# SPEKTRÁLNÍ ANALÝZA ČASOVÝCH ŘAD

MU
IBA

prof. Ing. Jiří Holčík, CSc.

holcik@iba.muni.cz

# V.
# PARAMETRICKÉ METODY ODHADU VÝKONOVÉHO SPEKTRA
**pokračování**

MU

IBA

## MA A ARMA MODELY

# ZÁKLADNÍ VZTAHY MEZI PARAMETRY MODELU A AUTOKORELAČNÍ POSLOUPNOSTÍ

**ARMA:**

$$y(nT_{vz}) = -\sum_{k=1}^{p} a_k y(nT_{vz} - kT_{vz}) + \sum_{k=0}^{q} b_k x(nT_{vz} - kT_{vz}) \qquad \Big| .y(nT_{vz} - mT_{vz}), E$$

$$E[y(nT_{vz})y(nT_{vz} - mT_{vz})] = -\sum_{k=1}^{p} a_k E[y(nT_{vz} - kT_{vz})y(nT_{vz} - mT_{vz})] +$$

$$+ \sum_{k=0}^{q} b_k E[x(nT_{vz} - kT_{vz})y(nT_{vz} - mT_{vz})]$$

$$\gamma_{yy}(mT_{vz}) = -\sum_{k=1}^{p} a_k \gamma_{yy}(mT_{vz} - kT_{vz}) + \sum_{k=0}^{q} b_k \gamma_{xy}(mT_{vz} - kT_{vz})$$

$\gamma_{xy}(mT_{vz})$ … vzájemná korelační posloupnost mezi $x(nT_{vz})$ a $y(nT_{vz})$

$$\gamma_{xy}(mT_{vz}) = E[y(nT_{vz})x(nT_{vz} + mT_{vz})] = E\left[\sum_{k=0}^{\infty} h(kT_{vz})x(nT_{vz} - kT_{vz}).x(nT_{vz} + mT_{vz})\right] =$$

předpokládáme kauzální filtr

$$= \sum_{k=0}^{\infty} h(kT_{vz})E[x(nT_{vz}).x(nT_{vz} + mT_{vz} + kT_{vz})] = \sum_{k=0}^{\infty} h(kT_{vz})\gamma_{xx}(mT_{vz} + kT_{vz}) =$$

$$= h(-mT_{vz}).\sigma_x^2 = \begin{cases} 0, & m > 0 \\ \sigma_x^2.h(-mT_{vz}) & m \le 0 \end{cases}$$

# ZÁKLADNÍ VZTAHY MEZI PARAMETRY MODELU A AUTOKORELAČNÍ POSLOUPNOSTÍ

## ARMA:

$$\gamma_{yy}(mT_{vz}) = \begin{cases} -\sum_{k=1}^{p} a_k.\gamma_{yy}(mT_{vz} - kT_{vz}) & m > q \\ -\sum_{k=1}^{p} a_k.\gamma_{yy}(mT_{vz} - kT_{vz}) + \sigma_x^2 \sum_{k=0}^{q-m} h(kT_{vz}).b_{k+m} & 0 \leq m \leq q \\ \gamma_{yy}(-mT_{vz}) & m < 0 \end{cases}$$

nelineární vztah mezi $\gamma_{yy}(mT_{vz})$ a parametry $a_k$ a $b_k$, protože impulzní charakteristika $h(kT_{vz}) = f(a_k, b_k)$

# ZÁKLADNÍ VZTAHY MEZI PARAMETRY MODELU A AUTOKORELAČNÍ POSLOUPNOSTÍ

☑ opakování:

**AR:**

$$y(nT_{vz}) = -\sum_{k=1}^{p} a_k y((n-k)T_{vz}) + \sum_{k=0}^{q} b_k x((n-k)T_{vz})$$

$$b_0 = 1 \text{ a } \gamma_{xx}(kT_{vz}) = \begin{cases} \sigma_x^2 & k = 0 \\ 0 & k \neq 0 \end{cases}$$

$$\gamma_{yy}(mT_{vz}) = \begin{cases} -\sum_{k=1}^{p} a_k.\gamma_{yy}(mT_{vz} - kT_{vz}) & m > 0, (q = 0) \\ -\sum_{k=1}^{p} a_k.\gamma_{yy}(mT_{vz} - kT_{vz}) + \sigma_x^2 & m = 0, (0 \leq m \leq q, q = 0) \\ \gamma_{yy}(-mT_{vz}) & m < 0 \end{cases}$$

# MA MODELY

☑ opakování:

$$\gamma_{yy}(mT_{vz}) = \begin{cases} 0 & m > q \\ \sigma_x^2 \sum_{k=0}^{q-m} b_k b_{k+m} = \sigma_x^2 d_m & 0 \le m \le q \\ \gamma_{yy}(-mT_{vz}) & m < 0 \end{cases}$$

$$y_n = \sum_{m=0}^{q} b_m x_{n-m} \qquad h(k) = \{b_k\}$$

$$E\{x_n\} = 0 \qquad E\{x_{n+m} x_n\} = \begin{cases} \delta_x^2 & m = 0 \\ 0 & \text{jindy} \end{cases}$$

# MA MODELY

$$B(z).B(z^{-1}) = D(z) = \sum_{m=-q}^{q} d_m z^{-m}$$

$$(b_0z^0+b_1z^1+\ldots+b_qz^q).(b_0z^0+b_1z^{-1}+\ldots+b_qz^{-q}) =$$

$$= b_0^2+b_0b_1z+\ldots+b_0b_qz^q+b_0b_1z^{-1}+b_1^2+b_2b_1z+\ldots+b_qb_1z^{q-1}+\ldots+$$

$$+b_0b_qz^{-q}+b_1b_qz^{-q+1}+b_2b_qz^{-q+2}+\ldots+b_q^2 =$$

$$= \underbrace{(b_0b_0+b_1b_1+\ldots+b_qb_q)}_{d_0}.z^0 + \underbrace{(b_0b_1+b_1b_2+\ldots+b_{q-1}b_q)}_{d_{-1}}.z^{-1} +$$

$$+\underbrace{(b_1b_0+b_2b_1+\ldots+b_qb_{q-1})}_{d_1}.z^1+\ldots+(\ldots).z^q$$

$$\Downarrow$$

$$d_m = \sum_{k=0}^{q-|m|} b_k b_{k+m} \quad \text{pro } |m| \le q$$

# MA MODELY

Tedy

$$\gamma_{yy}(mT) = \begin{cases} 0 & |m| > q \\ \sigma_x^2 d_m & |m| \le q \end{cases}$$

**metoda momentů**

**!!!**
nepočítáme parametry MA modelu, ale jen výkonovou spektrální hustotu
**!!!**

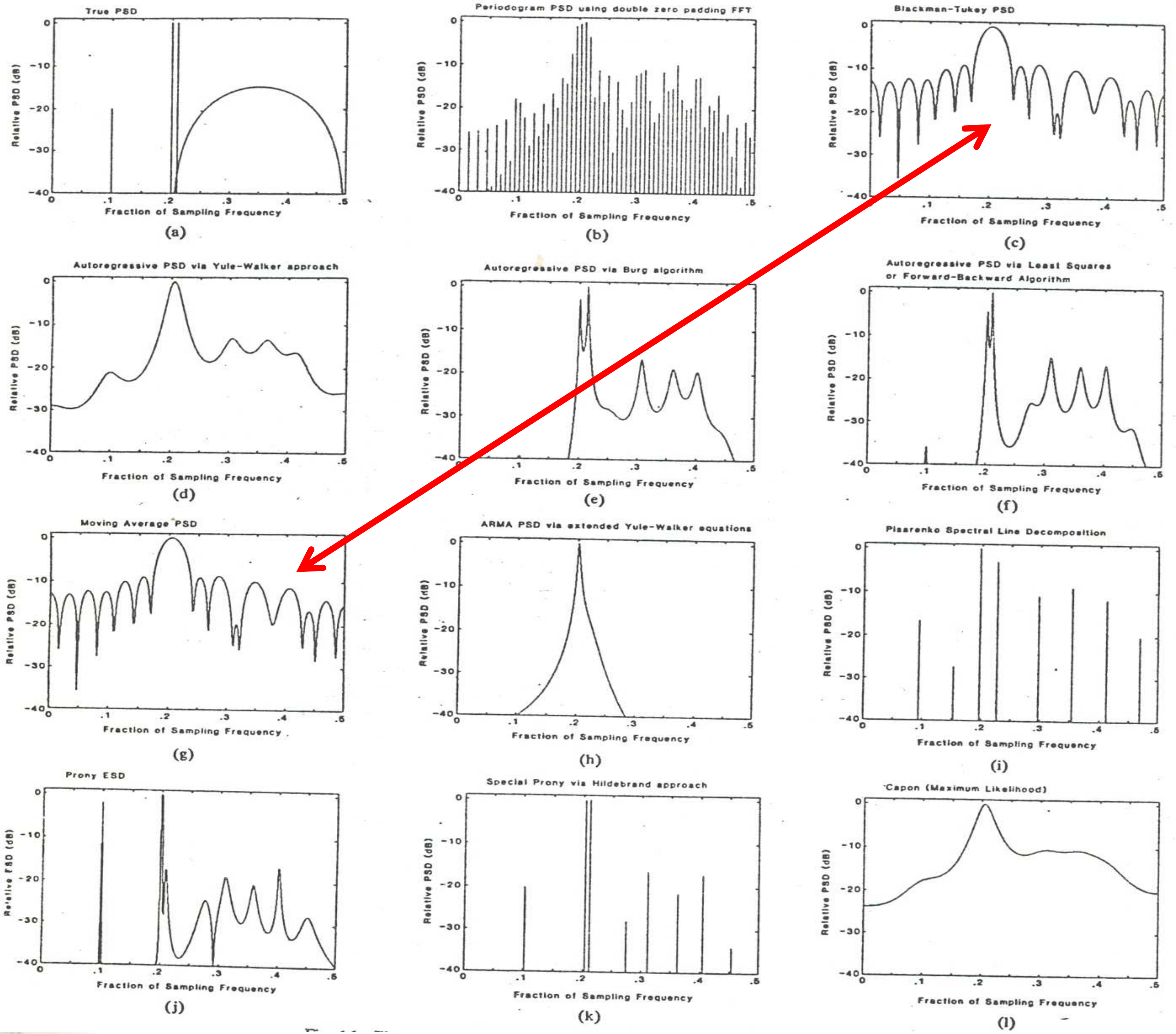
a výkonové spektrum

$$\Gamma_{yy}^{MA}(f) = \sum_{m=-q}^{q} \gamma_{yy}(mT_{vz}).e^{-j2\pi fmT_{vz}}$$

odhad spektra:

$$P_{yy}^{MA}(f) = \sum_{m=-q}^{q} r_{yy}(mT_{vz}).e^{-j2\pi fmT_{vz}}$$

**!!! A TO JE KLASIKA !!!**
aneb
metoda Blackmanova- Tukeyho


True PSD
Periodogram PSD using double zero padding FFT
Blackman-Tukey PSD
Autoregressive PSD via Yule-Walker approach
Autoregressive PSD via Burg algorithm
Autoregressive PSD via Least Squares or Forward-Backward Algorithm
Moving Average PSD
ARMA PSD via extended Yule-Walker equations
Pisarenko Spectral Line Decomposition
Prony ESD
Special Prony via Hildebrand approach
Capon (Maximum Likelihood)
Relative PSD (dB)
Relative ESD (dB)
Fraction of Sampling Frequency
0
-10
-20
-30
-40
.1
.2
.3
.4
.5
(a)
(b)
(c)
(d)
(e)
(f)
(g)
(h)
(i)
(j)
(k)
(l)

# MA MODELY

## ALTERNATIVA:

stanovení $\{b_k\}$ založené na aproximaci MA procesu AR procesem vysokého řádu,
tj. $p \gg q$

- ☑ dekompoziční teorém (Wold 1938)
  - ➔ jakýkoliv ARMA nebo MA proces může být jednoznačně reprezentován AR modelem max. $\infty$ řádu;
  - ➔ jakýkoliv ARMA nebo AR proces lze reprezentovat MA modelem max. $\infty$ řádu;

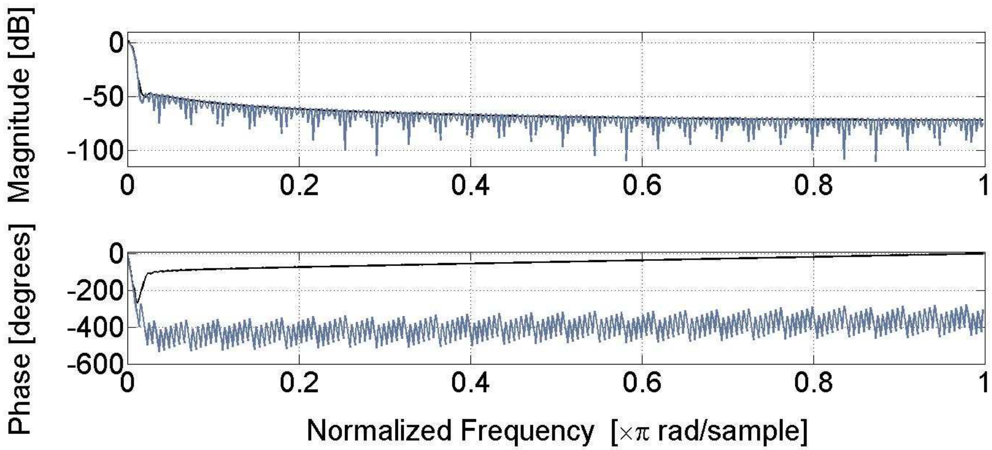
# MA MODELY

## ALTERNATIVA:

stanovení $\{b_k\}$ založené na aproximaci MA procesu AR procesem vysokého řádu, tj. $p \gg q$

v tom případě platí, že $B(z) = 1/A(z)$, resp. $B(z).A(z)=1$ a proto

$$\hat{a}_n + \sum_{k=1}^{q} b_k . \hat{a}_{n-k} = \begin{cases} 1 & n = 0 \\ 0 & n \neq 0 \end{cases}$$




frekvenční charakteristiky Hammingovy MA DP s délkou impuzní odezvy 322 vzorků (modrá) a její AR ekvivalent řádu 274 (černá)

# MA MODELY

## ALTERNATIVA:

odhad $\{b_k\}$ můžeme zpřesnit pomocí metody nejmenších čtverců
určíme kvadratickou chybu

$$e = \sum_{n=0}^{p}\left[\hat{a}_n + \sum_{k=0}^{q} b_k.\hat{a}_{n-k}\right]^2 - 1, \quad \hat{a}_0 = 1; \hat{a}_k = 0 \text{ pro } k < 0$$

a tu minimalizujeme výběrem parametrů $\{b_k\}$

$$\hat{\mathbf{b}} = -\mathbf{R}_{aa}^{-1}.\mathbf{r}_{aa}$$

kde

$$R_{aa}(|i-j|) = \sum_{n=0}^{p-|i-j|} \hat{a}_n.\hat{a}_{n+|i-j|}, \quad \text{pro } i, j = 1, 2, \ldots, q;$$

$$r_{aa}(i) = \sum_{n=0}^{p-i} \hat{a}_n.\hat{a}_{n+i}, \quad \text{pro } i = 1, 2, \ldots, q.$$

**vymyslel to Durbin a ukázalo se, že je to přibližně odhad s maximální věrohodností, je-li proces normální**

# URČENÍ ŘÁDU MA MODELU

- ☑ pro vyjádření úzkých pásem je třeba hodně vysoký řád;
- ☑ intuitivně:

hodnoty odhadu autokorelační funkce musí rychle klesat k nule, protože $\gamma_{yy}(mT_{vz})=0$ pro $|m|>q$

test, zda $r_{yy}(mT_{vz})\rightarrow 0$ je založený na srovnávání $r_{yy}(qT_{vz})$ s rozptylem hodnot $r_{yy}(mT_{vz})$ pro $m<q$

# URČENÍ ŘÁDU MA MODELU

- jinak:

  založeno na testu „bělosti" posloupnosti, která je výsledkem působení soustavy inverzní k odhadnutému MA modelu na analyzovanou posloupnost

- Akaikovo informační kritérium

$$AIC = \ln\sigma^2_{wq} + \frac{2q}{N} = \ln(E_q) + \frac{2q}{N}$$

AR: $AIC_p = \ln(E_p) + 2(p+1)/N$, někdy $\ln(E_p) + 2p/N$;

# ARMA MODELY

opět si stručně zopakujeme:

$$y(nT_{vz}) = -\sum_{k=1}^{p} a_k y((n-k)T_{vz}) + \sum_{k=0}^{q} b_k x((n-k)T_{vz})$$

$$\gamma_{xx}(kT_{vz}) = \begin{cases} \sigma_x^2 & k = 0 \\ 0 & k \neq 0 \end{cases}$$

$$\gamma_{yy}(mT_{vz}) = \begin{cases} -\sum_{k=1}^{p} a_k \gamma_{yy}(mT_{vz} - kT_{vz}) & m > q \\ -\sum_{k=1}^{p} a_k \gamma_{yy}(mT_{vz} - kT_{vz}) + \sigma_x^2 \sum_{k=m}^{q} b_k h(kT_{vz} - mT_{vz}) & 0 \leq m \leq q \end{cases}$$

odhad výkonového spektra

$$\hat{P}_{yy}^{ARMA}(f) = \frac{\sigma_x^2(.T_{vz}).\left|1 + \sum_{k=1}^{q} b_k \exp(-j2\pi fkT_{vz})\right|^2}{\left|1 + \sum_{k=1}^{p} a_k \exp(-j2\pi fkT_{vz})\right|^2}$$

# ARMA MODELY

## ☑ citlivost na šum

stejnosměrná složka a lineární trend znehodnocuje spektrum na nízkých kmitočtech – odstranit předem !!!

zobecnění problému:

$y_n = x_n + w_n$ a nechť je $w_n$ bílý šum s rozptylem $\sigma_w^2$ a je nekorelovaný s $x_n$;

pak výkonové spektrum

$$\hat{P}_y(f) = \frac{T_{vz}.\sigma_x^2}{\left|1 + \sum_i a_p(i).e^{-j2\pi fiT_{vz}}\right|^2} + \sigma_w^2 T_{vz}$$

$$\hat{P}_y(f) = \frac{T_{vz}.\sigma_x^2}{A(z).A^*(1/z^*)} + \sigma_w^2 T_{vz} = \frac{\left[\sigma_x^2 + \sigma_w^2 A(z).A^*(1/z^*)\right].T_{vz}}{A(z).A^*(1/z^*)}$$

!!! tohle už ale není přenosová funkce AR, alébrž ARMA !!!

# ARMA MODELY

mnoho teoreticky optimálních postupů, ovšem bez praktického významu, protože:

- jsou výpočetně příliš náročné (maticové operace, iterační optimalizační postupy);
- iterační optimalizace nezaručuje konvergenci řešení nebo konvergenci ke skutečně optimálnímu řešení;

proto suboptimální postupy :

- používají metody nejmenších čtverců $\Rightarrow$ řešení soustavy lineárních rovnic;
- oddělený výpočet AR a MA parametrů

# ARMA MODELY
## METODA PRVNÍ

- pro m>q je $\gamma_{yy}(mT_{vz}) = f(a_k)$, resp. $f(\hat{a}_k)$
- dosadíme $\gamma_{yy}$ a řešíme p lineárních rovnic (pro modely vyšších řádů horší výsledky díky slabším odhadům $\gamma_{yy}(mT_{vz})$ pro větší m);
- přeurčená soustava lineárních rovnic (pro m>q)
- její řešení opět optimalizací metodou nejmenších čtverců

# ARMA MODELY
## METODA PRVNÍ

předpokládejme, že známe odhady autokorelační funkce až do zpoždění M > p+q

$$\begin{bmatrix} r_{yy}(q) & r_{yy}(q-1) & \cdots & r_{yy}(q-p+1) \\ r_{yy}(q+1) & r_{yy}(q) & \cdots & r_{yy}(q-p+2) \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ r_{yy}(M-1) & r_{yy}(M-2) & \cdots & r_{yy}(M-p) \end{bmatrix} . \begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_p \end{bmatrix} = - \begin{bmatrix} r_{yy}(q+1) \\ r_{yy}(q+2) \\ \vdots \\ r_{yy}(M) \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{R}_{yy}\mathbf{a} = -\mathbf{r}_{yy}$$

protože $R_{yy}$ je rozměru (M-q) x p a M-q > p, lze použít metodu nejmenších □□;

výsledkem minimalizace je $\hat{\mathbf{a}} = -(\mathbf{R}_{yy}^T.\mathbf{R}_{yy})^{-1}.\mathbf{R}_{yy}^T.\mathbf{r}_{yy}$

(může být použito i váhování k potlačení méně spolehlivých odhadů AK funkcí)

# ARMA MODELY

## METODA PRVNÍ

$$\hat{A}(z) = 1 + \sum_{k=1}^{p} \hat{a}_k . z^{-k}$$

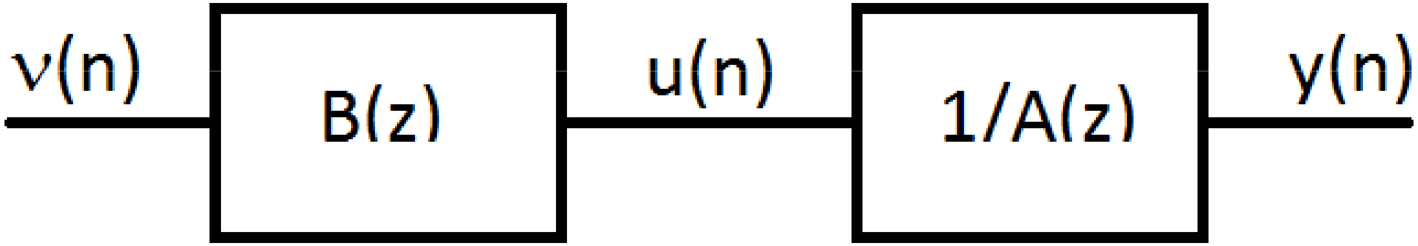
analyzovanou sekvenci vyfiltrujeme FIR filtrem $\hat{A}(z)$ a dostaneme

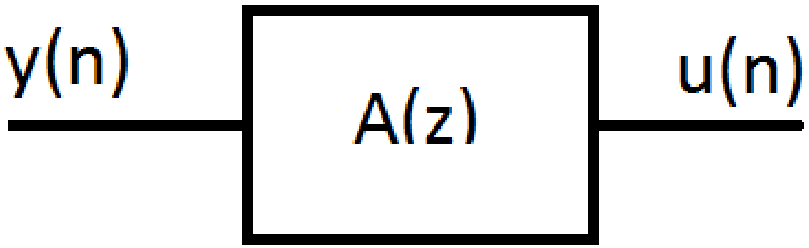
$$u(nT_{vz}) = y(nT_{vz}) + \sum_{k=1}^{p} \hat{a}_k . y(nT_{vz} - kT_{vz}), \quad n = 0, 1, \ldots, N-1;$$

kaskádní zapojení ARMA(p,q) [$H_{ARMA}(z)=B(z)/A(z)$] s AR(p) $H_{AR}(z) = \hat{A}(z)$ reprezentuje přibližně MA(q) proces s $H_{MA}(z)=B(z)$

# ARMA MODELY
## METODA PRVNÍ

$$H(z)=\frac{Y(z)}{X(z)}=\frac{B(z)}{A(z)}=B(z)\cdot\frac{1}{A(z)}$$




$$Y(z)=\frac{1}{A(z)}\cdot U(z)\Rightarrow U(z)=A(z)\cdot Y(z)$$

# ARMA MODELY
## METODA PRVNÍ

z filtrované sekvence $u(nT_{vz})$ pro $p \leq n \leq N-1$ je $r_{uu}(mT_{vz})$, odhad výkonového spektra potom je

$$\hat{P}_{yy}^{MA}(f) = \sum_{m=-q}^{q} r_{uu}(mT_{vz}) \exp(-j2\pi f m T_{vz})$$

(opět můžeme „woknovat" k potlačení méně spolehlivých odhadů autokorelačních funkcí nebo filtrace AR(q) oběma směry $\Rightarrow$ dvě různé posloupnosti autokorelační funkce)

$$\hat{P}_{yy}^{ARMA}(f) = \frac{P_{uu}^{MA}(f)}{\left|1 + \sum_{k=1}^{p} a_k \exp(-j2\pi f k T_{vz})\right|^2}$$

# ARMA MODELY
## METODA DRUHÁ

vstupní/výstupní identifikace metodou nejmenších □□

**opakování**:

$$\gamma_{yy}(mT_{vz}) = -\sum_{k=1}^{p} a_k \gamma_{yy}(mT_{vz} - kT_{vz}) + \sum_{k=m}^{q} b_k \gamma_{xy}(mT_{vz} - kT_{vz})$$

nelinearita vztahu pro výpočet $\gamma_{yy}(mT_{vz})$ plyne z toho, že neznáme $\gamma_{xy}(mT_{vz}-kT_{vz})$, protože neznáme $x(nT_{vz})$

$$y(nT_{vz}) = -\sum_{k=1}^{p} a_k y(nT_{vz} - kT_{vz}) + \sum_{k=0}^{q} b_k x(nT_{vz} - kT_{vz})$$

# ARMA MODELY
## METODA DRUHÁ

$$y(nT_{vz}) = -\sum_{k=1}^{p} a_k y(nT_{vz} - kT_{vz}) + \sum_{k=1}^{q} b_k x(nT_{vz} - kT_{vz}) + x(nT_{vz}), \quad n = 0, 1, \ldots, N-1$$

$$\mathbf{y} = \mathbf{H}.\boldsymbol{\theta} + \nu$$

$$\mathbf{y} = [y(0)\ y(T_{vz})\ \ldots\ y(NT_{vz}\text{-}T_{vz})]^T$$

$$\nu = [x(0)\ x(T_{vz})\ \ldots\ x(NT_{vz}\text{-}T_{vz})]^T$$

$$\boldsymbol{\theta} = [-a_1\ -a_2\ \ldots\ -a_p\ b_1\ b_2\ \ldots\ b_q\ ]^T$$

$$\mathbf{H} = \begin{bmatrix} y_{-1} & y_{-2} & \cdots & y_{-p} & x_{-1} & x_{-2} & \cdots & x_{-q} \\ y_0 & y_{-1} & \cdots & y_{-p+1} & x_0 & x_{-1} & \cdots & x_{-q+1} \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ y_{N-2} & y_{N-3} & \cdots & y_{N-p-1} & x_{N-2} & x_{N-3} & \cdots & x_{N-q-1} \end{bmatrix}$$

matice vstupních/výstupních dat o rozměru N x (p+q)

# ARMA MODELY
## METODA DRUHÁ

⇓

minimalizace nejmenšími □□

⇓

$$\hat{\Theta} = (H^T.H)^{-1}.H^T.y$$

počáteční podmínky $y_{-p}$, ..., $y_{-1}$, $x_{-q}$, ..., $x_{-1}$ buď specifikovat nebo nulové

odhad hodnot vstupní šumové posloupnosti z analyzované posloupnosti AR modelem vysokého řádu

# ARMA MODELY
## METODA TŘETÍ

(už tu částečně byla)

$$\frac{B(z)}{A(z)} = \frac{1}{C(z)}, \quad \text{kde } C(z) = 1 + \sum_{k=1}^{\infty} c_k z^{-k}$$

$$H(z) = \frac{B(z)}{A(z)} = \frac{1}{\dfrac{A(z)}{B(z)}} = \frac{1}{C(z)},$$

koeficienty $\{c_k\}$ se určí nějakým AR algoritmem a z nich $\{a_k\}$ a $\{b_k\}$

$$\hat{C}(z) = 1 + \sum_{k=1}^{M} \hat{c}_k z^{-k}, \quad M \geq p + q$$

je-li p>q, pak $\dfrac{\hat{B}(z)}{\hat{A}(z)} = \dfrac{1}{\hat{C}(z)} \Rightarrow \hat{B}(z) \cdot \hat{C}(z) = \hat{A}(z)$

nebo v časové oblasti $\sum_{k=0}^{q} \hat{b}_k . \hat{c}_{n-k} = \hat{a}_n, \quad n = 1,2,\dots; \hat{b}_0 = 1$

# ARMA MODELY
## METODA TŘETÍ

protože by mělo platit $a_n = 0$ pro $n>p$, je

$$\sum_{k=0}^{q} \hat{b}_k . \hat{c}_{n-k} = 0, \quad \text{pro } n = p+1, p+2, \ldots, p+q$$

$$\begin{bmatrix} \hat{c}_p & \hat{c}_{p-1} & \cdots & \hat{c}_{p+1-q} \\ \hat{c}_{p+1} & \hat{c}_p & \cdots & \hat{c}_{p+2-q} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \hat{c}_{p+q-1} & \hat{c}_{p+q-2} & \cdots & \hat{c}_p \end{bmatrix} . \begin{bmatrix} \hat{b}_1 \\ \hat{b}_2 \\ \vdots \\ \hat{b}_q \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \hat{c}_{p+1} \\ \hat{c}_{p+2} \\ \vdots \\ \hat{c}_{p+q} \end{bmatrix}$$

po určení $\{\hat{b}_1, \hat{b}_2, \ldots, \hat{b}_q\}$ se spočítají $\{\hat{a}_1, \hat{a}_2, \ldots, \hat{a}_p\}$ z

$$\sum_{k=0}^{q} \hat{b}_k . \hat{c}_{n-k} = \hat{a}_n, \quad \text{pro } n = 1, 2, \ldots, p; \ \hat{c}_0 = 1$$

# ARMA MODELY
## METODA TŘETÍ

což je maticově

$$\begin{bmatrix} \hat{a}_1 \\ \hat{a}_2 \\ \vdots \\ \hat{a}_p \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \hat{c}_1 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ \hat{c}_2 & \hat{c}_1 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ \hat{c}_p & \hat{c}_{p-1} & \hat{c}_{p-2} & \cdots & \hat{c}_{p-q} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ \hat{b}_1 \\ \vdots \\ \hat{b}_q \end{bmatrix}$$

# URČENÍ ŘÁDŮ ARMA MODELU

$$AIC(p,q) = \ln \hat{\sigma}^2_{wpq} + \frac{2(p+q)}{N},$$

$\hat{\sigma}_{wpq}$ je odhad rozptylu vstupní chybové posloupnosti

## dodatečné kritérium:

posouzení bělosti posloupnosti po inverzní filtraci analyzované posloupnosti navrženou ARMA soustavou

## odhad p

$$R'_{yy} = \begin{bmatrix} r_{yy}(q) & r_{yy}(q-1) & \cdots & r_{yy}(q-p+1) \\ r_{yy}(q+1) & r_{yy}(q) & \cdots & r_{yy}(q-p+2) \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ r_{yy}(q+p-1) & r_{yy}(q+p-2) & \cdots & r_{yy}(q) \end{bmatrix}$$

**rozšířené modifikované Y.-W. rovnice**

$\det(R'_{yy})=0$, pokud je rozměr modelu větší než řád analyzovaného procesu