Lineární programování – jaro 2015 – 1. termín

1. **(15 bodů)** Nechť A a B jsou matice typu $m \times n$ nad $\mathbb{R}$, a $b, c \in \mathbb{R}^m$ a $v_1, \ldots, v_k \in \mathbb{R}^n$ jsou sloupcové vektory takové, že množiny $P = \{\, x \in \mathbb{R}^n \mid Ax \leq b \,\}$ a $Q = \{\, x \in \mathbb{R}^n \mid Bx \leq c \,\}$ jsou disjunktní. Formulujte Farkasovo lemma udávající nutnou a postačující podmínku k tomu, aby existovaly body $x \in P$ a $y \in Q$, které leží na přímce kolmé ke všem vektorům $v_1, \ldots, v_k$.

2. **(20 bodů)** Určete funkci f vektoru proměnných z, matici C a vektor a takové, že úloha lineárního programování

$$\min \{\, f \mid Cz + a = 0,\ z \leq 0 \,\}$$

je duální k úloze

$$\max \{\, c \cdot (x^{\mathrm{T}} + y) \mid x_1^2 \leq \alpha \leq by,\ By \leq (xA)^{\mathrm{T}} \,\},$$

kde $x = (x_1, \ldots, x_n)$ a $y = (y_1, \ldots, y_n)^{\mathrm{T}}$ jsou vektory proměnných, b a c jsou konstantní vektory, A a B matice a $\alpha \geq 0$ číslo. Formulujte větu o dualitě pro tuto dvojici úloh.

3. **(25 bodů)** Definujte stěny polyedru. Charakterizujte polyedry, které mají právě jednu stěnu. Charakterizujte minimální stěny polyedrů pomocí systémů nerovnic a tuto charakterizaci dokažte. Dejte příklad polyedru dimenze 3, který má právě tři minimální stěny.

4. **(30 bodů)** Řešte primární simplexovou metodou úlohu minimalizovat

$$10x - y + 15z$$

při omezeních $x \geq 0$, $y \geq 0$, $z \geq 0$ a

$$\begin{aligned} 2x - y + 4z &\geq 6,\\ 3x - 2y + z &\geq 7. \end{aligned}$$

Po jejím vyřešení přidejte další dvě omezení

$$\begin{aligned} 5x + 5y + 5z &\leq 13,\\ x - y + 7z &\leq 4 \end{aligned}$$

a úlohu dořešte duální simplexovou metodou.