Lineární programování – jaro 2018 – 1. termín

1. **(15 bodů)** Formulujte Farkasovo lemma udávající nutnou a postačující podmínku k tomu, aby bylo možno zajistit požadovanou cirkulaci vody v uzavřeném chladicím systému, který sestává z n čerpadel, kde i-té čerpadlo je schopno čerpat nejméně a_i l/s a nejvýše b_i l/s, pro $i = 1, \ldots, n$, přičemž z i-tého do j-tého čerpadla vede potrubí o maximálním možném průtoku c_{ij} l/s a minimálním požadovaném průtoku d_{ij} l/s, pro všechna $i, j = 1, \ldots, n$. (Všechna voda, která do některého čerpadla vstupuje, musí být před opuštěním tohoto čerpadla vyčerpána vzhůru.) (Praktická poznámka: pokud některé potrubí neexistuje, zvolili jsme příslušná c_{ij} a d_{ij} nulová.)

2. **(20 bodů)** Určete funkci f vektoru proměnných z, matici C a vektor a takové, že úloha lineárního programování
$$\min \{ f \mid Cz + a = 0,\ z \leq 0 \}$$
je duální k úloze
$$\max \{ c \cdot (x^{\mathrm{T}} + y) \mid x_1^2 \leq \alpha \leq by,\ By \leq (xA)^{\mathrm{T}} \},$$
kde $x = (x_1, \ldots, x_n)$ a $y = (y_1, \ldots, y_n)^{\mathrm{T}}$ jsou vektory proměnných, b a c jsou konstantní vektory, A a B matice a $\alpha \geq 0$ číslo. Formulujte větu o dualitě pro tuto dvojici úloh.

3. **(25 bodů)** Formulujte algebraickou charakterizaci stěn polyedru pomocí systémů nerovnic. Charakterizujte minimální stěny polyedrů pomocí systémů nerovnic a tuto charakterizaci dokažte. Definujte bodovaný polyedr. Charakterizujte bodované polyedry, jejichž maximálními stěnami jsou právě minimální stěny. Dejte příklad dvou bodovaných polyedrů takových, že jejich průnik má o tři vrcholy více, než mají původní polyedry dohromady.

4. **(30 bodů)** Řešte primární simplexovou metodou úlohu minimalizovat
$$10x - y + 15z$$
při omezeních $x \geq 0$, $y \geq 0$, $z \geq 0$ a
$$\begin{aligned} 2x - y + 4z &\geq 6, \\ 3x - 2y + z &\geq 7. \end{aligned}$$
Po jejím vyřešení přidejte další dvě omezení
$$\begin{aligned} 5x + 5y + 5z &\leq 13, \\ x - y + 7z &\leq 4 \end{aligned}$$
a úlohu dořešte duální simplexovou metodou.