Lineární programování – jaro 2016 – 2. termín

1. **(15 bodů)** Formulujte Farkasovo lemma udávající nutnou a postačující podmínku na řádkové vektory $a^1, \dots, a^k, b^1, \dots, b^\ell \in \mathbb{R}^n$, aby polytop generovaný body $a^1, \dots, a^k$ měl neprázdný průnik s konvexním kuželem generovaným vektory $b^1, \dots, b^\ell$.

2. **(20 bodů)** Určete funkci f vektoru proměnných z, matici C a vektor a takové, že úloha lineárního programování

$$\min\{\, f \mid Cz = a,\ z \leq 1 \,\}$$

je duální k úloze

$$\max\{\, dx \mid x \leq y^{\mathrm{T}} \leq 0,\ cx \leq yb,\ yA + d \geq c \,\},$$

kde x a y jsou vektory proměnných stejné dimenze, b, c, d jsou konstantní vektory a A je matice. Formulujte větu o dualitě pro tuto dvojici úloh.

3. **(25 bodů)** Definujte stěny polyedru a jejich dimenzi. Popište všechny polyedry, jejichž minimálními stěnami jsou právě maximální stěny. Formulujte a dokažte charakterizaci minimálních stěn jistého polyedru, na níž je založena primární simplexová metoda; k důkazu můžete použít obecnou větu charakterizující minimální stěny polyedrů. Dejte příklad úlohy lineárního programování ve tvaru, na který se přímo aplikuje primární simplexová metoda, a nějakého jejího optimálního řešení, které při použití této metody nikdy neobdržíme.

4. **(30 bodů)** Mějme dvě úlohy lineárního programování:

$$\begin{array}{ll} \text{minimalizovat} & 3x - y + z \\ \text{maximalizovat} & -2y - z \end{array}$$

při stejných omezeních $x \geq 0$, $y \geq 0$, $z \geq 0$ a

$$\begin{aligned} 4x - y - 2z &\geq -1, \\ x - 2y - z &\leq -2, \\ y - 2z &\geq 3. \end{aligned}$$

Vyřešte jednu z těchto úloh duální simplexovou metodou a poté využijte získanou závěrečnou simplexovou tabulku k dořešení druhé úlohy primární simplexovou metodou.