Lineární programování – jaro 2019 – 1. termín

1. **(15 bodů)** Formulujte Farkasovo lemma udávající nutnou a postačující podmínku na řádkové vektory $a^1, \ldots, a^k, b^1, \ldots, b^\ell \in \mathbb{R}^n$, aby existovaly body, které se od sebe na žádné složce neliší o více než o 1, jeden z nich náleží do polytopu generovaného body $a^1, \ldots, a^k$ a druhý náleží do konvexního kuželu generovaného vektory $b^1, \ldots, b^\ell$.

2. **(20 bodů)** Určete funkci f vektoru proměnných z, matici F a vektor a takové, že úloha lineárního programování

$$\max \{ f \mid zF = a,\ z \leq 1 \}$$

je duální k úloze

$$\min \{ cx \mid yA = p,\ Bx \geq q,\ yb \geq dx \}.$$

Formulujte větu o dualitě pro tuto dvojici úloh.
(x je sloupcový vektor proměnných; y je řádkový vektor proměnných; A a B jsou matice; b, c, d, p a q jsou vektory; 1 značí vektor $(1, \ldots, 1)$)

3. **(25 bodů)** Definujte stěny polyedru a jejich dimenzi. Charakterizujte minimální stěny polyedrů pomocí systémů nerovnic a tuto charakterizaci dokažte. Uveďte, jak lze ze systému nerovnic zadávajícího polyedr určit dimenzi a zaměření minimálních stěn. Dokažte, že n-rozměrný polyedr v prostoru $\mathbb{R}^n$, jehož minimální stěny mají dimenzi $n-1$, má nejvýše dvě vlastní stěny. Dejte příklad dvou polyedrů dimenze tři, z nichž v jednom je počet minimálních stěn dvojnásobkem počtu stěn dimenze o 1 větší a ve druhém je počet minimálních stěn polovinou počtu stěn dimenze o 1 větší.

4. **(30 bodů)** Vyřešte primární simplexovou metodou úlohu lineárního programování

$$\text{minimalizovat} \quad 2x + y - 10z - t$$

při omezeních $x \geq 0$, $y \geq 0$, $8 \geq z \geq 0$, $t \geq 0$ a

$$\begin{aligned} x - y + 2z + 2t &\leq -4, \\ 2x - 2y + 3z + 4t &\geq -15, \\ x \phantom{{}-2y} - 2z - t &\geq -6. \end{aligned}$$

Poté využijte závěrečnou simplexovou tabulku k vyřešení úlohy, která vznikne z původní úlohy nahrazením podmínky $8 \geq z$ podmínkou $2 \geq z$, duální metodou.