right)^2\right]\Bigg|_{t=0} =$$
$$= \frac{\sum\limits_{k=0}^{\infty} P(S=k)\cdot k^2}{\sum\limits_{k=0}^{\infty} P(S=k)} - \left(\frac{\sum\limits_{k=0}^{\infty} P(S=k)\cdot k}{\sum\limits_{k=0}^{\infty} P(S=k)}\right)^2 =$$
$$= \mathrm{E}(S^2) - \big(\mathrm{E}(S)\big)^2 = \mathrm{Var}(S).$$

[10] Z matematické analýzy víme, že $\int \frac{f'(x)}{f(x)}\mathrm{d}x = \ln|f(x)| + C$.

$$
\begin{aligned}
\frac{\mathrm{d}^3}{\mathrm{d}t^3}\ln\bigl(M_S(t)\bigr)\Big|_{t=0} &= \Biggl[\frac{\bigl(M_S'''(t)\cdot M_S(t)+M_S''(t)\cdot M_S'(t)-2M_S'(t)\cdot M_S''(t)\bigr)\cdot\bigl(M_S(t)\bigr)^2}{\bigl(M_S(t)\bigr)^4}-\\
&\quad-\frac{\Bigl(M_S''(t)\cdot M_S(t)-\bigl(M_S'(t)\bigr)^2\Bigr)\cdot 2M_S(t)\cdot M_S'(t)}{\bigl(M_S(t)\bigr)^4}\Biggr]\Bigg|_{t=0}=\\
&=\left[\frac{M_S'''(t)}{M_S(t)}-\frac{3\cdot M_S''(t)\cdot M_S'(t)}{\bigl(M_S(t)\bigr)^2}+\frac{2\bigl(M_S'(t)\bigr)^3}{\bigl(M_S(t)\bigr)^3}\right]\Bigg|_{t=0}=\\
&=\mathrm{E}(S^3)-3\mathrm{E}(S^2)\mathrm{E}(S)+2\bigl(\mathrm{E}(S)\bigr)^3=\mathrm{E}\Bigl(\bigl(S-\mathrm{E}(S)\bigr)^3\Bigr).
\end{aligned}
$$

Pro diskrétní složené Poissonovo rozdělení je[11] $\mathrm{Var}(S)=\lambda\mathrm{E}(M^2)$. Dále

$$
\begin{aligned}
\frac{\mathrm{d}^3}{\mathrm{d}t^3}\ln\bigl(M_S(t)\bigr) &\overset{(2.14)}{=} \frac{\mathrm{d}^3}{\mathrm{d}t^3}\ln\Bigl(\mathrm{e}^{\lambda\cdot(M_M(t)-1)}\Bigr)=\frac{\mathrm{d}^3}{\mathrm{d}t^3}\bigl(\lambda(M_M(t)-1)\bigr)=\\
&=\frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}t^2}\bigl(\lambda M_M'(t)\bigr)=\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\bigl(\lambda M_M''(t)\bigr)=\lambda M_M'''(t)
\end{aligned}
$$

a pro $t=0$

$$
\frac{\mathrm{d}^3}{\mathrm{d}t^3}\ln\bigl(M_S(t)\bigr)\Big|_{t=0}=\mathrm{E}\Bigl(\bigl(S-\mathrm{E}(S)\bigr)^3\Bigr)=\lambda M_M'''(0)\overset{(1.6)}{=}\lambda\mathrm{E}(M^3).
$$

Šikmost diskrétního složeného Poissonova rozdělení vypočítáme

$$
\gamma_1=\frac{\mathrm{E}\Bigl(\bigl(S-\mathrm{E}(S)\bigr)^3\Bigr)}{\bigl(\mathrm{Var}(S)\bigr)^{\frac{3}{2}}}=\frac{\lambda\mathrm{E}(M^3)}{\bigl(\lambda\mathrm{E}(M^2)\bigr)^{\frac{3}{2}}}=\frac{\lambda\mathrm{E}(M^3)}{\lambda^{\frac{3}{2}}\cdot\bigl(\mathrm{E}(M^2)\bigr)^{\frac{3}{2}}}=\frac{\mathrm{E}(M^3)}{\sqrt{\lambda}\cdot\bigl(\mathrm{E}(M^2)\bigr)^{\frac{3}{2}}}.
$$

✍

Příklad 2.7. Nechť se $n=2$ a S_1 má složené Poissonovo rozdělení s $\lambda_1=2$ a sekundárním rozdělením $q_1(1)=0,2; q_1(2)=0,7$ a $q_1(3)=0,1$. Nechť S_2 je nezávislé na S_1 a má složené Poissonovo rozdělení s $\lambda_2=3$ a se sekundárním rozdělením $q_2(1)=0; q_2(2)=0,25; q_2(3)=0,60$ a $q_2(4)=0,15$. Určete rozdělení $S=S_1+S_2$.

Řešení:

$\lambda=\lambda_1+\lambda_2=2+3=5; n=2.$

---

[11] Viz (2.16).

Platí

$$q_S(k) = \frac{1}{\lambda}\sum_{j=1}^{2} \lambda_j \cdot q_j(k), \quad k = 1, 2, 3, 4.$$

Odtud

$$\begin{aligned} q_S(1) &= \frac{1}{5} \cdot (2 \cdot 0,2 + 3 \cdot 0) = 0,08; \\ q_S(2) &= \frac{1}{5} \cdot (2 \cdot 0,7 + 3 \cdot 0,25) = 0,43; \\ q_S(3) &= \frac{1}{5} \cdot (2 \cdot 0,1 + 3 \cdot 0,6) = 0,40; \\ q_S(4) &= \frac{1}{5} \cdot (2 \cdot 0 + 3 \cdot 0,15) = 0,09. \end{aligned}$$

S má složené Poissonovo rozdělení s $\lambda = 5$ pro primární rozdělení a se sekundárním rozdělením $q_S(1) = 0,08; q_S(2) = 0,43; q_S(3) = 0,40$ a $q_S(4) = 0,09$.

✍

Příklad 2.8. Nechť mají nezávislé náhodné veličiny N_i negativně binomické rozdělení s parametry m_i a β_i pro $i = 1, 2, \ldots, n$. Určete rozdělení $S = \sum_{i=1}^{n} N_i$.

Řešení:
Náhodné veličiny N_i mají generující funkci $G_{N_i}(s) = \big(1 - \beta_i(s-1)\big)^{-m_i}$, náhodný součet $S = \sum_{i=1}^{n} N_i$ bude mít tímto generující funkci

$$G_S(s) \overset{\text{věta1.5}}{=} \prod_{i=1}^{n} G_{N_i}(s) = \prod_{i=1}^{n} \big(1 - \beta_i(s-1)\big)^{-m_i}.$$

Je-li $\beta_i = \beta$ pro všechna $i = 1, 2, \ldots, n$, pak

$$G_S(s) = \big(1 - \beta(s-1)\big)^{-(m_1+m_2+\cdots+m_n)},$$

S se tedy řídí negativně binomickým rozdělením s parametry $m = \sum_{i=1}^{n} m_i$ a β.
Nejsou-li všechna β_i shodná, pak dle příkladu na straně 35 platí

$$G_{N_i}(s) = \big(1 - \beta_i(s-1)\big)^{-m_i} = \mathrm{e}^{\lambda_i \cdot (G_i(s)-1)},$$

kde $\lambda_i = m_i \cdot \ln(1+\beta_i)$ a

$$G_i(s) = 1 - \frac{\ln\bigl(1-\beta_i(s-1)\bigr)}{\ln(1+\beta_i)} = \sum_{k=1}^{\infty} q_i(k)s^k \quad \text{s} \quad q_i(k) \overset{(1.40)}{=} \frac{\beta_i^k}{k(1+\beta_i)^k \cdot \ln(1+\beta_i)}.$$

Podle věty 2.6 má $S = \sum_{i=1}^n N_i$ složené Poissonovo rozdělení s Poissonovým parametrem $\lambda = \sum_{i=1}^n m_i \cdot \ln(1+\beta_i)$ a se sekundárním rozdělením

$$q_S(k) = \frac{1}{\lambda}\sum_{i=1}^n \lambda_i q_i(k) = \frac{1}{\sum\limits_{i=1}^n m_i \cdot \ln(1+\beta_i)} \cdot \left(\sum_{i=1}^n \frac{m_i \cdot \ln(1+\beta_i)\cdot \beta_i^k}{k(1+\beta_i)^k \cdot \ln(1+\beta_i)}\right) =$$

$$= \frac{1}{k\sum\limits_{i=1}^n m_i \cdot \ln(1+\beta_i)} \sum_{i=1}^n m_i \cdot \left(\frac{\beta_i}{1+\beta_i}\right)^k, \quad k = 1,2,3,\dots$$

✍

Cvičení

1. Dokažte platnost vztahu (2.1).

   $\left[\text{Nápověda: } \sum\limits_{k=0}^{\infty} P(S=k)s^k = \sum\limits_{k=0}^{\infty}\sum\limits_{n=0}^{\infty} P(S=k|N=n)\cdot P(N=n)s^k\right]$

2. Dokažte větu 2.3.

   [Nápověda: Analogie důkazu věty 2.2, avšak sčítáme od $n = 2$.]

3. Dokažte větu 2.4.

   $\left[\text{Nápověda: } P(S=x) = \frac{G^{(x)}(0)}{x!}\right]$

4. Přesvědčte se, že
   a) $\mathrm{E}(S) = \mathrm{E}\bigl(\mathrm{E}(S|N)\bigr)$ a
   b) $\mathrm{Var}(S) = \mathrm{E}\bigl(\mathrm{Var}(S|N)\bigr) + \mathrm{Var}\bigl(\mathrm{E}(S|N)\bigr)$.

   $\Bigl[\text{Nápověda: } p_S(k) = \sum\limits_{n=0}^{\infty} p_{S|N}(k|n)\cdot p_N(n);$

   $\mathrm{E}(S|N) = \sum\limits_{k=0}^{\infty} k \cdot p_{S|N}(k|n);$

$$\mathrm{Var}(S|N) = \mathrm{E}\big((S - \mathrm{E}(S|N))^2|N\big)\Big]$$

5. Určete generující funkci složené náhodné veličiny $S = \sum_{i=1}^{N} M_i$, kde IID náhodné veličiny $M_i \sim Po(\lambda_2)$ jsou nezávislé na $N \sim Po(\lambda_1)$.

$$\Big[\mathrm{e}^{\lambda_1(\mathrm{e}^{\lambda_2(s-1)}-1)}\Big]$$

6. Nalezněte pravděpodobnostní funkci Poisson-v nule modifikovaného ETNB rozdělení v $k = 0, 1, 2, 3$ pro $\lambda = 7,5; m = -0,5; \beta = 1$ a $p_M^M(0) = 0,6$.

$$[g_S(0) \doteq 0,049787; g_S(1) \doteq 0,127487;$$
$$g_S(2) \doteq 0,179161; g_S(3) \doteq 0,184112]$$

7. Najděte pravděpodobnostní funkci Poisson-uříznutého logaritmického rozdělení v $k = 0, 1, 2, 3, 4$ pro $\lambda = 1,5$ a $\upsilon = 0,4$.

$$[g_S(0) \doteq 0,223130; g_S(1) \doteq 0,219163; g_S(2) \doteq 0,173382;$$
$$g_S(3) \doteq 0,126119; g_S(4) \doteq 0,087723]$$

8. Ukažte, že složením primárního Poissonova rozdělení a sekundárního logaritmického rozdělení s pravděpodobnostní funkcí $q_M(k) = -\frac{(1-\upsilon)^k}{k\cdot\ln(\upsilon)}$ vznikne negativně binomické rozdělení.

[Generující funkce Poisson-logaritmického rozdělení je shodná s generující funkcí negativně binomického rozdělení pro $m = -\frac{\lambda}{\ln(\upsilon)}$.]

9. Nechť se $n = 3$ a S_1 má složené Poissonovo rozdělení s $\lambda_1 = 2$ a se sekundárním rozdělením $q_1(1) = 0,1; q_1(2) = 0,35; q_1(3) = 0,2; q_1(4) = 0,2$ a $q_1(5) = 0,15$. Nechť S_2 má složené Poissonovo rozdělení s $\lambda_2 = 1$ a se sekundárním rozdělením $q_2(2) = 0,25; q_2(3) = 0,4; q_2(4) = 0,25$ a $q_2(5) = 0,1$. Dále nechť má veličina S_3 složené Poissonovo rozdělení s $\lambda_3 = 3$ a se sekundárním rozdělením $q_3(1) = 0,05; q_3(2) = 0,2;$ $q_3(3) = 0,35; q_3(4) = 0,15; q_3(5) = 0,15$ a $q_3(6) = 0,1$. Najděte rozdělení $S = S_1 + S_2 + S_3$, kde S_1, S_2 a S_3 jsou si navzájem nezávislé

náhodné veličiny.

$$[g_S(1) \doteq 0,058\overline{333};\ g_S(2) \doteq 0,258\overline{333};\ g_S(3) \doteq 0,308\overline{333};$$
$$g_S(4) \doteq 0,18\overline{3333};\ g_S(5) \doteq 0,141\overline{666};\ g_S(6) \doteq 0,050000]$$

10. Nechť S_j pro $j = 1, 2, \dots, n$ má složené Poissonovo rozdělení s Poissonovým parametrem λ_j a sekundárním rozdělením s generující funkcí $G_2(s)$. Nechť $S_1, S_2, \dots, S_n$ jsou vzájemně nezávislé náhodné veličiny se stejným sekundárním rozdělením. Určete rozdělení $S = \sum_{j=1}^{n} S_j$.

$$\left[G_S(s) = \mathrm{e}^{(G_2(s)-1)\cdot \sum\limits_{j=1}^{n} \lambda_j}\right]$$

11. Určete $\mathrm{Var}(S)$ a $\mathrm{E}(S)$ pro následující složená rozdělení:
   a) Neymanovo typu A,
   b) Polya-Aeppli,
   c) geometrické-Poissonovo,
   d) geometrické-ETNB.

$$\Big[\text{a) } \mathrm{E}(S) = \lambda_1\lambda_2,\ \mathrm{Var}(S) = \mathrm{E}(S)(1+\lambda_2);$$
$$\text{b) } \mathrm{E}(S) = \lambda(1+\beta),\ \mathrm{Var}(S) = \mathrm{E}(S)(1+2\beta);$$
$$\text{c) } \mathrm{E}(S) = \lambda \cdot \tfrac{1-\upsilon}{\upsilon} = \lambda\beta,\ \mathrm{Var}(S) = \mathrm{E}(S)(1+\tfrac{\lambda}{\upsilon}) = \mathrm{E}(S)\big(1+\lambda(1+\beta)\big);$$
$$\text{d) } \mathrm{E}(S) = \tfrac{1-\upsilon}{\upsilon} \cdot \tfrac{m\beta_2}{1-(1+\beta_2)^{-m}} = \beta_1 \cdot \tfrac{m\beta_2}{1-(1+\beta_2)^{-m}},$$
$$\mathrm{Var}(S) = \mathrm{E}(S) \cdot \left(\tfrac{(1+\beta_2)-(1+\beta_2)^{-m}(m\beta_2+\beta_2+1)}{1-(1+\beta_2)^{-m}} + \tfrac{m\beta_2}{\upsilon(1-(1+\beta_2)^{-m})}\right) =$$
$$= \mathrm{E}(S) \cdot \left(\tfrac{(1+\beta_2)-(1+\beta_2)^{-m}(m\beta_2+\beta_2+1)}{1-(1+\beta_2)^{-m}} + \tfrac{m\beta_2(1+\beta_1)}{1-(1+\beta_2)^{-m}}\right)\Big]$$

12. Určete pravděpodobnostní funkci geometrického-useknutého Poissonova rozdělení v $k = 0, 1, 2, 3$, je-li $\upsilon = 0,35$ a $\lambda = 0,7$.

$$[g_S(0) \doteq 0,350000;\ g_S(1) \doteq 0,203352;$$
$$g_S(2) \doteq 0,189322;\ g_S(3) \doteq 0,167956]$$

13. Jaké rozdělení získáme, bude-li primární i sekundární rozdělení geometrické?

$\big[$Pro parametr sekundárního rozdělení $\beta_2 = p_N^M(0) + p_N^M(0)\beta - 1$ a parametr primárního rozdělení $\beta_1 = \frac{\beta-\beta_2}{\beta_2}$ obdržíme v nule modifikované geometrické rozdělení s parametrem β.$\big]$

14. Nalezněte pravděpodobnostní funkci složeného rozdělení v $k = 0, 1, 2, 3, 4$. Primárním rozdělením je negativně binomické rozdělení s $\upsilon_1 = 0,6$ a $m = 1,5$. Sekundárním rozdělením je binomické rozdělení s $\upsilon_2 = 0,3$ a $n = 4$.

[$g_S(0) \doteq 0,540758; g_S(1) \doteq 0,147734; g_S(2) \doteq 0,128606;$ $g_S(3) \doteq 0,077464; g_S(4) \doteq 0,044397$]

15. Ukažte, že generující funkce binomického-geometrického rozdělení (parametry n, υ, β) je shodná s generující funkcí negativně binomického-geometrického rozdělení (parametry m, β_1, β_2).

[Obě generující funkce jsou shodné pro $m = n; \beta_1 = \frac{\upsilon}{1-\upsilon}; \beta_2 = \beta(1-\upsilon)$.]

16. Nalezněte generující funkci binomického-Bernoulliho rozdělení, kde n, υ_1 jsou parametry binomického rozdělení a υ_2 je parametrem Bernoulliho rozdělení.

$\big[G_S(s) = \big(1 - \upsilon_1\upsilon_2(s-1)\big)^n\big]$

17. Určete $\mathrm{E}(S)$, $\mathrm{Var}(S)$ a $G_S(s)$, kde $S = \sum\limits_{i=1}^{N} M_i$, $M_1, M_2, \dots, M_N$ jsou IID náhodné veličiny nezávislé na N. Primární rozdělení je negativně binomické a sekundární Poissonovo.

$\Big[\mathrm{E}(S) = \lambda m\frac{1-\upsilon}{\upsilon} = \lambda m\beta; \mathrm{Var}(S) = \lambda m\frac{1-\upsilon}{\upsilon} + \lambda^2 m\frac{1-\upsilon}{\upsilon^2} =$ $= \lambda m\beta + \lambda^2 m\beta(1+\beta); G_S(s) = \Big(\frac{1}{1-\beta\cdot(\mathrm{e}^{\lambda(s-1)}-1)}\Big)^m\Big]$

Kapitola 3

Směsi rozdělení

Většinu rozdělení zmíněných v předchozí kapitole jsme schopni získat nejen složením, ale též smísením, kde mísícím rozdělením rozumíme rozdělení jednoho nebo více náhodných parametrů.

Uveďme si pro představu pojištění automobilů, v němž je každý řidič zařazen do jedné z tarifních skupin[1] za účelem stanovení výše pojistného. Při klasifikaci bere pojistitel v potaz tarifní proměnné jako jsou věk, zkušenosti s řízením, historie nehodovosti apod. Řidiči v rámci jedné tarifní třídy si nejsou úplně stejní (odlišné řidičské schopnosti, rozdílné reakce na silnici, jiné úsudky...) a riziko vzniku nehody u každého z nich není stoprocentně identické. K modelování této heterogenity využíváme směsí rozdělení.

Předpokládejme, že úroveň rizika každého klienta lze charakterizovat nezáporným rizikovým parametrem θ. Ten v sobě zahrnuje skryté faktory jednotlivých pojištěnců, jež pojišťovna není s to pozorovat, a proto je pro nás neznámý. θ je realizací náhodné veličiny Θ, která může být buď spojitá, nebo diskrétní.

Pro každou tarifní třídu jsme schopni určit rozdělení, jež udává pravděpodobnost jednotlivých hodnot θ uvnitř dané třídy, tj. pravděpodobnostní funkci, resp. hustotu pravděpodobnosti $\pi_\Theta(\theta)$ náhodné veličiny Θ. Distribuční funkce $F_\Theta(\theta) = P(\Theta \leq \theta)$ náhodné veličiny Θ udává pravděpodobnost, že úroveň rizika náhodně vybraného klienta nepřekročí hodnotu θ.

[1] **Tarifní skupiny** definujeme jako homogenní skupiny pojistných smluv, pro něž je pojištěné riziko zhruba stejné.

Parametrem θ může být například střední hodnota Poissonova rozdělení. V takovém případě je mírou rizika očekávaný počet pojistných událostí v pevně stanoveném časovém období.

Nechť $G_{N|\Theta}(s|\theta)$ značí podmíněnou generující funkci počtu událostí, je-li θ rizikový parametr. Nepodmíněná generující funkce počtu událostí je potom dána vztahem

$$G_N(s) = \int G_{N|\Theta}(s|\theta) \cdot \pi_\Theta(\theta)\mathrm{d}\theta, \quad \text{resp.} \quad G_N(s) = \sum_j G_{N|\Theta}(s|\theta_j) \cdot \pi_\Theta(\theta_j), \tag{3.1}$$

obecně

$$G_N(s) = \int G_{N|\Theta}(s|\theta)\mathrm{d}F_\Theta(\theta), \tag{3.2}$$

integrujeme přes obor hodnot θ (obvykle od 0 do ∞).

Pravděpodobnost, že nastane právě k pojistných událostí lze zapsat ve tvaru $p_N(k) = P(N = k) = \mathrm{E}\big(P(N = k|\Theta = \theta)\big) = \mathrm{E}\big(p_{N|\Theta}(k|\theta)\big)$.

Pro spojité Θ máme

$$p_N(k) = \int p_{N|\Theta}(k|\theta) \cdot \pi_\Theta(\theta)\mathrm{d}\theta \tag{3.3}$$

a pro diskrétní Θ dostaneme

$$p_N(k) = \sum_j p_{N|\Theta}(k|\theta_j) \cdot \pi_\Theta(\theta_j), \tag{3.4}$$

kde $p_{N|\Theta}(k|\theta_j)$ představuje podmíněnou pravděpodobnostní funkci náhodné veličiny N za podmínky $\Theta = \theta_j$.

Obecně

$$p_N(k) = \int p_{N|\Theta}(k|\theta)\mathrm{d}F_\Theta(\theta). \tag{3.5}$$

Mísící rozdělení určené distribuční funkcí $F_\Theta(\theta)$ může být jak diskrétního, tak spojitého typu. Je-li diskrétního typu (Θ je diskrétní náhodná veličina), pak obdržíme diskrétní směs rozdělení. Je-li spojitého typu (Θ je spojitá náhodná veličina), potom získáváme spojitou směs.

3.1 Směsi Poissonových rozdělení

Poissonovo rozdělení samo o sobě často špatně fituje data pozorovaná na pojistném kmeni kvůli heterogenitě. Oblíbeným nástrojem pro modelování nehomogenních portfolií se proto v pojistné matematice stávají směsi Poissonových rozdělení, jimiž se nyní budeme zabývat.

Uvažujeme-li podmíněnou pravděpodobnostní funkci náhodné veličiny N vzhledem k $\Theta = \theta$ v následujícím tvaru

$$p_{N|\Theta}(k|\theta) = \mathrm{e}^{-\lambda\theta} \cdot \frac{(\lambda\theta)^k}{k!},$$

tj. počet nehod daného klienta má $Po(\lambda\theta)$, pak z (3.5) snadno odvodíme nepodmíněnou pravděpodobnostní funkci smíšeného Poissonova rozdělení.

Definice 3.1. Diskrétní náhodná veličina N se řídí smíšeným Poissonovým rozdělením[2] s parametrem $\lambda > 0$ a mísící distribucí $F_\Theta(\theta)$, značíme $N \sim MPo(\lambda, F_\Theta(\theta))$, jestliže

$$p_N(k) = \int \mathrm{e}^{-\lambda\theta} \cdot \frac{(\lambda\theta)^k}{k!} \mathrm{d}F_\Theta(\theta), \quad k = 0, 1, \dots \tag{3.6}$$

λ (intenzita nehodovosti) představuje průměrnou nehodovost jisté tarifní skupiny a θ je rizikový parametr konkrétního klienta. Špatný řidič mívá $\theta > 1$, průměrný řidič $\theta = 1$ a dobrý řidič $\theta < 1$.

Generující funkce:

$$\begin{aligned} G_N(s) &= \int \mathrm{e}^{\lambda\theta\cdot(s-1)} \mathrm{d}F_\Theta(\theta) = \int \left[\mathrm{e}^{\lambda\cdot(s-1)}\right]^\theta \mathrm{d}F_\Theta(\theta) = \\ &= \mathrm{E}\Big(\left[\mathrm{e}^{\lambda\cdot(s-1)}\right]^\theta\Big) = G_\Theta\big(\mathrm{e}^{\lambda\cdot(s-1)}\big) = M_\Theta\big(\lambda(s-1)\big), \end{aligned} \tag{3.7}$$

kde $G_\Theta(s) = \mathrm{E}(s^\Theta)$ je generující funkce mísícího rozdělení, $M_\Theta(t) = \mathrm{E}(\mathrm{e}^{t\Theta})$ je moment generující funkce mísícího rozdělení a λ parametr měřítka neboli škálovací parametr.

[2] Mixed Poisson distribution

Parametr měřítka nemění pravděpodobnostní rozdělení po formální stránce, nedochází tedy ke změně tvaru rozdělení. Pro jednoduchost se často volí $\lambda = 1$.

Střední hodnota a ***rozptyl***:

$$\mathrm{E}(N) = G'_N(1) = \lambda \cdot M'_\Theta\big(\lambda(s-1)\big)\Big|_{s=1} = \lambda \cdot M'_\Theta(0) = \lambda \cdot \mathrm{E}(\Theta), \tag{3.8}$$

$$\begin{aligned}\mathrm{Var}(N) &= G''_N(1) + G'_N(1) - \big(G'_N(1)\big)^2 = \\ &= \lambda^2 \cdot M''_\Theta\big(\lambda(s-1)\big)\Big|_{s=1} + G'_N(1) - \big(G'_N(1)\big)^2 = \\ &= \lambda^2 \cdot M''_\Theta(0) + \mathrm{E}(N) - \big(\mathrm{E}(N)\big)^2 = \\ &= \lambda^2 \cdot \mathrm{E}(\Theta^2) + \lambda \cdot \mathrm{E}(\Theta) - \lambda^2 \cdot \big(\mathrm{E}(\Theta)\big)^2 = \\ &= \lambda \cdot \mathrm{E}(\Theta) + \lambda^2 \cdot \big[\mathrm{E}(\Theta^2) - \big(\mathrm{E}(\Theta)\big)^2\big] = \\ &= \lambda \cdot \mathrm{E}(\Theta) + \lambda^2 \cdot \mathrm{Var}(\Theta).\end{aligned} \tag{3.9}$$

Parametr rizika vybíráme logicky tak, aby $\mathrm{E}(\Theta) = 1$.

Všimněme si, že na rozdíl od Poissonova rozdělení s equidispersion má smíšené Poissonovo rozdělení overdispersion ($\mathrm{Var}(N) > \mathrm{E}(N)$).

Pro každé smíšené Poissonovo rozdělení je mísící rozdělení určeno jednoznačně, to znamená, že dvě různá mísící rozdělení nemohou vést ke stejné směsi Poissonových rozdělení.

Definice 3.2. Nechť X je náhodná veličina definovaná na pravděpodobnostním prostoru $(\Omega, \mathcal{A}, P)$. Pak funkce $\varphi : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ daná vztahem

$$\varphi_X(s) = \mathrm{E}(\mathrm{e}^{isX}) = \mathrm{E}\big(\cos(sX) + i \cdot \sin(sX)\big), \quad s \in \mathbb{R}, i = \sqrt{-1}, \tag{3.10}$$

se nazývá charakteristická funkce náhodné veličiny X[3].

Charakteristická funkce existuje pro každé pravděpodobnostní rozdělení, zatímco moment generující funkci nelze pro některá rozdělení s těžkým chvostem vypočítat. V některých případech je pro nás užitečnější znát generující funkci než charakteristickou funkci. Níže uvedené lemma udává vztah mezi těmito dvěma funkcemi.

[3] X zde označuje obecnou náhodnou veličinu, tj. může být jak spojitá, tak diskrétní.

Lemma 3.3. *Existuje-li generující funkce diskrétní náhodné veličiny N, pak platí*

$$G_N(s) = \varphi_N(-i \cdot \ln(s)) \quad \text{a} \quad \varphi_N(s) = G_N(\mathrm{e}^{is}). \tag{3.11}$$

Definice 3.4. Rozdělení náhodné veličiny X je nekonečně dělitelné, jestliže pro všechny hodnoty $n = 1, 2, \ldots$ lze jeho charakteristickou funkci $\varphi_X(s)$ zapsat

$$\varphi_X(s) = \left[\varphi_n(s)\right]^n, \tag{3.12}$$

kde $\varphi_n(s)$ je charakteristická funkce nějaké náhodné veličiny.

Mezi nekonečně dělitelná rozdělení řadíme normální, Poissonovo, negativně binomické a gamma rozdělení. Binomické rozdělení jakožto rozdělení s konečným nosičem nemůže být logicky nekonečně dělitelné.

Následující věta říká, že vybereme-li jakékoliv nekonečně dělitelné mísící rozdělení, pak lze odpovídající smíšené Poissonovo rozdělení zapsat jako složené Poissonovo rozdělení.

Věta 3.5. *Nechť $G(s)$ je generující funkce smíšeného Poissonova rozdělení s nekonečně dělitelným mísícím rozdělením. Pak $G(s)$ je též generující funkcí složeného Poissonova rozdělení a lze ji vyjádřit ve tvaru $G(s) = \mathrm{e}^{\lambda\left(G^*(s)-1\right)}$, kde $G^*(s)$ je generující funkce sekundárního rozdělení. Požadujeme-li, aby $G^*(0) = 0$, potom $G^*(s)$ je určena jednoznačně.*

Důkaz. Důkaz lze nalézt v *An Introduction to Probability Theory and Its Applications.* Volume I, Third edition – FELLER, William. New York: John Wiley & Sons, Inc., 1968. ■

Poznámka. Je-li $G_\Theta(s)$ generující funkce nějaké diskrétní náhodné veličiny, pak $G_\Theta\left(\mathrm{e}^{\lambda(s-1)}\right)$ je generující funkce smíšeného Poissonova rozdělení, což je zároveň generující funkce složeného rozdělení se sekundárním Poissonovým rozdělením.

Příklady směsí Poissonových rozdělení

Negativně binomické rozdělení

Negativně binomické rozdělení je smíšené Poissonovo rozdělení s mísícím gamma rozdělením.

Připomeňme si pravděpodobnostní funkci negativně binomického rozdělení

$$p_{N'}(k) = \binom{k+m-1}{k}\left(\frac{1}{1+\beta}\right)^m\left(\frac{\beta}{1+\beta}\right)^k,\ m>0, \beta>0, k=0,1,\dots$$

Ukažme, že je shodná s pravděpodobnostní funkcí smíšeného Poissonova rozdělení, kde mísícím rozdělením je gamma rozdělení.

$$p_N(k) = \mathrm{E}(p_{N|\Theta}(k|\theta)) = \int_0^\infty p_{N|\Theta}(k|\theta)\mathrm{d}F_\Theta(\theta) = \int_0^\infty \mathrm{e}^{-\theta}\cdot\frac{\theta^k}{k!}\mathrm{d}F_\Theta(\theta),$$

θ měří očekávaný počet škod daného řidiče a je pro pojišťovnu neznámý.

Mějme tedy $\Theta \sim Gam(\alpha,\beta)^4$, pak

$$\begin{aligned}
p_N(k) &= \int_0^\infty \mathrm{e}^{-\theta}\cdot\frac{\theta^k}{k!}\cdot\frac{\theta^{\alpha-1}\cdot\mathrm{e}^{-\frac{\theta}{\beta}}}{\Gamma(\alpha)\cdot\beta^\alpha}\mathrm{d}\theta = \frac{1}{k!\Gamma(\alpha)\cdot\beta^\alpha}\int_0^\infty \mathrm{e}^{-\theta\cdot\left(1+\frac{1}{\beta}\right)}\cdot\theta^{k+\alpha-1}\mathrm{d}\theta \\
&\left|\text{subst.: } \theta\cdot\left(1+\frac{1}{\beta}\right) = z; \mathrm{d}\theta = \frac{\beta}{1+\beta}\mathrm{d}z\right| = \\
&= \frac{1}{k!\Gamma(\alpha)\cdot\beta^\alpha}\int_0^\infty \mathrm{e}^{-z}\cdot z^{k+\alpha-1}\left(\frac{\beta}{1+\beta}\right)^{k+\alpha}\mathrm{d}z = \frac{\Gamma(k+\alpha)}{k!\Gamma(\alpha)\cdot\beta^\alpha}\left(\frac{\beta}{1+\beta}\right)^{k+\alpha} = \\
&= \frac{\Gamma(k+\alpha)}{k!\Gamma(\alpha)}\cdot\frac{\beta^k}{(1+\beta)^k\cdot(1+\beta)^\alpha} = \binom{k+\alpha-1}{k}\left(\frac{\beta}{1+\beta}\right)^k\left(\frac{1}{1+\beta}\right)^\alpha
\end{aligned}$$

Zjevně pro $m=\alpha$ se $p_{N'}(k) = p_N(k)$.

[4] Spojitá náhodná veličina X má gamma rozdělení s parametry $\alpha>0$ a $\beta>0$, zapisujeme $X\sim Gam(\alpha,\beta)$, je-li její pravděpodobnostní hustota

$$f_X(x) = \begin{cases} \frac{x^{\alpha-1}\cdot\mathrm{e}^{-\frac{x}{\beta}}}{\Gamma(\alpha)\cdot\beta^\alpha}, & x\ge 0 \\ 0, & \text{jinak.}\end{cases}$$

$\Gamma(\alpha) = \int_0^\infty x^{\alpha-1}\cdot\mathrm{e}^{-x}\mathrm{d}x$ je gamma funkce. Pro $\alpha\in\mathbb{N}$ platí $\Gamma(\alpha) = (\alpha-1)!$

Další směsi Poissonových rozdělení

Název směsi rozdělení	**Neymanovo rozdělení typu A**
Mísící rozdělení	Poissonovo rozdělení
Název směsi rozdělení	**Poisson-inverzní Gaussovo rozdělení**
Mísící rozdělení	inverzní Gaussovo rozdělení
s parametry	$\mu = 1, \nu > 0$
Název směsi rozdělení	**Poisson-log-normální rozdělení**
Mísící rozdělení	log-normální rozdělení
s parametry	$\mu = -\frac{\sigma^2}{2}, \sigma^2 > 0$

Tabulka 3.1: Příklady směsí Poissonových rozdělení
Zdroj: vlastní konstrukce na základě poznatků získaných z citov. literatury

Hustota inverzního Gaussova rozdělení s parametry $\mu > 0$ a $\nu > 0$:

$$f_X(x) = \begin{cases} \sqrt{\frac{\nu}{2\pi x^3}} \cdot \mathrm{e}^{-\frac{\nu(x-\mu)^2}{2x\mu^2}}, & x > 0, \\ 0, & \text{jinak.} \end{cases} \tag{3.13}$$

Hustota log-normálního rozdělení s parametry $\mu \in \mathbb{R}$ a $\sigma^2 > 0$:

$$f_X(x) = \begin{cases} \frac{1}{x\sigma\sqrt{2\pi}} \cdot \mathrm{e}^{-\frac{(\ln(x)-\mu)^2}{2\sigma^2}}, & x > 0, \\ 0, & \text{jinak.} \end{cases} \tag{3.14}$$

3.2 Příklady

Příklad 3.1. Určete pravděpodobnostní funkci smíšeného binomického rozdělení s mísícím beta rozdělením.

Řešení:

Definice 3.6. Spojitá náhodná veličina X má beta rozdělení s parametry $\alpha, \beta > 0$, píšeme $X \sim Be(\alpha, \beta)$, jestliže je její pravděpodobnostní hustota ve tvaru

$$f_X(x) = \begin{cases} \frac{x^{\alpha-1}(1-x)^{\beta-1}}{\mathrm{B}(\alpha,\beta)}, & x \in [0,1], \\ 0, & \text{jinak,} \end{cases}$$

kde $\mathrm{B}(\alpha, \beta) = \int_0^1 x^{\alpha-1}(1-x)^{\beta-1}\mathrm{d}x$ je beta funkce.

Vztah mezi gamma a beta funkcí: $\mathrm{B}(\alpha, \beta) = \frac{\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)}{\Gamma(\alpha+\beta)}$.

V našem příkladu $\Theta \sim Be(\alpha, \beta)$

$$\pi_\Theta(\theta) = \frac{\Gamma(\alpha+\beta)}{\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)} \cdot \theta^{\alpha-1}(1-\theta)^{\beta-1}, \quad \alpha, \beta > 0, \theta \in [0,1],$$
$$p_{N|\Theta}(k|\theta) = \binom{n}{k}\theta^k(1-\theta)^{n-k}.$$

Nepodmíněnou pravděpodobnostní funkci získáme z $p_N(k) = \int p_{N|\Theta}(k|\theta)\pi_\Theta(\theta)\mathrm{d}\theta$:

$$\begin{aligned}
p_N(k) &= \int_0^1 \binom{n}{k}\theta^k(1-\theta)^{n-k} \cdot \frac{\Gamma(\alpha+\beta)}{\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)} \cdot \theta^{\alpha-1}(1-\theta)^{\beta-1}\mathrm{d}\theta = \\
&= \int_0^1 \binom{n}{k}\frac{\Gamma(\alpha+\beta)}{\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)} \cdot \theta^{k+\alpha-1}(1-\theta)^{n-k+\beta-1}\mathrm{d}\theta = \\
&= \frac{n!}{(n-k)!k!} \cdot \frac{\Gamma(\alpha+\beta)}{\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)} \underbrace{\int_0^1 \theta^{k+\alpha-1}(1-\theta)^{n-k+\beta-1}\mathrm{d}\theta}_{\text{beta funkce}} = \\
&= \frac{\Gamma(n+1)}{\Gamma(n-k+1)\Gamma(k+1)} \cdot \frac{\Gamma(\alpha+\beta)}{\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)} \cdot \mathrm{B}(k+\alpha, n-k+\beta) = \\
&= \frac{\Gamma(n+1)\cdot\Gamma(\alpha+\beta)\cdot\Gamma(k+\alpha)\cdot\Gamma(n-k+\beta)}{\Gamma(n-k+1)\cdot\Gamma(k+1)\cdot\Gamma(\alpha)\cdot\Gamma(\beta)\cdot\Gamma(\alpha+\beta+n)}, \quad k = 0, 1, 2, \dots
\end{aligned}$$

Toto rozdělení je také známé pod názvy binomické-beta, negativně hypergeometrické nebo Polya-Eggenbergerovo rozdělení.

✍

Příklad 3.2. Nechť má N Poissonovo rozdělení s parametrem $\lambda\theta$, kde θ je realizací Θ. Nechť $\Theta = aX, a > 0$. Ukažte, že rozdělení směsi nezávisí na hodnotě λ.

Řešení:
Nejdříve najdeme hustotu náhodné veličiny Θ

$$
\begin{aligned}
F_\Theta(\theta) &= P(\Theta \le \theta) = P(aX \le \theta) = P\left(X \le \frac{\theta}{a}\right) = F_X\left(\frac{\theta}{a}\right), \\
f_\Theta(\theta) &= \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\theta} F_\Theta(\theta) = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\theta} F_X\left(\frac{\theta}{a}\right) = \frac{1}{a} f_X\left(\frac{\theta}{a}\right).
\end{aligned}
$$

Pravděpodobnostní funkci náhodné veličiny N získáme

$$
\begin{aligned}
p_N(k) &= \int \mathrm{e}^{-\lambda\theta} \cdot \frac{(\lambda\theta)^k}{k!} \mathrm{d}F_\Theta(\theta) = \int \mathrm{e}^{-\lambda\theta} \cdot \frac{(\lambda\theta)^k}{k!} \cdot \frac{1}{a} f_X\left(\frac{\theta}{a}\right) \mathrm{d}\theta = \\
&= \int \mathrm{e}^{-\lambda a x} \cdot \frac{(\lambda a x)^k}{k!} \cdot \frac{1}{a} f_X\left(\frac{ax}{a}\right) a \, \mathrm{d}x = \\
&= \frac{\lambda^k}{k!} \int \mathrm{e}^{-\lambda a x} \cdot a^k \cdot x^k \cdot f_X(x) \mathrm{d}x.
\end{aligned}
$$

Vidíme, že se λ vyskytuje pouze v součinu λa. Pokud a neovlivňuje tvar rozdělení, pak rozdělení směsi nezávisí na λ.

✍

Příklad 3.3. Ukažte, že smíšené Poissonovo rozdělení s mísícícm inverzním Gaussovým rozdělením je Poisson-ETNB rozdělení s parametrem $m = -\frac{1}{2}$.

Řešení:
$\Theta \sim IG(\mu, \nu)$, tedy hustotou mísícího rozdělení je

$$
\begin{aligned}
f_\Theta(\theta) &= \sqrt{\frac{\nu}{2\pi\theta^3}} \cdot \mathrm{e}^{-\frac{\nu(\theta-\mu)^2}{2\theta\mu^2}} = \sqrt{\frac{\nu}{2\pi}} \cdot \theta^{-\frac{3}{2}} \cdot \mathrm{e}^{-\frac{\nu\theta^2 - 2\nu\theta\mu + \nu\mu^2}{2\theta\mu^2}} = \\
&= \sqrt{\frac{\nu}{2\pi}} \cdot \theta^{-\frac{3}{2}} \cdot \mathrm{e}^{-\frac{\theta\nu}{2\mu^2} + \frac{\nu}{\mu} - \frac{\nu}{2\theta}} = \sqrt{\frac{\nu}{2\pi}} \cdot \theta^{-\frac{3}{2}} \cdot \mathrm{e}^{\frac{\nu}{\mu}} \cdot \mathrm{e}^{-\frac{\nu}{2\theta} - \frac{\theta\nu}{2\mu^2}}.
\end{aligned}
$$

Z platnost $\int\limits_0^\infty f_\Theta(\theta)\mathrm{d}\theta = 1$:

$$\begin{aligned}
\int_0^\infty \sqrt{\frac{\nu}{2\pi}} \cdot \theta^{-\frac{3}{2}} \cdot \mathrm{e}^{\frac{\nu}{\mu}} \cdot \mathrm{e}^{-\frac{\nu}{2\theta} - \frac{\theta\nu}{2\mu^2}} \mathrm{d}\theta &= 1 \\
\sqrt{\frac{\nu}{2\pi}} \cdot \mathrm{e}^{\frac{\nu}{\mu}} \int_0^\infty \theta^{-\frac{3}{2}} \cdot \mathrm{e}^{-\frac{\nu}{2\theta} - \frac{\theta\nu}{2\mu^2}} \mathrm{d}\theta &= 1 \\
\int_0^\infty \theta^{-\frac{3}{2}} \cdot \mathrm{e}^{-\frac{\nu}{2\theta} - \frac{\theta\nu}{2\mu^2}} \mathrm{d}\theta &= \sqrt{\frac{2\pi}{\nu}} \cdot \mathrm{e}^{-\frac{\nu}{\mu}}
\end{aligned}$$

Moment generující funkce náhodné veličiny Θ:

$$\begin{aligned}
M_\Theta(\theta) &= \mathrm{E}(\mathrm{e}^{t\Theta}) = \int_0^\infty \mathrm{e}^{t\theta} f_\Theta(\theta)\mathrm{d}\theta = \int_0^\infty \mathrm{e}^{t\theta} \cdot \sqrt{\frac{\nu}{2\pi}} \cdot \theta^{-\frac{3}{2}} \cdot \mathrm{e}^{\frac{\nu}{\mu}} \cdot \mathrm{e}^{-\frac{\nu}{2\theta} - \frac{\theta\nu}{2\mu^2}} \mathrm{d}\theta = \\
&= \sqrt{\frac{\nu}{2\pi}} \cdot \mathrm{e}^{\frac{\nu}{\mu}} \int_0^\infty \theta^{-\frac{3}{2}} \mathrm{e}^{\frac{(2\mu^2 t - \nu)\theta}{2\mu^2} - \frac{\nu}{2\theta}} \mathrm{d}\theta = \sqrt{\frac{\nu}{2\pi}} \cdot \mathrm{e}^{\frac{\nu}{\mu}} \int_0^\infty \theta^{-\frac{3}{2}} \cdot \mathrm{e}^{\frac{-\theta(\nu - 2\mu^2 t)}{2\mu^2} - \frac{\nu}{2\theta}} \mathrm{d}\theta = \\
&= \sqrt{\frac{\nu}{2\pi}} \cdot \mathrm{e}^{\frac{\nu}{\mu}} \int_0^\infty \theta^{-\frac{3}{2}} \cdot \mathrm{e}^{-\theta\cdot\left(\frac{\nu}{2\mu^2} - t\right) - \frac{\nu}{2\theta}} \mathrm{d}\theta \ \Big|\text{subst. v integrálu: } \nu = \nu_*\Big| = \\
&= \sqrt{\frac{\nu}{2\pi}} \cdot \mathrm{e}^{\frac{\nu}{\mu}} \int_0^\infty \theta^{-\frac{3}{2}} \cdot \mathrm{e}^{-\theta\cdot\left(\frac{\nu_*}{2\mu^2} - t\right) - \frac{\nu_*}{2}\cdot\frac{1}{\theta}} \mathrm{d}\theta \overset{\textit{mezivýpočet}}{=} \\
&\overset{\textit{mezivýpočet}}{=} \sqrt{\frac{\nu}{2\pi}} \cdot \mathrm{e}^{\frac{\nu}{\mu}} \int_0^\infty \theta^{-\frac{3}{2}} \cdot \mathrm{e}^{-\frac{\theta\nu_*}{2\mu_*^2} - \frac{\nu_*}{2\theta}} \mathrm{d}\theta = \sqrt{\frac{\nu}{2\pi}} \cdot \mathrm{e}^{\frac{\nu}{\mu}} \cdot \sqrt{\frac{2\pi}{\nu}} \cdot \mathrm{e}^{-\frac{\nu_*}{\mu_*}} = \\
&= \exp\left\{\frac{\nu}{\mu} - \frac{\nu_*}{\mu_*}\right\} \overset{\textit{mezivýpočet}}{=} \exp\left\{\frac{\nu}{\mu} - \frac{\nu}{\mu\sqrt{\frac{\nu}{\nu - 2\mu^2 t}}}\right\} = \\
&= \exp\left\{\frac{\nu}{\mu}\left(1 - \sqrt{\frac{\nu - 2\mu^2 t}{\nu}}\right)\right\} = \exp\left\{\frac{\nu}{\mu}\left(1 - \sqrt{1 - \frac{2\mu^2 t}{\nu}}\right)\right\}.
\end{aligned}$$

mezivýpočet: Máme $\frac{\nu_*}{2\mu^2} - t$, chceme získat $\frac{\nu_*}{2\mu_*^2}$, tj.

$$\begin{aligned}
\frac{\nu_*}{2\mu^2} - t &= \frac{\nu_*}{2\mu_*^2} \\
\frac{\nu_* - 2\mu^2 t}{2\mu^2} &= \frac{\nu_*}{2\mu_*^2} \\
2\mu_*^2(\nu_* - 2\mu^2 t) &= 2\mu^2\nu_* \\
\mu_*^2 &= \frac{\mu^2\nu_*}{\nu_* - 2\mu^2 t}
\end{aligned}$$

$$\mu_* = \sqrt{\frac{\mu^2\nu_*}{\nu_* - 2\mu^2 t}}$$
$$\mu_* = \mu\sqrt{\frac{\nu_*}{\nu_* - 2\mu^2 t}}, \text{ resp. } \mu_* = \mu\sqrt{\frac{\nu}{\nu - 2\mu^2 t}} \text{ pro } \nu_* = \nu.$$

Pro $\beta = \frac{\mu^2}{\nu} \Leftrightarrow \nu = \frac{\mu^2}{\beta}$:

$$M_\Theta(t) = \exp\left\{\frac{\mu}{\beta}\cdot\left(1 - \sqrt{1 - \frac{2\mu^2\beta t}{\mu^2}}\right)\right\} = \exp\left\{-\frac{\mu}{\beta}\cdot\left(\sqrt{1-2\beta t} - 1\right)\right\}.$$

Volíme $\lambda = 1$, $G_N(s) = M_\Theta\big(\lambda(s-1)\big)$ se tak redukuje na $G_N(s) = M_\Theta(s-1)$:

$$G_N(s) = \exp\left\{-\frac{\mu}{\beta}\cdot\left(\sqrt{1-2\beta(s-1)} - 1\right)\right\},$$

což je generující funkce smíšeného Poissonova rozdělení s mísícím inverzním Gaussovým rozdělením.

Generují funkci složeného Poissonova rozdělení je tvaru $G_S(s) = \mathrm{e}^{\lambda\cdot(G_M(s)-1)}$. Dosadíme-li za

$$\lambda = \frac{\mu}{\beta}\left(\sqrt{1+2\beta} - 1\right),$$
$$G_M(s) = \frac{\sqrt{1-2\beta(s-1)} - \sqrt{1+2\beta}}{1 - \sqrt{1+2\beta}},$$

obdržíme

$$G_S(s) = \exp\left\{-\frac{\mu}{\beta}\cdot\left(\sqrt{1-2\beta(s-1)} - 1\right)\right\}.$$

$G_S(s)$ je shodné s $G_N(s)$ a $G_M(s)$ je generující funkcí ETNB rozdělení.

✍

Příklad 3.4. Ukažte, že normální rozdělení je nekonečně dělitelné.

Řešení:

Připomeňme si: Nechť $X \sim N(\mu, \sigma^2), \mu \in \mathbb{R}, \sigma^2 > 0$ a $X = Y_1 + Y_2 + \cdots + Y_n$, kde $Y_1, Y_2, \ldots, Y_n$ jsou IID náhodné veličiny. Ze znalosti vlastností součtu normálně rozdělených náhodných veličin víme, že $Y_j \sim N\left(\frac{\mu}{n}, \frac{\sigma^2}{n}\right)$ pro $j = 1, 2, \ldots, n$.

Pro výpočet charakteristické funkce náhodné veličiny X postupujme následujícím způsobem:

Mějme $U \sim N(0,1)$ s hustotou $g_U(u) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \cdot \mathrm{e}^{-\frac{u^2}{2}}$, $u \in \mathbb{R}$,
$X \sim N(\mu, \sigma^2)$ s hustotou $f_X(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} \cdot \mathrm{e}^{-\frac{1}{2}\cdot(\frac{x-\mu}{\sigma})^2}$, $x \in \mathbb{R}$.

$X = \mu + \sigma U \Leftrightarrow U = \frac{X-\mu}{\sigma}$.

Charakteristickou funkci standardizované náhodné veličiny U vypočítáme:

$$\begin{aligned}
\varphi_U(s) &= \mathrm{E}(\mathrm{e}^{isU}) = \int_{-\infty}^{\infty} \mathrm{e}^{isu} \cdot g_U(u)\mathrm{d}u = \int_{-\infty}^{\infty} \mathrm{e}^{isu} \cdot \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \cdot \mathrm{e}^{-\frac{u^2}{2}}\mathrm{d}u = \\
&= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \mathrm{e}^{-\frac{1}{2}(u^2-2isu)}\mathrm{d}u = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \mathrm{e}^{-\frac{1}{2}((u^2-2isu+(is)^2)-(is)^2)}\mathrm{d}u = \\
&= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \mathrm{e}^{-\frac{1}{2}((u-is)^2+s^2)}\mathrm{d}u = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \cdot \mathrm{e}^{-\frac{s^2}{2}} \int_{-\infty}^{\infty} \mathrm{e}^{-\frac{1}{2}(u-is)^2}\mathrm{d}u \\
&\quad \left|\text{subst.: } u - is = z; \mathrm{d}u = \mathrm{d}z\right| = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \cdot \mathrm{e}^{-\frac{s^2}{2}} \int_{-\infty}^{\infty} \mathrm{e}^{-\frac{z^2}{2}}\mathrm{d}z = \\
&= \mathrm{e}^{-\frac{s^2}{2}} \underbrace{\int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \cdot \mathrm{e}^{-\frac{z^2}{2}}\mathrm{d}z}_{=1} = \mathrm{e}^{-\frac{s^2}{2}}.
\end{aligned}$$

Zopakujme si větu o charakteristické funkci transformované náhodné veličiny[5]

Věta 3.7. Nechť U je náhodná veličina, $\varphi_U(s)$ její charakteristická funkce a $a, b \in \mathbb{R}$. Pak charakteristická funkce transformované náhodné veličiny $X = a + bU$ je rovna $\varphi_X(s) = \mathrm{e}^{isa} \cdot \varphi_U(sb)$.

Charakteristická funkce náhodné veličiny $X \sim N(\mu, \sigma^2)$ je tímto

$$\varphi_X(s) = \mathrm{e}^{is\mu} \cdot \varphi_U(s\sigma) = \mathrm{e}^{is\mu} \cdot \mathrm{e}^{-\frac{s^2\sigma^2}{2}} = \mathrm{e}^{is\mu - \frac{s^2\sigma^2}{2}}.$$

Podívejme se nyní na charakteristickou funkci náhodné veličiny $Y_j, j = 1, 2, \ldots, n$. Označme ji $\varphi_Y(s)$.

$Y_j = \frac{\mu}{n} + \sqrt{\frac{\sigma^2}{n}}U \Leftrightarrow U = \frac{Y_j - \frac{\mu}{n}}{\frac{\sigma}{\sqrt{n}}}$

[5] Důkaz lze najít v [6].

$$\varphi_Y(s) = \varphi_{\frac{\mu}{n}+\frac{\sigma}{\sqrt{n}}U}(s) = \mathrm{e}^{\frac{is\mu}{n}} \cdot \varphi_U\Big(s\frac{\sigma}{\sqrt{n}}\Big) = \mathrm{e}^{\frac{is\mu}{n}} \cdot \mathrm{e}^{-\frac{\sigma^2 s^2}{2n}} = \mathrm{e}^{\frac{is\mu}{n}-\frac{\sigma^2 s^2}{2n}}.$$

Odtud vidíme platnost $\varphi_X(s) = \big(\varphi_Y(s)\big)^n$: $\mathrm{e}^{is\mu-\frac{s^2\sigma^2}{2}} = \Big(\mathrm{e}^{\frac{is\mu}{n}-\frac{\sigma^2 s^2}{2n}}\Big)^n$.

✍

Cvičení

1. Určete pravděpodobnostní funkci smíšeného negativně binomického rozdělení s mísícím beta rozdělením.

   $\Big[\frac{\Gamma(k+m)\cdot\Gamma(\alpha+\beta)\cdot\Gamma(\alpha+m)\cdot\Gamma(k+\beta)}{\Gamma(k+1)\cdot\Gamma(m)\cdot\Gamma(\alpha)\cdot\Gamma(\beta)\cdot\Gamma(m+k+\alpha+\beta)},\ k = 0, 1, 2, \ldots;$ nazývá se zobecněné Waringovo rozdělení $\Big]$

2. Nechť má N Poissonovo rozdělení s náhodným parametrem $\theta > 0$ (θ je realizací Θ) a nechť má náhodná veličiny Θ pravděpodobnostní funkci $\pi_\Theta(\theta) = \alpha^2(\alpha+1)^{-1}(\theta+1)\mathrm{e}^{-\alpha\theta}$. Určete pravděpodobnostní funkci směsi rozdělení.

   $\Big[\frac{\alpha^2}{k!\cdot(\alpha+1)^{k+2}}\Big(\Gamma(k+1) + \frac{\Gamma(k+2)}{\alpha+1}\Big)\Big]$

3. Dokažte pomocí generující funkce, že smíšené Poissonovo rozdělení s mísícím gamma rozdělením je negativně binomické.

   [Nápověda: Využijte vztah (3.7). Generující funkce smíšeného rozdělení (parametry λ, α, β) se shoduje s generující funkcí negativně binomického rozdělení (parametry m, β^*) pro $\alpha = m, \beta\lambda = \beta^*$.]

4. Dokažte lemma 3.3.

   $\Big[$Nápověda: $\mathrm{E}(\mathrm{e}^{N\ln(s)}) = \mathrm{E}\big(\mathrm{e}^{i(-i\ln(s))N}\big); \mathrm{E}(\mathrm{e}^{isN}) = \mathrm{E}\big((\mathrm{e}^{is})^N\big)\Big]$

5. Přesvědčte se, že gamma rozdělení je nekonečně dělitelné.

   $\Big[$Nápověda: Nechť $X \sim Gam(\alpha, \beta), \alpha, \beta > 0$ a $X = Y_1 + Y_2 + \cdots + Y_n$, kde $Y_1, Y_2, \ldots, Y_n$ jsou IID náhodné veličiny, pak $Y_j \sim Gam\big(\frac{\alpha}{n}, \beta\big)$.$\Big]$

Kapitola 4

Kolektivní model rizika

Riziko zpravidla představuje možnost vzniku nešťastných událostí - finanční či majetková ztráta, poškození zdraví, ztráta života atd. Pojištěný za sjednaný „finanční úplatek“ přenese svá rizika na pojistitele. Pojistitel podstupující tato rizika se vystavuje nebezpečí potenciálního nedostatku finančních prostředků. Je tedy logické, že bude usilovat o co nejpřesnější určení celkového pojistného plnění vyplaceného na smlouvách daného pojistného kmene[1], aby předešel případným ztrátám. K modelování celkové výše škod za určité časové období nám poslouží jak individuální, tak kolektivní model rizika.

Mějme náhodnou veličinu S představující úhrn škod (celkovou škodu z pojistných nároků, celkové pojistné plnění) za období pevně zvolené délky T.

Definice 4.1. Nechť pojistný kmen obsahuje právě n smluv a nechť X_i, kde $i = 1, 2, \ldots, n$, udávají výše škodních nároků připadajících na jednotlivé pojistné smlouvy v uvažovaném období. Pak pro úhrn škod v individuálním modelu rizika platí

$$S = \sum_{i=1}^{n} X_i. \tag{4.1}$$

Zde se předpokládá vzájemná nezávislost náhodných veličin X_i.

Individuální model rizika pracuje s riziky příslušejícími jednotlivým pojistným smlouvám v portfoliu. Uplatňuje se při stanovení pojistného dle individuálního škodního průběhu.

[1]**Pojistný kmen** je soubor uzavřených pojistných smluv podobného charakteru.

Kolektivní model rizika předpokládá, že pojistný kmen je rizikově dostatečně homogenní, tzn. že výše škodních nároků z jednotlivých pojistných událostí lze považovat za stejně rozdělené náhodné veličiny.

Definice 4.2. Nechť diskrétní náhodná veličina N udává počet nároků daného portfolia v uvažovaném časovém období. Dále nechť spojité náhodné veličiny $X_i, i = 1, 2, \dots, N$, reprezentují výše individuálních škodních nároků (nehledě na to, které smlouvě příslušejí). Potom je úhrn škod kolektivního modelu rizika vyjádřen jako

$$S = \sum_{i=1}^{N} X_i, \quad N = 0, 1, \dots, \tag{4.2}$$

kde X_i jsou IID náhodné veličiny nezávislé na N. Je-li $N = 0$, pak i $S = 0$.

Jsou-li splněny všechny předpoklady předchozí definice, pak má agregovaná škoda S složené rozdělení[2]. N je náhodná veličina primárního rozložení a X_i má sekundární rozložení.

V případě, kdy jsou náhodné veličiny X_i nejen nezávislé, ale též identicky rozdělené, se individuální model rizika stává speciálním případem kolektivního modelu rizika, pro nějž platí, že N má degenerované rozdělení se všemi pravděpodobnostmi soustředěnými v $N = n$, tj. $P(N = n) = 1$.

Kolektivní model rizika je velmi flexibilní, neboť modeluje zvlášť četnost pojistných nároků, resp. počet pojistných událostí N a zvlášť výše pojistných nároků, resp. závažnost jednotlivých pojistných událostí X_i. Proto se na něj v této kapitole zaměříme a podrobně ho prostudujeme.

Naším cílem je najít pravděpodobní rozdělení součtu S a současně určit jeho základní charakteristiky. Dříve, než tak učiníme, se podíváme na rozdělení vhodná pro modelování počtu pojistných událostí a výše pojistných nároků.

[2] S diskrétními složenými rozděleními jsme se seznámili v druhé kapitole.

4.1 Rozdělení počtu pojistných událostí a výše pojistných nároků

Modely počtu pojistných událostí nastalých na pojistném kmeni za stanovenou časovou periodu vycházejí z rozdělení náhodné veličiny N. Diskrétní rozdělení vhodná pro modelování N jsme již důkladně probrali v kapitole 1. Jak už bylo řečeno, při rozhodování mezi těmito pravděpodobnostními rozděleními je velmi užitečné znát vztah mezi střední hodnotou a rozptylem. V případě, že rozptyl počtu pojistných událostí převyšuje střední hodnotu, můžeme k modelování využít směsí Poissonových rozdělení, jež jsou hlavním tématem podkapitoly 3.1.

Nyní zaměříme naši pozornost na modely výše pojistných nároků, jež vycházejí z rozdělení náhodné veličiny $X_i, i = 1, 2, \ldots, N$. Při volbě spojitého pravděpodobnostního rozdělení mějme na paměti nezápornost a kladnou šikmost výše škod, jež je typická v řadě pojistných odvětví (větší četnost škod o malém rozsahu). Z obou uvedených důvodů můžeme vyloučit normální rozdělení.

Definice 4.3. Náhodná veličina X definovaná na $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ je absolutně spojitého typu (je spojitá), jestliže existuje nezáporná integrovatelná funkce f taková, že pro každou borelovskou množinu $B \in \mathcal{B}$ platí

$$P_X(B) = \int_B f_X(x)\mathrm{d}x. \tag{4.3}$$

Funkci f nazýváme pravděpodobnostní hustotou náhodné veličiny X absolutně spojitého typu.

4.1.1 Log-normální rozdělení

Log-normální neboli logaritmicko-normální rozdělení je rozdělením náhodné veličiny $X = \mathrm{e}^Y$, kde $Y \sim N(\mu, \sigma^2)$. Nabývá pouze kladných hodnot, přičemž výskyt středně velkých hodnot je nejpravděpodobnější. Využíváme ho k modelování výše škod v úrazovém, havarijním pojištění atd.

Definice 4.4. Spojitá náhodná veličina X má log-normální rozdělení s parametry $\mu \in \mathbb{R}$ a $\sigma^2 > 0$, píšeme $X \sim LN(\mu, \sigma^2)$, jestliže je její pravděpodobnostní hustota

$$f_X(x) = \begin{cases} \frac{1}{x\sigma\sqrt{2\pi}} \cdot \mathrm{e}^{-\frac{(\ln(x)-\mu)^2}{2\sigma^2}}, & x > 0, \\ 0, & \text{jinak.} \end{cases} \tag{4.4}$$

Distribuční funkce:

$$F_X(x) = \begin{cases} \Phi\Big(\frac{\ln(x)-\mu}{\sigma}\Big), & x > 0, \\ 0, & \text{jinak,} \end{cases} \tag{4.5}$$

kde $\Phi(.)$ je distribuční funkce standardizovaného normálního rozdělení[3].

Nechť $Z = \frac{Y-\mu}{\sigma}$ je standardizovaná normálně rozdělená náhodná veličina, tj. $Z \sim N(0,1)$, pak $Y \sim N(\mu, \sigma^2)$ má moment generující funkci

$$\begin{aligned} M_Y(t) &= \mathrm{E}(\mathrm{e}^{tY}) = \mathrm{E}(\mathrm{e}^{t\cdot(\mu+\sigma Z)}) = \mathrm{E}(\mathrm{e}^{t\mu} \cdot \mathrm{e}^{t\sigma Z}) = \mathrm{e}^{t\mu} \cdot \mathrm{E}(\mathrm{e}^{t\sigma Z}) = \\ &= \mathrm{e}^{t\mu} \cdot M_Z(t\sigma) = \mathrm{e}^{t\mu} \cdot \int_{-\infty}^{\infty} \mathrm{e}^{t\sigma z} \cdot \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \cdot \mathrm{e}^{-\frac{z^2}{2}} \mathrm{d}z = \\ &= \mathrm{e}^{t\mu} \cdot \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \mathrm{e}^{-\frac{1}{2}\cdot(z^2 - 2t\sigma z)} \mathrm{d}z \ \left| z^2 - 2t\sigma z = (z - t\sigma)^2 - (t\sigma)^2 \right| = \\ &= \mathrm{e}^{t\mu} \cdot \mathrm{e}^{\frac{(t\sigma)^2}{2}} \cdot \underbrace{\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \mathrm{e}^{-\frac{(z-t\sigma)^2}{2}} \mathrm{d}z}_{=1} = \mathrm{e}^{t\mu + \frac{t^2\sigma^2}{2}}. \end{aligned}$$

k-tý obecný moment:

$$\mathrm{E}(X^k) = \mathrm{E}\big((\mathrm{e}^Y)^k\big) = \mathrm{E}(\mathrm{e}^{kY}) = M_Y(k) = \mathrm{e}^{k\mu + \frac{k^2\sigma^2}{2}}. \tag{4.6}$$

Střední hodnota a ***rozptyl***:

$$\mathrm{E}(X) = \mathrm{e}^{\mu + \frac{\sigma^2}{2}}, \tag{4.7}$$

[3] $\Phi(u) = \int_{-\infty}^{u} f_U(t)\mathrm{d}t = \int_{-\infty}^{u} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \mathrm{e}^{-\frac{t^2}{2}} \mathrm{d}t$

$$\mathrm{Var}(X) = \mathrm{E}(X^2) - \big(\mathrm{E}(X)\big)^2 = \mathrm{e}^{2\mu+2\sigma^2} - \left(\mathrm{e}^{\mu+\frac{\sigma^2}{2}}\right)^2 = \mathrm{e}^{2\mu+\sigma^2} \cdot \big(\mathrm{e}^{\sigma^2} - 1\big). \quad (4.8)$$

Šikmost:

$$\begin{aligned}\gamma_1 &= \frac{\mathrm{E}\big(\big(X - \mathrm{E}(X)\big)^3\big)}{\big(\mathrm{Var}(X)\big)^{\frac{3}{2}}} = \frac{\mathrm{E}(X^3) - 3 \cdot \mathrm{E}(X^2) \cdot \mathrm{E}(X) + 2 \cdot \big(\mathrm{E}(X)\big)^3}{\big(\mathrm{Var}(X)\big)^{\frac{3}{2}}} = \\ &= \frac{\mathrm{e}^{3\mu+\frac{3}{2}\sigma^2} \cdot \big(\mathrm{e}^{\sigma^2} - 1\big)^2 \cdot \big(\mathrm{e}^{\sigma^2} + 2\big)}{\big(\mathrm{e}^{2\mu+\sigma^2} \cdot \big(\mathrm{e}^{\sigma^2} - 1\big)\big)^{\frac{3}{2}}} = \sqrt{\mathrm{e}^{\sigma^2} - 1} \cdot \big(\mathrm{e}^{\sigma^2} + 2\big).\end{aligned} \quad (4.9)$$

4.1.2 Exponenciální rozdělení

Exponenciální rozdělení jakožto rozdělení o jednom parametru nám umožňuje stanovit výše pojistných nároků nejjednodušším možným způsobem. Není však doporučován k modelování, nasvědčují-li data tomu, že mohou nastat značně vysoké škody s relativně velkou pravděpodobností.

Definice 4.5. Spojitá náhodná veličina X se řídí exponenciálním rozdělením s parametrem $\lambda > 0$, zapisujeme $X \sim Exp(\lambda)$, má-li pravděpodobnostní hustotu ve tvaru

$$f_X(x) = \begin{cases} \lambda \mathrm{e}^{-\lambda x}, & x > 0, \\ 0, & \text{jinak.} \end{cases} \quad (4.10)$$

Distribuční funkce:

$$F_X(x) = \begin{cases} 1 - \mathrm{e}^{-\lambda x}, & x > 0, \\ 0, & \text{jinak.} \end{cases} \quad (4.11)$$

k-tý obecný moment:

$$\begin{aligned}\mathrm{E}(X^k) &= \int_0^\infty x^k \cdot f_X(x)\mathrm{d}x = \int_0^\infty x^k \cdot \lambda \mathrm{e}^{-\lambda x}\mathrm{d}x = \int_0^\infty \frac{\lambda}{\lambda^k} \cdot (\lambda x)^k \cdot \mathrm{e}^{-\lambda x}\mathrm{d}x \\ &\Big|\text{subst.: } \lambda x = u; \lambda \mathrm{d}x = \mathrm{d}u\Big| = \frac{1}{\lambda^k}\int_0^\infty u^k \mathrm{e}^{-u}\mathrm{d}u \overset{k>-1}{=} \frac{\Gamma(k+1)}{\lambda^k} \overset{k\in\mathbb{N}}{=} \frac{k!}{\lambda^k}.\end{aligned} \quad (4.12)$$

Střední hodnota a ***rozptyl***:

$$\mathrm{E}(X) = \frac{1}{\lambda}, \tag{4.13}$$

$$\mathrm{Var}(X) = \mathrm{E}(X^2) - \big(\mathrm{E}(X)\big)^2 = \frac{2}{\lambda^2} - \frac{1}{\lambda^2} = \frac{1}{\lambda^2}. \tag{4.14}$$

Šikmost:

$$\gamma_1 = \frac{\mathrm{E}\big(\big(X - \mathrm{E}(X)\big)^3\big)}{\big(\mathrm{Var}(X)\big)^{\frac{3}{2}}} = \frac{\frac{2}{\lambda^3}}{\big(\frac{1}{\lambda^2}\big)^{\frac{3}{2}}} = \frac{\frac{2}{\lambda^3}}{\frac{1}{\lambda^3}} = 2. \tag{4.15}$$

Koeficient šikmosti je vždy roven 2, nemění se v závislosti na parametru λ.

Poznámka. Jestliže jsou $X_1^*, X_2^*, \ldots, X_\alpha^*$ nezávislé náhodné veličiny se stejným exponenciálním rozdělením o parametru $\lambda = \frac{1}{\beta}$, potom náhodná veličina $X = \sum_{j=1}^{\alpha} X_j^*$ má gamma rozdělení s parametry α a β.

4.1.3 Gamma rozdělení

Pro modelování závažností pojistných událostí je gamma rozdělení oproti exponenciálnímu flexibilnější díky tomu, že tvar jeho hustoty závisí na dvou parametrech. Nicméně, stejně jako v případě exponenciálního rozdělení, jím nelze modelovat extrémní hodnoty.

Definice 4.6. Spojitá náhodná veličina X má gamma rozdělení s parametry[4] $\alpha > 0$ a $\beta > 0$, píšeme $X \sim Gam(\alpha, \beta)$, je-li její pravděpodobnostní hustota

$$f_X(x) = \begin{cases} \frac{x^{\alpha-1} \cdot \mathrm{e}^{-\frac{x}{\beta}}}{\Gamma(\alpha) \cdot \beta^\alpha}, & x > 0, \\ 0, & \text{jinak}, \end{cases} \tag{4.16}$$

kde $\Gamma(\alpha) = \int_0^\infty x^{\alpha-1} \cdot \mathrm{e}^{-x} \mathrm{d}x$ je gamma funkce.

Uveďme si nejčastěji používané vlastnosti gamma funkce:

$$\Gamma(\alpha) = (\alpha - 1)! \quad \text{pro } \alpha \in \mathbb{N},$$
$$\Gamma(\alpha + 1) = \alpha \cdot \Gamma(\alpha).$$

[4]Pro $\alpha = 1$ získáme exponenciální rozdělení s hustotou $f_X(x) = \frac{1}{\beta} \cdot \mathrm{e}^{-\frac{x}{\beta}}$, kde $\frac{1}{\beta} = \lambda$.

Distribuční funkce:

$$F_X(x) = \begin{cases} \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \cdot \gamma\big(\alpha, \frac{x}{\beta}\big), & x > 0, \\ 0, & \text{jinak,} \end{cases} \tag{4.17}$$

kde $\gamma(\alpha, x) = \int_0^x t^{\alpha-1} \cdot \mathrm{e}^{-t} \mathrm{d}t$ se nazývá neúplná gamma funkce.

k-tý obecný moment:

$$\begin{aligned} \mathrm{E}(X^k) &= \int_0^\infty x^k \cdot \frac{x^{\alpha-1} \cdot \mathrm{e}^{-\frac{x}{\beta}}}{\Gamma(\alpha) \cdot \beta^\alpha} \mathrm{d}x \ \left| \text{subst.: } y = \frac{x}{\beta}; \mathrm{d}y = \frac{1}{\beta}\mathrm{d}x \right| = \\ &= \int_0^\infty (y\beta)^k \cdot \frac{(y\beta)^{\alpha-1} \cdot \mathrm{e}^{-y}}{\Gamma(\alpha) \cdot \beta^\alpha} \cdot \beta \mathrm{d}y = \frac{\beta^k}{\Gamma(\alpha)} \int_0^\infty y^{k+\alpha-1} \cdot \mathrm{e}^{-y} \mathrm{d}y \overset{k>-\alpha}{=} \\ &\overset{k>-\alpha}{=} \frac{\beta^k \cdot \Gamma(k+\alpha)}{\Gamma(\alpha)} \overset{k\in\mathbb{N}}{=} \beta^k \cdot (\alpha+k-1) \cdot \ldots \cdot \alpha. \end{aligned} \tag{4.18}$$

Střední hodnota a ***rozptyl***:

$$\mathrm{E}(X) = \alpha\beta, \tag{4.19}$$

$$\mathrm{Var}(X) = \mathrm{E}(X^2) - \big(\mathrm{E}(X)\big)^2 = \beta^2(\alpha+1)\alpha - \alpha^2\beta^2 = \alpha\beta^2. \tag{4.20}$$

Šikmost:

$$\gamma_1 = \frac{\mathrm{E}\Big(\big(X - \mathrm{E}(X)\big)^3\Big)}{\big(\mathrm{Var}(X)\big)^{\frac{3}{2}}} = \frac{2\alpha\beta^3}{\big(\alpha\beta^2\big)^{\frac{3}{2}}} = \frac{2}{\sqrt{\alpha}}. \tag{4.21}$$

4.1.4 Paretovo rozdělení

Paretovo rozdělení používáme k popisu rozdělení s odlehlými extrémními hodnotami škod, např. v požárním pojištění dřevěných budov aj.

Definice 4.7. Spojitá náhodná veličina X se řídí Paretovým rozdělením s parametry $\alpha > 0$ a $\lambda > 0$, zapisujeme $X \sim Par(\alpha, \lambda)$, jestliže lze její pravděpodobnostní hustotu psát ve tvaru

$$f_X(x) = \begin{cases} \frac{\alpha^\lambda \lambda}{x^{\lambda+1}}, & x \geq \alpha, \\ 0, & \text{jinak.} \end{cases} \tag{4.22}$$

Distribuční funkce:

$$F_X(x) = \begin{cases} 1 - \left(\frac{\alpha}{x}\right)^{\lambda}, & x \geq \alpha, \\ 0, & \text{jinak.} \end{cases} \tag{4.23}$$

Paretovo rozdělení je rozdělením náhodné veličiny $X = \alpha \mathrm{e}^Y$, kde náhodná veličina $Y \sim Exp(\lambda)$. Distribuční funkce Y je $F_Y(y) = P(Y \leq y) = 1 - \mathrm{e}^{-\lambda y}$. Ověřme, že distribuční funkce X je skutečně dána ve tvaru (4.23)

$$\begin{aligned} F_X(x) &= P(X \leq x) = P\big(\alpha \mathrm{e}^Y \leq x\big) = P\big(\ln(\alpha \mathrm{e}^Y) \leq \ln(x)\big) = \\ &= P\big(\ln(\alpha) + Y \leq \ln(x)\big) = P\big(Y \leq \ln(x) - \ln(\alpha)\big) = \\ &= P\Big(Y \leq \ln\Big(\frac{x}{\alpha}\Big)\Big) = 1 - \mathrm{e}^{-\lambda \cdot \ln(\frac{x}{\alpha})} = 1 - \Big[\mathrm{e}^{\ln(\frac{x}{\alpha})}\Big]^{-\lambda} = 1 - \Big(\frac{\alpha}{x}\Big)^{\lambda}. \end{aligned}$$

k-tý obecný moment:

$$\begin{aligned} \mathrm{E}(X^k) &= \int_\alpha^\infty x^k \cdot \frac{\alpha^\lambda \lambda}{x^{\lambda+1}} \mathrm{d}x = \alpha^\lambda \lambda \int_\alpha^\infty x^{k-\lambda-1} \mathrm{d}x = \\ &= \alpha^\lambda \lambda \left[\frac{x^{k-\lambda}}{k-\lambda}\right]_\alpha^\infty = \begin{cases} \frac{\alpha^k \lambda}{\lambda - k}, & \lambda > k, \\ \infty, & \text{jinak.} \end{cases} \end{aligned} \tag{4.24}$$

Střední hodnota a ***rozptyl***:

$$\mathrm{E}(X) = \begin{cases} \frac{\alpha\lambda}{\lambda-1}, & \lambda > 1, \\ \infty, & \text{jinak,} \end{cases} \tag{4.25}$$

$$\begin{aligned} \mathrm{Var}(X) &= \mathrm{E}(X^2) - \big(\mathrm{E}(X)\big)^2 = \frac{\alpha^2\lambda}{\lambda-2} - \frac{\alpha^2\lambda^2}{(\lambda-1)^2} = \\ &= \frac{\alpha^2\lambda}{(\lambda-1)^2 \cdot (\lambda-2)} \quad \text{pro } \lambda > 2. \end{aligned} \tag{4.26}$$

Ve srovnání s exponenciálním rozdělením klesá hustota Paretova rozdělení k nule pomaleji pro $x \to \infty$. Jeho střední hodnota je konečná jen pro $\lambda > 1$ a jeho rozptyl je konečný pouze pro $\lambda > 2$.

Šikmost:

$$\gamma_1 = \frac{\mathrm{E}\Big(\big(X-\mathrm{E}(X)\big)^3\Big)}{\big(\mathrm{Var}(X)\big)^{\frac{3}{2}}} = \frac{\frac{2\alpha^3\lambda(\lambda+1)}{(\lambda-1)^3\cdot(\lambda-2)\cdot(\lambda-3)}}{\Big(\frac{\alpha^2\lambda}{(\lambda-1)^2\cdot(\lambda-2)}\Big)^{\frac{3}{2}}} = \frac{2(\lambda+1)}{\lambda-3}\cdot\sqrt{\frac{\lambda-2}{\lambda}} \quad \text{pro } \lambda > 3. \tag{4.27}$$

4.1.5 Weibullovo rozdělení

Definice 4.8. Spojitá náhodná veličina X má Weibullovo rozdělení s parametry $\beta > 0$ a $\delta > 0$, zapisujeme $X \sim Wei(\beta,\delta)$, jestliže má pravděpodobnostní hustotu

$$f_X(x) = \begin{cases} \frac{\delta\cdot(\frac{x}{\beta})^\delta\cdot \mathrm{e}^{-(\frac{x}{\beta})^\delta}}{x}, & x > 0,\\ 0, & \text{jinak.}\end{cases} \tag{4.28}$$

Distribuční funkce:

$$F_X(x) = \begin{cases} 1-\mathrm{e}^{-(\frac{x}{\beta})^\delta}, & x > 0,\\ 0, & \text{jinak.}\end{cases} \tag{4.29}$$

k-tý obecný moment:

$$\begin{aligned}\mathrm{E}(X^k) &= \int_0^\infty x^k\cdot\frac{\delta\cdot(\frac{x}{\beta})^\delta\cdot\mathrm{e}^{-(\frac{x}{\beta})^\delta}}{x}\mathrm{d}x = \delta\int_0^\infty x^{k-1}\cdot\Big(\frac{x}{\beta}\Big)^\delta\cdot\mathrm{e}^{-(\frac{x}{\beta})^\delta}\mathrm{d}x \\ &\left|\text{subst.: }\Big(\frac{x}{\beta}\Big)^\delta = y \Leftrightarrow x = \beta y^{\frac{1}{\delta}};\ \frac{\delta}{\beta}\Big(\frac{x}{\beta}\Big)^{\delta-1}\mathrm{d}x = \mathrm{d}y \Leftrightarrow \mathrm{d}x = \frac{\beta}{\delta}\Big(\frac{\beta}{x}\Big)^{\delta-1}\mathrm{d}y\right| = \\ &= \int_0^\infty \beta^{k-1}\cdot y^{\frac{k-1}{\delta}}\cdot y\cdot\mathrm{e}^{-y}\cdot\beta\cdot\left(\frac{1}{y^{\frac{1}{\delta}}}\right)^{\delta-1}\mathrm{d}y = \beta^k\int_0^\infty y^{\frac{k-1+\delta}{\delta}-\frac{\delta-1}{\delta}}\cdot\mathrm{e}^{-y}\mathrm{d}y = \\ &= \beta^k\int_0^\infty y^{\frac{k}{\delta}}\cdot\mathrm{e}^{-y}\mathrm{d}y = \beta^k\cdot\Gamma\Big(\frac{k}{\delta}+1\Big) \quad \text{pro } k > -\delta.\end{aligned} \tag{4.30}$$

Střední hodnota a ***rozptyl***:

$$\mathrm{E}(X) = \beta\cdot\Gamma\Big(\frac{1}{\delta}+1\Big), \tag{4.31}$$

$$\mathrm{Var}(X) = \mathrm{E}(X^2) - \big(\mathrm{E}(X)\big)^2 = \beta^2 \cdot \left[\Gamma\left(\frac{2}{\delta}+1\right) - \left[\Gamma\left(\frac{1}{\delta}+1\right)\right]^2\right]. \qquad (4.32)$$

Šikmost:

$$\gamma_1 = \frac{\mathrm{E}\big(\big(X-\mathrm{E}(X)\big)^3\big)}{\big(\mathrm{Var}(X)\big)^{\frac{3}{2}}} = \frac{\beta^3 \cdot \Big[\Gamma\big(\frac{3}{\delta}+1\big) - 3\Gamma\big(\frac{2}{\delta}+1\big)\Gamma\big(\frac{1}{\delta}+1\big) + 2\big[\Gamma\big(\frac{1}{\delta}+1\big)\big]^3\Big]}{\beta^3 \cdot \Big[\Gamma\big(\frac{2}{\delta}+1\big) - \big[\Gamma\big(\frac{1}{\delta}+1\big)\big]^2\Big]^{\frac{3}{2}}} =$$
$$= \frac{\Gamma\big(\frac{3}{\delta}+1\big) - 3\Gamma\big(\frac{2}{\delta}+1\big)\Gamma\big(\frac{1}{\delta}+1\big) + 2\big[\Gamma\big(\frac{1}{\delta}+1\big)\big]^3}{\Big[\Gamma\big(\frac{2}{\delta}+1\big) - \big[\Gamma\big(\frac{1}{\delta}+1\big)\big]^2\Big]^{\frac{3}{2}}}. \qquad (4.33)$$

4.2 Model agregovaných škod

Na základě nabytých vědomostí o rozdělení počtu nároků a výše nároků si nyní odvodíme rozdělení celkové škody z těchto pojistných nároků.

Připomeňme si, že pokud jsou splněny všechny předpoklady definice 4.2, pak má $S = \sum_{i=1}^{N} X_i$, kde $N = 0, 1, \ldots$, složené rozdělení. Název složeného rozdělení závisí na tom, jakým rozdělením se řídí náhodná veličina N, např. má-li N Poissonovo rozdělení, pak má S složené Poissonovo rozdělení apod.

4.2.1 Distribuční, generující, charakteristická a moment generující funkce

Definice 4.9. Nechť $\{X_i\}_{i=1}^{n}$ je posloupnost nezávislých a identicky rozdělených náhodných veličin se společnou distribuční funkcí $F_X(x) = P(X \le x)$. Pak se distribuční funkce $F_X^{*n}(x)$ součtu $X_1 + X_2 + \cdots + X_n$ nazývá n-násobná konvoluce distribuční funkce $F_X(x)$:

$$F_X^{*n}(x) = P(X_1 + X_2 + \cdots + X_n \le x) \quad \text{pro } x \ge 0. \qquad (4.34)$$

Náhodný součet $S = X_1 + X_2 + \cdots + X_N$ má distribuční funkci

$$\begin{aligned} F_S(x) = P(S \leq x) = \sum_{n=0}^{\infty} P(S \leq x | N = n) \cdot P(N = n) = \\ = \sum_{n=0}^{\infty} P(X_1 + X_2 + \cdots + X_N \leq x | N = n) \cdot P(N = n) = \\ = \sum_{n=0}^{\infty} P(X_1 + X_2 + \cdots + X_n \leq x) \cdot P(N = n) = \\ = \sum_{n=0}^{\infty} F_X^{*n}(x) \cdot p_N(n), \end{aligned} \tag{4.35}$$

kde $F_X^{*n}(x)$ je n-násobná konvoluce $F_X(x)$.

Platí

$$F_X^{*0}(x) = \begin{cases} 0, & x < 0, \\ 1, & x \geq 0, \end{cases} \tag{4.36}$$

$$F_X^{*k}(x) = \int_{-\infty}^{\infty} F_X^{*(k-1)}(x-y) \mathrm{d}F_X(y) \quad \text{pro } k = 1, 2, \ldots \tag{4.37}$$

Jestliže $X : \Omega \to [0, \infty)$ je spojitá náhodná veličina s hustotou $f_X(x)$, pak můžeme přepsat (4.37) na

$$F_X^{*k}(x) = \int_0^x F_X^{*(k-1)}(x-y) \cdot f_X(y) \mathrm{d}y, \quad k = 2, 3, \ldots, \tag{4.38}$$

pro $k = 1$ se $F_X^{*1}(x) = F_X(x)$. Derivováním obdržíme

$$f_X^{*k}(x) = \int_0^x f_X^{*(k-1)}(x-y) \cdot f_X(y) \mathrm{d}y, \quad k = 2, 3, \ldots, \tag{4.39}$$

pro $k = 1$ se $f_X^{*1}(x) = f_X(x)$.

Pravděpodobnostní hustotu úhrnu škod S pro spojitou výši individuálního nároku vypočítáme jako

$$f_S(x) = \sum_{n=1}^{\infty} f_X^{*n}(x) \cdot p_N(n), \quad x > 0. \tag{4.40}$$

V praxi bývá výše nároku vyjádřena v peněžních jednotkách, v nezáporných celočíselných hodnotách. Tudíž, je-li $X : \Omega \to \{0, 1, \dots\}$ diskrétní náhodná veličina s pravděpodobnostní funkcí $p_X(x)$, potom

$$F_X^{*k}(x) = \sum_{y=0}^{x} F_X^{*(k-1)}(x-y) \cdot p_X(y), \quad k = 2, 3, \dots, \tag{4.41}$$

$$p_X^{*k}(x) = \sum_{y=0}^{x} p_X^{*(k-1)}(x-y) \cdot p_X(y), \quad k = 2, 3, \dots \tag{4.42}$$

Pro případ, že $k = 1$ máme $F_X^{*1}(x) = F_X(x)$ a $p_X^{*1}(x) = p_X(x)$.

Pravděpodobnostní funkce náhodné veličiny S pro diskrétní výši individuálního nároku je dána[5]

$$p_S(x) = P(S = x) = \sum_{n=0}^{\infty} p_X^{*n}(x) \cdot p_N(n), \quad x = 0, 1, \dots, \tag{4.43}$$

kde $p_X^{*n}(x) = P(X_1 + X_2 + \dots + X_n = x)$ je n-tá konvoluce pravděpodobnostní funkce $p_X(x)$ náhodné veličiny X a

$$p_X^{*0}(x) = \begin{cases} 0, & x \neq 0, \\ 1, & x = 0. \end{cases} \tag{4.44}$$

Následující věta zobecňuje větu 2.6 – sekundární rozdělení nemusí být jen diskrétního, ale může být i spojitého typu.

Věta 4.10. *Nechť jsou $S_1, S_2, \dots, S_n$ vzájemně nezávislé náhodné veličiny a S_j má složené Poissonovo rozdělení s Poissonovým parametrem λ_j pro primární rozdělení a s distribuční funkcí $F_j(x), j = 1, 2, \dots, n$, pro sekundární rozdělení. Potom $S = S_1 + S_2 + \dots + S_n$ má složené Poissonovo rozdělení s parametrem $\lambda = \lambda_1 + \lambda_2 + \dots + \lambda_n$ a distribuční funkcí*

$$F_S(x) = \sum_{j=1}^{n} \frac{\lambda_j}{\lambda} F_j(x). \tag{4.45}$$

[5] Je-li $x = 0$, pak $p_S(0) = p_N(0)$.

Důkaz. Nechť $M_j(t)$ je moment generující funkce sekundárního rozdělení s distribuční funkcí $F_j(x)$ pro $j = 1, 2, \ldots, n$. Potom S_j, jež se řídí složeným Poissonovým rozdělením, má dle (2.14) moment generující funkci

$$M_{S_j}(t) = \mathrm{E}(\mathrm{e}^{tS_j}) = \mathrm{e}^{\lambda_j \cdot (M_j(t)-1)}.$$

Vzhledem k nezávislosti náhodných veličin S_j platí

$$\begin{aligned} M_S(t) &= \mathrm{E}(\mathrm{e}^{tS}) = \mathrm{E}\big(\mathrm{e}^{t\cdot(S_1+S_2+\cdots+S_n)}\big) = \mathrm{E}(\mathrm{e}^{tS_1}) \cdot \mathrm{E}(\mathrm{e}^{tS_2}) \cdot \ldots \cdot \mathrm{E}(\mathrm{e}^{tS_n}) = \\ &= \prod_{j=1}^{n} \mathrm{E}(\mathrm{e}^{tS_j}) = \prod_{j=1}^{n} M_{S_j}(t) = \prod_{j=1}^{n} \mathrm{e}^{\lambda_j \cdot (M_j(t)-1)} = \\ &= \mathrm{e}^{\left[\sum_{j=1}^{n} \lambda_j \cdot M_j(t)\right] - \lambda} = \mathrm{e}^{\lambda \cdot \left\{\left[\sum_{j=1}^{n} \frac{\lambda_j}{\lambda} \cdot M_j(t)\right] - 1\right\}}. \end{aligned}$$

Poněvadž $\sum_{j=1}^{n} \frac{\lambda_j}{\lambda} \cdot M_j(t)$ je moment generující funkce rozdělení s distribuční funkcí $F_S(x) = \sum_{j=1}^{n} \frac{\lambda_j}{\lambda} F_j(x)$, pak $M_S(t)$ je moment generující funkcí složeného Poissonova rozdělení. Dokazované tvrzení tedy plyne z jednoznačnosti vztahu mezi moment generující funkcí a rozdělením pravděpodobnosti. ∎

Tato věta nám umožňuje nahradit součet škodních úhrnů n vzájemně nezávislých souborů pojistných smluv, z nichž každý je charakterizován jiným rozdělením výší nároků a jiným parametrem Poissonova rozdělení počtu nároků, jediným složeným Poissonovým rozdělením se společnou distribuční funkcí výší pojistných nároků.

Pokud je výše individuálního nároku diskrétního typu, pak je i celkový pojistný nárok S diskrétní. Za předpokladu, že jsou výše individuálních nároků $X_1, X_2, \ldots, X_n$ (pro pevné n) nezávislé a stejně rozdělené a dále, že nezávisejí na počtu nároků N, lze obdobně jako v kapitole 2 získat generující funkci celkového pojistného nároku

$$G_S(s) = G_N\big(G_X(s)\big). \tag{4.46}$$

Uvažujeme-li náhodnou veličinu N, která má sama o sobě složené rozdělení, tj. $G_N(s) = G_1(G_2(s))$, potom

$$G_S(s) = G_1\Big(G_2\big(G_X(s)\big)\Big). \tag{4.47}$$

Někdy je použití charakteristické funkce praktičtější

$$\varphi_S(s) = \mathrm{E}(\mathrm{e}^{isS}) = G_N\big(\varphi_X(s)\big). \tag{4.48}$$

Z (2.9) a (1.1) je evidentní

$$M_S(t) = \mathrm{E}\big([M_X(t)]^N\big) = G_N\big(M_X(t)\big). \tag{4.49}$$

4.2.2 Číselné charakteristiky

Číselné charakteristiky kolektivního rizika lze vyjádřit pomocí charakteristik náhodných veličin primárního a sekundárního rozložení.

Střední hodnotu a rozptyl náhodné veličiny S lze vypočítat pomocí vlastnosti podmíněné střední hodnoty S za podmínky $N = n$, jak jsme mohli vidět v 2. kapitole. Můžeme je též odvodit využitím (4.49), (1.3) a (1.6):

$$\mathrm{E}(S) = M_S'(0) = G_N'\big(M_X(t)\big) \cdot M_X'(t)\big|_{t=0} = G_N'(1) \cdot M_X'(0) = \mathrm{E}(N) \cdot \mathrm{E}(X), \tag{4.50}$$

$$\begin{aligned}
\mathrm{Var}(S) &= \mathrm{E}(S^2) - \big[\mathrm{E}(S)\big]^2 = M_S''(0) - \big[\mathrm{E}(S)\big]^2 = \\
&= \Big[G_N''\big(M_X(t)\big) \cdot \big[M_X'(t)\big]^2 + G_N'\big(M_X(t)\big) \cdot M_X''(t)\Big]\Big|_{t=0} - \big[\mathrm{E}(S)\big]^2 = \\
&= G_N''(1) \cdot \big[M_X'(0)\big]^2 + G_N'(1) \cdot M_X''(0) - \big[\mathrm{E}(N) \cdot \mathrm{E}(X)\big]^2 = \\
&= \mathrm{E}(N^2 - N) \cdot \big[\mathrm{E}(X)\big]^2 + \mathrm{E}(N) \cdot \mathrm{E}(X^2) - \big[\mathrm{E}(N)\big]^2 \cdot \big[\mathrm{E}(X)\big]^2 = \\
&= \mathrm{E}(N^2)\big[\mathrm{E}(X)\big]^2 - \mathrm{E}(N)\big[\mathrm{E}(X)\big]^2 + \mathrm{E}(N)\mathrm{E}(X^2) - \big[\mathrm{E}(N)\big]^2\big[\mathrm{E}(X)\big]^2 = \\
&= \mathrm{E}(N) \cdot \big\{\mathrm{E}(X^2) - \big[\mathrm{E}(X)\big]^2\big\} + \big[\mathrm{E}(X)\big]^2 \cdot \big\{\mathrm{E}(N^2) - \big[\mathrm{E}(N)\big]^2\big\} = \\
&= \mathrm{E}(N) \cdot \mathrm{Var}(X) + \big[\mathrm{E}(X)\big]^2 \cdot \mathrm{Var}(N).
\end{aligned} \tag{4.51}$$

Rozptyl celkového pojistného nároku je tvořen dvěma složkami – první je odvozena od rozptylu výše individuálního nároku a druhá odpovídá rozptylu počtu nároků.

4.2.3 Aproximace rozdělení škodního úhrnu

Nalezení distribuční funkce, příp. pravděpodobnostní hustoty náhodné veličiny S není tak jednoduchý úkol, jak by se nám mohlo na první pohled zdát. Výpočetní obtíže způsobuje právě n-tá konvoluce rozdělení výše individuálních škod.

Jedním ze způsobů, jak stanovit rozdělení pravděpodobnosti kolektivního rizika a jak se současně vyhnout přímému výpočtu $F_S(x)$, je použít aproximace, jež spočívají v přiblížení rozdělení náhodné veličiny S některým známým rozdělením se shodnými prvními dvěma či třemi momenty.

Výhodou aproximace je její snadná aplikace. Neexistuje však nic, co by nás utvrdilo v tom, že námi zvolené aproximační rozdělení je skutečně to nejvhodnější. Různá aproximační rozdělení totiž mohou vést k různým výsledkům, což se projeví hlavně na pravém chvostu rozdělení.

Soustředíme se na aproximaci normálním, posunutým log-normálním a gamma rozdělením. O Gram-Charlierově, Edgeworthově a Esscherově aproximaci se můžeme dočíst v [16].

Aproximace normálním (Gaussovým) rozdělením

Mějme $\mathrm{E}(S) = \mu_S$ střední hodnotu a $\mathrm{Var}(S) = \sigma_S^2$ rozptyl kolektivního rizika S. Jelikož $S = \sum_{i=1}^{N} X_i$ je součet IID náhodných veličin X_i, jako úplně první možnost se nám nabízí aproximace normálním rozdělením podle centrální limitní věty.

Přibližné vyjádření distribuční funkce náhodného součtu S je tímto

$$P(S \leq x) = P\left(\frac{S - \mu_S}{\sigma_S} \leq \frac{x - \mu_S}{\sigma_S}\right) \doteq \Phi\left(\frac{x - \mu_S}{\sigma_S}\right), \tag{4.52}$$

kde $\Phi(.)$ je distribuční funkce standardizovaného normálního rozdělení.

Hustota normálního rozdělení je symetrická vzhledem k nulové šikmosti a její pravý konec konverguje k nule velmi rychle. Z čehož plyne, že aproximace rozdělení úhrnu škod normálním rozdělením není úplně ideální. V praxi se spíše setkáváme s kladně asymetrickými rozděleními, jejichž pravá strana hustoty klesá k ose x pomaleji.

Gaussovo rozdělení má tendenci podhodnocovat hodnoty $P(S > x)$ pro velká x, pojišťovny ale musí počítat s tím, že by mohly nastat vysoké škody s relativně vysokou pravděpodobností.

Aproximace gamma rozdělením

Označme $\mathrm{E}(S) = \mu_S$, $\mathrm{Var}(S) = \sigma_S^2$ a mějme kladnou šikmost $\gamma_{1_S} = \frac{\mathrm{E}(S-\mu_S)^3}{\sigma_S^3} > 0$.

Nechť Y je náhodná veličina řídící se gamma rozdělením $Gam(\alpha, 1)$, tj.

$$f_Y(y) = \frac{y^{\alpha-1} \cdot \mathrm{e}^{-y}}{\Gamma(\alpha)}, \quad \alpha > 0, y > 0.$$

Pak jsou její střední hodnota a rozptyl (z (4.19) a (4.20)):

$$\mathrm{E}(Y) = \alpha, \tag{4.53}$$

$$\mathrm{Var}(Y) = \alpha. \tag{4.54}$$

Přiblížíme-li rozdělení náhodné veličiny $\frac{S-\mu_S}{\sigma_S}$ rozdělením náhodné veličiny $\frac{Y-\mathrm{E}(Y)}{\sqrt{\mathrm{Var}(Y)}} = \frac{Y-\alpha}{\sqrt{\alpha}}$, obdržíme distribuční funkci

$$P\left(\frac{S-\mu_S}{\sigma_S} \leq z\right) \doteq P\left(\frac{Y-\alpha}{\sqrt{\alpha}} \leq z\right) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int\limits_0^{\alpha+\sqrt{\alpha}\cdot z} y^{\alpha-1} \cdot \mathrm{e}^{-y} \mathrm{d}y. \tag{4.55}$$

Obě veličiny $\frac{S-\mu_S}{\sigma_S}$ a $\frac{Y-\alpha}{\sqrt{\alpha}}$ mají nulovou střední hodnotu a jednotkový rozptyl.

Nyní určíme parametr α tak, aby se shodovala i šikmost. Musí platit[6]

$$\frac{\mathrm{E}\big((Y-\mathrm{E}(Y))^3\big)}{\big(\mathrm{Var}(Y)\big)^{\frac{3}{2}}} = \frac{\mathrm{E}\big((Y-\alpha)^3\big)}{\alpha^{\frac{3}{2}}} = \frac{2}{\sqrt{\alpha}} = \gamma_{1_S}.$$

Odsud

$$\alpha = \frac{4}{\gamma_{1_S}^2}.$$

V (4.55) nahradíme z výrazem $\frac{x-\mu_S}{\sigma_S}$ a dostaneme aproximativní vyjádření distribuční funkce S

[6] Šikmost náhodné veličiny $Y \sim Gam(\alpha, 1)$ získáme z (4.21).

$$P(S \leq x) \doteq \frac{1}{\Gamma\left(\frac{4}{\gamma_{1_S}^2}\right)} \int\limits_0^{\frac{4}{\gamma_{1_S}^2}+\frac{2}{\gamma_{1_S}}\cdot\frac{x-\mu_S}{\sigma_S}} y^{\frac{4}{\gamma_{1_S}^2}-1} \cdot \mathrm{e}^{-y} \mathrm{d}y. \tag{4.56}$$

Aproximace posunutým log-normálním rozdělením

Uvažujme náhodnou veličinu $Y = \alpha + \mathrm{e}^Z$, kde $Z \sim N(\mu, \sigma^2)$ a $\alpha \in \mathbb{R}$. Její rozptyl a střední hodnotu[7] získáme pomocí (4.6):

$$\mathrm{E}(Y) = \mathrm{E}(\alpha + \mathrm{e}^Z) = \alpha + \mathrm{e}^{\mu+\frac{\sigma^2}{2}}, \tag{4.57}$$

$$\mathrm{Var}(Y) = \mathrm{Var}(\alpha + \mathrm{e}^Z) = \mathrm{E}(\mathrm{e}^{2Z}) - \big(\mathrm{E}(\mathrm{e}^Z)\big)^2 = \mathrm{e}^{2\mu+\sigma^2} \cdot \big(\mathrm{e}^{\sigma^2} - 1\big). \tag{4.58}$$

Šikmosti náhodné veličiny Y odpovídá přesně (4.9):

$$\frac{\mathrm{E}\Big(\big(Y - \mathrm{E}(Y)\big)^3\Big)}{\big(\mathrm{Var}(Y)\big)^{\frac{3}{2}}} = \sqrt{\mathrm{e}^{\sigma^2} - 1} \cdot \big(\mathrm{e}^{\sigma^2} + 2\big). \tag{4.59}$$

Parametr α posouvá log-normální rozdělení po ose x, nemá proto vliv na jeho zešikmení a v (4.59) se nevyskytuje.

Přiblížení rozdělení agregované škody S posunutým log-normálním rozdělením realizujeme tak, že nahradíme rozdělení náhodné veličiny $\frac{S-\mu_S}{\sigma_S}$ rozdělením náhodné veličiny Y s volbou parametrů α, μ a σ^2 tak, aby platilo

$$\begin{aligned} \mathrm{E}(Y) &= 0, \\ \mathrm{Var}(Y) &= 1, \\ \frac{\mathrm{E}\Big(\big(Y - \mathrm{E}(Y)\big)^3\Big)}{\big(\mathrm{Var}(Y)\big)^{\frac{3}{2}}} &= \gamma_{1_S}. \end{aligned}$$

Prohlasme $r = \mathrm{e}^{\sigma^2}$.

[7]Nechť X je náhodná veličina definovaná na pravděpodobnostním prostoru $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ s konečnými druhými momenty a nechť $a_1, a_2 \in \mathbb{R}$. Pak $\mathrm{E}(a_1 + a_2X) = a_1 + a_2\mathrm{E}(X)$ a $\mathrm{Var}(a_1 + a_2X) = a_2^2\mathrm{Var}(X)$.

Z prvních dvou podmínek, (4.57) a (4.58) máme

$$
\begin{aligned}
0 &= \alpha + \sqrt{r} \cdot \mathrm{e}^{\mu}, \\
1 &= r \cdot (r-1) \cdot \mathrm{e}^{2\mu}.
\end{aligned}
$$

Z rovnic vyjádříme parametry α, μ v závislosti na r

$$
\mu = \ln\left(\sqrt{\frac{1}{r \cdot (r-1)}}\right), \tag{4.60}
$$

$$
\alpha = -\sqrt{r} \cdot \mathrm{e}^{\mu} = -\sqrt{\frac{1}{r-1}}. \tag{4.61}
$$

Parametr σ určíme z třetí podmínky a (4.59), řešíme

$$
\begin{aligned}
\sqrt{r-1} \cdot (r+2) &= \gamma_{1_S} \\
(r-1) \cdot (r+2)^2 - \gamma_{1_S}^2 &= 0 \\
r^3 + 3r^2 - 4 - \gamma_{1_S}^2 &= 0.
\end{aligned} \tag{4.62}
$$

Tato rovnice je kubickou rovnicí o jednom reálném kořeni a dvou komplexně sdružených kořenech.

Věta 4.11. (Cardanovy vzorce) *Kubický polynom $ax^3 + bx^2 + cx + d = 0$, kde $a \neq 0$, má řešení*

$$
x_1 = S + T - \frac{b}{3a}, \tag{4.63}
$$

$$
x_{2,3} = -\frac{S+T}{2} - \frac{b}{3a} \pm \frac{i\sqrt{3} \cdot (S-T)}{2}, \tag{4.64}
$$

kde $S = \sqrt[3]{R + \sqrt{R^2 + Q^3}}, T = \sqrt[3]{R - \sqrt{R^2 + Q^3}}$ *a* $R = \frac{9abc - 27a^2d - 2b^3}{54a^3}$, $Q = \frac{3ac - b^2}{9a^2}$.

Důkaz. Viz [3]. ■

Pokračujme v řešení kubické rovnice dle výše uvedené věty

$$\begin{aligned}
&a = 1, b = 3, c = 0, d = -4 - \gamma_{1_S}^2,\\
&R = \frac{-27 \cdot (-4 - \gamma_{1_S}^2) - 2 \cdot 27}{54} = \frac{54 + 27\gamma_{1_S}^2}{54} = 1 + \frac{\gamma_{1_S}^2}{2},\\
&Q = \frac{-3^2}{9} = -1,\\
&S = \sqrt[3]{1 + \frac{\gamma_{1_S}^2}{2} + \sqrt{\left(1 + \frac{\gamma_{1_S}^2}{2}\right)^2 - 1}},\\
&T = \sqrt[3]{1 + \frac{\gamma_{1_S}^2}{2} - \sqrt{\left(1 + \frac{\gamma_{1_S}^2}{2}\right)^2 - 1}}.
\end{aligned}$$

Z Cardanova vzorce (4.63) dopočítáme reálný kořen

$$r = \sqrt[3]{1 + \frac{\gamma_{1_S}^2}{2} + \sqrt{\left(1 + \frac{\gamma_{1_S}^2}{2}\right)^2 - 1}} + \sqrt[3]{1 + \frac{\gamma_{1_S}^2}{2} - \sqrt{\left(1 + \frac{\gamma_{1_S}^2}{2}\right)^2 - 1}} - 1. \tag{4.65}$$

Hledaný parametr σ je

$$\sigma = \sqrt{\ln(r)}, \tag{4.66}$$

kde r je dáno (4.65).

Označme $F_Y(y)$ distribuční funkci standardizovaného log-normálního rozdělení s parametry α, μ, σ^2, potom

$$\begin{aligned}
F_Y(y) &= P(\alpha + \mathrm{e}^Z \leq y) = P\big(Z \leq \ln(y - \alpha)\big) =\\
&= P\left(\frac{Z - \mu}{\sigma} \leq \frac{\ln(y - \alpha) - \mu}{\sigma}\right).
\end{aligned} \tag{4.67}$$

Dosazením za α dle (4.61), μ dle (4.60) a $r = \mathrm{e}^{\sigma^2}$ získáme

$$\begin{aligned}
\frac{\ln(y-\alpha)-\mu}{\sigma} &= \frac{1}{\sigma}\cdot\left[\ln\left(y+\sqrt{\frac{1}{\mathrm{e}^{\sigma^2}-1}}\right)-\ln\left(\sqrt{\frac{1}{\mathrm{e}^{\sigma^2}\cdot(\mathrm{e}^{\sigma^2}-1)}}\right)\right]=\\
&=\frac{1}{\sigma}\ln\Big(\sqrt{\mathrm{e}^{\sigma^2}}\cdot\big(y\sqrt{\mathrm{e}^{\sigma^2}-1}+1\big)\Big)=\\
&=\frac{1}{\sigma}\cdot\frac{1}{2}\ln\big(\mathrm{e}^{\sigma^2}\big)+\frac{1}{\sigma}\ln\Big(y\sqrt{\mathrm{e}^{\sigma^2}-1}+1\Big)=\\
&=\frac{\sigma}{2}+\frac{1}{\sigma}\ln\Big(y\sqrt{\mathrm{e}^{\sigma^2}-1}+1\Big).
\end{aligned}$$

Náhodná veličina $\frac{Z-\mu}{\sigma} \sim N(0,1)$, proto můžeme $F_Y(y)$ vyjádřit pomocí distribuční funkce standardizovaného normálního rozdělení

$$F_Y(y) = \Phi\left(\frac{\sigma}{2}+\frac{1}{\sigma}\ln\Big(y\sqrt{\mathrm{e}^{\sigma^2}-1}+1\Big)\right). \tag{4.68}$$

Pro aproximaci rozdělení celkové škody z pojistných nároků S log-normálním rozdělením je třeba vypočítat parametr σ z (4.66) a

$$P(S \leq x) \doteq F_Y\left(\frac{x-\mu_S}{\sigma_S}\right) = \Phi\left(\frac{\sigma}{2}+\frac{1}{\sigma}\ln\Big(\frac{x-\mu_S}{\sigma_S}\sqrt{\mathrm{e}^{\sigma^2}-1}+1\Big)\right). \tag{4.69}$$

4.2.4 Panjerova rekurze

V roce 1981 Harry Panjer popsal rekurzivní metodu výpočtu pravděpodobnostní funkce úhrnu škod S. Tím nám v porovnání s přímou kalkulací přes konvoluce výrazně ulehčil práci.

Předpokládejme, že sekundární rozdělení, tj. rozdělení výše pojistných nároků, $p_X(x)$ je definované na množině $0, 1, 2, \ldots, m$[8] reprezentující celočíselné násobky nějaké peněžní jednotky. Dále předpokládejme, že primární rozdělení, totiž rozdělení četnosti pojistných nároků N, je členem třídy $(a, b, 1)$ a má pravděpodobnostní funkci $p_N(k)$, tedy splňuje

$$p_N(k) = \left(a+\frac{b}{k}\right)\cdot p_N(k-1), \quad k = 2, 3, \ldots$$

[8] m představuje nejvyšší možnou platbu, může být i nekonečná.

Potom platí následující věta.

Věta 4.12. (Panjerova rekurze) *Pro třídu rozdělení* $(a, b, 1)$ *je dána rekurentní formule*

$$p_S(x) = \frac{\big[p_N(1) - (a+b)\cdot p_N(0)\big]\cdot p_X(x) + \sum_{y=1}^{x\wedge m}\Big(a + \frac{by}{x}\Big)p_X(y)\cdot p_S(x-y)}{1 - a\cdot p_X(0)}, \tag{4.70}$$

kde $x = 1, 2, \dots$ *a* $x \wedge m$ *označuje* $\min(x, m)$.

Důkaz. Tato věta je identická[9] s větou 2.3, proto i její důkaz bude identický s důkazem zmíněné věty. ■

Věta 4.13. *Pro třídu rozdělení* $(a, b, 0)$ *obdržíme*

$$p_S(x) = \frac{\sum_{y=1}^{x\wedge m}\Big(a + \frac{by}{x}\Big)p_X(y)\cdot p_S(x-y)}{1 - a\cdot p_X(0)}, \quad x = 1, 2, \dots. \tag{4.71}$$

Důkaz. Důkaz je shodný s důkazem věty 2.2. ■

Počáteční hodnota rekurentních vztahů je $p_S(0) = G_N\big(p_X(0)\big)$ pro $p_X(0) > 0$.

Poznámka. V praxi má rozdělení výše nároků $p_X(0) = 0$, tudíž jmenovatel u (4.70) i (4.71) je roven 1 a $p_S(0) = G_N\big(0\big) = p_N(0)$. Je-li rozdělení počtu nároků samo o sobě složené, to jest $G_N(s) = G_1\big(G_2(s)\big)$, pak lze rekurzi použít vícekrát.

Poznámka. V případě, že má agregovaná škoda S složené Poissonovo rozdělení, přejde rekurze do tvaru

$$p_S(x) = \frac{\lambda}{x}\sum_{y=1}^{x\wedge m} y\cdot p_X(y)\cdot p_S(x-y), \quad x = 1, 2, \dots \tag{4.72}$$

s počáteční hodnotou $p_S(0) = \mathrm{e}^{\lambda\cdot(p_X(0)-1)}$.

[9] Je třeba přeznačit pravděpodobnostní funkce.

Panjerova rekurze nám oproti konvolucím usnadňuje práci. Nelze ale na základě toho tvrdit, že je její aplikace vždy příhodná. Rekurze začíná hodnotou $p_S(0)$, která je velmi malá pro velký pojistný kmen. Na počítačích bývá zaznamenávána jako 0, což zapříčiňuje selhávání rekurze.

Rekurentní formule vyžaduje, aby každá vypočítaná hodnota byla přesná, poněvadž vlivem zaokrouhlování mohou vznikat s každým krokem větší a větší chyby. V běžném životě ale nejsme schopni tento požadavek splnit, neboť i nejdokonalejší technika umí počítat jen na určitý počet desetinných míst.

Zaokrouhlovací chyby se šíří a zvětšují se s přibývajícími kroky, je-li alespoň jeden z výrazů v $\sum_{y=1}^{x\wedge m}\left(a+\frac{by}{x}\right)p_X(y)\cdot p_S(x-y)$ záporný. Jinými slovy, pokud je suma kladná, nebo přinejmenším nezáporná, pak je rekurentní vztah pro výpočet stabilní. To platí v případě Poissonova a negativně-binomického rozdělení. Pro binomické rozdělení se záporným a, kladným b a kladnou funkcí $\frac{y}{x}$, jejíž hodnoty nepřevyšují 1, mohou v sumě vznikat záporné výrazy. S tím se ale v praxi málokdy setkáme.

Následující věta uvádí Panjerovu rekurzi pro spojité rozdělení výše nároků.

Věta 4.14. *Je-li rozdělení počtu nároků členem třídy* $(a, b, 1)$[10] *a rozdělení výše nároků definováno na* $[0,\infty)$, *potom*

$$f_S(x) = p_N(1)\cdot f_X(x) + \int_0^x \left(a+\frac{by}{x}\right) f_X(y)\cdot f_S(x-y)\mathrm{d}y. \tag{4.73}$$

Důkaz. Důkaz je založen na znalostech vět a souvisejících důsledcích uvedených v *Insurance Risk Models* – PANJER, Harry H.; WILLMOT, Gordon. Chicago: Society of Actuaries, 1992. ■

Integrální rovnice ve formě (4.73) se nazývá Volterrova integrální rovnice druhého druhu[11]. Abychom předešli komplikovaným metodám jejího řešení, budeme se dále věnovat diskretizaci spojitého rozdělení závažností pojistných událostí.

[10] Rovnice platí i rozdělení počtu nároků z třídy $(a, b, 0)$.

[11] O tom, jak ji numericky řešit, se dočteme v *The Numerical Treatment of Integral Equations* – BAKER, Christopher. Oxford: Clarendon Press, 1977.

4.2.5 Diskretizace spojitého rozdělení

Pravděpodobnostní rozdělení vzniklá diskretizací nazýváme aritmetická rozdělení, neboť jsou definovaná na množině $\{0, 1, \dots\}$. Při diskretizaci se snažíme o zachování jak tvaru původního složeného rozdělení, tak i o zachování jeho globálních veličin, jako jsou momenty.

Zaokrouhlovací metoda

Nechť X je spojitá náhodná veličina a Y její diskretizovaná verze. Naším úkolem je nalézt pravděpodobnostní funkci $p_Y(j) = P(Y = jh), j = 0, 1, 2, \dots,$ pro pevně zvolený krok $h > 0$ tak, aby byla $p_Y(j)$ rovna pravděpodobnosti, jíž nabývá X na intervalu $\left(jh - \frac{h}{2}; jh + \frac{h}{2}\right)$, v řeči matematiky

$$p_Y(0) = P\left(X < \frac{h}{2}\right) = F_X\left(\frac{h}{2}\right), \tag{4.74}$$

$$p_Y(j) = P\left(jh - \frac{h}{2} \leq X < jh + \frac{h}{2}\right) = F_X\left(jh + \frac{h}{2}\right) - F_X\left(jh - \frac{h}{2}\right), \ j = 1, 2, \dots \tag{4.75}$$

Končí-li diskretizační proces v bodě m, potom

$$p_Y(m) = 1 - F_X\left(mh - \frac{h}{2}\right). \tag{4.76}$$

Pravděpodobnosti $p_Y(j)$ jsou pro všechna $j = 0, 1, \dots$ nezáporné. Jejich součet je roven 1.

Metoda shody lokálních momentů

Mějme spojitou náhodnou veličinu X, jež nabývá hodnot na intervalu $[0, \infty)$. Nechť lh udává délku jeho libovolného podintervalu $[x_k, x_{k+1})$, jenž rozdělíme na l dílů o délce $h > 0$. Pravděpodobnost, kterou má X na intervalu $[x_k, x_{k+1})$ nahradíme pravděpodobnostmi $m_0^k, m_1^k, m_2^k, \dots, m_l^k$ v bodech $x_k, x_k + h, \dots, x_k + lh = x_{k+1}$ tak, aby se prvních l-momentů aritmetického rozdělení shodovalo s momenty původního spojitého rozdělení.

Lokálně, tj. na intervalu $[x_k, x_{k+1})$, obdržíme systém $l+1$ rovnic

$$\sum_{j=0}^{l}(x_k + jh)^r \cdot m_j^k = \int\limits_{x_k}^{x_k+lh} x^r \mathrm{d}F_X(x), \quad r = 0, 1, 2, \ldots, l. \tag{4.77}$$

Za platnosti $x_0 = 0$ a $x_{k+1} = x_k + lh$, kde $k \in \mathbb{N}$, má diskretizované rozdělení pravděpodobnostní funkci vyjádřenou

$$\begin{array}{rrcr}
p(0) = m_0^0, & p(1) = m_1^0, & \ldots & p(l-1) = m_{l-1}^0, \\
p(l) = m_l^0 + m_0^1, & p(l+1) = m_1^1, & \ldots & p(2l-1) = m_{l-1}^1, \\
p(2l) = m_l^1 + m_0^2, & p(2l+1) = m_1^2, & \ldots & p(3l-1) = m_{l-1}^2, \\
\vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\
p(kl) = m_l^{k-1} + m_0^k, & p(kl+1) = m_1^k, & \ldots & p((k+1)l-1) = m_{l-1}^k, \\
\vdots & \vdots & \vdots & \vdots
\end{array} \tag{4.78}$$

Sečtením (4.77) přes všechny hodnoty $k \in \mathbb{N}_0$ se zachovají momenty také globálně (pro celé rozdělení) a $\sum_{k=0}^{\infty}\sum_{j=0}^{l} m_j^k = 1$. Věta 4.15 nám poskytne řešení systému rovnic (4.77).

Poznámka. **(Konstrukce Lagrangeova interpolačního polynomu)** Mějme $n+1$ uzlových bodů $x_0, x_1, \ldots, x_n$, kde $x_i \neq x_j$ pro $i \neq j$, a jim odpovídající funkční hodnoty $f(x_0), f(x_1), \ldots, f(x_n)$. Hledáme polynom $P_n(x)$ stupně nejvýše n takový, že

$$P_n(x_j) = f(x_j) \quad \text{pro } j = 0, 1, \ldots, n. \tag{4.79}$$

$P_n(x)$[12] zkonstruujeme pomocí fundamentálních polynomů $w_j(x), j = 0, 1, \ldots, n$, stupně n splňující

$$w_j(x_i) = \begin{cases} 0, & i \neq j, \\ 1, & i = j. \end{cases}$$

[12] Pro $n+1$ dvojic $\big(x_j, f(x_j)\big)$, kde $j = 0, 1, \ldots, n$ a $x_i \neq x_j$ pro $i \neq j$, existuje právě jeden polynom $P_n(x)$, takový že platí (4.79).

Fundamentální polynomy lze vyjádřit

$$w_j(x) = \prod_{\substack{i \neq j \\ 0 \leq i \leq n}} \frac{x - x_i}{x_j - x_i}, \quad j = 0, 1, \dots n.$$

Námi hledaný polynom je ve tvaru

$$P_n(x) = \sum_{j=0}^{n} f(x_j) \cdot w_j(x) = \sum_{j=0}^{n} f(x_j) \prod_{\substack{i \neq j \\ 0 \leq i \leq n}} \frac{x - x_i}{x_j - x_i} \tag{4.80}$$

a nazývá se Lagrangeův interpolační polynom.

Věta 4.15. *Řešením systému rovnic* (4.77) *je*

$$m_j^k = \int\limits_{x_k}^{x_k + lh} \prod_{\substack{i \neq j \\ 0 \leq i \leq l}} \frac{x - x_k - ih}{(j - i)h} \mathrm{d}F_X(x), \quad j = 0, 1, \dots, l. \tag{4.81}$$

Důkaz. Aplikujeme (4.80) na polynom x^r v uzlech $x_k, x_k + h, \dots, x_k + lh$ a dostaneme

$$x^r = \sum_{j=0}^{l} (x_k + jh)^r \prod_{\substack{i \neq j \\ 0 \leq i \leq l}} \frac{x - x_k - ih}{(j - i)h}, \quad r = 0, 1, 2, \dots, l.$$

Integrováním na intervalu $[x_k, x_{k+1})$, resp. $[x_k, x_k + lh)$, získáme

$$\int\limits_{x_k}^{x_k + lh} x^r \mathrm{d}F_X(x) = \sum_{j=0}^{l} (x_k + jh)^r \int\limits_{x_k}^{x_k + lh} \prod_{\substack{i \neq j \\ 0 \leq i \leq l}} \frac{x - x_k - ih}{(j - i)h} \mathrm{d}F_X(x).$$

Porovnejme výše uvedený vztah s (4.77):

$$\int\limits_{x_k}^{x_k + lh} x^r \mathrm{d}F_X(x) = \sum_{j=0}^{l} (x_k + jh)^r \cdot m_j^k.$$

Platnost věty je zřejmá. ∎

Zaokrouhlovací metoda a metoda shody prvního lokálního momentu mají podobnou chybovost. Značné zlepšení, tedy větší přesnost, pozorujeme pro $l = 2$. Tato volba je obvykle postačující, zvyšováním l už dochází jen k nepatrnému zpřesnění.

Výhodou zaokrouhlovací metody a metody shody lokálních momentů pro $l = 1$ je nezápornost výsledných pravděpodobností, kterou však nelze zaručit, je-li $l > 1$.

Obě tyto metody odpovídají kvalitativně numerickým metodám používaným k řešení Volterrových integrálních rovnic (4.73).

4.3 Příklady

Příklad 4.1. Určete moment generující funkci

a) gamma rozdělení,

b) exponenciálního rozdělení.

Řešení:

a) $X \sim Gam(\alpha, \beta)$ má hustotu $f_X(x) = \frac{x^{\alpha-1}e^{-\frac{x}{\beta}}}{\Gamma(\alpha)\beta^\alpha}, x > 0$.

$$M_X(t) = \mathrm{E}(\mathrm{e}^{tX}) = \int_0^\infty \mathrm{e}^{tx} \cdot \frac{x^{\alpha-1}\mathrm{e}^{-\frac{x}{\beta}}}{\Gamma(\alpha)\beta^\alpha}\mathrm{d}x = \frac{1}{\Gamma(\alpha)\beta^\alpha}\int_0^\infty x^{\alpha-1} \cdot \mathrm{e}^{-x(\frac{1}{\beta}-t)}\mathrm{d}x$$

$$\left|\text{subst.: } x\Big(\frac{1}{\beta} - t\Big) = z \Leftrightarrow x = \frac{\beta z}{1-\beta t}; \mathrm{d}x = \frac{\beta}{1-\beta t}\mathrm{d}z\right| \overset{t<\frac{1}{\beta}}{=}$$

$$\overset{t<\frac{1}{\beta}}{=} \frac{1}{\Gamma(\alpha)\beta^\alpha}\int_0^\infty \left(\frac{\beta z}{1-\beta t}\right)^{\alpha-1} \cdot \mathrm{e}^{-z} \cdot \frac{\beta}{1-\beta t}\mathrm{d}z =$$

$$= \frac{1}{\Gamma(\alpha)(1-\beta t)^\alpha}\underbrace{\int_0^\infty z^{\alpha-1} \cdot \mathrm{e}^{-z}\mathrm{d}z}_{\text{gamma funkce}} = \left(\frac{1}{1-\beta t}\right)^\alpha.$$

b) $X \sim Exp(\lambda)$ má hustotu $f_X(x) = \lambda \mathrm{e}^{-\lambda x}, x > 0$.

$$M_X(t) = \mathrm{E}(\mathrm{e}^{tX}) = \int_0^\infty \mathrm{e}^{tx} \cdot \lambda\mathrm{e}^{-\lambda x}\mathrm{d}x = \lambda\int_0^\infty \mathrm{e}^{-x(\lambda-t)}\mathrm{d}x$$

$$\left| \text{subst.: } x(\lambda - t) = z; \mathrm{d}x = \frac{\mathrm{d}z}{\lambda - t} \right| \overset{t<\lambda}{=} \frac{\lambda}{\lambda - t} \int_0^{\infty} \mathrm{e}^{-z} \mathrm{d}z =$$

$$= \frac{\lambda}{\lambda - t} \left[-\mathrm{e}^{-z} \right]_0^{\infty} = \frac{\lambda}{\lambda - t}.$$

✍

Příklad 4.2. Modelujte počet pojistných nároků na jednu smlouvu během jednoho roku. Konečné výsledky zaokrouhlete na dvě desetinná místa.

počet pojistných nároků k	počet pojistných smluv
0	132 936
1	15 972
2	1 034
3	52
4	6
5 a více	0
Celkem	150 000

Řešení[13]:

$$\mathrm{E}(N) \doteq \frac{1}{150\,000} \cdot (15\,972 + 2 \cdot 1\,034 + 3 \cdot 52 + 4 \cdot 6) = 0,121467;$$

$$\mathrm{Var}(N) \doteq \frac{1}{149\,999} \cdot (15\,972 + 4 \cdot 1\,034 + 9 \cdot 52 + 16 \cdot 6 - 150\,000 \cdot 0,121467^2) =$$

$$= 0,123060.$$

$\mathrm{E}(N) < \mathrm{Var}(N)$, k modelování se proto jeví jako nejvhodnější negativně binomické rozdělení. Jelikož se $\mathrm{E}(N)$ a $\mathrm{Var}(N)$ liší jen nepatrně, k modelování využijeme i Poissonovo rozdělení.

a) negativně binomické rozdělení:

$$0,121467 \overset{(1.19)}{=} \tfrac{m(1-v)}{v}$$

$$0,123060 \overset{(1.20)}{=} \tfrac{m(1-v)}{v^2}$$

[13]Odhad střední hodnoty: $\overline{X} = \frac{1}{n} \sum\limits_{i=1}^{n} X_i$.

Odhad rozptylu: $S^2 = \frac{1}{n-1} \sum\limits_{i=1}^{n} (X_i - \overline{X})^2 = \frac{1}{n-1} \sum\limits_{i=1}^{n} X_i^2 - \frac{n}{n-1} \overline{X}^2$.

$$\begin{array}{c} 0,121467 \cdot \upsilon = m(1-\upsilon) \\ 0,123060 \cdot \upsilon^2 = m(1-\upsilon) \\ \hline 0,121467 \cdot \upsilon = 0,123060 \cdot \upsilon^2 \Leftrightarrow \widehat{\upsilon} \doteq 0,987055 \\ \widehat{m} \doteq \frac{0,121467 \cdot \widehat{\upsilon}}{1-\widehat{\upsilon}} \doteq 9,261847 \end{array}$$

Pro $k = 0, 1, 2, 3, 4, 5$ máme

$$P(N=0) = \binom{0+m-1}{0} \widehat{\upsilon}^{\widehat{m}} \cdot (1-\widehat{\upsilon})^0 = 1 \cdot 0,987055^{9,261847} \cdot 0,012945^0 \doteq$$

$$\doteq 0,886320;$$

$$P(N=1) = \underbrace{\binom{1+m-1}{1}}_{\doteq 9} \widehat{\upsilon}^{\widehat{m}} \cdot (1-\widehat{\upsilon})^1 = 9 \cdot 0,987055^{9,261847} \cdot 0,012945^1 \doteq$$

$$\doteq 0,103261;$$

$$P(N=2) = \underbrace{\binom{2+m-1}{2}}_{\doteq 45} \widehat{\upsilon}^{\widehat{m}} \cdot (1-\widehat{\upsilon})^2 = 45 \cdot 0,987055^{9,261847} \cdot 0,012945^2 \doteq$$

$$\doteq 0,006684;$$

$$P(N=3) \doteq 0,000317;$$

$$P(N=4) \doteq 0,000012;$$

$$P(N=5) \doteq 0.$$

b) Poissonovo rozdělení:

$$\widehat{\lambda} \overset{(1.9)}{\doteq} 0,121467$$

Pro $k = 0, 1, 2, 3, 4, 5$ obdržíme

$$P(N=0) = \mathrm{e}^{-\widehat{\lambda}} \cdot \frac{\widehat{\lambda}^0}{0!} = \mathrm{e}^{-0,121467} \doteq 0,885620;$$

$$P(N=1) = \mathrm{e}^{-\widehat{\lambda}} \cdot \frac{\widehat{\lambda}^1}{1!} = \mathrm{e}^{-0,121467} \cdot 0,121467 \doteq 0,107574;$$

$$P(N=2) = \mathrm{e}^{-\widehat{\lambda}} \cdot \frac{\widehat{\lambda}^2}{2!} = \mathrm{e}^{-0,121467} \cdot \frac{0,121467^2}{2} \doteq 0,006533;$$

$$P(N=3) \doteq 0,000265;$$

$$P(N=4) \doteq 0,000008;$$

$$P(N = 5) \doteq 0.$$

Výsledky shrneme do tabulky

počet pojistných nároků k	počet smluv	počet smluv modelovaných $NeBi(m, v)$	počet smluv modelovaných $Po(\lambda)$
0	132 936	$150\,000 \cdot 0,886320 =$ $= 132\,948,00$	$150\,000 \cdot 0,885620 =$ $= 132\,843,00$
1	15 972	$15\,489,15$	$16\,136,10$
2	1 034	$1\,002,60$	$979,95$
3	52	$47,55$	$39,75$
4	6	$1,80$	$1,20$
5 a více	0	0	0
Celkem	150 000	$149\,489,10$	$150\,000,00$

✍

Příklad 4.3. Na základě dat byla odhadnuta střední výše škody na 1 537 Kč a rozptyl na 381 764 Kč ze 100 pojistných nároků. Odhadněte rozdělení výše škod log-normálním rozdělením. Pomocí tohoto odhadu vypočtěte pravděpodobnost, že výše škody nepřesáhne 4 800 Kč.

Řešení:
$\mathrm{E}(X) = 1\,537 \overset{(4.7)}{=} \mathrm{e}^{\mu + \frac{\sigma^2}{2}}$,
$\mathrm{Var}(X) = 381\,764 \overset{(4.8)}{=} \mathrm{e}^{2\mu + \sigma^2} \cdot \big(\mathrm{e}^{\sigma^2} - 1\big)$.

Odtud

$$\ln(1\,537) = \mu + \frac{\sigma^2}{2} \Leftrightarrow \mu = \ln(1\,537) - \frac{\sigma^2}{2}.$$

Tedy

$$\begin{aligned}
381\,764 &= \mathrm{e}^{2\mu + \sigma^2} \cdot \big(\mathrm{e}^{\sigma^2} - 1\big) \\
381\,764 &= \mathrm{e}^{2\ln(1\,537) - \sigma^2 + \sigma^2} \cdot \big(\mathrm{e}^{\sigma^2} - 1\big) \\
\frac{381\,764}{\mathrm{e}^{2\ln(1\,537)}} + 1 &= \mathrm{e}^{\sigma^2} \\
\ln\left(\frac{381\,764}{\mathrm{e}^{2\ln(1\,537)}} + 1\right) &= \sigma^2
\end{aligned}$$

$$\sqrt{\ln\left(\frac{381\,764}{\mathrm{e}^{2\ln(1\,537)}}+1\right)} = \sigma$$

$$\widehat{\sigma} \doteq 0,387040$$

a

$$\hat{\mu} = \ln(1\,537) = \frac{0,387040}{2} \doteq 7,262688.$$

Pravděpodobnost spočítáme

$$P(X < 4\,800) = P\left(U < \frac{\ln(4\,800) - 7,262688}{0,387040}\right) = \Phi(3,135808) \doteq \Phi(3,14) =$$
$$= 0,999160.$$

✍

Příklad 4.4. Určete pravděpodobnostní a distribuční funkci celkového pojistného nároku. První tabulka uvádí počet pojistných událostí nastalých na pojistném kmeni za stanovené časové období, včetně pravděpodobností jejich vzniku. V druhé tabulce nalezneme výše individuálních pojistných nároků s pravděpodobnostmi jejich uplatnění.

počet pojistných událostí	pravděpodobnosti
0	$0,1$
1	$0,3$
2	$0,4$
3	$0,2$

výše nároků	pravděpodobnosti
1	$0,5$
2	$0,4$
3	$0,1$

Řešení:
Jelikož mají výše individuálních pojistných nároků diskrétní hodnoty, budeme k výpočtu používat $p_S(x) = \sum\limits_{n=0}^{\infty} p_X^{*n}(x) \cdot p_N(n)$.

Ke kalkulaci k-té konvoluce pravděpodobnostní funkce $p_X(x)$ náhodné veličiny X využijeme vztah $p_X^{*k}(x) = \sum\limits_{y=0}^{x} p_X^{*(k-1)}(x-y) \cdot p_X(y)$, kde

$$p_X^{*0}(x) = \begin{cases} 0, & x \neq 0, \\ 1, & x = 0, \end{cases}$$
$$p_X^{*1}(x) = p_X(x).$$

a) $p_X^{*2}(x) = \sum_{y=0}^{x} p_X^{*1}(x-y) \cdot p_X(y)$:

$$\begin{aligned}
p_X^{*2}(0) &= p_X^{*1}(0) \cdot p_X(0) = 0 \cdot 0 = 0; \\
p_X^{*2}(1) &= p_X^{*1}(1) \cdot p_X(0) + p_X^{*1}(0) \cdot p_X(1) = 0,5 \cdot 0 + 0 \cdot 0,5 = 0; \\
p_X^{*2}(2) &= p_X^{*1}(2) \cdot p_X(0) + p_X^{*1}(1) \cdot p_X(1) + p_X^{*1}(0) \cdot p_X(2) = \\
&= 0,4 \cdot 0 + 0,5 \cdot 0,5 + 0 \cdot 0,4 = 0,25; \\
p_X^{*2}(3) &= p_X^{*1}(3) \cdot p_X(0) + p_X^{*1}(2) \cdot p_X(1) + p_X^{*1}(1) \cdot p_X(2) + p_X^{*1}(0) \cdot p_X(3) = \\
&= 0,1 \cdot 0 + 0,4 \cdot 0,5 + 0,5 \cdot 0,4 + 0 \cdot 0,1 = 0,4;
\end{aligned}$$

atd.

Pro $x > 6$ je $p_X^{*2}(x) = 0$.

b) $p_X^{*3}(x) = \sum_{y=0}^{x} p_X^{*2}(x-y) \cdot p_X(y)$:

$$\begin{aligned}
p_X^{*3}(0) &= p_X^{*2}(0) \cdot p_X(0) = 0; \\
p_X^{*3}(1) &= p_X^{*2}(1) \cdot p_X(0) + p_X^{*2}(0) \cdot p_X(1) = 0; \\
p_X^{*3}(2) &= p_X^{*2}(2) \cdot p_X(0) + p_X^{*2}(1) \cdot p_X(1) + p_X^{*2}(0) \cdot p_X(2) = 0; \\
p_X^{*3}(3) &= p_X^{*2}(3) \cdot p_X(0) + p_X^{*2}(2) \cdot p_X(1) + p_X^{*2}(1) \cdot p_X(2) + p_X^{*2}(0) \cdot p_X(3) = 0,125;
\end{aligned}$$

atd.

Pro $x > 9$ je $p_X^{*3}(x) = 0$.

Nyní jsme již schopni spočítat pravděpodobnostní funkci náhodné veličiny S:

$$p_S(0) = p_X^{*0}(0) \cdot p_N(0) + p_X^{*1}(0) \cdot p_N(1) + p_X^{*2}(0) \cdot p_N(2) + p_X^{*3}(0) \cdot p_N(3) = 0,1;$$
$$p_S(1) = p_X^{*0}(1) \cdot p_N(0) + p_X^{*1}(1) \cdot p_N(1) + p_X^{*2}(1) \cdot p_N(2) + p_X^{*3}(1) \cdot p_N(3) = 0,15;$$

$p_S(2) = p_X^{*0}(2) \cdot p_N(0) + p_X^{*1}(2) \cdot p_N(1) + p_X^{*2}(2) \cdot p_N(2) + p_X^{*3}(2) \cdot p_N(3) = 0,22;$
$p_S(3) = p_X^{*0}(3) \cdot p_N(0) + p_X^{*1}(3) \cdot p_N(1) + p_X^{*2}(3) \cdot p_N(2) + p_X^{*3}(3) \cdot p_N(3) = 0,215;$
atd.

Dle (4.35) platí $F_S(x) = \sum_{n=0}^{\infty} F_X^{*n}(x) \cdot p_N(n)$.
$F_S(x)$ lze získat jednodušeji, a to z $F_S(x) = \sum\limits_{t \leq x} p_S(t)$ pro $\forall x \in \mathbb{R}$.

$$F_S(0) = p_S(0) = 0,1;$$
$$F_S(1) = p_S(0) + p_S(1) = 0,25;$$
$$F_S(2) = p_S(0) + p_S(1) + p_S(2) = 0,47;$$
$$F_S(3) = p_S(0) + p_S(1) + p_S(2) + p_S(3) = 0,685;$$
atd.

Sestavíme výslednou tabulku

x	$p_X^{*0}(x)$	$p_X^{*1}(x)$	$p_X^{*2}(x)$	$p_X^{*3}(x)$	$p_S(x)$	$F_S(x)$
0	1	0	0	0	0,100000	0,100000
1	0	0,500000	0	0	0,150000	0,250000
2	0	0,400000	0,250000	0	0,220000	0,470000
3	0	0,100000	0,400000	0,125000	0,215000	0,685000
4	0	0	0,260000	0,300000	0,164000	0,849000
5	0	0	0,080000	0,315000	0,095000	0,944000
6	0	0	0,010000	0,184000	0,040800	0,984800
7	0	0	0	0,063000	0,012600	0,997400
8	0	0	0	0,012000	0,002400	0,999800
9	0	0	0	0,001000	0,000200	1
$p_N(n)$	0,1	0,3	0,4	0,2		

✍

Příklad 4.5. Nechť má počet pojistných událostí Poisson-ETNB rozdělení s parametry $\lambda = 2, \beta = 3, m_E = 0,2$. Dále nechť výše individuálních pojistných nároků 0, 10 a 20 mají pravděpodobnosti uplatnění 0,3; 0,5 a 0,2. Určete rozdělení agregované škody S.

Řešení:
N má generující funkci $G_N(s) = G_1\big(G_2(s)\big)$, kde $G_1(s)$ je generující funkce Poissonova rozdělení a $G_2(s)$ je generující funkce ETNB rozdělení.
S má podle (4.47) generující funkci $G_S(s) = G_1\big(G_2(G_X(s))\big)$, což můžeme přepsat do tvaru $G_S(s) = G_1\big(G_{S^*}(s)\big)$, kde $G_{S^*}(s) = G_2\big(G_X(s)\big)$ je generující funkce složeného ETNB rozdělení.

Nejprve se zaměříme na rozdělení náhodné veličiny S^*:
Výše individuálních pojistných nároků mají $p_X(0) = 0,3; p_X(1) = 0,5;$ $p_X(2) = 0,2$. Z tabulky 1.2 a (1.37):

$$a = \frac{3}{1+3} = \frac{3}{4}, \qquad p_{N^*}(0) = 0,$$
$$b = (0,2-1)\cdot\frac{3}{1+3} = -\frac{3}{5}, \qquad p_{N^*}(1) = \frac{0,2\cdot 3}{4\cdot(4^{0,2}-1)} \doteq 0,469472.$$

Rekurze složeného ETNB rozdělení začíná hodnotou: $p_{S^*}(0) = G_2(p_X(0))$ pro $p_X(0) > 0$, v našem případě je $G_2(s)$ (viz příklad 16 ze Cvičení kapitoly 1):

$$G_2(s) = \frac{\big(1-\beta(s-1)\big)^{-m_E} - (1+\beta)^{-m_E}}{1-(1+\beta)^{-m_E}}.$$

Čili

$$p_{S^*}(0) = \frac{\big(1-3\cdot(0,3-1)\big)^{-0,2} - (1+3)^{-0,2}}{1-(1+3)^{-0,2}} \doteq 0,163690.$$

Dle (4.70): $p_{S^*}(x) = \frac{40}{31}\cdot\left[0,469472\cdot p_X(x) + \sum\limits_{y=1}^{x\wedge m}\left(\frac{3}{4} - \frac{\frac{3}{5}y}{x}\right)p_X(y)\cdot p_{S^*}(x-y)\right]$,
kde $m = 2$, vypočítáme pravděpodobnosti pro $x = 1,2,3,4,5$:

$$p_{S^*}(1) = \frac{40}{31}\cdot\Big(0,469472\cdot p_X(1) + \frac{3}{20}\cdot p_X(1)\cdot p_{S^*}(0)\Big) \doteq 0,318726;$$
$$p_{S^*}(2) = \frac{40}{31}\cdot\Big(0,469472\cdot p_X(2) + \frac{9}{20}\cdot p_X(1)\cdot p_{S^*}(1) + \frac{3}{20}\cdot p_X(2)\cdot p_{S^*}(0)\Big) \doteq$$
$$\doteq 0,220024;$$
$$p_{S^*}(3) \doteq 0,106861;$$
$$p_{S^*}(4) \doteq 0,066917;$$

$$p_{S^*}(5) \doteq 0,041263 \quad \text{atd.}$$

Nyní se podíváme na rozdělení náhodné veličiny S:
$G_S(s) = G_1\big(G_{S^*}(s)\big) = \mathrm{e}^{\lambda\cdot(G_{S^*}(s)-1)}$.

Podle (4.72): $p_S(0) = \mathrm{e}^{\lambda\cdot(p_{S^*}(0)-1)} = \mathrm{e}^{2\cdot(0,163690-1)} \doteq 0,187755$.

Výsledné pravděpodobnosti jsou pro $x = 1, 2, 3, 4, 5$

$$p_S(1) = 2\cdot\big(1\cdot p_{S^*}(1)\cdot p_S(0)\big) \doteq 0,119685;$$
$$p_S(2) = 1\cdot\big(1\cdot p_{S^*}(1)\cdot p_S(1) + 2\cdot p_{S^*}(2)\cdot p_S(0)\big) \doteq 0,120768;$$
$$p_S(3) \doteq 0,100900;$$
$$p_S(4) \doteq 0,086964;$$
$$p_S(5) \doteq 0,072643 \quad \text{atd.}$$

✍

Příklad 4.6. Předpokládejme, že N má geometrické rozdělení a že výše individuálního pojistného nároku má exponenciální rozdělení se střední hodnotou 1. Ukažte, že $M_S(t) = \upsilon + (1-\upsilon)\cdot\frac{\upsilon}{\upsilon-t}$.

Řešení:
Střední hodnota exponenciálního rozdělení: $\mathrm{E}(X) = \frac{1}{\lambda} = 1 \Leftrightarrow \lambda = 1$.
Moment generující funkce geometrického a exponenciálního rozdělení:

$$M_N(t) = G_N(\mathrm{e}^t) = \frac{\upsilon}{1-\mathrm{e}^t(1-\upsilon)},$$
$$M_X(t) = \frac{\lambda}{\lambda-1} \overset{\lambda=1}{=} \frac{1}{1-t}.$$

Platí $M_S(t) = M_N\big(\ln(M_X(t))\big)$ pro $t \geq 0$.

$$M_S(t) = \frac{\upsilon}{1-\mathrm{e}^{\ln(\frac{1}{1-t})}\cdot(1-\upsilon)} = \frac{\upsilon}{1-(1-\upsilon)\cdot\frac{1}{1-t}} =$$
$$= \frac{\upsilon-\upsilon(1-\upsilon)\cdot\frac{1}{1-t}+\upsilon(1-\upsilon)\cdot\frac{1}{1-t}}{1-(1-\upsilon)\cdot\frac{1}{1-t}} = \upsilon + (1-\upsilon)\cdot\frac{\upsilon\cdot\frac{1}{1-t}}{1-(1-\upsilon)\frac{1}{1-t}} =$$

$$= v + (1-v) \cdot \frac{v}{1-t} \cdot \frac{1-t}{1-t-1+v} = v + (1-v) \cdot \frac{v}{v-t}.$$

✍

Příklad 4.7. Při hospitalizaci mají nemocniční poplatky následující charakteristiky

poplatky	střední hodnota	směrodatná odchylka
nemocniční pokoj	1 000	500
ostatní	500	300

Kovariance mezi poplatky za nemocniční pokoj a ostatními poplatky je 100 000. Dle pojistné smlouvy hradí pojistitel 100 % poplatků za nemocniční pokoj a 80 % ostatních poplatků. Počet hospitalizací se řídí Poissonovým rozdělením s parametrem $\lambda = 4$. Určete střední hodnotu a směrodatnou odchylku celkového pojistného plnění.

Řešení:

$$\begin{aligned}
\mathrm{E}(N) &= \mathrm{Var}(N) = \lambda = 4;\\
\mathrm{E}(X) &= 1 \cdot 1\,000 + 0,8 \cdot 500 = 1\,400;\\
\mathrm{Var}(X) &= \mathrm{Var}(X_1) + \mathrm{Var}(X_2) + 2 \cdot \mathrm{Cov}(X_1, X_2) =\\
&= 1^2 \cdot 500^2 + 0,8^2 \cdot 300^2 + 2 \cdot 1 \cdot 0.8 \cdot 100\,000 = 467\,600.
\end{aligned}$$

Pro náhodnou veličinu S tedy dostaneme

$$\begin{aligned}
\mathrm{E}(S) &= \mathrm{E}(N) \cdot \mathrm{E}(X) = 4 \cdot 1\,400 = 5\,600;\\
\mathrm{Var}(S) &= \mathrm{E}(N) \cdot \mathrm{Var}(X) + \big(\mathrm{E}(X)\big)^2 \cdot \mathrm{Var}(N) = 4 \cdot 467\,600 + 1\,400^2 \cdot 4 = 9\,710\,400;\\
\sigma_S &= \sqrt{\mathrm{Var}(S)} = 3\,116,151473.
\end{aligned}$$

✍

Příklad 4.8. Pozorovaná střední hodnota, resp. směrodatná odchylka, počtu pojistných nároků a výše individuálního nároku je $6,7$, resp. $2,3$, a 179 247, resp. 52 141. Použitím log-normálního rozdělení jakožto aproximační rozdělení určete pravděpodobnost, že celkový pojistný nárok převýší 140 % očekávaného pojistného plnění.

Řešení:
Střední hodnotu a rozptyl S lze vypočítat pomocí vztahů (4.50) a (4.51):

$$\begin{aligned} \mathrm{E}(S) &= 6,7 \cdot 179\,247 = 1\,200\,954,9; \\ \mathrm{Var}(S) &= 6,7 \cdot 52\,141^2 + 179\,247^2 \cdot 2,3^2 \doteq 1,881802 \cdot 10^{11}. \end{aligned}$$

Položíme $\mathrm{E}(S)$ rovno (4.7): $1\,200\,954,9 = \mathrm{e}^{\mu+\frac{\sigma^2}{2}} \Leftrightarrow \ln(1\,200\,954,9) = \mu + \frac{\sigma^2}{2}$. Platí $\mathrm{Var}(S) = \mathrm{E}(S^2) - \big(\mathrm{E}(S)\big)^2 \Leftrightarrow \mathrm{E}(S^2) = \mathrm{Var}(S) + \big(\mathrm{E}(S)\big)^2$. $\mathrm{E}(S^2)$ získáme porovnáním s druhým obecným momentem log-normálního rozdělení:

$$\mathrm{E}(S^2) = 1,881802 \cdot 10^{11} + 1\,200\,954,9^2 = 1,630473 \cdot 10^{12} \overset{(4.6)}{=} \mathrm{e}^{2\mu+2\sigma^2}.$$

Z rovnic

$$\begin{aligned} \ln(1\,200\,954,9) &= \mu + \frac{\sigma^2}{2} \\ \ln(1,630473 \cdot 10^{12}) &= 2\mu + 2\sigma^2 \end{aligned}$$

vyjádříme μ a σ^2. Vidíme, že

$$\mu = \ln(1\,200\,954,9) - \frac{\sigma^2}{2}.$$

Tudíž

$$\begin{aligned} \ln(1,630473 \cdot 10^{12}) &= 2 \cdot \ln(1\,200\,954,9) - \sigma^2 + 2\sigma^2 \\ \widehat{\sigma}^2 &= 0,122636 \end{aligned}$$

a

$$\widehat{\mu} = \ln(1\,200\,954,9) - \frac{0,122636}{2} \doteq 13,937310.$$

Pravděpodobnost, že celkový pojistný nárok převýší 140 % očekávaného pojistného plnění spočítáme

$$\begin{aligned} P\big(S > 1,4 \cdot \mathrm{E}(S)\big) &= P(S > 1,4 \cdot 1\,200\,954,9) = 1 - P(S < 1\,681\,336,86) = \\ &= 1 - \Phi\left(\frac{\ln(1\,681\,336,86) - \mu}{\sigma}\right) = \\ &= 1 - \Phi\left(\frac{14,3351 - 13,97731}{\sqrt{0,122636}}\right) = 1 - \Phi(1,135912) \doteq \end{aligned}$$

$$\doteq 1 - \Phi(1,14) = 1 - 0,872860 = 0,127140.$$

✍

Příklad 4.9. Nechť je celkový pojistný nárok modelován složeným negativně binomickým rozdělením s parametry $m = 15$ a $\beta = 5$. Výše individuálních nároků je dána spojitým rovnoměrným rozdělením na intervalu $(0, 10)$. Použitím normálního rozdělení jakožto aproximační rozdělení určete takové pojistné, že pravděpodobnost, že celkový pojistný nárok převýší pojistné, je $0,05$.

Řešení:
Pro negativně binomické rozdělení máme:

$$\begin{aligned} \mathrm{E}(N) &= m\beta = 15 \cdot 5 = 75, \\ \mathrm{Var}(N) &= m\beta(1+\beta) = 15 \cdot 5 \cdot 6 = 450. \end{aligned}$$

Hustota $X \sim Rs(a,b)$: $f_X(x) = \frac{1}{b-a}$ pro $x \in (a,b), a < b$. Odvoďme si vztah pro výpočet střední hodnoty a rozptylu náhodné veličiny X

$$\begin{aligned} \mathrm{E}(X) &= \int_a^b \frac{x}{b-a}\mathrm{d}x = \frac{1}{b-a} \cdot \left[\frac{x^2}{2}\right]_a^b = \frac{1}{b-a} \cdot \left(\frac{b^2-a^2}{2}\right) = \frac{a+b}{2}, \\ \mathrm{E}(X^2) &= \int_a^b \frac{x^2}{b-a}\mathrm{d}x = \frac{1}{b-a} \cdot \left[\frac{x^3}{3}\right]_a^b = \frac{1}{b-a} \cdot \left(\frac{b^3-a^3}{3}\right) = \frac{a^2+ab+b^2}{3}, \\ \mathrm{Var}(X) &= \mathrm{E}(X^2) - \big(\mathrm{E}(X)\big)^2 = \frac{a^2+ab+b^2}{3} - \frac{a^2+2ab+b^2}{4} = \\ &= \frac{4a^2+4ab+4b^2-3a^2-6ab-3b^2}{12} = \frac{a^2-2ab+b^2}{12} = \frac{(a-b)^2}{12}. \end{aligned}$$

Čili $\mathrm{E}(X) = 5$ a $\mathrm{Var}(X) = \frac{25}{3}$.
Dále budeme potřebovat

$$\begin{aligned} \mathrm{E}(S) &= \mathrm{E}(N) \cdot \mathrm{E}(X) = 75 \cdot 5 = 375, \\ \mathrm{Var}(S) &= \mathrm{E}(N) \cdot \mathrm{Var}(X) + \big(\mathrm{E}(N)\big)^2 \cdot \mathrm{Var}(N) = 75 \cdot \frac{100}{12} + 25 \cdot 450 = 11\,875, \\ \sigma_S &= \sqrt{\mathrm{Var}(S)} = 25\sqrt{19} \doteq 108,972474. \end{aligned}$$

Připomeňme si, že pro α-kvantil x_α obecného normálního rozdělení $N(\mu, \sigma^2)$ platí $F(x_\alpha) = \alpha \Leftrightarrow \Phi\left(\frac{x_\alpha - \mu}{\sigma}\right) = \alpha \Leftrightarrow \frac{x_\alpha-\mu}{\sigma} = u_\alpha$, kde u_α je α-kvantil standardizovaného normálního rozdělení.
V našem případě

$$\begin{aligned} P(S \leq x_{0,95}) &= 0,95 \\ \Phi\left(\frac{x_{0,95} - \mathrm{E}(S)}{\sigma_S}\right) &= 0,95 \\ \frac{x_{0,95} - \mathrm{E}(S)}{\sigma_S} &= u_{0,95}, \end{aligned}$$

tj. $x_{0,95} = 108,972474 \cdot u_{0,95} + 375 = 108,972474 \cdot 1,645 + 375 \doteq 554,259720$. Námi hledané pojistné musí být alespoň ve výši $554,259720$.

✍

Příklad 4.10. Pravděpodobnostní hustota celkového pojistného nároku je dána ve tvaru $f_S(x) = 3x^{-4}, x \geq 1$. Bezpečnostní přirážka θ a parametr λ jsou zvoleny tak, aby $P\big(S \leq (1+\theta) \cdot \mathrm{E}(S)\big) = P\big(S \leq \mathrm{E}(S) + \lambda\sqrt{\mathrm{Var}(S)}\big) = 0,9$. Vypočtěte λ a θ.

Řešení:

$$\begin{aligned} \mathrm{E}(S) &= \int_1^\infty x \cdot 3x^{-4} \mathrm{d}x = 3\int_1^\infty x^{-3} \mathrm{d}x = 3 \cdot \left[-\frac{x^{-2}}{2}\right]_1^\infty = \frac{3}{2}, \\ \mathrm{E}(S^2) &= \int_1^\infty x^2 \cdot 3x^{-4} \mathrm{d}x = 3\int_1^\infty x^{-2} \mathrm{d}x = 3 \cdot \left[-\frac{x^{-1}}{1}\right]_1^\infty = 3, \\ \mathrm{Var}(S) &= 3 - \frac{9}{4} = \frac{3}{4}. \end{aligned}$$

K nalezení θ, počítejme

$$\begin{aligned} 0,9 &= P\left(S \leq (1+\theta) \cdot \frac{3}{2}\right) = \int_1^{\frac{3}{2}\cdot(1+\theta)} 3x^{-4} \mathrm{d}x = 3\int_1^{\frac{3}{2}\cdot(1+\theta)} x^{-4} \mathrm{d}x = \\ &= \left[-x^{-3}\right]_1^{\frac{3}{2}\cdot(1+\theta)} = 1 - \left(\frac{3}{2} \cdot (1+\theta)\right)^{-3} \\ 0,1 &= \left(\frac{3}{2} \cdot (1+\theta)\right)^{-3} \\ \frac{80}{27} &= 1 + 3\theta + 3\theta^2 + \theta^3 \end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
80 &= 27 + 81\theta + 81\theta^2 + 27\theta^3 \\
0 &= 27\theta^3 + 81\theta^2 + 81\theta - 53.
\end{aligned}
$$

Pomocí Cardanových vzorců získáme reálný kořen kubické rovnice:

$$
\begin{aligned}
Q &= \frac{3 \cdot 27 \cdot 81 - 81^2}{9 \cdot 27^2} = 0, \\
R &= \frac{9 \cdot 27 \cdot 81^2 - 27^3 \cdot (-53) - 2 \cdot 81^3}{54 \cdot 27^3} = \frac{40}{27}, \\
S &= \sqrt[3]{\frac{40}{27} + \sqrt{\left(\frac{40}{27}\right)^2 + 0^3}} \doteq 1,436290, \\
T &= \sqrt[3]{\frac{40}{27} - \sqrt{\left(\frac{40}{27}\right)^2 + 0^3}} = 0.
\end{aligned}
$$

Reálným kořenem je $\theta = S + T - \frac{81}{81} = 1,436290 + 0 - 1 \doteq 0,436290$. Postupujeme analogicky při hledání λ.

$$
\begin{aligned}
0,9 &= P\left(S \leq \frac{3}{2} + \lambda\sqrt{\frac{3}{4}}\right) = \int_1^{\frac{3}{2}+\lambda\sqrt{\frac{3}{4}}} 3x^{-4}\mathrm{d}x = 3\int_1^{\frac{3}{2}+\lambda\sqrt{\frac{3}{4}}} x^{-4}\mathrm{d}x = \\
&= \Big[-x^{-3}\Big]_1^{\frac{3}{2}+\lambda\sqrt{\frac{3}{4}}} = 1 - \left(\frac{3}{2} + \lambda\sqrt{\frac{3}{4}}\right)^{-3} \\
0,1 &= \left(\frac{3}{2} + \lambda\sqrt{\frac{3}{4}}\right)^{-3} \\
1 &= \frac{27}{80} + \frac{27\sqrt{3}}{80}\lambda + \frac{27}{80}\lambda^2 + \frac{3\sqrt{3}}{80}\lambda^3 \\
0 &= \frac{3\sqrt{3}}{80}\lambda^3 + \frac{27}{80}\lambda^2 + \frac{27\sqrt{3}}{80}\lambda - \frac{53}{80} \\
0 &= 3\sqrt{3}\lambda^3 + 27\lambda^2 + 27\sqrt{3}\lambda - 53
\end{aligned}
$$

Z Cardanových vzorců:

$$
Q = 0; \qquad R \doteq 7,698004; \qquad S \doteq 2,487727; \qquad T = 0.
$$

Tedy $\lambda = 2,487727 + 0 - \frac{27}{9\sqrt{3}} \doteq 0,755676$.

Příklad 4.11. Nechť má X exponenciální rozdělení s pravděpodobnostní hustotou $f_X(x) = 0,1{\cdot}\mathrm{e}^{-0,1x}$. Pro $h = 2$ diskretizujte toto rozdělení zaokrouhlovací metodou i metodou shody lokálních momentů pro $j = 0, 1, 2, \ldots, 5$.

Řešení:

zaokrouhlovací metoda

Nechť Y je diskretizovaná verze X, pro $h = 2$ hledáme pravděpodobnostní funkci $p_Y(j) = P(Y = 2j), j = 0, 1, 2, \ldots$

Z (4.74) a (4.75): $p_Y(0) = F_X(1) = 1 - \mathrm{e}^{-0,1\cdot 1} \doteq 0,095163;$

$$p_Y(j) = F_X(2j+1) - F_X(2j-1) = \mathrm{e}^{-0,1(2j-1)} - \mathrm{e}^{-0,1(2j+1)}.$$

metoda shody lokálních momentů

Pro shodu prvního lokálního momentu je $l = 1$ a $x_k = 2k$.

Klíčové rovnice:

$$m_0^k = \int_{2k}^{2k+2} \frac{x-2k-2}{(0-1)\cdot 2}\mathrm{d}F_X(x) = \int_{2k}^{2k+2} \frac{x-2k-2}{-2} \cdot 0,1 \cdot \mathrm{e}^{-0,1x}\mathrm{d}x =$$

$$= \frac{1}{10}\int_{2k}^{2k+2}\left(-\frac{x}{2} + (k+1)\right) \cdot \mathrm{e}^{-0,1x}\mathrm{d}x =$$

$$= -\frac{1}{20}\int_{2k}^{2k+2} x\mathrm{e}^{-0,1x}\mathrm{d}x + \frac{k+1}{10}\int_{2k}^{2k+2} \mathrm{e}^{-0,1x}\mathrm{d}x$$

$$\left|\text{per partes}: \quad u' = \mathrm{e}^{-0,1x} \Leftrightarrow u = -10\mathrm{e}^{-0,1x}; v = x \Leftrightarrow v' = 1\right| =$$

$$= \frac{1}{2}\cdot\left[x\mathrm{e}^{-0,1x}\right]_{2k}^{2k+2} - \frac{1}{2}\int_{2k}^{2k+2} \mathrm{e}^{-0,1x}\mathrm{d}x - (k+1)\cdot\left[\mathrm{e}^{-0,1x}\right]_{2k}^{2k+2} =$$

$$= \frac{1}{2}\cdot\left[(2k+2)\cdot \mathrm{e}^{-0,1(2k+2)} - 2k\cdot \mathrm{e}^{-0,1\cdot 2k}\right] + 5\cdot\left[\mathrm{e}^{-0,1(2k+2)} - \mathrm{e}^{-0,1\cdot 2k}\right] -$$

$$-(k+1)\cdot\left[\mathrm{e}^{-0,1(2k+2)} - \mathrm{e}^{-0,1\cdot 2k}\right] = 5\mathrm{e}^{-0,1(2k+2)} - 4\mathrm{e}^{-0,1\cdot 2k},$$

$$m_1^k = \int_{2k}^{2k+2} \frac{x-2k}{(1-0)\cdot 2}\mathrm{d}F_X(x) = \int_{2k}^{2k+2} \frac{x-2k}{2} \cdot 0,1\cdot \mathrm{e}^{-0,1x}\mathrm{d}x =$$

$$= \frac{1}{10}\int_{2k}^{2k+2}\left(\frac{x}{2} - k\right)\cdot \mathrm{e}^{-0,1x}\mathrm{d}x = \frac{1}{20}\int_{2k}^{2k+2} x\mathrm{e}^{-0,1x}\mathrm{d}x + k\cdot\left[\mathrm{e}^{-0,1x}\right]_{2k}^{2k+2} =$$

$$= -\frac{1}{2}\left[x\mathrm{e}^{-0,1x}\right]_{2k}^{2k+2} + \frac{1}{2}\int_{2k}^{2k+2} \mathrm{e}^{-0,1x}\mathrm{d}x + k\cdot\left[\mathrm{e}^{-0,1x}\right]_{2k}^{2k+2} =$$

$$= -\frac{1}{2} \cdot \left[(2k+2) \cdot \mathrm{e}^{-0,1(2k+2)} - 2k \cdot \mathrm{e}^{-0,1 \cdot 2k}\right] - 5 \cdot \left[\mathrm{e}^{-0,1(2k+2)} - \mathrm{e}^{-0,1 \cdot 2k}\right] +$$
$$+ k \cdot \left[\mathrm{e}^{-0,1(2k+2)} - \mathrm{e}^{-0,1 \cdot 2k}\right] = -6\mathrm{e}^{-0,1(2k+2)} + 5\mathrm{e}^{-0,1 \cdot 2k}.$$

Z (4.78)

$$p(0) = m_0^0 = 5\mathrm{e}^{-0,1 \cdot 2} - 4\mathrm{e}^0 \doteq 0,093654;$$
$$p(j) = m_1^{j-1} + m_0^j = -6\mathrm{e}^{-0,1 \cdot 2j} + 5\mathrm{e}^{-0,1 \cdot (2j-2)} + 5\mathrm{e}^{-0,1 \cdot (2j+2)} - 4\mathrm{e}^{-0,1 \cdot 2j} =$$
$$= 5\mathrm{e}^{-0,1 \cdot (2j-2)} - 10\mathrm{e}^{-0,1 \cdot 2j} + 5\mathrm{e}^{-0,1 \cdot (2j+2)}.$$

Pro srovnání zaznamenáme do tabulky prvních 6 hodnot pravděpodobnosti

j	zaokrouhlovací metoda	metoda shody lokálních momentů
0	$0,095163$	$0,093654$
1	$0,164019$	$0,164293$
2	$0,134288$	$0,134511$
3	$0,109945$	$0,110129$
4	$0,090016$	$0,090166$
5	$0,073699$	$0,073821$

✍

Cvičení

1. Modelujte počet škod na jednu smlouvu během jednoho roku. Konečné výsledky zaokrouhlete na dvě desetinná místa.

počet škod k	počet pojistných smluv
0	9 048
1	905
2	45
3	2
4 a více	0
Celkem	10 000

Výsledek:

počet škod k	počet pojistných smluv	počet pojistných smluv modelovaných $Po(\lambda)$
0	9 048	$9\,047,47$
1	905	$905,65$
2	45	$45,33$
3	2	$1,51$
4 a více	0	$0,04$
Celkem	10 000	$10\,000,00$

2. Na základě dat byla odhadnuta střední výše nároku na 2 364 Kč a rozptyl na 291 423 Kč za 100 pojistných nároků. Odhadněte rozdělení výše nároku pomocí log-normálního rozdělení. Na základě tohoto odhadu spočítejte pravděpodobnost, že výše nároku přesáhne 2 600 Kč.

   $[\widehat{\sigma} \doteq 0,225461; \widehat{\mu} \doteq 7,742694; P(X > 2\,600) \doteq 1 - \Phi(0,53) = 0,298060]$

3. Ukažte, že součet n nezávislých náhodných veličin $X_1, X_2, \ldots, X_n$ s gamma rozdělením o stejném parametru β má opět gamma rozdělení.

   $$\left[Y = X_1 + X_2 + \cdots + X_n \sim Gam\Big(\sum_{j=1}^{n} \alpha_j, \beta\Big)\right]$$

4. Předpokládejme, že S má složené Poissonovo rozdělení s parametrem $\lambda = 0,7$ a že maximální počet nároků je 4. Mějme výše individuálních pojistných nároků dané tabulkou

výše nároků	pravděpodobnosti
1	$0,425$
2	$0,375$
3	$0,200$

Vypočtěte $p_S(x)$ a $F_S(x)$ na sedm desetinných míst.

Výsledek:

$p_N(0) \doteq 0,4965853; p_N(1) \doteq 0,3476097; p_N(2) \doteq 0,1216634;$
$p_N(3) \doteq 0,0283881; p_N(4) \doteq 0,0049679$

x	0	1	2	3	4
$p_S(x)$	$0,4965853$	$0,1477341$	$0,1523291$	$0,1104814$	$0,0437223$
$F_S(x)$	$0,4965853$	$0,6443194$	$0,7966485$	$0,9071299$	$0,9508522$
x	5	6	7	8	9
$p_S(x)$	$0,0269880$	$0,0128550$	$0,0050960$	$0,0023036$	$0,0008167$
$F_S(x)$	0.9778402	$0,9906952$	$0,9957912$	$0,9980949$	$0,9989116$
x	10	11	12	-	-
$p_S(x)$	$0,0002352$	$0,0000596$	$0,0000079$	-	-
$F_S(x)$	$0,9991468$	$0,9992065$	$0,9992144$	-	-

5. Nechť má počet pojistných událostí Poisson-geometrické rozdělení s parametry $\lambda = 1,5; \beta = 2$ a nechť jsou výše individuálních pojistných nároků $0,1,2,3$ uplatněny s pravděpodobnostmi $0,25; 0,4; 0,2$ a $0,15$. Určete rozdělení celkového pojistného nároku (prvních 5 hodnot).

   [$p_S(0) \doteq 0,406570; p_S(1) \doteq 0,078061; p_S(2) \doteq 0,071504,$
   $p_S(3) \doteq 0,075016; p_S(4) \doteq 0,057721$]

6. Mějme

počet pojistných událostí	pravděpodobnosti
0	0,25
1	0,40
2	0,15
3	0,10
4	0,08
5	0,02

výše nároků	pravděpodobnosti
1	0,55
2	0,35
3	0,10

Určete pravděpodobnostní a distribuční funkci celkového pojistného nároku. Dále vypočítejte $\mathrm{E}(S)$ a $\mathrm{Var}(S)$. Vše zaokrouhlete na sedm desetinných míst.

Výsledek:
$\mathrm{E}(S) \doteq 2,2010000$; $\mathrm{Var}(S) \doteq 3,8167740$

x	0	1	2	3	4	5
$p_S(x)$	$0,2500000$	$0,2200000$	$0,1853750$	$0,1143875$	$0,0739580$	$0,0594281$
$F_S(x)$	$0,2500000$	$0,4700000$	$0,6553750$	$0,7697625$	$0,8437205$	$0,9031486$
x	6	7	8	9	10	11
$p_S(x)$	$0,0436512$	$0,0280263$	$0,0150937$	$0,0067015$	$0,0024475$	$0,0007268$
$F_S(x)$	$0,9467998$	$0,9748260$	$0,9899197$	$0,9966212$	$0,9990687$	$0,9997956$
x	12	13	14	15	-	-
$p_S(x)$	$0,0001708$	$0,0000300$	$0,0000035$	$0,0000002$	-	-
$F_S(x)$	$0,9999663$	$0,9999963$	$0,9999998$	1	-	-

7. Nechť náhodná veličina S_1 má složené Poissonovo rozdělení s parametrem $\lambda_1 = 2$, kde výše pojistných nároků $1, 2, 3, 4$ jsou uplatněny s pravděpodobnostmi $0,475; 0,25; 0,175$ a $0,1$. Dále nechť má S_2 také složené Poissonovo rozdělení s parametrem $\lambda_2 = 1,5$, kde výše pojistných nároků $2, 3, 4$ jsou uplatněny s pravděpodobnostmi $0,5; 0,3$ a $0,2$. Pro S_1 nezávislé na S_2 nalezněte distribuční funkci $S = S_1 + S_2$.

   Výsledek:

$$F_S(x) = \begin{cases} 0, & 0 \leq x < 1, \\ \frac{19}{70}, & 1 \leq x < 2, \\ \frac{22}{35}, & 2 \leq x < 3, \\ \frac{6}{7}, & 3 \leq x < 4, \\ 1, & x \geq 4. \end{cases}$$

8. Předpokládejme, že počet pojistných nároků má binomické rozdělení a že výše individuálního pojistného nároku má gamma rozdělení. Nalezněte moment generující funkci celkového pojistného nároku.

$$\left[M_S(t) = \left[1 + \upsilon \cdot \left(\left(\tfrac{1}{1-\beta t}\right)^{\alpha} - 1\right)\right]^{n}\right]$$

9. Nechť se N řídí Poissonovým rozdělením s parametrem $\lambda = 2$ a X má gamma rozdělení s parametry $\alpha = 7$ a $\beta = \frac{1}{3}$. Určete $\mathrm{E}(S)$, $\mathrm{Var}(S)$ a $M_S(t)$.

$$\left[\mathrm{E}(S) = \tfrac{14}{3}; \mathrm{Var}(S) = \tfrac{112}{9}; M_S(t) = \mathrm{e}^{\frac{4\,374}{(3-t)^7}-2}\right]$$

10. Určete moment generující funkci celkového pojistného nároku, má-li počet pojistných událostí negativně binomické rozdělení s parametry $m \in \mathbb{N}, \beta > 0$ a výše individuálních nároků exponenciální rozdělení s parametrem $\lambda > 0$. Dále ukažte, že tato moment generující funkce je shodná s moment generující funkcí binomického-exponenciálního rozdělení, kde $\frac{1+\beta}{\lambda}$ je střední hodnota exponenciálního rozdělení.

$$\left[M_S(t) = \left(\tfrac{1}{1-\beta\cdot\left(\frac{\lambda}{\lambda-t}-1\right)}\right)^m = \left(1 + \tfrac{\beta}{1+\beta}\cdot\left(\tfrac{\lambda}{\lambda-(1+\beta)t}-1\right)\right)^m;\right.$$
$M_S(t) = G_N\big(M_X(t)\big)$, kde $G_N(s) = \left(1 + \frac{\beta}{1+\beta}(s-1)\right)^m$ je generující funkce binomického rozdělení s parametry $n = m, v = \frac{\beta}{1+\beta}$ a $M_X(t) = \frac{\lambda}{\lambda-(1+\beta)t}$ je moment generující funkce exponenciálního rozdělení, jehož $\mathrm{E}(X) = \frac{1+\beta}{\lambda}$.$\left.\right]$

11. Pozorovaná střední hodnota, resp. směrodatná odchylka, počtu pojistných nároků a výše individuálního nároku je 6,7, resp. 2,3, a 179 247, resp. 52 141. Použitím normálního rozdělení jakožto aproximační rozdělení spočtěte pravděpodobnost, že celkový pojistný nárok převýší 140 % očekávaného pojistného plnění.

$$\left[P\big(S > 1{,}4\cdot\mathrm{E}(S)\big) \doteq 1 - \Phi(1{,}11) = 0{,}133500\right]$$

12. Pozorovaná střední hodnota, resp. směrodatná odchylka, počtu pojistných nároků a výše individuálního nároku je 2,4, resp. 1,9, a 52 174, resp. 12 036. Určete E(S) a Var(S). Dále použitím normálního a lognormálního jakožto aproximační rozdělení zjistěte s jakou pravděpodobností celkový pojistný nárok nepřevýší 120 % očekávaného pojistného plnění.

$$\left[\mathrm{E}(S) \doteq 125\,218; \mathrm{Var}(S) \doteq 1{,}017455\cdot 10^{10};\right.$$
$$P\big(S \le 1{,}2\cdot\mathrm{E}(S)\big) \doteq \Phi(0{,}25) = 0{,}598710;$$
$$\left.P\big(S \le 1{,}2\cdot\mathrm{E}(S)\big) \doteq \Phi(0{,}61) = 0{,}729070\right]$$

13. Nechť se výše pojistných nároků řídí Paretovým rozdělením s parametry α a λ_2. 20. percentil je $2-k$ a 90. percentil je $4-2k$. Počet pojistných událostí má Poissonovo rozdělení s parametrem $\lambda_1 = 0,9$. Použitím log-normálního rozdělení jakožto aproximační rozdělení celkového pojistného nároku určete pro $\alpha = 1,5$ pojistné takové, že pravděpodobnost, že celkový pojistný nárok převýší pojistné, je dvouprocentní.

$[x_{0,98} = 9,109348]$

14. Předpokládejme, že S má složené Poissonovo rozdělení s parametrem $\lambda = 0,7$. Mějme výše individuálních pojistných nároků dané tabulkou

výše nároků	pravděpodobnosti
1	$0,425$
2	$0,375$
3	$0,200$

Vypočtěte $p_S(x)$ Panjerovou rekurzí s přesností na sedm desetinných míst, a to pro $x = 0,1,\ldots,6$.

$[p_S(0) \doteq 0,4965853; p_S(1) \doteq 0,1477341; p_S(2) \doteq 0,1523291;$
$p_S(3) \doteq 0,1104814; p_S(4) \doteq 0,0437223; p_S(5) \doteq 0,0269977;$
$p_S(6) \doteq 0,0128980]$

15. Nechť se X řídí exponenciálním rozdělením s parametrem $\lambda = 1$. Pro $h = 2$ proveďte diskretizaci tohoto rozdělení zaokrouhlovací metodou i metodou shody lokálních momentů pro $j = 0,1,\ldots,4$.

Výsledek:

j	zaokrouhlovací metoda	metoda shody lokálních momentů
0	$0,632121$	$0,567668$
1	$0,318092$	$0,373823$
2	$0,043049$	$0,050591$
3	$0,005826$	$0,006847$
4	$0,000788$	$0,000927$

Kapitola 5

Teorie ruinování

Teorie ruinování, jejíž základy položil roku 1903 švédský matematik a aktuár Filip Lundberg, se zabývá modely kolektivního rizika v dlouhém období. Často se využívá k modelování solventnosti[1] pojišťoven a k jejich dlouhodobému finančnímu plánování.

Ruinováním chápejme skutečnost, že v určitém časovém okamžiku přebytek pojišťovny klesne do záporných hodnot. Ke sledování přebytku je třeba nejen modelovat celkovou škodu z pojistných událostí, ale je také zapotřebí zahrnout inkasované pojistné, investiční příjmy a výdaje atd.

5.1 Procesy a s nimi související pojmy

Definice 5.1. Mějme pravděpodobnostní prostor $(\Omega, \mathcal{A}, P)$, indexovou množinu $T \subseteq \mathbb{R}$ a reálnou funkci $Z : \Omega \times T \to \mathbb{R}$ definovanou pro $\forall \omega \in \Omega$ a $\forall t \in T$. Jestliže pro $\forall t \in T$ je $Z(\omega, t)$ borelovsky měřitelná funkce vzhledem k $\mathcal{A}$[2], pak tuto funkci nazýváme stochastickým procesem.

Poznámka. Stochastický proces zapisujeme zjednodušeně $\{Z_t, t \in T\}$[3] místo $\{Z(\omega, t), \omega \in \Omega, t \in T\}$. V našem textu T značí časovou množinu, budeme proto dále uvažovat jen $T \subseteq \mathbb{R}_0^+$.

[1]**Solventnost pojistitele** je jeho schopnost plnit své přijaté závazky.

[2]$\forall B \in \mathcal{B}, \forall t \in T$ platí $Z^{-1}(B) = \{\omega \in \Omega : Z(\omega, t) \in B\} \in \mathcal{A}$, kde $\mathcal{B}$ je σ-algebra borelovských podmnožin.

[3]Pro všechna pevná $t \in T$ je Z_t náhodná veličina.

Definice 5.2. Je-li $T = \{0, 1, 2, \dots\}$, mluvíme o procesu s diskrétním časem, píšeme $\{Z_t, t \in \mathbb{N}_0\}$. Je-li $T = [0, \infty)$, hovoříme o procesu se spojitým časem, zapisujeme $\{Z_t, t \geq 0\}$.

Definice 5.3. Dvojice $(\mathsf{S}, \mathcal{S})$, kde S je množina hodnot náhodných veličin Z_t a $\mathcal{S}$ je σ-algebra podmnožin S, se nazývá stavový prostor stochastického procesu $\{Z_t, t \in T\}$. Pokud Z_t nabývají pouze diskrétních hodnot, jedná se o proces s diskrétními stavy. Nabývají-li Z_t hodnot z nějakého intervalu, mluvíme o procesu se spojitými stavy.

Definice 5.4. Stochastický proces má stacionární přírůstky, jestliže rozdělení $Z_{t+s} - Z_t$ závisí pouze na délce intervalu, tj. na s.

Definice 5.5. Nechť $t_i \in T$, $i = 0, 1, \dots, n$ a $n \in \mathbb{N}$, pak má stochastický proces nezávislé přírůstky, jestliže pro $0 \leq t_0 < t_1 < t_2 < \dots t_n$ jsou $Z_{t_0} - Z_0$, $Z_{t_1} - Z_{t_0}$, $Z_{t_2} - Z_{t_1}$, $\dots$, $Z_{t_n} - Z_{t_{n-1}}$ nezávislé.

Definice 5.6. Čítací proces je stochastický proces s diskrétními stavy takový, že pro $\forall s, t \in T$, $t > s$ platí $Z_t \geq Z_s$. Obvykle $Z_0 = 0$.

Nás budou zajímat především Markovovy čítací procesy, pro jejichž pravděpodobnosti přechodu platí

$$P(Z_{t+s} = j | Z_s = i, Z_u = z_u \text{ pro } \forall u < s) = P(Z_{t+s} = j | Z_s = i). \tag{5.1}$$

Jedná se o tzv. „procesy bez paměti“ – budoucí chování závisí pouze na stavu přítomném, nikoliv na stavech minulých.

Zavedeme si značení důležitých procesů:

$$\begin{array}{lll}
\{U_t, t \geq 0\} & \big(\text{diskrétní verze}: \{U_t, t \in \mathbb{N}_0\}\big) & \text{proces přebytku} \\
\{P_t, t \geq 0\} & \big(\text{diskrétní verze}: \{P_t, t \in \mathbb{N}_0\}\big) & \text{proces vybraného pojistného} \\
\{S_t, t \geq 0\} & \big(\text{diskrétní verze}: \{S_t, t \in \mathbb{N}_0\}\big) & \text{proces ztrát} \\
\{N_t, t \geq 0\} & \big(\text{diskrétní verze}: \{N_t, t \in \mathbb{N}_0\}\big) & \text{proces pojistných nároků}
\end{array}$$

U_t udává přebytek portfolia v čase t, celkovou bilanci v čase t. V čase $t = 0$

máme počáteční přebytek $U_0 = u$. V čase $t \geq 0$ lze přebytek vyjádřit jako

$$U_t = u + P_t - S_t. \tag{5.2}$$

P_t udává celkové pojistné vybrané do času t a S_t celkové pojistné plnění vyplacené do času t. N_t uvádí počet uplatněných pojistných nároků do času t. Je-li $S_t = X_1 + X_2 + \cdots + X_{N_t}$ součet IID náhodných veličin X_i, $i = 1, 2, \ldots, N_t$, nezávislých na N_t pro $\forall t \geq 0$. Potom má S_t složené rozdělení.

5.2 Ruinování

Definice 5.7. Čas ruinování definujeme jako $\mathcal{T} = \inf\{t : U_t < 0\}$.

Definice 5.8. Pravděpodobnost přežití v nekonečném spojitém časovém horizontu[4] definujeme

$$\phi(u) = P\big(U_t \geq 0 \text{ pro } \forall t \geq 0 | U_0 = u\big). \tag{5.3}$$

V tomto případě nás zajímá, s jakou pravděpodobností přežije portfolio, jehož přebytek je nepřetržitě monitorován, nekonečně dlouhou dobu.

Poznamenejme si, že přebytek bývá v praxi spíše kontrolován v pravidelných časových intervalech.

Definice 5.9. Pravděpodobnost přežití v konečném diskrétním časovém horizontu[5] je dána

$$\widetilde{\phi}(u, \tau) = P\big(U_t \geq 0 \text{ pro } \forall t = 0, 1, \ldots, \tau | U_0 = u\big). \tag{5.4}$$

Zde uvažujeme portfolio přežívajíc do času τ, jehož přebytek je kontrolován na konci každého období (měsíc, čtvrtletí, rok. . .).

Definice 5.10. Pravděpodobnost přežití v nekonečném diskrétním časovém horizontu[6] je

$$\widetilde{\phi}(u) = P\big(U_t \geq 0 \text{ pro } \forall t = 0, 1, \ldots | U_0 = u\big). \tag{5.5}$$

[4]continuous-time, infinite-horizon survival probability
[5]discrete-time, finite-horizon survival probability
[6]discrete-time, infinite-horizon survival probability

Definice 5.11. Pravděpodobnost přežití v konečném spojitém časovém horizontu[7] je definována

$$\phi(u,\tau) = P\big(U_t \geq 0 \text{ pro } \forall 0 \leq t \leq \tau | U_0 = u\big). \tag{5.6}$$

Je jasné, že platí následující nerovnosti a limitní vztahy:

$$\begin{aligned} \widetilde{\phi}(u,\tau) &\geq \widetilde{\phi}(u) \geq \phi(u), \\ \widetilde{\phi}(u,\tau) &\geq \phi(u,\tau) \geq \phi(u), \\ \lim_{\tau\to\infty} \phi(u,\tau) &= \phi(u), \\ \lim_{\tau\to\infty} \widetilde{\phi}(u,\tau) &= \widetilde{\phi}(u). \end{aligned}$$

Pokud se počet pojistných nároků za stanovené časové období zvýší (přebytek U_t se sníží), pak pravděpodobnost přežití v diskrétním časovém horizontu konverguje k pravděpodobnosti přežití ve spojitém časovém horizontu.

Definice 5.12. Pravděpodobnost ruinování

a) v nekonečném spojitém časovém horizontu definujeme

$$\psi(u) = 1 - \phi(u), \tag{5.7}$$

b) v konečném diskrétním časovém horizontu je dána

$$\widetilde{\psi}(u,\tau) = 1 - \widetilde{\phi}(u,\tau), \tag{5.8}$$

c) v nekonečném diskrétním časovém horizontu je

$$\widetilde{\psi}(u) = 1 - \widetilde{\phi}(u), \tag{5.9}$$

d) v konečném spojitém časovém horizontu je definována

$$\psi(u,\tau) = 1 - \phi(u,\tau). \tag{5.10}$$

[7]continuous-time, finite-horizon survival probability

5.3 Modely ruinování v diskrétním čase

Nechť $\overline{P_t}$ je pojistné inkasované v t-tém období, $\overline{S_t}$ pojistné plnění vyplacené v t-tém období a $\overline{C_t}$ jakýkoliv jiný cash-flow t-tého období. Pak přebytek na konci t-tého období získáme

$$U_t = u + \sum_{j=1}^{t} \left(\overline{P_j} + \overline{C_j} - \overline{S_j} \right) = U_{t-1} + \underbrace{\overline{P_t} + \overline{C_t} - \overline{S_t}}_{V_t}, \tag{5.11}$$

kde $V_t = \overline{P_t} + \overline{C_t} - \overline{S_t}$ je přírůstek procesu přebytku t-tého období. Nezávisí na přírůstcích jednotlivých období předcházejících t-tému, ale pouze na přebytku U_{t-1}. Díky této skutečnosti je $\{U_t, t = 1, 2, \dots\}$ Markovovým procesem s diskrétním časem. Přírůstky procesu přebytku jsou nejen nezávislé, ale též stacionární.

Ke stanovení pravděpodobnosti ruinování definujme ještě druhý proces $\{U_t^*, t = 1, 2, \dots\}$ s počátečním přebytkem $U_0^* = u$:

$$\begin{aligned} U_t^* &= U_{t-1}^* + V_t^*, \\ V_t^* &= \begin{cases} 0, & U_{t-1}^* < 0, \\ V_t, & U_{t-1}^* \geq 0. \end{cases} \end{aligned} \tag{5.12}$$

Pravděpodobnost přežití v konečném diskrétním časovém horizontu určíme z

$$\widetilde{\phi}(u, \tau) = P(U_\tau^* \geq 0). \tag{5.13}$$

Odtud

$$\widetilde{\psi}(u, \tau) = 1 - \widetilde{\phi}(u, \tau) = P(U_\tau^* < 0). \tag{5.14}$$

5.4 Modely ruinování ve spojitém čase

V této podkapitole se zaměříme na modely, jež sledují přebytek nepřetržitě v čase. Jelikož analýza těchto modelů může být obtížná, ke zjednodušení předpokládejme, že se počet pojistných událostí řídí Poissonovým rozdělením.

Definice 5.13. $o(h)$[8] představuje jakoukoliv funkci $f(h)$ s vlastností

$$\lim_{h \to 0} \frac{f(h)}{h} = 0. \tag{5.15}$$

Funkce $f(h)$ klesá k nule pomaleji než h.

Definice 5.14. (Homogenní) Poissonův proces s intenzitou λ je proces $\{N_t, t \geq 0\}$ nabývající hodnot na množině $\mathsf{S} = \{0, 1, 2, \dots\}$ takový, že

a) $N_0 = 0 \quad \text{a} \quad N_t \geq N_s$ pro $t > s$

b) jeho přírůstky jsou stacionární

c) jeho přírůstky jsou nezávislé

Je-li $t > s$, pak počet pojistných událostí $N_t - N_s$ vzniklých na intervalu $[s, t]$ nezávisí na počtu událostí N_s vzniklých na intervalu $[0, s]$.

d) $$P(N_{t+h} = k + n | N_t = k) = \begin{cases} 1 - \lambda h + o(h), & n = 0, \\ \lambda h + o(h), & n = 1, \\ o(h), & n > 1. \end{cases} \tag{5.16}$$

$\{N_t, t \geq 0\}$ je Markovův čítací proces se spojitým časem.

Věta 5.15. *Nechť $\{N_t, t \geq 0\}$ je Poissonův proces s intenzitou λ, potom pro $\forall t \geq 0$ má N_t Poissonovo rozdělení s parametrem λt, tj.*

$$P(N_t = k) = \mathrm{e}^{-\lambda t} \cdot \frac{(\lambda t)^k}{k!}, \quad k = 0, 1, 2, \dots \tag{5.17}$$

Důkaz. Podmíníme N_{t+h} veličinou N_t. Z věty o úplné pravděpodobnosti

a) pro $k = 0$ $\big[P(N_{t+h} = k)\big]$ dostaneme

$$\begin{aligned} P(N_{t+h} = 0) &= P(N_{t+h} = 0 | N_t = 0) \cdot P(N_t = 0) = \\ &= P(N_{t+h} - N_t = 0) \cdot P(N_t = 0) \overset{\text{def.}}{=} \big(1 - \lambda h + o(h)\big) \cdot P(N_t = 0). \end{aligned}$$

[8] $o(h)$ samo o sobě není funkcí. Např. $f(x) = x^3$ je $o(h)$, protože $\lim\limits_{h \to 0} \frac{h^3}{h} = 0$.

Z rovnice odečteme $P(N_t = 0)$ a celé vydělíme h

$$\frac{P(N_{t+h} = 0) - P(N_t = 0)}{h} = \frac{\big(1 - \lambda h + o(h)\big) \cdot P(N_t = 0) - P(N_t = 0)}{h} =$$
$$= \frac{P(N_t = 0) \cdot \big(1 - \lambda h + o(h) - 1\big)}{h} =$$
$$= -\lambda P(N_t = 0) + \frac{o(h) \cdot P(N_t = 0)}{h}.$$

V limitě necháme $h \to 0$

$$\lim_{h \to 0} \frac{P(N_{t+h} = 0) - P(N_t = 0)}{h} = \lim_{h \to 0} \left[-\lambda P(N_t = 0) + \frac{o(h) \cdot P(N_t = 0)}{h} \right]$$

a obdržíme

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} P(N_t = 0) = -\lambda P(N_t = 0).$$

Jedná se o diferenciální rovnici s počáteční podmínkou $P(N_0 = 0) = 1$. Jejím řešením je $P(N_t = 0) = \mathrm{e}^{-\lambda t}$.

b) pro $k \geq 1$ postupujeme analogicky

$$P(N_{t+h} = k) = P(N_{t+h} = k | N_t = k) \cdot P(N_t = k) +$$
$$+ P(N_{t+h} = k | N_t = k-1) \cdot P(N_t = k-1) +$$
$$+ \sum_{j=2}^{k} P(N_{t+h} = k | N_t = k-j) \cdot P(N_t = k-j) =$$
$$= P(N_{t+h} - N_t = 0) \cdot P(N_t = k) +$$
$$+ P(N_{t+h} - N_t = 1) \cdot P(N_t = k-1) +$$
$$+ \sum_{j=2}^{k} P(N_{t+h} - N_t = j) \cdot P(N_t = k-j) \stackrel{\text{def.}}{=}$$
$$\stackrel{\text{def.}}{=} (1 - \lambda h) \cdot P(N_t = k) + \lambda h \cdot P(N_t = k-1) + o(h).$$

Nyní z rovnice odečteme $P(N_t = k)$ a celé vydělíme h

$$\begin{aligned}\frac{P(N_{t+h} = k) - P(N_t = k)}{h} &= \frac{-\lambda h \cdot P(N_t = k) + \lambda h \cdot P(N_t = k-1) + o(h)}{h} = \\ &= \lambda\big(P(N_t = k-1) - P(N_t = k)\big) + \frac{o(h)}{h}.\end{aligned}$$

Pro $h \to 0$ v limitě získáme

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} P(N_t = k) = \lambda\big(P(N_t = k-1) - P(N_t = k)\big). \qquad (*)$$

Připomeňme si

$$G_{N_t}(s) = \sum_{k=0}^{\infty} P(N_t = k) \cdot s^k.$$

Rovnici $(*)$ vynásobíme s^k a sečteme přes všechna k, což povede k

$$\begin{aligned}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} G_{N_t}(s) &= \lambda s \cdot G_{N_t}(s) - \lambda \cdot G_{N_t}(s) = \\ &= \lambda(s-1) \cdot G_{N_t}(s).\end{aligned}$$

S počáteční podmínkou $G_{N_0}(s) = 1$ je řešením

$$G_{N_t}(s) = \mathrm{e}^{\lambda t \cdot (s-1)}.$$

■

Střední hodnota a ***rozptyl***:

$$\mathrm{E}(N_t) = \lambda t, \tag{5.18}$$

$$\mathrm{Var}(N_t) = \lambda t. \tag{5.19}$$

Definice 5.16. Nechť jsou $\mathcal{T}_0, \mathcal{T}_1, \mathcal{T}_2, \dots$ dány vztahem

$$\mathcal{T}_0 = 0, \ \mathcal{T}_n = \inf\{t : N_t = n\} \quad \text{pro } n \in \mathbb{N}. \tag{5.20}$$

Potom $\mathcal{T}_n$ nazýváme časem n-tého příchodu, resp. n-té pojistné události.

Definice 5.17. Časy mezi příchody[9], resp. mezi pojistnými událostmi, jsou definovány jako náhodné veličiny

$$\mathcal{W}_n = \mathcal{T}_n - \mathcal{T}_{n-1}. \tag{5.21}$$

Ze znalosti N_t lze hodnoty $\mathcal{W}_n$ najít. Z $\mathcal{W}_n$ lze N_t zrekonstruovat pomocí

$$\mathcal{T}_n = \sum_{i=1}^{n} \mathcal{W}_i, \;\; N_t = \max\{n : \mathcal{T}_n \leq t\} \quad \text{pro } n \in \mathbb{N}. \tag{5.22}$$

Věta 5.18. *Časy mezi pojistnými událostmi $\mathcal{W}_1, \mathcal{W}_2, \ldots$ jsou nezávislé a identicky exponenciálně rozdělené s parametrem λ.*

Důkaz. Nechť $\mathcal{W}_i$ je čas mezi pojistnými událostmi $i-1$ a i, kde $i = 1, 2, \ldots$. Uvažujme čas první pojistné události $\mathcal{W}_1 = \mathcal{T}_1$

$$P(\mathcal{W}_1 > t) = P(N_t = 0) \overset{(5.17)}{=} \mathrm{e}^{-\lambda t}.$$

Vidíme, že $\mathrm{e}^{-\lambda t} = 1 - F_{\mathcal{W}}(t)$, kde $F_{\mathcal{W}}(t) = 1 - \mathrm{e}^{-\lambda t}$ je distribuční funkce exponenciálního rozdělení s parametrem λ, tedy $\mathcal{W}_1 \sim Exp(\lambda)$.

Dále podmíníme $\mathcal{W}_2$ veličinou $\mathcal{W}_1$, pro $t > s$

$$P(\mathcal{W}_2 > t | \mathcal{W}_1 = s) = P(N_{t+s} - N_s = 0 | N_s = 1).$$

$\{N_s = 1\}$ se vůbec nevztahuje k časovému intervalu $(s, s+t]$, stejně tak jako $\{N_{t+s} - N_s = 0\}$ se nevztahuje k časovému intervalu $[0, s]$ – přírůstky na sobě nejsou závislé, čili

$$P(\mathcal{W}_2 > t | \mathcal{W}_1 = s) = P(N_{t+s} - N_s = 0 | N_s = 1) = P(N_{t+s} - N_s = 0) = P(\mathcal{W}_2 > t).$$

Z definice homogenního Poissonova procesu víme, že $N_{t+s} - N_s$ se řídí stejným rozdělením jako N_t (rozdělení N_t – viz věta 5.15)

$$P(N_{t+s} - N_s = 0) = P(\mathcal{W}_2 > t) = \mathrm{e}^{-\lambda t}.$$

[9]interarrival times

Odsud $\mathcal{W}_2 \sim Exp(\lambda)$.

Pro $\mathcal{W}_3, \mathcal{W}_4, \mathcal{W}_5, \dots$ pokračuje důkaz indukcí. ■

Poznámka. Zobecníme-li homogenní Poissonův proces, tzn. nahradíme-li jeho intenzitu λ funkcí intenzity $\lambda(t)$[10], získáme nehomogenní Poissonův proces, jehož přírůstky jsou stále nezávislé, ale už ne stacionární.

5.4.1 Cramér-Lundbergův model

Cramér-Lundbergův model, známý také jako klasický model rizika, má značné uplatnění v teorii ruinování. Začneme tím, že si povíme jeho předpoklady:

a) pojistné nároky jsou uplatněny v časech $0 \leq \mathcal{T}_1 \leq \mathcal{T}_2 \leq \dots$, což jsou časy příchodu homogenního Poissonova procesu $\{N_t, t \geq 0\}$,
b) pojistný nárok uplatněný v čase $\mathcal{T}_i$ má velikost X_i, kde $\{X_i\}_{i=1}^{\infty}$ je posloupnost nezávislých identicky rozdělených náhodných veličin,
c) posloupnosti $\{\mathcal{T}_i\}_{i=1}^{\infty}$ a $\{X_i\}_{i=1}^{\infty}$ si jsou vzájemně nezávislé, tedy X_i nezávisí na N_t pro $\forall t \geq 0$.

Definice 5.19. Nechť homogenní Poissonův proces $\{N_t, t \geq 0\}$ s intenzitou λ je procesem pojistných nároků. Nechť jsou výše individuálních nároků $X_1, X_2, \dots$ IID nezáporné náhodné veličiny nezávislé na N_t pro $\forall t \geq 0$. Nechť S_t udává celkovou škodu z pojistných nároků do času t, resp. na časovém intervalu $(0, t]$, a

$$S_t = \begin{cases} 0, & N_t = 0, \\ \sum_{i=1}^{N_t} X_i, & N_t > 0. \end{cases} \tag{5.23}$$

Potom pro pevné t má S_t složené Poissonovo rozdělení a proces $\{S_t, t \geq 0\}$ je složeným Poissonovým procesem. Protože $\{N_t, t \geq 0\}$ má stacionární, nezávislé přírůstky, tak i $\{S_t, t \geq 0\}$ bude mít stacionární, nezávislé přírůstky.

[10] Parametr λ se s časem mění.

Nechť jsou výše jednotlivých pojistných nároků označovány X namísto X_i.

Věta 5.20. *Pro očekávání, resp. střední hodnotu, a rozptyl složeného Poissonova procesu platí*

$$\mathrm{E}(S_t) = \lambda t \cdot \mathrm{E}(X), \tag{5.24}$$

$$\mathrm{Var}(S_t) = \lambda t \cdot \mathrm{E}\big(X^2\big). \tag{5.25}$$

Důkaz. Z věty o celkovém očekávání a o celkovém rozptylu máme

$$\begin{aligned}
\mathrm{E}(S_t) &= \mathrm{E}\big[\mathrm{E}(S_t|N_t)\big] = \mathrm{E}(N_t)\cdot\mathrm{E}(X) \overset{(5.18)}{=} \lambda t\cdot\mathrm{E}(X),\\
\mathrm{Var}(S_t) &= \mathrm{E}\big[\mathrm{Var}(S_t|N_t)\big] + \mathrm{Var}\big[\mathrm{E}(S_t|N_t)\big] =\\
&= \mathrm{E}(N_t)\cdot\mathrm{Var}(X) + \mathrm{Var}(N_t)\cdot\big(\mathrm{E}(X)\big)^2 \overset{(5.18),(5.19)}{=}\\
&\overset{(5.18),(5.19)}{=} \lambda t\cdot\Big[\mathrm{Var}(X) + \big(\mathrm{E}(X)\big)^2\Big] =\\
&= \lambda t\cdot\Big[\mathrm{E}(X^2) - \big(\mathrm{E}(X)\big)^2 + \big(\mathrm{E}(X)\big)^2\Big] = \lambda t\cdot\mathrm{E}(X^2).
\end{aligned}$$

∎

Označme $\mathrm{E}(X) = \mu$ a předpokládejme, že pojistné je vybíráno nepřetržitě s konstantní intenzitou c, tedy celkové netto pojistné[11] na časovém intervalu $(0,t]$ je $P_t = ct$. Dále předpokládejme, že celkové vybrané netto pojistné je větší než celková očekávaná škoda z pojistných nároků, tj. $P_t > \mathrm{E}(S_t)$, z čehož plyne $c > \lambda\mu$. Po zavedení rizikového parametru, resp. bezpečnostní přirážky, $\theta > 0$, obdržíme

$$c = (1+\theta)\cdot\lambda\mu. \tag{5.26}$$

Přebytek v čase t daný vztahem (5.2) přejde v našem nynějším modelu do tvaru

$$U_t = u + ct - S_t, \quad t \geq 0. \tag{5.27}$$

Naším cílem je analyzovat $\phi(u)$ a $\psi(u) = 1 - \phi(u)$.

[11] **Netto pojistné** je pojistné vypočítané tak, aby pojišťovně v průměru pokrylo všechna pojistná plnění.

Adjustační koeficient

Definice 5.21. Nechť $t = \kappa$ je nejmenší kladné řešení rovnice

$$1 + (1+\theta)\cdot \mu t = M_X(t), \tag{5.28}$$

kde $M_X(t) = \mathrm{E}(\mathrm{e}^{tX})$ je moment generující funkce výše pojistných nároků. Existuje-li κ, pak se nazývá adjustační koeficient či Lundbergův exponent.

Abychom viděli, že existuje řešení, budeme v rovině uvažovat dvě křivky

$$\begin{aligned} y_1(t) &= 1 + (1+\theta)\cdot \mu t,\\ y_2(t) &= M_X(t). \end{aligned}$$

První rovnice je rovnicí přímky s kladnou směrnicí $(1+\theta)\cdot\mu$ a druhá je rovnicí moment generující funkce. Předpokládejme, že $M_X(t)$ existuje pro všechna $t \geq 0$[12]. Spočítejme si

$$\begin{aligned} y_1(0) &= 1, \\ y_2(0) &= 1, \end{aligned} \qquad \begin{aligned} y_1'(t) &= (1+\theta)\cdot\mu > 0,\\ y_2'(t) &= \mathrm{E}(X\cdot \mathrm{e}^{tX}) > 0,\\ y_2''(t) &= \mathrm{E}(X^2\cdot \mathrm{e}^{tX}) > 0, \end{aligned} \qquad \begin{aligned} y_1'(0) &= (1+\theta)\cdot\mu,\\ y_2'(0) &= \mathrm{E}(X) = \mu. \end{aligned}$$

Bod $[0, 1]$ je počátečním bodem obou křivek. Přímka $y_1(t)$ je rostoucí, stejně tak jako křivka $y_2(t)$. Zpočátku jsou funkční hodnoty konvexní křivky $y_2(t)$ nižší než funkční hodnoty přímky $y_1(t)$. To se však obrátí, jakmile se obě křivky protnou. Bod průniku je hledaný adjustační koeficient $\kappa > 0$.

Pro obecně zadané rozdělení náhodné veličiny X nelze κ určit explicitně. V takovém případě provedeme odhad hodnoty κ. Začneme tím, že (5.28) přepíšeme do tvaru

$$\begin{aligned} 1 + (1+\theta)\cdot\mu\kappa = \mathrm{E}(\mathrm{e}^{\kappa X}) = \mathrm{E}\left(1 + \kappa X + \frac{1}{2}\kappa^2 X^2 + \cdots\right) > \\ > \mathrm{E}\left(1 + \kappa X + \frac{1}{2}\kappa^2 X^2\right) = 1 + \kappa\mu + \frac{1}{2}\kappa^2\cdot \mathrm{E}(X^2). \end{aligned}$$

[12] Moment generující funkci nemají např. log-normální rozdělení a Paretovo rozdělení.

Pokračujeme v úpravě

$$\begin{aligned}
1+(1+\theta)\cdot\mu\kappa &> 1+\kappa\mu+\frac{1}{2}\kappa^2\cdot\mathrm{E}(X^2) && /-(1+\kappa\mu)\\
\theta\mu\kappa &> \frac{1}{2}\kappa^2\cdot\mathrm{E}(X^2) && /:\kappa\\
\theta\mu &> \frac{\kappa}{2}\cdot\mathrm{E}(X^2)\\
\kappa &< \frac{2\theta\mu}{\mathrm{E}(X^2)}.
\end{aligned}$$

κ má hodnotu nižší jeho než počáteční odhad

$$\widehat{\kappa} \doteq \frac{2\theta\mu}{\mathrm{E}(X^2)}. \tag{5.29}$$

Definujme si

$$\mathcal{H}(t) = 1+(1+\theta)\cdot\mu t - M_X(t). \tag{5.30}$$

$\kappa > 0$ splňuje $\mathcal{H}(\kappa) = 0$. K numerickému přiblížení se skutečné hodnotě κ použijeme Newton-Raphsonovu metodu s počáteční hodnotou $\kappa_0 = \widehat{\kappa}$

$$\kappa_{j+1} = \kappa_j - \frac{\mathcal{H}(\kappa_j)}{\mathcal{H}'(\kappa_j)}, \tag{5.31}$$

kde $\mathcal{H}'(t) = (1+\theta)\cdot\mu - M_X'(t)$.

Lundbergova nerovnost

Adjustační koeficient je mírou rizika, neboť vyjadřuje rychlost poklesu pravděpodobnosti ruinování v závislosti na výši počáteční rezervy.

Věta 5.22. *Nechť $\kappa > 0$ je adjustační koeficient. Potom pravděpodobnost ruinování $\psi(u)$ splňuje*

$$\psi(u) \le \mathrm{e}^{-\kappa u}, \quad u \ge 0. \tag{5.32}$$

Důkaz. Nechť $\psi_n(u)$ značí pravděpodobnost, že ruinování nastane před n-tou nebo při n-té pojistné události pro $n = 0, 1, 2, \ldots$. Indukcí přes n dokážeme platnost věty. Zjevně $\psi_0(u) = 0 \le \mathrm{e}^{-\kappa u}$. Předpokládejme, že $\psi_n(u) \le \mathrm{e}^{-\kappa u}$. Chceme ukázat, že i $\psi_{n+1}(u) \le \mathrm{e}^{-\kappa u}$.

Čas do výskytu první pojistné události má exponenciální rozdělení s pravděpodobnostní hustotou $f_{\mathcal{W}}(t) = \lambda \mathrm{e}^{-\lambda t}$. Nastane-li první pojistná událost v čase $t > 0$, pak přebytek dostupný k jejímu vyplacení bude $u+ct$. Ruinování nastane při první události, pokud výše nároku x převýší $u+ct$. Pravděpodobnost, že nastane je $1-F_X(u+ct)$. Je-li výše nároku $0 \leq x \leq u+ct$, k ruinování při první pojistné události nedojde. Po vyplacení pojistného plnění, zůstane přebytek $u + ct - x$.
Ruinování může nastat později, při dalších n pojistných událostech. Poněvadž má proces přebytku stacionární a nezávislé přírůstky, pravděpodobnost ruinování je stejná, jako kdybychom začali v čase první škody s počátečním přebytkem $u + ct - x$ a k ruinování došlo v prvních n událostech.

Z věty o úplné pravděpodobnosti obdržíme

$$\psi_{n+1}(u) = \int_0^{\infty} \left[1 - F_X(u + ct) + \int_0^{u+ct} \psi_n(u + ct - x) \mathrm{d}F_X(x) \right] \lambda \mathrm{e}^{-\lambda t} \mathrm{d}t.$$

Užitím indukčního předpokladu $\psi_n(u + ct - x) \leq \mathrm{e}^{-\kappa \cdot (u+ct-x)}$ a faktu, že $\mathrm{e}^{-\kappa \cdot (u+ct-x)} \geq 1$, je-li $x \geq u + ct$, máme

$$\begin{aligned} \psi_{n+1}(u) &= \int_0^{\infty} \left[\int_{u+ct}^{\infty} \mathrm{d}F_X(x) + \int_0^{u+ct} \psi_n(u + ct - x) \mathrm{d}F_X(x) \right] \lambda \mathrm{e}^{-\lambda t} \mathrm{d}t \leq \\ &\leq \int_0^{\infty} \left[\int_{u+ct}^{\infty} \mathrm{e}^{-\kappa \cdot (u+ct-x)} \mathrm{d}F_X(x) + \int_0^{u+ct} \mathrm{e}^{-\kappa \cdot (u+ct-x)} \mathrm{d}F_X(x) \right] \lambda \mathrm{e}^{-\lambda t} \mathrm{d}t. \end{aligned}$$

Z vlastnosti Riemannova integrálu[13]:

$$\psi_{n+1}(u) \leq \int_0^{\infty} \left[\int_0^{\infty} \mathrm{e}^{-\kappa \cdot (u+ct-x)} \mathrm{d}F_X(x) \right] \lambda \mathrm{e}^{-\lambda t} \mathrm{d}t$$

[13]Nechť $a, b, c \in \mathbb{R}, a < b < c$, a nechť je funkce f integrovatelná na každém z intervalů $[a, c]$ a $[c, b]$. Pak je funkce f integrovatelná na $[a, b]$ a platí

$$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x = \int_a^c f(x)\mathrm{d}x + \int_c^b f(x)\mathrm{d}x.$$

Upravme pravou stranu nerovnosti

$$\begin{aligned}\int_0^\infty \left[\int_0^\infty \mathrm{e}^{-\kappa\cdot(u+ct-x)}\mathrm{d}F_X(x)\right]\lambda\mathrm{e}^{-\lambda t}\mathrm{d}t &= \int_0^\infty \left[\mathrm{e}^{-\kappa u}\cdot\mathrm{e}^{-\kappa ct}\int_0^\infty \mathrm{e}^{\kappa x}\mathrm{d}F_X(x)\right]\lambda\mathrm{e}^{-\lambda t}\mathrm{d}t = \\ &= \lambda\mathrm{e}^{-\kappa u}\int_0^\infty \mathrm{e}^{-t\cdot(\lambda+\kappa c)}\big(M_X(\kappa)\big)\mathrm{d}t = \\ &= \lambda M_X(\kappa)\cdot\mathrm{e}^{-\kappa u}\int_0^\infty \mathrm{e}^{-t\cdot(\lambda+\kappa c)}\mathrm{d}t \\ &\quad\Big|\text{subst.: } t(\lambda+\kappa c)=v;\,(\lambda+\kappa c)\mathrm{d}t=\mathrm{d}v\Big| = \\ &= \lambda M_X(\kappa)\cdot\mathrm{e}^{-\kappa u}\int_0^\infty \frac{1}{\lambda+\kappa c}\cdot\mathrm{e}^{-v}\mathrm{d}v = \\ &= \frac{\lambda M_X(\kappa)}{\lambda+\kappa c}\cdot\mathrm{e}^{-\kappa u}.\end{aligned}$$

Celkově dostáváme

$$\psi_{n+1}(u) \le \frac{\lambda M_X(\kappa)}{\lambda+\kappa c}\cdot\mathrm{e}^{-\kappa u}.$$

Z (5.26) a (5.28):

$$\lambda M_X(\kappa) = \lambda\cdot\big(1+(1+\theta)\cdot\mu\kappa\big) = \lambda+\kappa\cdot\underbrace{(1+\theta)\cdot\lambda\mu}_{c} = \lambda+\kappa c,$$

a tak $\psi_{n+1}(u) \le \mathrm{e}^{-\kappa u}$.

Protože $\psi_n(u) \le \mathrm{e}^{-\kappa u}$ pro všechna n, pak $\psi(u) = \lim\limits_{n\to\infty}\psi_n(u) \le \mathrm{e}^{-\kappa u}$. ■

Věta nám umožňuje zkoumat vztah mezi počátečním přebytkem u a bezpečnostní přirážkou θ. Oba parametry pojišťovna kontroluje.

Řekněme, že jsme ochotni tolerovat pravděpodobnost ruinování ξ a že máme k dispozici přebytek $U_0 = u$. Potom rizikový parametr

$$\theta = \frac{u\Big[\mathrm{E}\Big(\mathrm{e}^{-\frac{\ln(\xi)}{u}\cdot X}\Big)-1\Big]}{-\mu\ln(\xi)} - 1$$

zajišťuje, že je splněn vztah (5.28) při použití $\kappa = \frac{-\ln(\xi)}{u}$.
Pro $\kappa = \frac{-\ln(\xi)}{u}$ vidíme, že $\psi(u) \le \mathrm{e}^{-\kappa u} = \mathrm{e}^{\ln(\xi)} = \xi$.

Podobně, pro předepsané θ lze určit přebytek $U_0 = u$, tak, aby pravděpodobnost ruinování byla nižší než ξ:

$$u = \frac{-\ln(\xi)}{\kappa}.$$

Jako v předchozím odstavci, $\psi(u) \leq \mathrm{e}^{-\kappa u} = \mathrm{e}^{\ln(\xi)} = \xi$.

Důsledek Lundbergovy nerovnosti:

$$\psi(\infty) = \lim_{u\to\infty} \psi(u) = 0. \tag{5.33}$$

Protože je pravděpodobnost ruinování nezáporná, očividně

$$0 \leq \psi(u) \leq \mathrm{e}^{-\kappa u}, \tag{5.34}$$

odtud

$$0 \leq \lim_{u\to\infty} \psi(u) \leq \lim_{u\to\infty} \mathrm{e}^{-\kappa u} = 0.$$

Pravděpodobnost přežití s „nekonečně“ velkým počátečním přebytkem vypočítáme jako $\phi(\infty) = 1 - \psi(\infty) = 1$.

5.4.2 Integrodiferenciální rovnice

Definice 5.23. $\mathcal{G}(u, y) = P$(ruinování nastane při počátečním kapitálu u a deficit ihned po zruinování je nejvýše y), $u \geq 0, y \geq 0$.

Poznámka. Ihned po zruinování má pojišťovna ztrátu mezi 0 a $-y$. Platí $\psi(u) = \lim_{y\to\infty} \mathcal{G}(u, y)$ pro $u \geq 0$.

Věta 5.24. *Funkce $\mathcal{G}(u, y)$ splňuje rovnici*

$$\frac{\partial}{\partial u}\mathcal{G}(u, y) = \frac{\lambda}{c}\mathcal{G}(u, y) - \frac{\lambda}{c}\int_0^u \mathcal{G}(u-x, y)\mathrm{d}F_X(x) - \frac{\lambda}{c}\big[F_X(u+y) - F_X(u)\big],\ u \geq 0. \tag{5.35}$$

Důkaz. Podívejme se na to, co nastane s první pojistnou událostí. Čas první pojistné události se řídí exponenciálním rozdělením s hustotou $f_{\mathcal{W}}(t) = \lambda\mathrm{e}^{-\lambda t}$.

Přebytek po vyplacení první pojistné události v čase $t > 0$, jež nezpůsobí ruinování, je $u + ct - x$. Při stacionaritě a nezávislosti přírůstků procesu přebytku nastane ruinování s pravděpodobností $\mathcal{G}(u + ct - x, y)$, přičemž deficit ihned po zruinování je nejvýše y.
Pravděpodobnost ruinování při první pojistné události s deficitem nejvýše y ihned po zruinování, kde výše nároku x splňuje $u + ct \leq x \leq u + ct + y$, je $F_X(u + ct + y) - F_X(u + ct)$. (Pokud by $x > u + ct + y$, pak by deficit ihned po zruinování přesáhl hodnotu y.)

Dle věty o celkové pravděpodobnosti je

$$\mathcal{G}(u, y) = \int\limits_0^\infty \left[\int\limits_0^{u+ct} \mathcal{G}(u + ct - x, y) \mathrm{d}F_X(x) + F_X(u + ct + y) - F_X(u + ct) \right] \lambda \mathrm{e}^{-\lambda t} \mathrm{d}t.$$

Zaveďme substituci $z = u + ct \Leftrightarrow t = \frac{z-u}{c}$ $\left(\mathrm{d}t = \frac{\mathrm{d}z}{c}\right)$:

$$\begin{aligned}\mathcal{G}(u, y) &= \int_u^\infty \left[\int_0^z \mathcal{G}(z - x, y) \mathrm{d}F_X(x) + F_X(z + y) - F_X(z) \right] \lambda \mathrm{e}^{-\lambda \cdot \frac{z-u}{c}} \cdot \frac{\mathrm{d}z}{c} = \\ &= \frac{\lambda}{c} \mathrm{e}^{\frac{\lambda u}{c}} \int_u^\infty \mathrm{e}^{-\frac{\lambda z}{c}} \left[\int_0^z \mathcal{G}(z - x, y) \mathrm{d}F_X(x) + F_X(z + y) - F_X(z) \right] \mathrm{d}z.\end{aligned}$$

Vzpomeňme si na základní větu integrálního počtu[14]. Je-li g funkce, pak platí $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}u} \int_u^\infty g(z) \mathrm{d}z = -g(u)$. Ze znalosti pravidla pro derivaci součinu funkcí získáme

$$\begin{aligned}\frac{\partial}{\partial u} \mathcal{G}(u, y) &= \frac{\lambda^2}{c^2} \mathrm{e}^{\frac{\lambda u}{c}} \int_u^\infty \mathrm{e}^{-\frac{\lambda z}{c}} \left[\int_0^z \mathcal{G}(z - x, y) \mathrm{d}F_X(x) + F_X(z + y) - F_X(z) \right] \mathrm{d}z + \\ &+ \frac{\lambda}{c} \mathrm{e}^{\frac{\lambda u}{c}} \cdot \left(-\mathrm{e}^{-\frac{\lambda u}{c}} \left[\int_0^u \mathcal{G}(u - x, y) \mathrm{d}F_X(x) + F_X(u + y) - F_X(u) \right] \right) = \\ &= \frac{\lambda}{c} \mathcal{G}(u, y) - \frac{\lambda}{c} \left[\int_0^u \mathcal{G}(u - x, y) \mathrm{d}F_X(x) + F_X(u + y) - F_X(u) \right].\end{aligned}$$

■

[14] *Newton-Leibnizova formule*: Nechť funkce f je integrovatelná na intervalu $[a, b]$ a nechť je její primitivní funkce F spojitá na intervalu $[a, b]$. Pak platí

$$\int_a^b f(x) \mathrm{d}x = F(b) - F(a).$$

Věta 5.25. *Funkce $\mathcal{G}(0,y)$ je dána vztahem*

$$\mathcal{G}(0,y) = \frac{\lambda}{c}\int_0^y \Big[1 - F_X(x)\Big]\mathrm{d}x, \quad y \geq 0. \tag{5.36}$$

Důkaz. Nejdříve poznamenejme, že $0 \leq \mathcal{G}(u,y) \leq \psi(u) \leq \mathrm{e}^{-\kappa u}$, tudíž

$$0 \leq \mathcal{G}(\infty,y) = \lim_{u\to\infty}\mathcal{G}(u,y) \leq \lim_{u\to\infty}\mathrm{e}^{-\kappa u} = 0,$$

proto $\mathcal{G}(\infty,y) = 0$. Dále

$$\int_0^\infty \mathcal{G}(u,y)\mathrm{d}u \leq \int_0^\infty \mathrm{e}^{-\kappa u}\mathrm{d}u = \frac{1}{\kappa} < \infty.$$

Nechť $\mathcal{F}(y) = \int_0^\infty \mathcal{G}(u,y)\mathrm{d}u$. Víme, že $0 < \mathcal{F}(y) < \infty$. Integrováním (5.35) podle proměnné u od 0 do ∞ dostaneme

$$\begin{aligned}-\mathcal{G}(0,y) = \frac{\lambda}{c}\mathcal{F}(y) - \frac{\lambda}{c}\int_0^\infty\int_0^u \mathcal{G}(u-x,y)\mathrm{d}F_X(x)\,\mathrm{d}u-\\ -\frac{\lambda}{c}\int_0^\infty\big[F_X(u+y) - F_X(u)\big]\mathrm{d}u.\end{aligned}$$

Zaměňme pořadí integrace ve dvojném integrálu

$$\begin{aligned}\mathcal{G}(0,y) = -\frac{\lambda}{c}\mathcal{F}(y) + \frac{\lambda}{c}\int_0^\infty\int_x^\infty \mathcal{G}(u-x,y)\mathrm{d}u\,\mathrm{d}F_X(x)+\\ +\frac{\lambda}{c}\int_0^\infty\big[F_X(u+y) - F_X(u)\big]\mathrm{d}u,\end{aligned}$$

po provedení substituce $v = u - x$ $(\mathrm{d}v = \mathrm{d}u)$ ve dvojném integrálu získáme

$$\begin{aligned}\mathcal{G}(0,y) &= -\frac{\lambda}{c}\mathcal{F}(y) + \frac{\lambda}{c}\int_0^\infty\int_0^\infty \mathcal{G}(v,y)\mathrm{d}v\,\mathrm{d}F_X(x)+\\ &+\frac{\lambda}{c}\int_0^\infty\big[F_X(u+y) - F_X(u)\big]\mathrm{d}u =\\ &= -\frac{\lambda}{c}\mathcal{F}(y) + \frac{\lambda}{c}\int_0^\infty \mathcal{F}(y)\mathrm{d}F_X(x) + \frac{\lambda}{c}\int_0^\infty\big[F_X(u+y) - F_X(u)\big]\mathrm{d}u.\end{aligned}$$

Uvědomme si, že $\int_0^\infty \mathrm{d}F_X(x) = 1$, potom

$$\begin{aligned}
\mathcal{G}(0,y) &= -\frac{\lambda}{c}\mathcal{F}(y) + \frac{\lambda}{c}\mathcal{F}(y)\cdot 1 + \frac{\lambda}{c}\int_0^\infty \big[F_X(u+y) - F_X(u)\big]\mathrm{d}u = \\
&= \frac{\lambda}{c}\int_0^\infty \big[F_X(u+y) - F_X(u)\big]\mathrm{d}u = \\
&= \frac{\lambda}{c}\int_0^\infty \big[1 - F_X(u)\big]\mathrm{d}u - \frac{\lambda}{c}\int_0^\infty \big[1 - F_X(u+y)\big]\mathrm{d}u.
\end{aligned}$$

Pro první integrál použijeme substituci $x = u$ ($\mathrm{d}x = \mathrm{d}u$) a pro druhý integrál $x = u + y$ ($\mathrm{d}x = \mathrm{d}u$)

$$\mathcal{G}(0,y) = \frac{\lambda}{c}\int_0^\infty \big[1 - F_X(x)\big]\mathrm{d}x - \frac{\lambda}{c}\int_y^\infty \big[1 - F_X(x)\big]\mathrm{d}x = \frac{\lambda}{c}\int_0^y \big[1 - F_X(x)\big]\mathrm{d}x.$$

■

Věta 5.25 platí i v případě, že neexistuje adjustační koeficient.

Věta 5.26. *Pro pravděpodobnost přežití s nulovým počátečním přebytkem, $u = 0$, platí*

$$\phi(0) = \frac{\theta}{1+\theta}. \tag{5.37}$$

Důkaz. Připomeňme si, že

$$\begin{aligned}
\mathrm{E}(X) = \mu &= \int_0^\infty x \cdot f_X(x)\mathrm{d}x = \int_0^\infty \big[1 - F_X(x)\big]\mathrm{d}x, \\
\mathcal{G}(0,y) &= \frac{\lambda}{c}\int_0^y \Big[1 - F_X(x)\Big]\mathrm{d}x, \quad y \geq 0, \\
\psi(u) &= \lim_{y\to\infty} \mathcal{G}(u,y), \quad u \geq 0.
\end{aligned}$$

Odtud plyne

$$\psi(0) = \lim_{y\to\infty} \mathcal{G}(0,y) = \frac{\lambda}{c}\int_0^\infty \Big[1 - F_X(x)\Big]\mathrm{d}x = \frac{\lambda\mu}{c} = \frac{\lambda\mu}{(1+\theta)\cdot\lambda\mu} = \frac{1}{1+\theta}.$$

Proto $\phi(0) = 1 - \psi(0) = \frac{\theta}{1+\theta}$. ■

Obecné řešení $\phi(u)$ lze získat z následující integrodiferenciální rovnice s počáteční podmínkou $\phi(0) = \frac{\theta}{1+\theta}$.

Věta 5.27. *Pravděpodobnost přežití v nekonečném spojitém časovém horizontu $\phi(u)$ splňuje rovnici*

$$\phi'(u) = \frac{\lambda}{c}\phi(u) - \frac{\lambda}{c}\int_0^u \phi(u-x)\mathrm{d}F_X(x), \quad u \geq 0. \tag{5.38}$$

Důkaz. Z (5.35) s $y \to \infty$ a $\psi(u) = \lim\limits_{y\to\infty} \mathcal{G}(u,y)$, $u \geq 0$:

$$\begin{aligned} \psi'(u) &= \frac{\lambda}{c}\psi(u) - \frac{\lambda}{c}\int_0^u \psi(u-x)\mathrm{d}F_X(x) - \frac{\lambda}{c}\big[F_X(\infty) - F_X(u)\big] = \\ &= \frac{\lambda}{c}\psi(u) - \frac{\lambda}{c}\int_0^u \psi(u-x)\mathrm{d}F_X(x) - \frac{\lambda}{c}\big[1 - F_X(u)\big], \quad u \geq 0. \end{aligned} \tag{5.39}$$

Vyjdeme z $\phi(u) = 1 - \psi(u)$, tj. $\phi'(u) = -\psi'(u)$, a předchozí vztah přepíšeme

$$\begin{aligned} -\phi'(u) &= \frac{\lambda}{c}\big[1 - \phi(u)\big] - \frac{\lambda}{c}\int_0^u \big[1 - \phi(u-x)\big]\mathrm{d}F_X(x) - \frac{\lambda}{c}\big[1 - F_X(u)\big] = \\ &= -\frac{\lambda}{c}\phi(u) - \frac{\lambda}{c}\int_0^u \mathrm{d}F_X(x) + \frac{\lambda}{c}\int_0^u \phi(u-x)\mathrm{d}F_X(x) + \frac{\lambda}{c}F_X(u) = \\ &= -\frac{\lambda}{c}\phi(u) - \frac{\lambda}{c}F_X(u) + \frac{\lambda}{c}\int_0^u \phi(u-x)\mathrm{d}F_X(x) + \frac{\lambda}{c}F_X(u) = \\ &= -\frac{\lambda}{c}\phi(u) + \frac{\lambda}{c}\int_0^u \phi(u-x)\mathrm{d}F_X(x). \end{aligned}$$

Což je po úpravě

$$\phi'(u) = \frac{\lambda}{c}\phi(u) - \frac{\lambda}{c}\int_0^u \phi(u-x)\mathrm{d}F_X(x).$$

∎

5.4.3 Maximální celková ztráta

Naší snahou bude odvodit obecné řešení integrodiferenciální rovnice (5.38) s omezujícími podmínkami $\phi(0) = \frac{\theta}{1+\theta}$ a $\phi(\infty) = 1$.

Mějme počáteční rezervu u. Pravděpodobnost, že přebytek klesne pod svou počáteční úroveň u je $\psi(0)$ pro všechna $u \geq 0$, neboť proces přebytku má stacionární a nezávislé přírůstky.

Předpokládejme, že přebytek klesne pod hodnotu u, pak náhodná veličina Y udávající výši poklesu má rovnovážnou pravděpodobnostní hustotu $f_Y^e(y)$.

Věta 5.28. *Nechť existuje situace, kdy přebytek klesne pod svou počáteční úroveň u, pak náhodná veličina Y reprezentující hodnotu snížení má rovnovážnou hustotu*

$$f_Y^e(y) = \frac{1 - F_X(y)}{\mu}. \tag{5.40}$$

Důkaz. Vzpomeňme si na definici 5.23 o funkci $\mathcal{G}(u, y)$. Díky stacionaritě a nezávislosti přírůstků procesu přebytku můžeme chápat funkci $\mathcal{G}(0, y)$ také jako $\mathcal{G}(0, y) = P$(přebytek klesne pod svou počáteční úroveň u a hodnota poklesu je nejvýše y). S využitím věty 5.25 má hodnota poklesu přebytku, za předpokladu, že k poklesu dojde, distribuční funkci

$$\begin{aligned}
F_Y^e(y) = P(Y \leq y) = \frac{\mathcal{G}(0, y)}{\psi(0)} &= \frac{\lambda}{c \cdot \psi(0)} \int_0^y \Big[1 - F_X(u)\Big] \mathrm{d}u = \\
&= \frac{\lambda}{(1+\theta) \cdot \lambda\mu \cdot \frac{1}{1+\theta}} \int_0^y \Big[1 - F_X(u)\Big] \mathrm{d}u = \\
&= \frac{1}{\mu} \int_0^y \Big[1 - F_X(u)\Big] \mathrm{d}u.
\end{aligned}$$

Derivací obdržíme

$$f_Y^e(y) = \frac{1}{\mu} \cdot \big[1 - F_X(y)\big].$$

■

Jestliže je hodnota poklesu přebytku y, pak přebytek ihned po poklesu bude $u - y$. Neboť má proces přebytku stacionární a nezávislé přírůstky, po redukci přebytku dojde k ruinování s pravděpodobností $\psi(u - y)$ za předpokladu, že $u - y \geq 0$. V opačném případě, kdy $u - y < 0$, by ruinování již nastalo. Pravděpodobnost dalšího poklesu přebytku je $\psi(0)$. Hodnota tohoto poklesu má též pravděpodobnostní hustotu $f_Y^e(y)$ a nezávisí na hodnotě předchozího poklesu.

Poissonův proces, jenž má vlastnost bez paměti, „začíná nanovo“ po každém snížení přebytku. Náhodná veličina K reprezentující počet poklesů přebytku se řídí geometrickým rozdělením, tj.

$$P(K=k) = \big(1-\psi(0)\big)\cdot\big(\psi(0)\big)^k = \frac{\theta}{1+\theta}\cdot\left(\frac{1}{1+\theta}\right)^k, \quad k=0,1,\dots, \tag{5.41}$$

kde $\theta = \frac{1}{\beta}$, β je parametr geometrického rozdělení.

Nejnižší možnou hodnotou přebytku je $u-L$, kde se náhodná veličina L nazývá maximální celková ztráta. Nechť náhodná veličina Y_i udává hodnotu i-tého poklesu přebytku. Díky stacionaritě a nezávislosti přírůstků procesu přebytku je $\{Y_1, Y_2, Y_3 \dots\}$ posloupnost IID náhodných veličin, každá s hustotou $f_Y^e(y)$. L lze vyjádřit jako $L = Y_1 + Y_2 + \cdots + Y_K$, kde se $L=0$ pro $K=0$. L se tedy řídí složeným geometrickým rozdělením[15].

Ruinování nenastane pouze tehdy, když maximální celková ztráta L nepřevýší hodnotu u, pravděpodobnost přežití je dána $\phi(u) = P(L\le u), u\ge 0$. Označme $F_Y^{e^{*k}}(y) = P(Y_1+Y_2+\cdots+Y_k \le y)$ k-násobnou konvoluci distribuční funkce náhodné veličiny Y, pro níž platí

$$F_Y^{e^{*0}}(y) = \begin{cases} 0, & y<0,\\ 1, & y\ge 0.\end{cases}$$

Obecným řešením integrodiferenciální rovnice (5.38) je

$$\phi(u) = \sum_{k=0}^{\infty} P(K=k)\cdot F_Y^{e^{*k}}(u) = \sum_{k=0}^{\infty}\frac{\theta}{1+\theta}\cdot\left(\frac{1}{1+\theta}\right)^k\cdot F_Y^{e^{*k}}(u), \quad u\ge 0 \tag{5.42}$$

a (5.39) je

$$\psi(u) = \sum_{k=0}^{\infty}\frac{\theta}{1+\theta}\cdot\left(\frac{1}{1+\theta}\right)^k\cdot\Big[1-F_Y^{e^{*k}}(u)\Big], \quad u\ge 0. \tag{5.43}$$

[15] O diskrétním složeném geometrickém rozdělení jsme se bavili ve 2. kapitole.

5.4.4 Cramérův asymptotický vzorec a Tijmsova aproximace

Někdy může být přímá kalkulace pravděpodobnosti ruinování $\psi(u)$ komplikovaná, v takových chvílích je velmi užitečné znát aproximační metody jejího výpočtu. Značením $a(x) \sim b(x), x \to \infty$, v následujících odstavcích chápejme $\lim\limits_{x\to\infty} \frac{a(x)}{b(x)} = 1$.

Věta 5.29. (Cramérův asymptotický vzorec) *Nechť $\kappa > 0$ je adjustační koeficient, pak pravděpodobnost ruinování splňuje*

$$\psi(u) \sim C\mathrm{e}^{-\kappa u}, \quad u \to \infty, \tag{5.44}$$

kde

$$C = \frac{\mu\theta}{M'_X(\kappa) - \mu(1+\theta)}. \tag{5.45}$$

$M_X(t) = E(\mathrm{e}^{tX}) = \int_0^\infty \mathrm{e}^{tx}\mathrm{d}F_X(x)$ *je moment generující funkce náhodné veličiny X udávající závažnost pojistných událostí.*

Důkaz. Důkaz najdeme v *Stochastic Processes for Insurance and Finance* – ROLSKI, T.; SCHMIDLI, H.; SCHMIDT, V.; TEUGELS, J. Chichester, England: John Wiley & Sons, Ltd, 1999. ■

Pro zachování Lundbergovy nerovnosti $\psi(u) \le \mathrm{e}^{-\kappa u}, u \ge 0$, je zapotřebí, aby konstanta $C = \frac{\mu\theta}{M'_X(\kappa)-\mu(1+\theta)}$ splňovala podmínku $C \le 1$. Ačkoliv je $\psi(u) \sim C\mathrm{e}^{-\kappa u}, u \to \infty$, pouze aproximativní vztah, je poměrně přesný, a to dokonce i pro nevelký počáteční kapitál u.

Tijms navrhl přidat exponenciální výraz do Cramérova asymptotického vzorce ke zpřesnění pravděpodobnosti ruinování pro malá u. Tijmsova aproximace je známá ve tvaru

$$\psi_T(u) = \left(\frac{1}{1+\theta} - C\right) \cdot \mathrm{e}^{-\frac{u}{\varepsilon}} + C\mathrm{e}^{-\kappa u}, \quad u \ge 0, \tag{5.46}$$

kde ε je zvolen tak, aby se $\int_0^\infty \psi_T(u)\mathrm{d}u$ rovnal střední hodnotě maximální celkové ztráty L.

$L = Y_1 + Y_2 + \dots + Y_K$ má složené geometrické rozdělení. Dle (2.23) je

$$\mathrm{E}(L) = \mathrm{E}(K) \cdot \mathrm{E}(Y) = \beta \cdot \mathrm{E}(Y) = \frac{1}{\theta} \cdot \mathrm{E}(Y),$$

kde $\mathrm{E}(Y) = \int_0^\infty y \cdot f_Y^e(y)\mathrm{d}y = \int_0^\infty y \cdot \frac{1-F_X(y)}{\mu}\mathrm{d}y \overset{\text{viz [13]}}{=} \frac{\mathrm{E}(X^2)}{2\mu}$.
Spočítejme si

$$\begin{aligned}\int_0^\infty \psi_T(u)\mathrm{d}u &= \left(\frac{1}{1+\theta} - C\right)\int_0^\infty \mathrm{e}^{-\frac{u}{\varepsilon}}\mathrm{d}u + C\int_0^\infty \mathrm{e}^{-\kappa u}\mathrm{d}u = \\ &= \left(\frac{1}{1+\theta} - C\right) \cdot \left[-\varepsilon \mathrm{e}^{-\frac{u}{\varepsilon}}\right]_0^\infty + C \cdot \left[-\frac{1}{\kappa}\mathrm{e}^{-\kappa u}\right]_0^\infty = \\ &= \left(\frac{1}{1+\theta} - C\right)\varepsilon + \frac{C}{\kappa}.\end{aligned}$$

ε získáme porovnáním $\int_0^\infty \psi_T(u)\mathrm{d}u = \mathrm{E}(L)$

$$\begin{aligned}\left(\frac{1}{1+\theta} - C\right)\varepsilon + \frac{C}{\kappa} &= \frac{\mathrm{E}(X^2)}{2\mu\theta} \\ \varepsilon &= \frac{\frac{\mathrm{E}(X^2)}{2\mu\theta} - \frac{C}{\kappa}}{\frac{1}{1+\theta} - C}.\end{aligned} \tag{5.47}$$

Je-li hustota náhodné veličiny X ve tvaru[16]

a) $f_X(x) = \mathrm{p} \cdot \left(\beta^{-1}\mathrm{e}^{-\frac{x}{\beta}}\right) + (1-\mathrm{p}) \cdot \left(x \cdot \beta^{-2}\mathrm{e}^{-\frac{x}{\beta}}\right), \quad x \geq 0; 0 \leq \mathrm{p} < 1,$

b) $f_X(x) = \mathrm{p} \cdot \left(\beta_1\mathrm{e}^{-\beta_1 x}\right) + (1-\mathrm{p}) \cdot \left(\beta_2\mathrm{e}^{-\beta_2 x}\right), \quad x \geq 0; 0 < \mathrm{p} < 1,$

pak $\psi_T(u)$ je asymptoticky rovna skutečné hodnotě $\psi(u)$, $\psi_T(u) \approx \psi(u)$. Postačující podmínkou zachování asymptotické rovnosti $\psi_T(u) \approx \psi(u)$ pro $u \to \infty$ je, aby $F_X(x)$ nebyla distribuční funkcí náhodné veličiny X z exponenciálního rozdělení a aby funkce rizika[17] $h_X(x) = \frac{f_X(x)}{1-F_X(x)}$ byla buď nekle-

[16]Náhodná veličina X se nazývá k-bodová směs náhodných veličin $X_1, X_2, \dots, X_k$, jestliže je její distribuční funkce dána vztahem

$$F_X(x) = \mathrm{p}_1 F_{X_1}(x) + \mathrm{p}_2 F_{X_2}(x) + \dots + \mathrm{p}_k F_{X_k}(x),$$

kde $\mathrm{p}_j > 0$ a $\sum_{j=1}^k \mathrm{p}_j = 1$.

[17]hazard rate, failure rate

sající, nebo nerostoucí.

Je-li $h_X(x)$ nerostoucí, potom $\psi_T(x) > C\mathrm{e}^{-\kappa x}$, v opačném případě je $\psi_T(x) < C\mathrm{e}^{-\kappa x}$.

5.4.5 Brownův pohyb a teorie ruinování

V této části práce prozkoumáme vztah mezi Brownovým pohybem a procesem přebytku $\{U_t, t \geq 0\}$, kde $U_t = u + ct - S_t$. Notace zůstává zachována, tedy $\{S_t, t \geq 0\}$ značí proces ztrát, $S_t = X_1 + X_2 + \cdots + X_{N_t}$ je složená náhodná veličina. $\{N_t, t \geq 0\}$ je proces pojistných nároků – Poissonův proces s intenzitou λ. Výše individuálních nároků $X_1, X_2, \ldots$ jsou IID náhodné veličiny nezávislé na N_t.

Proces $\{U_t, t \geq 0\}$ se vyvíjí nepřetržitě v čase se sklonem c, sazba pojistného má za jednotku času po sobě jdoucí skoky $\{X_1, X_2, \ldots\}$ v náhodných časech $\{\mathcal{T}_1, \mathcal{T}_2, \ldots\}$.

Mějme

$$Z_t = U_t - u = ct - S_t, \quad t \geq 0, \tag{5.48}$$

kde $Z_0 = 0$. Proces $\{Z_t, t \geq 0\}$ má střední hodnotu

$$\mathrm{E}(Z_t) = \mathrm{E}(ct - S_t) = ct - \mathrm{E}(S_t) = ct - \lambda t \cdot \mathrm{E}(X)$$

a rozptyl

$$\mathrm{Var}(Z_t) = \mathrm{Var}(ct - S_t) = \mathrm{Var}(S_t) = \lambda t \cdot \mathrm{E}(X^2).$$

Definice 5.30. Stochastický proces $\{W_t, t \geq 0\}$ ve spojitém čase, se spojitými stavy se nazývá Brownův pohyb, jestliže jsou splněny následující podmínky

a) $W_0 = 0$,
b) $\{W_t, t \geq 0\}$ má stacionární a nezávislé přírůstky,
c) pro $\forall t > 0$ se W_t řídí normálním rozdělením se střední hodnotou 0 a rozptylem $\sigma^2 t$, tj. $W_t \sim N(0, \sigma^2 t)$.

Poznámka. Brownův pohyb je také známý pod názvem Wienerův proces.

Standardní Brownův pohyb získáme, prohlásíme-li $\sigma^2 = 1$ (pro $\forall t > 0$: $W_t \sim N(0,t)$, resp. $W_t \sim \sqrt{t} \cdot N(0,1)$).

Definice 5.31. Stochastický proces $\{W_t, t \geq 0\}$ ve spojitém čase, se spojitými stavy se nazývá Brownův pohyb s driftem, splňuje-li všechny vlastnosti Brownova pohybu, až na to, že W_t má střední hodnotu μt namísto 0 pro určitá $\mu > 0$.

Z následujících řádků se dovíme, jak proces $\{Z_t, t \geq 0\}$ založený na složeném Poissonově procesu souvisí s Brownovým pohybem s driftem. V první řadě se zaměříme na limitní chování procesu $\{Z_t, t \geq 0\}$.

Brownův pohyb s driftem je charakteristický nekonečně malou střední hodnotou $\mu = c - \lambda \mathrm{E}(X)$ a rozptylem $\sigma^2 = \lambda \mathrm{E}(X^2)$. Odsud

$$\lambda = \frac{\sigma^2}{\mathrm{E}(X^2)}, \tag{5.49}$$

$$c = \mu + \lambda \mathrm{E}(X) = \mu + \sigma^2 \cdot \frac{\mathrm{E}(X)}{\mathrm{E}(X^2)}. \tag{5.50}$$

Zavedeme si novou náhodnou veličinu Y takovou, že $X = \alpha Y$. Y má pevně stanovenou střední hodnotu i rozptyl.

$$\lambda = \frac{\sigma^2}{\mathrm{E}(Y^2)} \cdot \frac{1}{\alpha^2},$$
$$c = \mu + \sigma^2 \cdot \frac{\mathrm{E}(Y)}{\mathrm{E}(Y^2)} \cdot \frac{1}{\alpha}.$$

Proces $\{S_t, t \geq 0\}$ má stacionární a nezávislé přírůstky, stejně tak procesy $\{U_t, t \geq 0\}$ a $\{Z_t, t \geq 0\}$. Limitní proces, který hledáme, bude mít také stacionární a nezávislé přírůstky. Víme, že $Z_0 = 0$. Pro každé t ukážeme, že v limitě má Z_t normální rozdělení se střední hodnotou μt a rozptylem $\sigma^2 t$ (jako v definicích 5.30 a 5.31).

Podíváme se na moment generující funkci náhodné veličiny Z_t

$$\begin{aligned}
M_{Z_t}(s) &= M_{ct-S_t}(s) = \mathrm{E}\big(\mathrm{e}^{s\cdot(ct-S_t)}\big) = \mathrm{E}\big(\mathrm{e}^{sct}\cdot \mathrm{e}^{-sS_t}\big) = \\
&= \mathrm{e}^{sct}\cdot \mathrm{E}\big(\mathrm{e}^{-sS_t}\big) = \mathrm{e}^{sct}\cdot M_{S_t}(-s) \overset{(2.14)}{=} \mathrm{e}^{sct}\cdot \mathrm{e}^{\lambda t\cdot[M_X(-s)-1]} = \\
&= \mathrm{e}^{t\cdot[sc+\lambda\cdot(M_X(-s)-1)]}.
\end{aligned}$$

Potom

$$\begin{aligned}
\frac{\ln\big(M_{Z_t}(s)\big)}{t} &= sc + \lambda\cdot\big(M_X(-s)-1\big) = \\
&= s\big(\mu+\lambda\mathrm{E}(X)\big) + \lambda\left[1 - s\mathrm{E}(X) + \frac{s^2}{2!}\mathrm{E}(X^2) - \frac{s^3}{3!}\mathrm{E}(X^3) + \cdots - 1\right] = \\
&= s\mu + \frac{s^2}{2}\lambda\mathrm{E}(X^2) - \lambda\left[\frac{s^3}{3!}\mathrm{E}(X^3) - \frac{s^4}{4!}\mathrm{E}(X^4) + \cdots\right] = \\
&= s\mu + \frac{s^2}{2}\sigma^2 - \lambda\alpha^2\left[\alpha\frac{s^3}{3!}\mathrm{E}(Y^3) - \alpha^2\frac{s^4}{4!}\mathrm{E}(Y^4) + \cdots\right] = \\
&= s\mu + \frac{s^2}{2}\sigma^2 - \frac{\sigma^2}{\alpha^2\mathrm{E}(Y^2)}\cdot\alpha^2\left[\alpha\frac{s^3}{3!}\mathrm{E}(Y^3) - \alpha^2\frac{s^4}{4!}\mathrm{E}(Y^4) + \cdots\right] = \\
&= s\mu + \frac{s^2}{2}\sigma^2 - \sigma^2\left[\alpha\frac{s^3}{3!}\cdot\frac{\mathrm{E}(Y^3)}{\mathrm{E}(Y^2)} - \alpha^2\frac{s^4}{4!}\cdot\frac{\mathrm{E}(Y^4)}{\mathrm{E}(Y^2)} + \cdots\right].
\end{aligned}$$

Vidíme, že

$$M_{Z_t}(s) = \exp\left\{t\cdot\left\{s\mu + \frac{s^2}{2}\sigma^2 - \sigma^2\left[\alpha\frac{s^3}{3!}\cdot\frac{\mathrm{E}(Y^3)}{\mathrm{E}(Y^2)} - \alpha^2\frac{s^4}{4!}\cdot\frac{\mathrm{E}(Y^4)}{\mathrm{E}(Y^2)} + \cdots\right]\right\}\right\}.$$

V limitě necháme $\alpha \to 0$

$$\lim_{\alpha\to 0} M_{Z_t}(s) = \mathrm{e}^{s\mu t + \frac{s^2}{2}\sigma^2 t}.$$

Obdrželi jsme moment generující funkci normálního rozdělení se střední hodnotou μt a rozptylem $\sigma^2 t$. Hledaný limitní proces je Brownovým pohybem s driftem.

Trajektorie procesu[18] přebytku je všude diferencovatelná až na body skoku $\{X_1, X_2, \dots\}$. Jakmile počet bodů skoku poroste do nekonečna, trajektorie

[18] Náhodný proces $X(\omega, t)$ při pevném $\omega \in \Omega$ se nazývá trajektorie procesu.

se stává nediferencovatelnou. Trajektorie Brownova pohybu je spojitá s pravděpodobností 1 a je skoro jistě nediferencovatelná v každém bodě intervalu $[0, \infty)$. Délka trajektorie procesu $\{U_t, t \geq 0\}$ na časovém intervalu $(0, t]$ je

$$D = ct + S_t = ct + X_1 + X_2 + \cdots + X_{N_t}.$$

Její střední hodnotu vyjádříme jako

$$\begin{aligned}
\mathrm{E}(D) &= ct + \mathrm{E}(S_t) = ct + \lambda t \cdot \mathrm{E}(X) = \\
&= t \cdot \left(\mu + \sigma^2 \cdot \frac{\mathrm{E}(Y)}{\mathrm{E}(Y^2)} \cdot \frac{1}{\alpha} + \frac{\sigma^2}{\mathrm{E}(Y^2)} \cdot \frac{1}{\alpha^2} \cdot \mathrm{E}(\alpha Y) \right) = \\
&= t \cdot \left(\mu + \sigma^2 \cdot \frac{\mathrm{E}(Y)}{\mathrm{E}(Y^2)} \cdot \frac{1}{\alpha} + \sigma^2 \cdot \frac{\mathrm{E}(Y)}{\mathrm{E}(Y^2)} \cdot \frac{1}{\alpha} \right) = t \cdot \left(\mu + 2\sigma^2 \cdot \frac{\mathrm{E}(Y)}{\mathrm{E}(Y^2)} \cdot \frac{1}{\alpha} \right)
\end{aligned}$$

V limitě necháme $\alpha \to 0$

$$\lim_{\alpha \to 0} \mathrm{E}(D) = \infty,$$

tj. očekávaná délka trajektorie procesu $\{U_t, t \geq 0\}$ je na konečném časovém intervalu nekonečná.

Protože $Z_t = U_t - u$, k Brownově pohybu s driftem přidáme u a použijeme (5.49) a (5.50) k aproximaci $Z_t = U_t - u = ct - S_t$ (čím je λ větší, tím je aproximace lepší).

Pravděpodobnost ruinování

Nechť $\{W_t, t \geq 0\}$ značí Brownův pohyb s driftem, jehož střední hodnota je μt a rozptyl $\sigma^2 t$. Nechť $U_t = u + W_t$, pak $\{U_t, t \geq 0\}$ představuje Brownův proces s driftem a počátečním přebytkem $U_0 = u$.

Označme $\mathcal{T}$ časem ruinování[19] a předpokládejme, že ruinování nastane

[19] Viz definice 5.7. Je-li $\mathcal{T} = \infty$, pak k ruinování nedojde.

v konečném spojitém časovém horizontu, to jest na intervalu $(0, \tau)$, potom

$$\begin{aligned}\psi(u,\tau) = 1 - \phi(u,\tau) = P(\mathcal{T} < \tau) = P\Big(\min_{0<t<\tau} U_t < 0\Big) = \\ = P\Big(\min_{0<t<\tau} u + W_t < 0\Big) = P\Big(\min_{0<t<\tau} W_t < -u\Big).\end{aligned}$$

Věta 5.32. *Pro proces $\{U_t, t \geq 0\}$ popsaný výše je pravděpodobnost ruinování dána*

$$\psi(u,\tau) = \Phi\left(-\frac{u+\mu\tau}{\sqrt{\sigma^2\tau}}\right) + \mathrm{e}^{-\frac{2\mu u}{\sigma^2}} \cdot \Phi\left(-\frac{u-\mu\tau}{\sqrt{\sigma^2\tau}}\right), \tag{5.51}$$

kde $\Phi(.)$ je distribuční funkce standardizovaného normálního rozdělení.

Důkaz. Důkaz je založen na principu reflexe a vlastnostech Brownova pohybu s driftem – viz [13]. ■

Důsledek 5.33. *Pravděpodobnost ruinování v nekonečném spojitém časovém horizontu je tvaru*

$$\psi(u) = \lim_{\tau\to\infty} \psi(u,\tau) = \mathrm{e}^{-\frac{2\mu u}{\sigma^2}}. \tag{5.52}$$

Poznámka. Je-li $\mu = 0$, potom

$$\begin{aligned}\psi(u) &= P(\mathcal{T} < \infty) = \mathrm{e}^{-\frac{2u\cdot 0}{\sigma^2}} = 1, \\ \phi(u) &= 1 - \psi(u) = 0.\end{aligned}$$

Vraťme se k problematice aproximace $Z_t = U_t - u = ct - S_t$. Připomeňme si, že $c = (1+\theta)\cdot\lambda\mathrm{E}(X) = \lambda\mathrm{E}(X) + \theta\lambda\mathrm{E}(X)$. S pomocí (5.49) a (5.50) eliminujeme σ^2

$$\begin{aligned}\lambda &= \frac{\sigma^2}{\mathrm{E}(X^2)} \Leftrightarrow \sigma^2 = \lambda\mathrm{E}(X^2), \\ c &= \mu + \sigma^2 \cdot \frac{\mathrm{E}(X)}{\mathrm{E}(X^2)} = \mu + \lambda\mathrm{E}(X^2)\cdot\frac{\mathrm{E}(X)}{\mathrm{E}(X^2)} = \mu + \lambda\mathrm{E}(X).\end{aligned}$$

Porovnáním $c = \lambda\mathrm{E}(X) + \theta\lambda\mathrm{E}(X)$ a $c = \mu + \lambda\mathrm{E}(X)$ dostaneme

$$\mu = \theta\lambda\mathrm{E}(X). \tag{5.53}$$

Dosadíme (5.53) a $\sigma^2 = \lambda \mathrm{E}(X^2)$ do (5.51) a (5.52). Obdržíme tak aproximativní vztahy

$$\begin{aligned}\psi(u,\tau) &\doteq \Phi\left(-\frac{u+\theta\lambda\tau\mathrm{E}(X)}{\sqrt{\lambda\tau\mathrm{E}(X^2)}}\right)+\exp\left\{-\frac{2\theta\lambda\mathrm{E}(X)u}{\lambda\mathrm{E}(X^2)}\right\}\cdot\Phi\left(-\frac{u-\theta\lambda\tau\mathrm{E}(X)}{\sqrt{\lambda\tau\mathrm{E}(X^2)}}\right)=\\ &=\Phi\left(-\frac{u+\theta\lambda\tau\mathrm{E}(X)}{\sqrt{\lambda\tau\mathrm{E}(X^2)}}\right)+\exp\left\{-\frac{2\theta\mathrm{E}(X)u}{\mathrm{E}(X^2)}\right\}\cdot\Phi\left(-\frac{u-\theta\lambda\tau\mathrm{E}(X)}{\sqrt{\lambda\tau\mathrm{E}(X^2)}}\right),\\ &\quad u>0,\tau>0,\end{aligned} \tag{5.54}$$

$$\psi(u) \doteq \exp\left\{-\frac{2\theta\mathrm{E}(X)u}{\mathrm{E}(X^2)}\right\},\quad u>0. \tag{5.55}$$

5.5 Příklady

Příklad 5.1. Uvažujme stochastický proces $\{U_t, t \in \mathbb{N}_0\}$ s počátečním přebytkem 2, pevně stanoveným ročním pojistným 3 a ztrátou buď 0, nebo 6 při pravděpodobnosti 0,6 nebo 0,4. Předpokládejme, že další cash-flow neexistuje. Určete $\widetilde{\phi}(2,2)$.

Řešení:
Máme

$$U_0 = u = 2, \quad \text{a} \quad P_t = 3,$$

$$S_t = \begin{cases} 0, & \text{pravděpodobnost } 0,6; \\ 6, & \text{pravděpodobnost } 0,4. \end{cases}$$

U_1 může nabýt dvou hodnot

$$U_1 = u + P_1 - S_1 = \begin{cases} 2+3-0=5, & \text{pravděpodobnost } 0,6; \\ 2+3-6=-1, & \text{pravděpodobnost } 0,4. \end{cases}$$

Přírůstek procesu přebytku je v každém roce

$$V_t = P_t - S_t = \begin{cases} 3-0=3, & \text{pravděpodobnost } 0,6; \\ 3-6=-3, & \text{pravděpodobnost } 0,4. \end{cases}$$

Pro druhý rok obdržíme následující hodnoty

případ	U_1	V_2	V_2^*	U_2^*	pravděpodobnost
1.	5	3	3	8	$0,6 \cdot 0,6 = 0,36$
2.	5	-3	-3	2	$0,6 \cdot 0,4 = 0,24$
3.	-1	3	0	-1	$0,4 \cdot 0,6 = 0,24$
4.	-1	-3	0	-1	$0,4 \cdot 0,4 = 0,16$

Využili jsme vztahy

$$U_2^* = U_1^* + V_2^*,$$
$$V_2^* = \begin{cases} 0, & U_1^* < 0, \\ V_2, & U_1^* \geq 0. \end{cases}$$

Námi hledaná pravděpodobnost přežití je $\widetilde{\phi}(2,2) = 0,36 + 0,24 = 0,6.$

✍

Příklad 5.2. Předpokládejme, že roční ztráty mohou být ve výši $0, 2, 4$ nebo 6 s pravděpodobnostmi $0,4; 0,3; 0,2$ a $0,1$. Dále předpokládejme, že počáteční přebytek je 2 a roční pojistné $2,5$ – je pojišťovnou vybírané vždy na začátku roku. Pojišťovna by chtěla mít 10% zisk z kapitálu dostupném na začátku každého roku a ztráty vždy vyplácí na konci roku. V každém roce, v němž je ztráta nulová se klientům vrací $0,5$ z přebytku. Určete pravděpodobnost ruinování na konci prvních dvou let.

Řešení:
V čase 0 je pravděpodobnost ruinování $\widetilde{\psi}(2,0) = 0$.
U_1 nabývá čtyř hodnot

$$U_1 = (u + P_1) \cdot 1,1 - S_1 = \begin{cases} 4,5 \cdot 1,1 - 0 = 4,95 - 0,5 = 4,45, & \text{pravděp. } 0,4; \\ 4,5 \cdot 1,1 - 2 = 2,95 - 0 = 2,95, & \text{pravděp. } 0,3; \\ 4,5 \cdot 1,1 - 4 = 0,95 - 0 = 0,95, & \text{pravděp. } 0,2; \\ 4,5 \cdot 1,1 - 6 = -1,05 - 0 = -1,05, & \text{pravděp. } 0,1. \end{cases}$$

K ruinování dochází pouze v posledním případě s pravděpodobností $0,1$, tudíž $\widetilde{\psi}(2,1) = 0,1 + \widetilde{\psi}(2,0) = 0,1$.

Pro druhý rok si sestavíme tabulku

počáteční přebytek	ztráta	přebytek na konci roku	pravděpodobnost
$4,95$	0	$(4,95+2,5)\cdot 1,1-0=$ $=8,195-0,5=7,695$	$0,4\cdot 0,4=0,16$
$4,95$	2	$6,195$	$0,4\cdot 0,3=0,12$
$4,95$	4	$4,195$	$0,4\cdot 0,2=0,08$
$4,95$	6	$2,195$	$0,4\cdot 0,1=0,04$
$2,95$	0	$5,495$	$0,3\cdot 0,4=0,12$
$2,95$	2	$3,995$	$0,3\cdot 0,3=0,09$
$2,95$	4	$1,995$	$0,3\cdot 0,2=0,06$
$2,95$	6	$-0,005$	$0,3\cdot 0,1=0,03$
$0,95$	0	$3,295$	$0,2\cdot 0,4=0,08$
$0,95$	2	$1,795$	$0,2\cdot 0,3=0,06$
$0,95$	4	$-0,205$	$0,2\cdot 0,2=0,04$
$0,95$	6	$-2,205$	$0,2\cdot 0,1=0,02$

Ruinování nastává ve 3 případech. $\widetilde{\psi}(2,2)=0,03+0,04+0,02+\widetilde{\psi}(2,1)=0,19.$

✍

Příklad 5.3. Ukažte, že skutečně platí $\mathrm{Var}(N_t)=\lambda t$.

Řešení:

$$\mathrm{Var}(N_t)=\mathrm{E}\Big(\big(N_t-\overbrace{\mathrm{E}(N_t)}^{=\lambda t}\big)^2\Big)=\sum_{k=0}^{\infty}(k-\lambda t)^2\cdot P(N_t=k)=$$

$$=\sum_{k=0}^{\infty}(k-\lambda t)^2\cdot \mathrm{e}^{-\lambda t}\frac{(\lambda t)^k}{k!}=\mathrm{e}^{-\lambda t}\sum_{k=0}^{\infty}\big(k^2-2k\lambda t+(\lambda t)^2\big)\cdot\frac{(\lambda t)^k}{k!}=$$

$$=\mathrm{e}^{-\lambda t}\sum_{k=0}^{\infty}\left(k^2\cdot\frac{(\lambda t)^k}{k!}-2k\lambda t\cdot\frac{(\lambda t)^k}{k!}+(\lambda t)^2\cdot\frac{(\lambda t)^k}{k!}\right)=$$

$$=\mathrm{e}^{-\lambda t}\sum_{k=1}^{\infty}\left(k\cdot\frac{(\lambda t)^k}{(k-1)!}-2\lambda t\cdot\frac{(\lambda t)^k}{(k-1)!}\right)+\mathrm{e}^{-\lambda t}\cdot(\lambda t)^2\underbrace{\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(\lambda t)^k}{k!}}_{=\mathrm{e}^{\lambda t}}=$$

$$=\mathrm{e}^{-\lambda t}\sum_{k=1}^{\infty}\left(k\cdot\frac{\lambda t\cdot(\lambda t)^{k-1}}{(k-1)!}-2\lambda t\cdot\frac{\lambda t\cdot(\lambda t)^{k-1}}{(k-1)!}\right)+\mathrm{e}^{-\lambda t}\cdot(\lambda t)^2\cdot\mathrm{e}^{\lambda t}=$$

$$= \lambda t \mathrm{e}^{-\lambda t} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{k \cdot (\lambda t)^{k-1}}{(k-1)!} - 2(\lambda t)^2 \mathrm{e}^{-\lambda t} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(\lambda t)^{k-1}}{(k-1)!} + (\lambda t)^2 =$$

$$= \lambda t \mathrm{e}^{-\lambda t} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{k \cdot (\lambda t)^{k-1}}{(k-1)!} - 2(\lambda t)^2 \cdot \mathrm{e}^{-\lambda t} \cdot \mathrm{e}^{\lambda t} + (\lambda t)^2 =$$

$$= \lambda t \mathrm{e}^{-\lambda t} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{k \cdot (\lambda t)^{k-1} - (\lambda t)^{k-1}}{(k-1)!} + \lambda t \mathrm{e}^{-\lambda t} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(\lambda t)^{k-1}}{(k-1)!} - (\lambda t)^2 =$$

$$= \lambda t \mathrm{e}^{-\lambda t} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(k-1) \cdot (\lambda t)^{k-1}}{(k-1) \cdot (k-2)!} + \lambda t \cdot \mathrm{e}^{-\lambda t} \cdot \mathrm{e}^{\lambda t} - (\lambda t)^2 =$$

$$= \lambda t \mathrm{e}^{-\lambda t} \sum_{k=2}^{\infty} \frac{(\lambda t)^{k-1}}{(k-2)!} + \lambda t - (\lambda t)^2 = (\lambda t)^2 \cdot \mathrm{e}^{-\lambda t} \cdot \mathrm{e}^{\lambda t} + \lambda t - (\lambda t)^2 = \lambda t.$$

✍

Příklad 5.4. Nechť má náhodná veličina X exponenciální rozdělení se střední hodnotou $\mu = \frac{1}{\lambda}$. Určete adjustační koeficient.

Řešení:
Hledáme nejmenší kladné řešení $t = \kappa$ rovnice $1 + (1+\theta) \cdot \mu t = M_X(t)$. V příkladě 4.1 jsme již určili moment generující funkci exponenciálního rozdělení

$$M_X(t) = \frac{\lambda}{\lambda - t} \overset{\lambda = \frac{1}{\mu}}{=} \frac{1}{1 - \mu t} \quad t < \lambda, \text{ resp. } t < \frac{1}{\mu}.$$

Řešme rovnici

$$\begin{aligned}
1 + (1+\theta) \cdot \mu t &= \frac{1}{1 - \mu t} \\
(1 - \mu t) + (1+\theta) \cdot (1 - \mu t) \cdot \mu t &= 1 \\
(1+\theta) \cdot (1 - \mu t) \cdot \mu t &= 1 - 1 + \mu t \\
1 - \mu t &= \frac{1}{1+\theta} \\
\frac{1 + \theta - 1}{1 + \theta} &= \mu t \\
\frac{\theta}{(1+\theta)\mu} &= t = \kappa.
\end{aligned}$$

✍

Příklad 5.5. Předpokládejme, že $\lambda = 4, c = 7$ a že pro výši individuálních škod je dána $P(X = 1) = 0,6$ a $P(X = 2) = 0,4$. Určete adjustační koeficient Newton-Raphsonovou metodou.

Řešení:
$\mathrm{E}(X) = \mu = 1 \cdot 0,6 + 2 \cdot 0,4 = 1,4$ a $\mathrm{E}(X^2) = 1^2 \cdot 0,6 + 2^2 \cdot 0,4 = 2,2$.
θ vypočítáme ze vztahu $c = (1+\theta) \cdot \lambda\mu \Leftrightarrow \theta = \frac{c}{\lambda\mu} - 1 = \frac{7}{4 \cdot 1,4} - 1 = 0,25$.
$\kappa < \frac{2\theta\mu}{\mathrm{E}(X^2)} = \frac{2 \cdot 0,25 \cdot 1,4}{2,2} \doteq 0,318182$.
$M_X(t) = \sum_{k=1}^{2} p_X(x)\mathrm{e}^{tx} = 0,6 \cdot \mathrm{e}^t + 0,4 \cdot \mathrm{e}^{2t}$ a $M'_X(t) = 0,6 \cdot \mathrm{e}^t + 0,8 \cdot \mathrm{e}^{2t}$.

$$\begin{aligned} \mathcal{H}(t) &= 1 + (1+\theta)\mu t - M_X(t) = 1 + 1,25 \cdot 1,4 \cdot t - 0,6 \cdot \mathrm{e}^t - 0,4 \cdot \mathrm{e}^{2t} = \\ &= 1 + 1,75 - 0,6 \cdot \mathrm{e}^t - 0,4 \cdot \mathrm{e}^{2t}, \\ \mathcal{H}'(t) &= (1+\theta)\mu - M'_X(t) = 1,25 \cdot 1,4 - 0,6 \cdot \mathrm{e}^t - 0,8 \cdot \mathrm{e}^{2t}. \end{aligned}$$

Náš počáteční odhad je $\widehat{\kappa} = \kappa_0 \doteq 0,318182$, další hodnoty $\kappa_j, j = 1,2,\ldots$ spočítáme následujícím způsobem:

$$\begin{aligned} \kappa_1 &= \kappa_0 - \frac{\mathcal{H}(\kappa_0)}{\mathcal{H}'(\kappa_0)} = 0,318182 - \frac{-0,023796}{-0,586454} \doteq 0,277606, \\ \kappa_2 &= \kappa_1 - \frac{\mathcal{H}(\kappa_1)}{\mathcal{H}'(\kappa_1)} = 0,277606 - \frac{-0,003093}{-0,435828} \doteq 0,270509, \\ \kappa_3 &\doteq 0,270290, \\ \kappa_4 &\doteq 0,270290. \end{aligned}$$

$\kappa_3 = \kappa_4$ na šest desetinných míst, hledané $\kappa \doteq 0,270290$.

✍

Příklad 5.6. V Cramér-Lundbergově modelu mají výše individuálního nároku hustotu $f_X(x) = 2\mathrm{e}^{-2x}$. Nechť je bezpečnostní přirážka $\theta = 1$. Vypočtěte pomocí Lundbergovy nerovnosti výši počátečního kapitálu tak, aby pravděpodobnost ruinování byla menší než $1\,\%$.

Řešení:
Náhodná veličiny X s hustotou $f_X(x) = 2\mathrm{e}^{-2x}$ má exponenciální rozdělení s parametrem $\lambda = 2$. Víme, že pro exponenciální rozdělení platí:

$M_X(t) \overset{\text{příklad 4.1}}{=} \frac{\lambda}{\lambda - t} = \frac{2}{2-t}$ a $\mathrm{E}(X) = \mu \overset{(1.9)}{=} \frac{1}{\lambda} = \frac{1}{2}$.
Podle (5.28)

$$\begin{aligned} 1 + (1+\theta) \cdot \frac{1}{\lambda} \cdot t &= \frac{\lambda}{\lambda - t} \\ 1 + t &= \frac{2}{2-t} \\ 2 - t + (2-t) \cdot t &= 2 \\ t - t^2 &= 0 \\ t \cdot (1-t) &= 0 \end{aligned}$$

$t_1 = 0$ a $t_2 = 1 = \kappa$.
Lundbergova nerovnost je dána $\psi(u) \leq \mathrm{e}^{-\kappa u}, u \geq 0$, v našem příkladu $\psi(u) < 0,01$, pak

$$\begin{aligned} 0,01 &= \mathrm{e}^{-u} \\ -\ln(0,01) &= u \\ u &\doteq 4,605170. \end{aligned}$$

Počáteční kapitál musí být alespoň ve výši $4,605170$, aby $\psi(u) < 0,01$.

✍

Příklad 5.7. Nechť má X distribuční funkci $F_X(x) = 1 - \mathrm{e}^{-\frac{x}{\mu}}, x \geq 0$. Určete pravděpodobnost přežití $\phi(u)$.

Řešení:
Z (5.38) plyne:

$$\phi'(u) = \frac{\lambda}{c}\phi(u) - \frac{\lambda}{c}\int_0^u \phi(u-x)\left(\frac{1}{\mu} \cdot \mathrm{e}^{-\frac{x}{\mu}}\right)\mathrm{d}x = \frac{\lambda}{c}\phi(u) - \frac{\lambda}{c\mu}\int_0^u \phi(u-x) \cdot \mathrm{e}^{-\frac{x}{\mu}}\mathrm{d}x.$$

V integrálu zavedeme substituci $y = u - x$

$$\phi'(u) = \frac{\lambda}{c}\phi(u) - \frac{\lambda}{c\mu}\int_0^u \phi(y) \cdot \mathrm{e}^{-\frac{u-y}{\mu}}\mathrm{d}y = \frac{\lambda}{c}\phi(u) - \frac{\lambda}{c\mu} \cdot \mathrm{e}^{-\frac{u}{\mu}}\int_0^u \phi(y) \cdot \mathrm{e}^{\frac{y}{\mu}}\mathrm{d}y.$$

Rovnici zderivujeme dle proměnné u

$$\phi''(u) = \frac{\lambda}{c}\phi'(u) + \frac{\lambda}{c\mu^2} \cdot \mathrm{e}^{-\frac{u}{\mu}}\int_0^u \phi(y) \cdot \mathrm{e}^{\frac{y}{\mu}}\mathrm{d}y - \frac{\lambda}{c\mu} \cdot \mathrm{e}^{-\frac{u}{\mu}} \cdot \phi(u) \cdot \mathrm{e}^{\frac{u}{\mu}} =$$

$$= \frac{\lambda}{c}\phi'(u) + \frac{\lambda}{c\mu^2} \cdot \mathrm{e}^{-\frac{u}{\mu}} \int_0^u \phi(y) \cdot \mathrm{e}^{\frac{y}{\mu}} \mathrm{d}y - \frac{\lambda}{c\mu}\phi(u).$$

Pokračujme v úpravě

$$\phi''(u) = \frac{\lambda}{c}\phi'(u) - \frac{1}{\mu}\left(\frac{\lambda}{c}\phi(u) - \frac{\lambda}{c\mu} \cdot \mathrm{e}^{-\frac{u}{\mu}} \int_0^u \phi(y) \cdot \mathrm{e}^{\frac{y}{\mu}} \mathrm{d}y\right) = \frac{\lambda}{c}\phi'(u) - \frac{1}{\mu} \cdot \phi'(u) =$$

$$= \left(\frac{\lambda}{c} - \frac{1}{\mu}\right)\phi'(u) \overset{(5.26)}{=} \left(\frac{\lambda}{(1+\theta) \cdot \lambda\mu} - \frac{1}{\mu}\right)\phi'(u) = -\frac{\theta}{(1+\theta)\mu}\phi'(u).$$

Rovnici vynásobíme integračním faktorem $\mathrm{e}^{\frac{\theta u}{(1+\theta)\mu}}$ a dostaneme

$$\begin{aligned} \phi''(u) \cdot \mathrm{e}^{\frac{\theta u}{(1+\theta)\mu}} + \frac{\theta}{(1+\theta)\mu} \cdot \mathrm{e}^{\frac{\theta u}{(1+\theta)\mu}} \cdot \phi'(u) &= 0 \\ \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}u}\left(\mathrm{e}^{\frac{\theta u}{(1+\theta)\mu}} \cdot \phi'(u)\right) &= 0 \\ \mathrm{e}^{\frac{\theta u}{(1+\theta)\mu}} \cdot \phi'(u) &= \int 0 \mathrm{d}u \\ \mathrm{e}^{\frac{\theta u}{(1+\theta)\mu}} \cdot \phi'(u) &= K_1. \end{aligned}$$

Pro $u = 0$ v $\phi'(u) = \frac{\lambda}{c}\phi(u) - \frac{\lambda}{c\mu}\int_0^u \phi(u-x) \cdot \mathrm{e}^{-\frac{x}{\mu}} \mathrm{d}x$ a s využitím $\phi(0) = \frac{\theta}{1+\theta}$:

$$K_1 = \mathrm{e}^0 \cdot \phi'(0) = \frac{\lambda}{c}\phi(0) - \frac{\lambda}{c\mu} \cdot \mathrm{e}^0 \underbrace{\int_0^0 \phi(y) \cdot \mathrm{e}^{\frac{y}{\mu}} \mathrm{d}y}_{=0} = \frac{\lambda}{c} \cdot \frac{\theta}{1+\theta} =$$

$$= \frac{\lambda}{(1+\theta)\lambda\mu} \cdot \frac{\theta}{1+\theta} = \frac{\theta}{(1+\theta)^2\mu}.$$

Potom

$$\begin{aligned} &\mathrm{e}^{\frac{\theta u}{(1+\theta)\mu}} \cdot \phi'(u) = K_1 \\ &\phi'(u) = \frac{\theta}{(1+\theta)^2\mu} \cdot \mathrm{e}^{-\frac{\theta u}{(1+\theta)\mu}} \\ &\phi(u) = \frac{\theta}{(1+\theta)^2\mu} \cdot \int \mathrm{e}^{-\frac{\theta u}{(1+\theta)\mu}} \mathrm{d}u \\ &\phi(u) = \frac{\theta}{(1+\theta)^2\mu} \cdot \left(-\frac{(1+\theta)\mu}{\theta}\right) \cdot \mathrm{e}^{-\frac{\theta u}{(1+\theta)\mu}} + K_2 = -\frac{1}{1+\theta} \cdot \mathrm{e}^{-\frac{\theta u}{(1+\theta)\mu}} + K_2 \end{aligned}$$

Pro $u = 0$ a použitím vztahu $\phi(0) = \frac{\theta}{1+\theta}$ spočítáme konstantu K_2

$$\begin{aligned}
K_2 &= \phi(0) + \frac{1}{1+\theta} \cdot \mathrm{e}^0 \\
K_2 &= \frac{\theta}{1+\theta} + \frac{1}{1+\theta} = 1.
\end{aligned}$$

Pravděpodobnost přežití je tedy $\phi(u) = 1 - \frac{1}{1+\theta} \cdot \exp\bigl\{-\frac{\theta u}{(1+\theta)\mu}\bigr\}$.

✍

Příklad 5.8. Dokažte, že platí (defective renewal equation)

$$\psi(u) = \frac{\lambda}{c} \cdot \Bigl(\int_0^u \psi(u-x) \cdot \bigl(1 - F_X(x)\bigr)\mathrm{d}x + \int_u^\infty \bigl(1 - F_X(x)\bigr)\mathrm{d}x\Bigr).$$

Řešení:
Rovnici (5.38) upravíme, přeznačíme na

$$\frac{c}{\lambda} \cdot \phi'(x) = \phi(x) - \int_0^x \phi(x-y)\mathrm{d}F_X(y)$$

a integrujeme přes interval $(0, u]$

$$\begin{aligned}
\frac{c}{\lambda} \cdot \bigl(\phi(u) - \phi(0)\bigr) = \frac{c}{\lambda}\int_0^u \phi'(x)\mathrm{d}x &= \int_0^u \phi(x)\mathrm{d}x - \int_0^u \int_0^x \phi(x-y)\mathrm{d}F_X(y)\mathrm{d}x = \\
&= \int_0^u \phi(x)\mathrm{d}x - \int_0^u \int_y^u \phi(x-y)\mathrm{d}x\mathrm{d}F_X(y) = \\
&= \int_0^u \phi(x)\mathrm{d}x - \int_0^u \int_0^{u-y} \phi(x)\mathrm{d}x\mathrm{d}F_X(y) = \\
&= \int_0^u \phi(x)\mathrm{d}x - \int_0^u \int_0^{u-x} \mathrm{d}F_X(y)\phi(x)\mathrm{d}x = \\
&= \int_0^u \phi(x)\mathrm{d}x - \int_0^u F_X(u-x)\phi(x)\mathrm{d}x = \\
&= \int_0^u \phi(x) \cdot \bigl(1 - F_X(u-x)\bigr)\mathrm{d}x = \\
&= \int_0^u \phi(u-x) \cdot \bigl(1 - F_X(x)\bigr)\mathrm{d}x.
\end{aligned}$$

Pro $u \to \infty$

$$\frac{c}{\lambda} \cdot \bigl(1 - \phi(0)\bigr) = \int_0^\infty \bigl(1 - F_X(x)\bigr)\mathrm{d}x$$

$$\phi(0) = 1 - \frac{\lambda}{c}\int_0^\infty \big(1 - F_X(x)\big)\mathrm{d}x.$$

Z platnosti $\phi(u) = 1 - \psi(u)$:

$$\psi(0) = \frac{\lambda}{c}\int_0^\infty \big(1 - F_X(x)\big)\mathrm{d}x.$$

Potom

$$\begin{aligned}
\frac{c}{\lambda}\cdot\big(\phi(u) - \phi(0)\big) &= \int_0^u \phi(u-x)\cdot\big(1 - F_X(x)\big)\mathrm{d}x \\
\phi(u) - \phi(0) &= \frac{\lambda}{c}\int_0^u \phi(u-x)\cdot\big(1 - F_X(x)\big)\mathrm{d}x \\
-\psi(u) + \underbrace{\frac{\lambda}{c}\cdot\int_0^\infty \big(1 - F_X(x)\big)\mathrm{d}x}_{\frac{\lambda}{c}\left(\int_0^u (1-F_X(x))\mathrm{d}x + \int_u^\infty (1-F_X(x))\mathrm{d}x\right)} &= \underbrace{\frac{\lambda}{c}\left[\int_0^u \big(1 - \psi(u-x)\big)\cdot\big(1 - F_X(x)\big)\mathrm{d}x\right]}_{\frac{\lambda}{c}\int_0^u (1-F_X(x))\mathrm{d}x - \frac{\lambda}{c}\int_0^u \psi(u-x)\cdot(1-F_X(x))\mathrm{d}x} \\
\psi(u) &= \frac{\lambda}{c}\cdot\bigg(\int_0^u \psi(u-x)\cdot\big(1 - F_X(x)\big)\mathrm{d}x + \\
&\quad + \int_u^\infty \big(1 - F_X(x)\big)\mathrm{d}x\bigg)
\end{aligned}$$

✍

Příklad 5.9. Nechť má náhodná veličina X distribuční funkci ve tvaru $F_X(x) = 1 - \mathrm{e}^{-\frac{x}{\mu}}, x \geq 0$. Napište Cramérův asymptotický vzorec.

Řešení:
X s distribuční funkcí $F_X(x) = 1 - \mathrm{e}^{-\frac{x}{\mu}}$ se řídí exponenciálním rozdělením se střední hodnotou $\mathrm{E}(X) = \mu = \frac{1}{\lambda}$.
Z příkladu 5.4 víme, že $M_X(t) = \frac{1}{1-\mu t}$ a $\kappa = \frac{\theta}{(1+\theta)\mu}$.

Dále

$$\begin{aligned}
M_X'(t) &= \frac{\mu}{(1-\mu t)^2}, \\
M_X'(\kappa) &= \frac{\mu}{\left(1 - \mu\cdot\frac{\theta}{(1+\theta)\mu}\right)^2} = \frac{\mu}{\left(\frac{1}{1+\theta}\right)^2} = \mu(1+\theta)^2, \\
C &= \frac{\mu\theta}{M_X'(\kappa) - (1+\theta)\mu} = \frac{\mu\theta}{\mu(1+\theta)^2 - \mu(1+\theta)} = \frac{1}{1+\theta}.
\end{aligned}$$

Cramérův asymptotický vzorec:

$$\psi(u) \sim C\mathrm{e}^{\kappa u}$$

$$\psi(u) \sim \frac{1}{1+\theta} \cdot \mathrm{e}^{-\frac{\theta\mu}{(1+\theta)\mu}}, \quad u \to \infty.$$

✍

Cvičení

1. Celkový pojistný nárok může být ve výši $0, 5, 10, 15$ nebo 20 s pravděpodobnostmi uplatnění $0,4; 0,3; 0,15; 0,1$ a $0,05$. Roční pojistné činí 6 a je vybíráno každoročně na začátku roku. Pojišťovna by chtěla mít 12% zisk z kapitálu dostupném na začátku každého roku. Pojistné plnění je vyplaceno vždy na konci roku. Určete pravděpodobnost ruinování na konci prvních tří let, je-li $U_0 = 2$.

   $\left[\widetilde{\psi}(2,3) = 0,485750\right]$

2. Ukažte, že $\mathrm{E}(N_t) = \lambda t$.

   $\left[\text{Nápověda: Maclaurinova řada } \mathrm{e}^x = 1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \cdots = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}, x \in \mathbb{R}\right]$

3. Nechť se X řídí gamma rozdělením s parametry $\alpha = 2$ a β. Mějme bezpečnostní přirážku $\theta = 0,32$. Určete adjustační koeficient.

   $\left[\kappa = \frac{1}{6\beta}\right]$

4. Nechť má náhodná veličina X hustotu $f_X(x) = \mathrm{e}^{-x}, x > 0$. Určete adjustační koeficient pro $\theta = 0,4$.

   $[\kappa \doteq 0,285714]$

5. Určete adjustační koeficient, je-li $c = 3, \lambda = 4$ a hustota výše individuálního nároku ve tvaru $f_X(x) = \mathrm{e}^{-2x} + \frac{3}{2} \cdot \mathrm{e}^{-3x}, x > 0$.

   [Nápověda: θ získáte ze vztahu (5.26); výsledek: $\kappa = 1$]

6. Nechť je rozptyl náhodné veličiny S_t roven trojnásobku její střední hodnoty. Jaký je počáteční odhad adjustačního koeficientu?

$\left[\text{Nápověda: } \mathrm{E}(X) = \mu, \text{ věta 5.20; výsledek: } \widehat{\kappa} = \frac{2\theta}{3}\right]$

7. Nechť je $f_X(x) = (1 + 6x) \cdot \mathrm{e}^{-3x}, x \geq 0$ a $\theta = \frac{4}{5}$. Napište Cramérův asymptotický vzorec.

$\left[\psi(u) \sim \frac{16}{27}\mathrm{e}^{-u}, u \sim \infty\right]$

8. Nechť se náhodná veličina X řídí gamma rozdělením s parametrem tvaru $\alpha = 2$ a parametrem měřítka β. Dále nechť je $\theta = 2$. Určete Tijmsovu aproximaci pravděpodobnosti ruinování.

[Nápověda: Pro výpočet $\mathrm{E}(X^2)$ použijte (4.18).
Výsledek: $\psi_T(u) = \frac{2}{5}\mathrm{e}^{-\frac{u}{2\beta}} - \frac{1}{15}\mathrm{e}^{-\frac{4u}{3\beta}}, u \geq 0.$]

9. Nechť $\theta = \frac{4}{11}$ a náhodná veličina X má pravděpodobnostní hustotu $f_X(x) = \mathrm{e}^{-3x} + \frac{10}{3}\mathrm{e}^{-5x}, x \geq 0$. Určete Tijmsovu aproximaci pravděpodobnosti ruinování.

[Nápověda: Pro výpočet $\mathrm{E}(X^2)$ použijte (1.6).
Výsledek: $\psi_T(u) = \frac{1}{45}\mathrm{e}^{-4u} + \frac{32}{45}\mathrm{e}^{-u}, u \geq 0.$]

Seznam použité literatury

[1] BERKA, Pavel: *Diplomová práce: Simulační metody modelování kolektivního rizika* [online]. Pardubice: Univerzita Pardubice, 2012 [cit. 2016-06-17]. Dostupné z: https://dk.upce.cz/bitstream/handle/10195/46056/BerkaP_SimulacniMetody_VP_2012.pdf?sequence=3&isAllowed=y.

[2] BUDÍKOVÁ, Marie: *Pravděpodobnostní rozdělení: Degenerované rozdělení* [online]. 2015 [cit. 2015-09-18]. Dostupné z: http://is.muni.cz/do/sci/UMS/el/popis_statistika/pages/degenerovane-rozd.html.

[3] Cardano's Method. *Brilliant: Excel in math, science, and engineering* [online]. [cit. 2016-07-04]. Dostupné z: https://brilliant.org/wiki/cardano-method/.

[4] DENUIT, Michel; MARÉCHAL, Xavier; PITREBOIS, Sandra; WALHIN, Jean-François: *Actuarial Modelling of Claim Counts: Risk Classification, Credibility and Bonus-Malus System.* West Sussex, England: John Wiley & Sons, Ltd, 2007. 356 s. ISBN 978-0-470-02677-9.

[5] DOŠLÝ, Ondřej; ZEMÁNEK, Petr: *Integrální počet v* $\mathbb{R}$. První vydání. Brno: Masarykova univerzita, 2011. 222 s. ISBN 978-80-210-5635-0.

[6] FORBELSKÁ, Marie; KOLÁČEK, Jan: *Pravděpodobnost a statistika I* [online]. Brno: Masarykova univerzita, 2013 [cit. 2015-03-15]. Dostupné z: https://is.muni.cz/auth/el/1431/jaro2013/M4122/um/M3121_text.pdf?studium=632296.

[7] FORBELSKÁ, Marie; KOLÁČEK, Jan: *Pravděpodobnost a statistika II* [online]. Brno: Masarykova univerzita, 2013 [cit. 2015-10-27]. Dostupné z: `https://is.muni.cz/auth/el/1431/jaro2013/M4122/um/M4122_text.pdf?studium=632296`.

[8] FORBELSKÁ, Marie: *Stochastické modely časových řad* [online]. 2013 [cit. 2016-09-03]. Dostupné z: `https://www.math.muni.cz/~vondra/uvm/vystupy/KA1/M5201/M5201.pdf`.

[9] GRANDELL, Jan: *Mixed Poisson Processes*. First edition. Dordrecht: Springer Science + Business Media, 1997. 268 s. ISBN 978-0-412-78700-3.

[10] HOROVÁ, Ivana; ZELINKA, Jiří: *Numerické metody* [online]. Brno: Masarykova univerzita, 2004 [cit. 2016-08-12]. Dostupné z: `https://is.muni.cz/auth/el/1431/jaro2013/M4180/um/numerika.pdf`.

[11] KAAS, Rob; GOOVAERTS, Marc; DHAENE, Jan; DENUIT, Michel: *Modern Actuarial Risk Theory – Using R*. Second edition. Berlin Heidelberg: Springer-Verlag, 2008. 381 s. ISBN 978-3-540-70992-3.

[12] KAFKOVÁ, Silvie: *Kapitoly z pojistné matematiky* [online]. 2014 [cit. 2015-11-02]. Dostupné z `https://is.muni.cz/auth/el/1431/podzim2014/M5KPM/um/50581159/?studium=695026`.

[13] KLUGMAN, Stuart A.; PANJER, Harry H.; WILLMOT, Gordon E.: *LOSS MODELS – From Data to Decisions*. Third edition. Hoboken, New Jersey: John Wiley & Sons, Inc., 2008. 726 s. ISBN 978-0-470-18781-4.

[14] KLUGMAN, Stuart A.; PANJER, Harry H.; WILLMOT, Gordon E.: *LOSS MODELS – From Data to Decisions*. Fourth edition. Hoboken, New Jersey: John Wiley & Sons, Inc., 2012. 512 s. ISBN 978-1-118-31532-3.

[15] KOLÁŘ, Martin: *Stochastické procesy ve finanční matematice* [online]. [cit. 2015-03-15]. Dostupné z: https://is.muni.cz/auth/el/1431/podzim2014/MF001/um/?studium=695026.

[16] MANDL, Petr; MAZUROVÁ, Lucie: *Matematické základy neživotního pojištění*. První vydání. Praha: Matfyzpress, 1999. 113 s. ISBN 80-85863-42-1.

[17] MAZUROVÁ, Lucie: *Pravděpodobnostní rozdělení v pojistné matematice* [online]. 2012 [cit. 2016-04-06]. Dostupné z: http://www.karlin.mff.cuni.cz/~mazurova/SAV.pdf.

[18] Taylorova a Maclaurinova řada. *Mocninné řady s Maple* [online]. [cit. 2016-10-03]. Dostupné z: https://cgi.math.muni.cz/kriz/pseries/teorie.htm.

[19] Statistické tabulky. *Katedra statistiky a pravděpodobnosti VŠE* [online]. 2006 [cit. 2016-09-14]. Dostupné: http://statistika.vse.cz/download/materialy/tabulky.pdf.

[20] TRUONG THI MAI, Phuong: *Bakalářská práce: Pojistná matematika v příkladech* [online]. Brno: Masarykova univerzita, 2013 [cit. 2015-03-21]. Dostupné z: https://is.muni.cz/auth/th/380394/prif_b/Pojistna_matematika_v_prikladech.pdf.

[21] Wolfram|Alpha Widgets - Series Calculator. *Wolfram|Alpha* [online]. [cit. 2015-8-20]. Dostupné z: http://www.wolframalpha.com/widgets/view.jsp?id=86ceba9f35c96ebae137e44a36c7261a.

Seznam tabulek