

Nestability na rozhraní dvou tekutin

Tomáš Hoder

F2080 Demonstrační experimenty
k základnímu kurzu fyziky 2

Masarykova Univerzita

M U N I
S C I

Úvod a obsah

- Nestability obecně
- Plateau-Rayleigh nestabilita
- Rayleigh-Bénard nestabilita
- Rayleigh-Taylor nestabilita
- Kelvin-Helmholtz nestabilita
- Saffman-Taylor nestabilita:
 - teorie
 - experiment

Nestability obecně

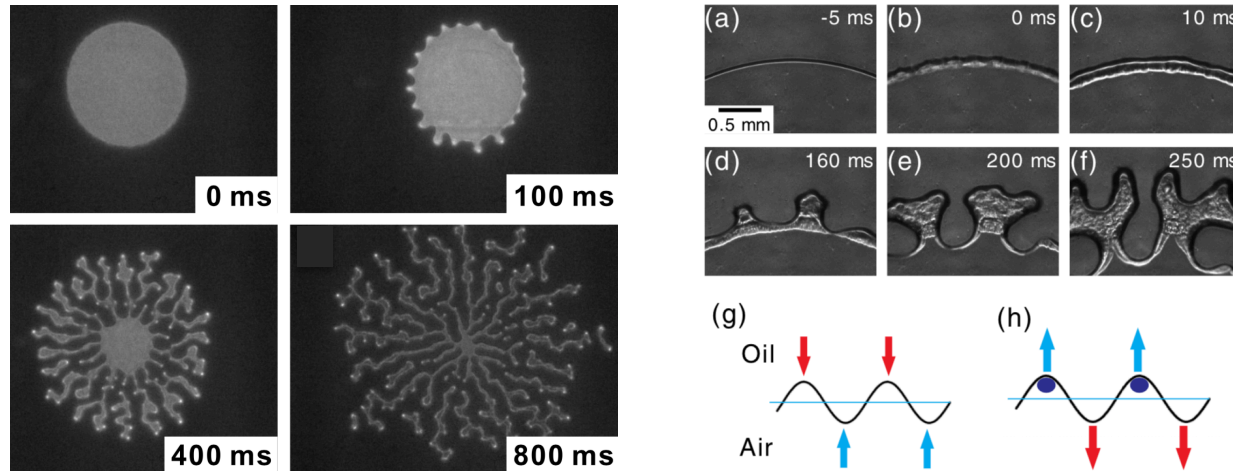
Pojem nestabilita je definován v různých odvětvích přírodních, matematických apod. různými způsoby, od relativně jednoduchých definic až po matematicky přesné výrazy.

Pro naše účely postačí tento:

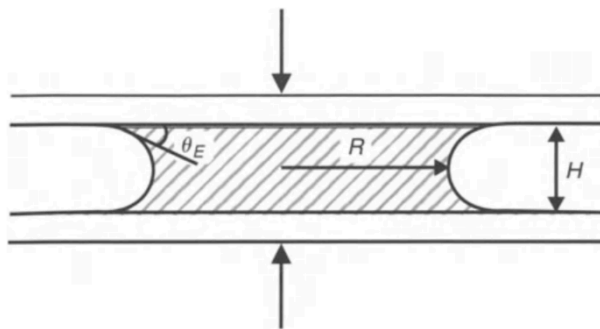
Nestabilita systému je obecně charakterizována tehdy, pokud některý z jeho parametrů, charakteristik vnitřních stavů či výstupů začne růst nade všechny meze.

Nestability obecně - příklad

Příklad: Plasma generované v bublině silikonového oleje v Hele-Shaw komoře



Povrchové napětí stabilizuje rozhraní a působí proti objevujícím se odchýlkám. Lokální zahřívání plazmatem pak mění (snižuje) povrchové napětí a odchýlky podporuje.



Laplace pressure

$$\Delta p = \gamma \cdot \left(\frac{1}{R} - \frac{\cos \theta_E}{H/2} \right)$$

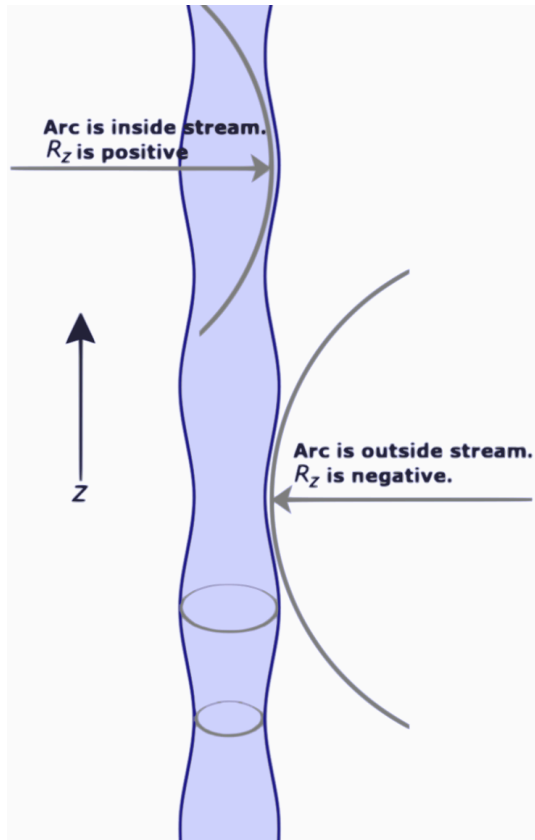
povrchové napětí

Chu et al. 2011 PRL

deGennes 2004 Capillarity and wetting phenomena

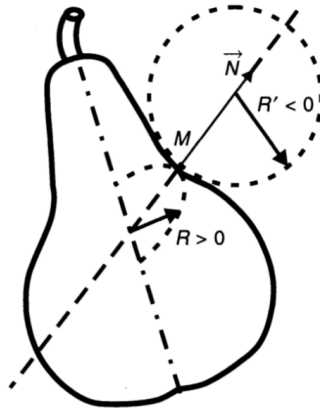
Plateau-Rayleigh nestabilita

Popisuje jev, kdy se proud padající kapaliny roztrhne do menších kusů/kapek o stejném objemu jako původní proud ale o menší povrchové energii.



Laplace rovnice

$$\Delta p = \gamma \left(\frac{1}{R} + \frac{1}{R'} \right)$$



Minimalizace povrchu

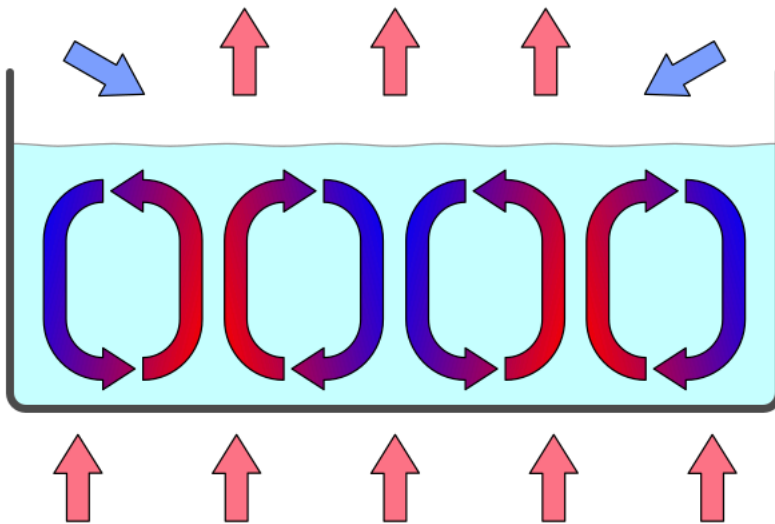
$$\pi R^2 L = \frac{4}{3} \pi r^3 n$$

$$\frac{S_n}{S_0} = \frac{\text{povrch } n\text{-kapek}}{\text{povrch válce proudu}} = \frac{n \times 4\pi R^2}{2\pi R L} = \frac{3R}{2r}$$

$$\delta W = \gamma \cdot dA$$

Rayleigh-Bénard nestabilita

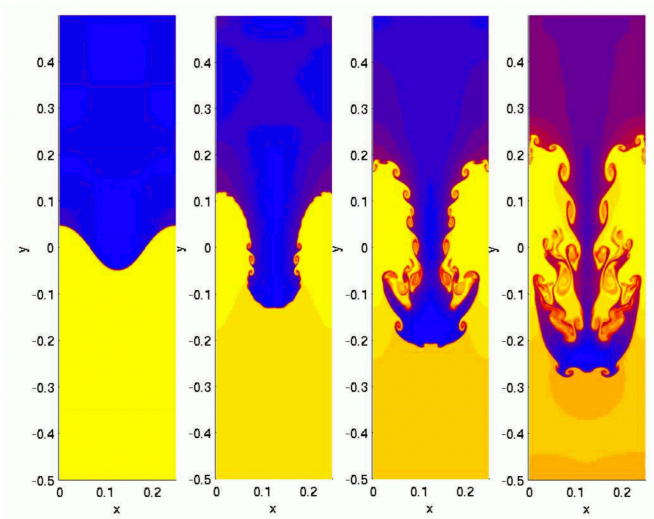
Projevuje se v kapalinách vystavených teplotnímu gradientu. Chladnější (hustší) část kapaliny je gravitací tažena dolů, zatímco teplejší (řidší) je pak vynášena nahoru. Klesání hustší kapaliny je bržděno viskozitou kapaliny. Soupeření těchto sil je pak popsáno tzv. Rayleigh číslem Ra_L , které je poměrem gravitační a brzdné (viskozitou) síly. Čím vyšší číslo tím je gravitační síla dominantní, kritické hodnoty se pohybují kolem několika set až jednoho tisíce.



$$Ra_L = \frac{g\beta}{\nu\alpha} (T_b - T_u) L^3$$

gravitační zrychlení koeficient teplotní objemové roztažnosti teplota nahoře
viskozita termální difuzivita teplota dole výška kontejneru

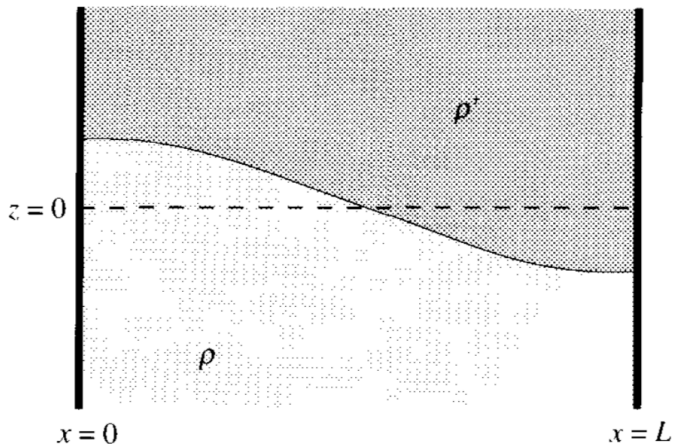
Rayleigh-Taylor nestabilita



Projevuje se tehdy, když lehčí kapalina je tlačena (gravitační silou např.) proti těžší kapalině. Typicky voda nad olejem. Těžší voda klesá proti oleji pod ní.

Gravitace způsobí pokles části těžší kapaliny do lehčí, s tím, že stejný objem lehčí kapaliny je vytlačen nahoru. Uvolní se tak potenciální energie – systém snižuje svůj energetický stav.

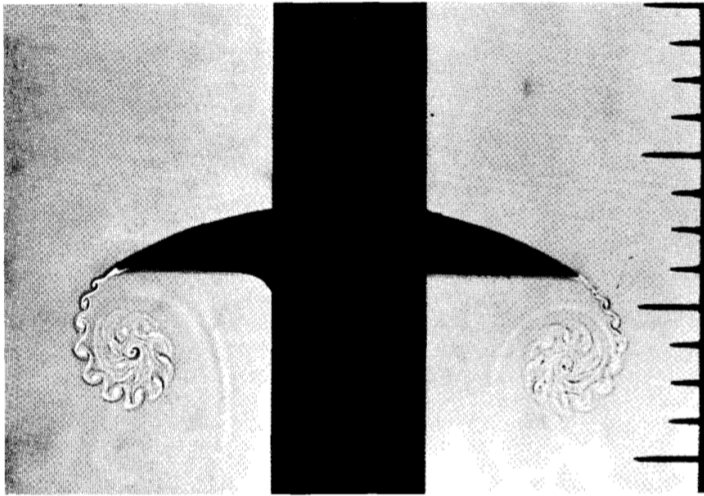
Když taková situace nastane, tak má prorůstání vody do oleje exponenciální charakter, popsáný:



$$\exp(\gamma t) \quad \gamma = \sqrt{A g \alpha} \quad A = \frac{\rho_{\text{heavy}} - \rho_{\text{light}}}{\rho_{\text{heavy}} + \rho_{\text{light}}}$$

Kde gama značí koeficient růstu, alfa je prostorové vlnové číslo nestability a A je tzv. Atwoodovo číslo.

Kelvin-Helmholtz nestabilita



Vzniká na rozhraní dvou různě rychle se pohybujících kapalin, případně na rozhraní dvou vrstev jedné kapaliny, kde dojde ke smyku.

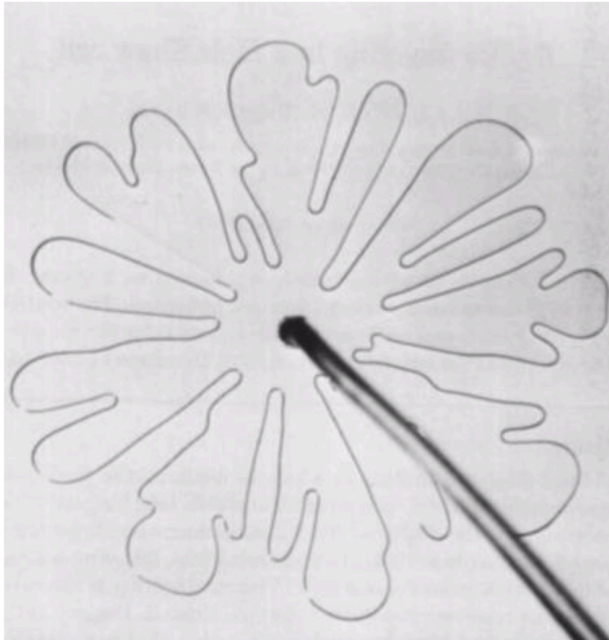
Nejčastějšími příklady jsou vítr foukající přes hladinu vody a vytvářející vlny, zvlnění okrajů rudé skvrny na Jupiteru, či interakce dvou vrstev atmosféry Saturnu (viz obrázek vlevo dole).



Proti iniciaci této nestability působí povrchové napětí kapalin a startovní podmínka pro vznik nestability je dána Richardsonovým číslem $Ri > 0.25$.

Richardsonovo číslo je podílem vztahů zastupujících vztahovou složku a smykovou složku. Je podílem tzv. Grashofova a Reynoldsova čísla.

Saffman-Taylor nestabilita



Jde o formování složitějšího obrazce na nestabilním rozhraní dvou tekutin v porózním prostředí. Vzniká pokud méně viskózní tekutina vytlačuje více viskózní. Typickým příkladem, proto je této nestabilitě také věnována obrovská pozornost, je dočerpávání ropných ložisek při čerpání vody do zbylé suti v ložisku.

Druhým názvem pro tento jev je tzv. viscous fingering, protože při daném jevu se nestabilní rozhraní protahuje do tzv. prstů.

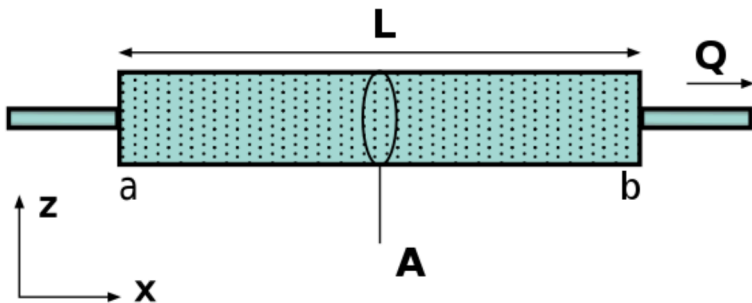
Matematicky vychází popis jevu z tzv. Darcyho zákona, který je dán vztahem:

permeabilita

tekutiny

$$Q = \frac{kA}{\mu L} \Delta p$$

viskozita



Saffman-Taylor: teorie, část I.

Darcyho zákon vychází z řešení Navier-Stokesových rovnic, je obdobou např. Ohmovu zákonu v elektřině. Dá se přepsat následujícím způsobem:

$$\mathbf{v} = -M\nabla p, \text{ kde } M = b^2/12\mu$$

Což je v polárních souřadnicích, pro $\phi_j = M_j p_j$

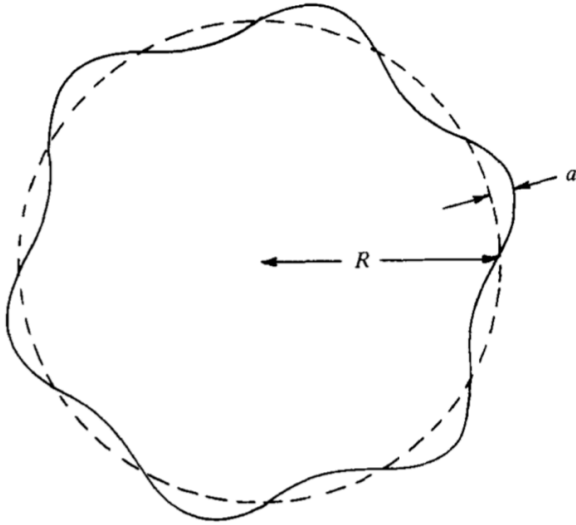
$$\frac{\partial^2 \phi_j}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial \phi_j}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 \phi_j}{\partial \theta^2} = 0,$$

Což vede na rychlostní potenciál:

$$\phi_j^{(0)} = -\frac{Q}{2\pi} \left[\ln \frac{r}{R} + \frac{M_j}{M_2} \right],$$

který budeme dále řešit pro zadanou poruchu rozhraní.

Saffman-Taylor: teorie, část II.



Zavedeme periodickou poruchu rozhraní:

$$a = A f(t) \exp(in\theta), \quad n = 1, 2, 3, \dots,$$

a použijeme řešení rovnice pro rychlostní potenciál:

$$\phi_j = \phi_j^{(0)} + (-1)^j \beta \left(\frac{r^n}{R^n} \right)^{(-1)^{j-1}} \exp(in\theta).$$

Z podmínky kontinuity pak dostaneme při aproximaci prvního řádu:

$$\beta = \frac{A}{n} \left(\frac{Qf}{2\pi R} + R \frac{df}{dt} \right)$$

Z poklesu tlaku na rozhraní daném: $p_1 - p_2 = \sigma \left(\frac{2}{b} + \frac{1}{R} - \frac{a + d^2a/d\theta^2}{R^2} \right)$

pak použitím předchozích vztahů získáváme rovnici:

$$\frac{1}{f} \frac{df}{dt} = \frac{Qn}{2\pi R^2} \left[\frac{M_1 - M_2}{M_1 + M_2} \right] - \frac{Q}{2\pi R^2} - \frac{\sigma n(n^2 - 1)}{R^3} \left[\frac{M_1 M_2}{M_1 + M_2} \right].$$

Která pro $M_1 \gg M_2$ dává: $\frac{df}{dt} = \frac{n-1}{R^2} \left(\frac{Q}{2\pi} - \frac{n(n+1)\sigma M_2}{R} \right) f.$

Saffman-Taylor: teorie, část III.

Podmínka $df/dt = 0$ dává vztah pro minimální vlnovou délku udržitelné perturbace,

$$\lambda_c = 2\pi R / \left\{ \left(\frac{QR}{2\pi M_2 \sigma} + \frac{1}{4} \right)^{\frac{1}{2}} - \frac{1}{2} \right\}.$$

Což se dá přepočítat na kritický počet prstů po obvodu rozhraní: $n_c = \left[\frac{QR}{2\pi M_2 \sigma} + \frac{1}{4} \right]^{\frac{1}{2}} - \frac{1}{2}$.

Podmínka maximálního růstu nestability: $\frac{\partial}{\partial n} \left(\frac{df}{dt} \right) = 0$,

pak dává pro počet prstů na obvodu: $n_m = \left[\frac{1}{3} \left(\frac{QR}{2\pi M_2 \sigma} + 1 \right) \right]^{\frac{1}{2}}$,

A přepočítáno skrze $n = 2\pi R/\lambda$ pak pro vlnovou délku: $\lambda_m = 2\sqrt{3} \pi R / \left(\frac{QR}{2\pi M_2 \sigma} + 1 \right)^{\frac{1}{2}}$.

Což je vztah, který si alespoň pro parametr b (vzdálenost mezi deskami Hele-Shaw komory), kde $M = b^2/12\mu$, ověříme...

Saffman-Taylor: experiment

Experimentální pomůcky

K dispozici budou skleněné desky, jedna s otvorem, pro konstrukci Hele-Shaw komory. Dále silikonový olej o 99.5% koncentraci se známými parametry. Injekční stříkačky a umělohmotné trubičky pro dávkování oleje.

Instruktažní video je součástí studijních materiálů.