GEOMETRICKÁ ZOBRAZENÍ

Josef Janyška

21. února 2019

Obsah

ÚVOD

Tento učební text je určen pro předmět M 4522 Geometrie 3, který je povinným předmětem v bakalářském studijním programu Matematika, ve studijních oborech Matematika se zaměřením na vzdělávání a Matematika pro víceoborové studium na Přírodovědecké fakultě Masarykovy Univerzity v Brně. Jedná se o jednosemestrální kurz, který je doporučeno absolvovat ve 4. semestru studia a který navazuje na předmět M 3521 Geometrie 2.

Učební text předpokládá elementární znalosti středoškolské geometrie a dále pak znalosti látky absolvované v předmětu Geometrie 2. Po formální stránce je výklad látky podán co nejpodrobněji. Studované pojmy jsou definovány v libovolné dimenzi, ale důraz je kladen na dimenzi 2 a 3. Je použita běžná symbolika ve shodě se skripty z lineární algebry, [Ho07], a geometrie, [HoJa]. Pro přehlednost textu jsou definice uvedeny v rámečku, konce důkazů, poznámek, příkladů a úloh jsou označeny symboly $\square$, $\diamondsuit$, $\heartsuit$ a $\triangle$.

Kapitola 1

LINEÁRNÍ ZOBRAZENÍ NA VEKTOROVÝCH PROSTORECH

V této kapitole si připomeneme pojem lineárního zobrazení mezi vektorovými prostory v rozsahu skript [Ho07]. Zvláštní pozornost budeme věnovat invariantním podprostorům a těm pojmům, které budeme později potřebovat při zobrazení bodových prostorů.

1.1 Lineární zobrazení vektorových prostorů

V této části předpokládáme všechny vektorové prostory nad tělesem $\mathbb{T}$. Pokud budeme potřebovat zdůraznit dimenzi vektorového prostoru, označíme ji jako jeho index, t.j. V_n označuje n-rozměrný vektorový prostor.

Definice 1.1.1. Buďte V a W vektorové prostory nad $\mathbb{T}$. Zobrazení $\varphi : V \to W$ nazveme *lineárním zobrazením* vektorového prostoru V do vektorového prostoru W (nebo *homomorfismem vektorových prostorů*) právě tehdy, když pro libovolné $\mathbf{u}, \mathbf{v} \in V$ a libovolné $\lambda \in \mathbb{T}$ platí

1) $\varphi(\mathbf{u} \underset{V}{+} \mathbf{v}) = \varphi(\mathbf{u}) \underset{W}{+} \varphi(\mathbf{v})\,,$

2) $\varphi(\lambda \underset{V}{\cdot} \mathbf{u}) = \lambda \underset{W}{\cdot} \varphi(\mathbf{u})\,.$

Je-li φ bijekce, nazývá se *izomorfismus vektorových prostorů* V a W.

Poznámka 1.1.1. 1. Uvědomme si, že operace $+$ a $\cdot$ na levé straně rovností 1) a 2) jsou na prostoru V a stejné operace na pravých stranách patří k prostoru W. Pokud nemůže dojít k záměně, nebudeme vyznačovat, ke kterému prostoru operace patří a operaci násobení $\cdot$ nebudeme značit vůbec.

2. φ zachovává obě operace $+$ a $\cdot$. Proto se se někdy nazývá homomorfismem vektorových prostorů.

3. Platí $\varphi(\mathbf{o}_V) = \mathbf{o}_W$. Opravdu, z $\varphi(-\mathbf{u}) = -\varphi(\mathbf{u})$, dostaneme $\varphi(\mathbf{o}_V) = \varphi(\mathbf{u}-\mathbf{u}) = \varphi(\mathbf{u}) + \varphi(-\mathbf{u}) = \varphi(\mathbf{u}) - \varphi(\mathbf{u}) = \mathbf{o}_W$.

4. Podmínky 1) a 2) v Definici 1.1.1 jsou ekvivalentní s rovností

$$\varphi(\sum_{i=1}^{k} \lambda_i \, \mathbf{v}_i) = \sum_{i=1}^{k} \lambda_i \, \varphi(\mathbf{v}_i)\,, \qquad k \geq 2\,, \tag{1.1.1}$$

kde $\mathbf{v}_i \in V$ a $\lambda_i \in \mathbb{T}$. Můžeme tedy v Definici 1.1.1 nahradit podmínky 1) a 2) jedinou podmínkou (1.1.1).

5. Je-li $\varphi : V \to W$ lineární zobrazení a $U \subseteq V$ vektorový podprostor, potom zúžení $\varphi|U : U \to W$ je lineární zobrazení. $\diamondsuit$

Poznámka 1.1.2. Uvědomme si, že těleso $\mathbb{T}$ je samo vektorovým prostorem nad $\mathbb{T}$. Potom lineární zobrazení $\varphi : V \to \mathbb{T}$ se nazývá *lineární forma* na V. $\diamondsuit$

Věta 1.1.1. *Buďte V, W a U tři vektorové prostory a $\varphi : V \to W$ a $\psi : W \to U$ lineární zobrazení. Potom $\psi \circ \varphi : V \to U$ je lineární zobrazení.*

Důkaz. Důkaz je zřejmý. $\square$

Připomeňme, [Ho07], že úplný obraz $\varphi(V) = \mathrm{Im}(\varphi) = \{\mathbf{w} \in W | \exists\, \mathbf{v} \in V : \varphi(\mathbf{v}) = \mathbf{w}\}$ je vektorový podprostor v W a podobně jádro $\mathrm{Ker}(\varphi) = \{\mathbf{v} \in V | \varphi(\mathbf{v}) = \mathbf{o}_W\}$ je vektorový podprostor ve V. Přitom

$$\dim(\mathrm{Im}(\varphi)) + \dim(\mathrm{Ker}(\varphi)) = \dim(V)\,.$$

Definice 1.1.2. *Hodností lineárního zobrazení* rozumíme dimenzi vektorového podprostoru $\mathrm{Im}(\varphi)$. Značíme ji $h(\varphi)$.

Poznámka 1.1.3. Je-li lineární zobrazení φ injektivní, je $h(\varphi) = \dim(V) = \dim(\mathrm{Im}(\varphi))$ a je-li surjektivní je $h(\varphi) = \dim(W) = \dim(\mathrm{Im}(\varphi))$. Je-li φ izomorfismus je $\dim(V) = h(\varphi) = \dim(W)$. $\diamondsuit$

Jsou-li $\varphi, \psi : V \to W$ dvě lineární zobrazení a $\lambda \in \mathbb{T}$, můžeme definovat součet $\varphi + \psi$ a násobek $\lambda\,\varphi$ předpisem

$$(\varphi + \psi)(\mathbf{v}) = \varphi(\mathbf{v}) + \psi(\mathbf{v})\,, \qquad (\lambda\,\varphi)(\mathbf{v}) = \lambda\,\varphi(\mathbf{v})\,. \tag{1.1.2}$$

Množinu všech lineárních zobrazení z V do W označujeme $\mathrm{Hom}(V, W)$ a vzhledem k operacím sčítání a násobení prvky z $\mathbb{T}$, definované v (1.1.2), jde o vektorový prostor nad $\mathbb{T}$ dimenze $\dim(V) \cdot \dim(W)$. Nulovým prvkem v tomto prostoru je *nulové zobrazení*, $\varphi(\mathbf{v}) = \mathbf{o}_W$, $\forall \mathbf{v} \in V$, a opačným prvkem k prvku φ je $(-1)\,\varphi$.

Věta 1.1.2. *Lineární zobrazení $\varphi : V_n \to W$ je určeno, známe-li obrazy $\varphi(\mathbf{v}_i)$ vektorů $\mathcal{V} = \langle \mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_n \rangle$, které tvoří bázi V.*

Důkaz. Nechť $\mathcal{V} = \langle \mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_n \rangle$ je libovolná báze V_n. Potom každý vektor $\mathbf{x} \in V$ můžeme psát jako $\mathbf{x} = \sum_{i=1}^{n} x_i \, \mathbf{v}_i$. Potom z Poznámky 1.1.1 4) dostaneme

$$\varphi(\mathbf{x}) = \sum_{i=1}^{n} x_i \, \varphi(\mathbf{v}_i)$$

a tento vektor je jednoznačně určen, známe-li obrazy $\varphi(\mathbf{v}_i)$. $\square$

Věta 1.1.3. *Nechť $\mathcal{V} = \langle \mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_n \rangle$ je báze vektorového prostoru V_n a $\mathcal{W} = \langle \mathbf{w}_1, \dots, \mathbf{w}_m \rangle$ je báze vektorového prostoru W_m.*

1) Nechť $\varphi : V_n \to W_m$ je lineární zobrazení. Potom existuje jednoznačně určená matice $A_\varphi = (a_{ji})$ typu m/n nad $\mathbb{T}$ taková, že vektor $\mathbf{x} = (x_1; \dots; x_n) \in V_n$ se zobrazí na vektor

$$\mathbf{y} = \varphi(\mathbf{x}) = (\sum_{i=1}^{n} a_{1i} \, x_i; \dots; \sum_{i=1}^{n} a_{mi} \, x_i) \in W_m \, .$$

2) Nechť $A = (a_{ji})$ je matice typu m/n nad $\mathbb{T}$. Potom zobrazení φ_A, které vektor $\mathbf{x} = (x_1; \dots; x_n) \in V_n$ zobrazí na vektor

$$\mathbf{y} = \varphi_A(\mathbf{x}) = (\sum_{i=1}^{n} a_{1i} \, x_i; \dots; \sum_{i=1}^{n} a_{mi} \, x_i) \in W_m \, ,$$

je lineární.

Důkaz. 1) Vyjádřeme nejdříve vektor $\mathbf{y} = \varphi(\mathbf{x}) \in W_m$ jako lineární kombinaci vektorů báze $\mathcal{W} = \langle \mathbf{w}_1, \dots, \mathbf{w}_m \rangle$, t.j.

$$\mathbf{y} = \sum_{j=1}^{m} y_j \, \mathbf{w}_j \, . \tag{1.1.3}$$

Na druhou stranu je, podle Věty 1.1.2, vektor $\mathbf{y} = \varphi(\mathbf{x})$ dán jako lineární kombinace $\mathbf{y} = \sum_{i=1}^{n} x_i \, \varphi(\mathbf{v}_i)$. Každý vektor $\varphi(\mathbf{v}_i) \in W_m$ ale můžeme vyjádřit jako kombinaci $\varphi(\mathbf{v}_i) = \sum_{j=1}^{m} a_{ji} \, \mathbf{w}_j$. Dosazením tak dostaneme

$$\mathbf{y} = \sum_{i=1}^{n} x_i \sum_{j=1}^{m} a_{ji} \, \mathbf{w}_j \tag{1.1.4}$$

a porovnáním (1.1.3) s (1.1.4) tak dostaneme

$$y_j = \sum_{i=1}^{n} a_{ji} \, x_i \, , \quad j = 1, \dots, m \, . \tag{1.1.5}$$

2) Na druhou stranu předpokládejme, že je dána matice $A = (a_{ji})$ typu m/n nad $\mathbb{T}$. Snadno se vidí, že zobrazení, které zobrazí vektor $\mathbf{x} = (x_1; \dots; x_n) \in V_n$ na vektor

$$\mathbf{y} = (\sum_{i=1}^{n} a_{1i}\, x_i; \dots; \sum_{j=1}^{n} a_{mi}\, x_i) \in W_m$$

je lineární zobrazení $\varphi_A : V_n \to W_m$. $\square$

Rovnici (1.1.5) budeme častěji psát maticově

$$\begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_m \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}, \tag{1.1.6}$$

nebo symbolicky

$$(\mathbf{y}) = A_\varphi\, (\mathbf{x})\,, \tag{1.1.7}$$

kde $(\mathbf{x}) = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$ označuje sloupcovou matici souřadnic vektoru $\mathbf{x}$ vzhledem k bázi $\mathcal{V}$ ve V_n a $(\mathbf{y}) = \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_m \end{pmatrix}$ označuje sloupcovou matici souřadnic vektoru $\mathbf{y} = \varphi(\mathbf{x})$ vzhledem k bázi $\mathcal{W}$ v W_m.

Definice 1.1.3. Rovnice (1.1.5) – (1.1.7) nazýváme *souřadnicovým vyjádřením (rovnicemi) lineárního zobrazení* φ vzhledem k bázím $\mathcal{V}$ ve V_n a $\mathcal{W}$ v W_m. Matici $A_\varphi = (a_{ij})$ nazýváme *maticí lineárního zobrazení* φ (vzhledem k bázím $\mathcal{V}$ ve V_n a $\mathcal{W}$ v W_m).

Poznámka 1.1.4. Při pevně zvolených bázích $\mathcal{V}$ ve V_n a $\mathcal{W}$ v W_m je vztah mezi lineárními zobrazeními $\varphi : V_n \to W_m$ a maticemi A_φ typu m/n nad $\mathbb{T}$ vzájemně jednoznačný, což plyne z Věty 1.1.3. Tedy zobrazení $\mathcal{F} : \mathrm{Hom}(V, W) \to \mathrm{Mat}_{mn}(\mathbb{T})$ definované : $\mathcal{F}(\varphi) = A_\varphi$ je bijekce. Dále platí

$$A_{\varphi+\psi} = A_\varphi + A_\psi\,, \qquad \text{resp.} \quad A_{\lambda\,\varphi} = \lambda\, A_\varphi\,. \qquad \diamondsuit$$

Důsledek 1.1.1. 1. $(\mathrm{Hom}(V, W), +)$ a $(\mathrm{Mat}_{mn}, +)$ jsou izomorfní grupy.

2. $\mathrm{Hom}(V, W)$ a Mat_{mn} jsou izomorfní vektorové prostory.

Poznámka 1.1.5. Z důkazu Věty 1.1.3 vyplývá, jaký je geometrický význam matice lineárního zobrazení φ. Ve sloupcích matice A_φ jsou souřadnice obrazů $\varphi(\mathbf{v}_i)$ vektorů $\mathbf{v}_i$ báze $\mathcal{V}$, v daném pořadí, vyjádřené vzhledem k bázi $\mathcal{W}$. $\diamondsuit$

Poznámka 1.1.6. Je-li $\varphi : V \to W$ izomorfismus, je také inverzní zobrazení $\varphi^{-1} : W \to V$ izomorfismus a A_φ je regulární čtvercová matice řádu $\dim(V) = \dim(W)$. Proto se někdy říká, že lineární izomorfismus je *regulární zobrazení*. Navíc platí $A_{\varphi^{-1}} = A_\varphi^{-1}$. ♢

Poznámka 1.1.7. Bázi $\mathcal{V}$ vektorového prostoru V_n můžeme chápat jako lineární izomorfismus $\mathcal{V} : V_n \to \mathbb{T}^n$ (zde $\mathbb{T}^n$ chápeme jako n-dimenzionální vektorový prostor nad $\mathbb{T}$), který je dán tak, že obrazem vektoru $\mathbf{v}_i$ báze $\mathcal{V}$ je uspořádaná n-tice $(0, \ldots, 1, \ldots 0)$, ve které je 1 na i-tém místě. Potom souřadnicové vyjádření lineárního zobrazení φ je lineární zobrazení $f : \mathbb{T}^n \to \mathbb{T}^m$ takové, že komutuje diagram

$$\begin{tikzcd} V_n \arrow[d, "\varphi"'] & \mathbb{T}^n \arrow[l, "\mathcal{V}^{-1}"'] \arrow[d, "f"] \\ W_m \arrow[r, "\mathcal{W}"] & \mathbb{T}^m \end{tikzcd}$$

♢

Věta 1.1.4. *Nechť $\varphi : V_n \to W_m$ je lineární zobrazení, potom existují báze $\mathcal{V}$ ve V_n a báze $\mathcal{W}$ v W_m takové, že φ má souřadnicové vyjádření*

$$\begin{aligned} y_i &= x_i\,, & i &= 1, \ldots, h(\varphi)\,, \\ y_j &= 0\,, & j &= h(\varphi) + 1, \cdots, m\,. \end{aligned}$$

Důkaz. Stačí zvolit libovolnou bázi $\mathcal{V} = \langle \mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_n \rangle$ ve V takovou, aby $\mathrm{Im}(\varphi) = L(\varphi(\mathbf{v}_1), \ldots, \varphi(\mathbf{v}_{h(\varphi)}))$, a bázi $\mathcal{W} = \langle \mathbf{w}_1, \ldots, \mathbf{w}_m \rangle$ v W_m takovou, že prvních $h(\varphi)$ vektorů $\mathbf{w}_i = \varphi(\mathbf{v}_i)$. □

Poznámka 1.1.8. Mějme lineární zobrazení $\varphi : V_n \to W_m$ a $\psi : W_m \to U_k$ a báze $\mathcal{V}$ ve V_n, $\mathcal{W}$ v W_m a $\mathcal{U}$ v U_k. Potom

$$A_{\psi\circ\varphi} = A_\psi\, A_\varphi\,.$$ ♢

Věta 1.1.5. *Nechť jsou dány dvě báze $\mathcal{V}$ a $\mathcal{V}'$ ve V_n a dvě báze $\mathcal{W}$ a $\mathcal{W}'$ v W_m. Nechť A_φ je matice lineárního zobrazení $\varphi : V_n \to W_m$ vzhledem k bázím $\mathcal{V}$ a $\mathcal{W}$ a B_φ je matice téhož zobrazení vzhledem k bázím $\mathcal{V}'$ a $\mathcal{W}'$. Potom*

$$B_\varphi = K^{-1}\, A_\varphi\, L\,, \tag{1.1.8}$$

kde K je matice přechodu od báze $\mathcal{W}$ k bázi $\mathcal{W}'$ ve W_m a L je matice přechodu od báze $\mathcal{V}$ k bázi $\mathcal{V}'$ ve V_n.

Důkaz. Pro $\mathbf{x} \in V_n$ označme $(\mathbf{x})$ sloupcovou matici souřadnic vzhledem k bázi $\mathcal{V}$ a $(\mathbf{x}')$ sloupcovou matici souřadnic vzhledem k bázi $\mathcal{V}'$. Potom přechod od báze $\mathcal{V}$ k bázi $\mathcal{V}'$ ve V_n je dán maticí L, t.j. $(\mathbf{x}) = L\,(\mathbf{x}')$. Podobně, nechť $(\mathbf{y})$ je sloupcová matice souřadnic vektoru $\mathbf{y} \in W_m$ vzhledem k bázi $\mathcal{W}$ a $(\mathbf{y}')$ sloupcová matice souřadnic vzhledem k bázi $\mathcal{W}'$. Potom přechod od báze $\mathcal{W}$ k bázi $\mathcal{W}'$ v W_m je dán maticí K, t.j. $(\mathbf{y}) = K\,(\mathbf{y}')$.

Podle (1.1.7) je vzhledem k bázím $\mathcal{V}$ a $\mathcal{W}$ lineární zobrazení φ dáno rovnicí $(\mathbf{y}) = A_\varphi\,(\mathbf{x})$ a podobně, vzhledem k bázím $\mathcal{V}'$ a $\mathcal{W}'$, je φ dáno rovnicí $(\mathbf{y}') = B_\varphi\,(\mathbf{x}')$. Dosazením transformačních rovnic přechodu od bází $\mathcal{V}$ a $\mathcal{W}$ k bázím $\mathcal{V}'$ a $\mathcal{W}'$ dostaneme

$$K\,(\mathbf{y}') = A_\varphi\, L\,(\mathbf{x}')\,,$$

t.j.

$$(\mathbf{y}') = K^{-1}\, A_\varphi\, L\,(\mathbf{x}')\,,$$

a porovnáním s rovnicí φ v bázích $\mathcal{V}'$ a $\mathcal{W}'$ dostaneme $B_\varphi = K^{-1}\,A_\varphi\,L$. □

Důsledek 1.1.2. Jsou-li matice A_φ, respektive B_φ, dvě matice téhož lineárního zobrazeni $\varphi : V_n \to W_m$ vyjádřené v různých bázích $\mathcal{V}$, respektive $\mathcal{V}'$ ve V_n a $\mathcal{W}$, respektive $\mathcal{W}'$ ve W_m, potom existuje taková regulární matice K typu m/m a regulární matice L typu n/n, že $B_\varphi = K^{-1}\,A_\varphi\,L$. Přitom K je matice přechodu od báze $\mathcal{W}$ k bázi $\mathcal{W}'$ v W_m a L je matice přechodu od báze $\mathcal{V}$ k bázi $\mathcal{V}'$ ve V_n. ⋄

Důsledek 1.1.3. Hodnost lineárního zobrazení je rovna hodnosti jeho matice vzhledem k libovolným bázím. Opravdu, z Poznámky 1.1.5 vyplývá, že $h(\varphi)$ je rovna hodnosti matice A_φ vyjádřené v libovolných bázích. Při přechodu k novým bázím se hodnost nemění, protože matice $B_\varphi = K^{-1}\,A_\varphi\,L$ má stejnou hodnost jako matice A_φ. ⋄

1.2 Invariantní podprostory

V této části budeme studovat lineární zobrazení vektorového prostoru V na sebe.

Definice 1.2.1. Lineární zobrazení $\varphi : V \to V$ nazýváme *lineární transformace (endomorfismus)* vektorového prostoru V. Je-li navíc φ izomorfismus, nazývá se *automorfismus* vektorového prostoru V.

Poznámka 1.2.1. Automorfismus vektorového prostoru V_n je bijekcí, jeho matice je čtvercová matice řádu n, t.j. regulární matice. Říkáme někdy proto, že automorfismus na V_n je *regulární zobrazení* na V_n. ♢

Poznámka 1.2.2. Podle úvah v předchozí části 1.1 můžeme lineární transformace vektorového prostoru V sečítat, násobit prvky z tělesa $\mathbb{T}$, ale také skládat, viz Věta 1.1.1. Opravdu, složením dvou lineárních transformací na V je opět lineární transformace na V. Navíc, množina všech automorfismů vektorového prostoru V je grupou vzhledem k operaci skládání zobrazení. Tuto grupu budeme nazývat *obecná lineární grupa* vektorového prostoru V. $\diamondsuit$

Poznámka 1.2.3. Podle Věty 1.1.4 bylo možné zvolit báze vektorových prostorů tak, že matice lineárního zobrazení φ měla koeficienty $a_{ii} = 1$, $i = 0, \ldots, h(\varphi)$, a zbývající koeficienty byly nulové. V případě lineární transformace na vektorovém prostoru V vyjadřujeme vzory i obrazy vzhledem k jedné bázi $\mathcal{V} = \langle \mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_n \rangle$ vektorového prostoru V_n. Matice A_φ je potom čtvercová matice řádu n a obecně nemůžeme volit bázi $\mathcal{V}$ tak, aby byla tvořena pouze jedničkami (na diagonále) a nulami. V následujících úvahách si ukážeme, jak zvolit bázi vektorového prostoru V tak, aby v ní měla daná lineární transformace co nejjednodušší rovnice. K tomu budou sloužit invariantní podprostory vzhledem k lineární transformaci. $\diamondsuit$

Poznámka 1.2.4. Uvažujme nyní ve V dvě báze $\mathcal{V}$ a $\mathcal{V}'$. Je-li A_φ matice lineární transformace φ v bázi $\mathcal{V}$ a B_φ matice φ v bázi $\mathcal{V}'$, je podle Věty 1.1.5, $B_\varphi = S^{-1}\, A_\varphi\, S$, kde regulární matice S je matice přechodu od báze $\mathcal{V}$ k bázi $\mathcal{V}'$. Znamená to, že matice A_φ a B_φ jsou si podobné. $\diamondsuit$

Definice 1.2.2. Nechť φ je lineární transformace vektorového prostoru V. Vektorový podprostor $U \subseteq V$ se nazývá *invariantní podprostor* vzhledem k lineární transformaci φ, je-li $\varphi(U) \subseteq U$, t.j. pro libovolný vektor $\mathbf{u} \in U$ je $\varphi(\mathbf{u}) \in U$.

Poznámka 1.2.5. Definice invariantního podprostoru závisí v podstatné míře na dané lineární transformaci. Jediné podprostory, které jsou invariantní vzhledem ke všem lineárním transformacím, jsou celý prostor V a nulový podprostor $\{\mathbf{o}\}$. $\diamondsuit$

Příklad 1.2.1. Nechť $V = \mathbb{T}^2$ a $U = \{(x_1; 0) | x_1 \in \mathbb{T}\}$. Potom U je invariantní vzhledem k lineární transformaci $\varphi((x_1; x_2)) = (x_1 + x_2; 0)$ ale není invariantní vzhledem k lineární transformaci $\psi((x_1; x_2)) = (x_2; x_1)$. $\heartsuit$

Příklad 1.2.2. Nechť $V = \mathbb{R}_3[x]$ a $U = \mathbb{R}_2[x]$. Derivování je lineární transformace na $\mathbb{R}_3[x]$ a podprostor U je invariantní vzhledem k této lineární transformaci. $\heartsuit$

Věta 1.2.1. *Nechť φ je lineární transformace V. Pak $\mathrm{Im}(\varphi)$ a $\mathrm{Ker}(\varphi)$ jsou invariantní podprostory.*

Důkaz. Máme
$$\varphi(\mathrm{Ker}(\varphi)) = \{\mathbf{o}\} \subseteq \mathrm{Ker}(\varphi)$$
a
$$\mathrm{Im}(\varphi) \subseteq V \Rightarrow \varphi(\mathrm{Im}(\varphi)) \subseteq \varphi(V) = \mathrm{Im}(\varphi)\,. \qquad \square$$

Věta 1.2.2. *Nechť φ je lineární transformace V a $U_1, \dots, U_k$ jsou invariantní podprostory. Pak $U_1 \cap \dots \cap U_k$ a $U_1 + \dots + U_k$ jsou invariantní podprostory.*

Důkaz. a) Nechť $\mathbf{u} \in U_1 \cap \dots \cap U_k$, t.j. $\mathbf{u} \in U_i$, $i = 1, \dots, k$. Pak $\varphi(\mathbf{u}) \in U_i$, $\forall i$, a tedy $\varphi(\mathbf{u}) \in U_1 \cap \dots \cap U_k$.

b) Nechť $\mathbf{u} \in U_1 + \dots + U_k$, t.j. $\mathbf{u} = \mathbf{u}_1 + \dots + \mathbf{u}_k$, $\mathbf{u}_i \in U_i$. Protože $\varphi(\mathbf{u}_i) \in U_i$, $\forall i$, máme $\varphi(\mathbf{u}) = \varphi(\mathbf{u}_1 + \dots + \mathbf{u}_k) = \varphi(\mathbf{u}_1) + \dots + \varphi(\mathbf{u}_k) \in U_1 + \dots + U_k$. $\square$

Připomeňme, že čtvercovou matici řádu $(k+m)$, $k, m \geq 1$, nad $\mathbb{T}$ tvaru

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1k} & c_{11} & \cdots & c_{1m} \\ \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{k1} & \cdots & a_{kk} & c_{k1} & \cdots & c_{km} \\ 0 & \cdots & 0 & b_{11} & \cdots & b_{1m} \\ \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & b_{m1} & \cdots & b_{mm} \end{pmatrix} \tag{1.2.1}$$

nazýváme *polorozpadlou maticí* nebo *maticí v polorozpadlém tvaru*, zatímco matici

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1k} & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{k1} & \cdots & a_{kk} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & b_{11} & \cdots & b_{1m} \\ \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & b_{m1} & \cdots & b_{mm} \end{pmatrix} \tag{1.2.2}$$

nazýváme *rozpadlou maticí* nebo *maticí v rozpadlém tvaru*. Říkáme také, že rozpadlá matice je v *blokově diagonálním tvaru*. Submatice

$$A^+ = \begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1k} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{k1} & \cdots & a_{kk} \end{pmatrix}, \qquad B^+ = \begin{pmatrix} b_{11} & \cdots & b_{1m} \\ & & \vdots \\ b_{m1} & \cdots & b_{mm} \end{pmatrix} \tag{1.2.3}$$

nazýváme *bloky matice* A a říkáme, že matice A se rozpadá na dva (diagonální) bloky A^+ a B^+.

Věta 1.2.3. *Nechť φ je lineární transformace vektorového prostoru V a nechť* $\dim(V) = n \geq 2$.

1) Ve V existuje netriviální podprostor dimenze k invariantní vzhledem k transformaci φ právě tehdy, když existuje taková báze $\mathcal{V}$ prostoru V, že v ní má φ matici v polorozpadlém tvaru (1.2.1).

2) V je přímý součet dvou netriviálních podprostorů dimenzí k a m, $k+m = n$, invariantních vzhledem k φ právě tehdy, když existuje taková báze $\mathcal{V}$ prostoru V, že v ní má φ matici v rozpadlém tvaru s bloky řádů k a m.

Důkaz. 1) Nechť U_k je k-dimenzionální podprostor V_n, který je invariantní vzhledem k lineární transformaci φ. Zvolme bázi $\mathcal{V} = \langle \mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_n \rangle$ prostoru V_n tak, aby $U_k = L(\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_k)$. Snadno se vidí, že v takové bázi je matice A_φ v polorozpadlém tvaru (1.2.1). Naopak, nechť je matice A_φ v nějaké bázi $\mathcal{V} = \langle \mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_n \rangle$ prostoru V_n v polorozpadlém tvaru (1.2.1). Protože ve sloupcích matice A_φ jsou souřadnice obrazů vektorů $\varphi(\mathbf{v}_i)$, $i = 1, \dots, n$, je $\varphi(\mathbf{v}_i) \in L(\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_k)$, $i = 1, \dots, k$, a tedy podprostor $U_k = L(\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_k)$ je invariantní vzhledem k φ.

2) Nechť $V_n = W_k \oplus U_m$ a W_k a U_m jsou invariantní podprostory vzhledem k φ. Potom zvolíme bázi $\mathcal{V} = \langle \mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_n \rangle$ tak, že $W_k = L(\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_k)$ a $U_m = L(\mathbf{v}_{k+1}, \dots, \mathbf{v}_n)$. Snadno se vidí, že v takové bázi je matice A_φ v rozpadlém tvaru (1.2.2) s bloky řádů k a m. Naopak, nechť je matice A_φ v nějaké bázi $\mathcal{V} = \langle \mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_n \rangle$ prostoru V_n v rozpadlém tvaru s bloky řádů k a m. Protože ve sloupcích matice A_φ jsou souřadnice obrazů vektorů $\varphi(\mathbf{v}_i)$, $i = 1, \dots, n$, je $\varphi(\mathbf{v}_i)$ in $L(\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_k)$, $i = 1, \dots, k$, a $\varphi(\mathbf{v}_j)$ in $L(\mathbf{v}_{k+1}, \dots, \mathbf{v}_n)$, $j = k+1, \dots, n$, tedy podprostory $W_k = L(\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_k)$ a $U_m = L(\mathbf{v}_{k+1}, \dots, \mathbf{v}_n)$ jsou invariantní vzhledem k φ. $\square$

Důsledek 1.2.1. Je-li V_n přímý součet n jednodimenzionálních podprostorů, které jsou invariantní vzhledem k φ, potom existuje taková báze V_n, že vzhledem k ní je matice A_φ diagonální. $\diamond$

Na základě Důsledku 1.2.1 hrají jednodimenzionální vektorové podprostory, které jsou invariantní vzhledem k lineární transformaci φ, významnou roli. Budeme se tedy zabývat takovými podprostory $L(\mathbf{u})$, $\mathbf{u} \neq \mathbf{o}$, že $\varphi(L(\mathbf{u})) \subseteq L(\mathbf{u})$, musí se tedy vektor $\mathbf{u} \neq \mathbf{o}$ zobrazit do $L(\mathbf{u})$, t.j. pro nějaké $\lambda \in \mathbb{T}$ je $\varphi(\mathbf{u}) = \lambda\, \mathbf{u}$.

Definice 1.2.3. *Charakteristický (vlastní) vektor* lineární transformace φ vektorového prostoru V je takový nenulový vektor $\mathbf{u}$, pro který platí

$$\varphi(\mathbf{u}) = \lambda\, \mathbf{u}\,, \quad \lambda \in \mathbb{T}\,. \tag{1.2.4}$$

Číslo λ nazýváme *charakteristickým (vlastním) číslem (hodnotou)* lineární transformace φ příslušným vlastnímu vektoru $\mathbf{u}$.

Charakteristickým (vlastním) vektorem a *charakteristickým (vlastním) číslem (hodnotou)* čtvercové matice A řádu n rozumíme charakteristický (vlastní) vektor a charakteristické (vlastní) číslo (hodnotu) lineární transformace φ_A.

Poznámka 1.2.6. Nechť $\mathbf{u}$ je vlastní vektor lineární transformace φ příslušný vlastnímu číslu λ, potom jeho libovolný nenulový násobek je také vlastní vektor příslušný vlastnímu číslu λ. Opravdu, je-li $\mathbf{v} = \alpha\, \mathbf{u}$, $0 \neq \alpha \in \mathbb{T}$, je $\varphi(\mathbf{v}) = \varphi(\alpha\, \mathbf{u}) = \alpha\, \varphi(\mathbf{u}) = \alpha\, \lambda\, \mathbf{u} = \lambda\, \alpha\, \mathbf{u} = \lambda\, \mathbf{v}$. Jsou tedy všechny nenulové vektory jednodimenzionálního podprostoru (směru) $L(\mathbf{u})$ vlastní vektory lineární transformace φ příslušné vlastnímu číslu λ a hovoříme o *vlastním směru* lineární transformace φ příslušném vlastnímu číslu λ. $\diamondsuit$

Věta 1.2.4. *$\lambda \in \mathbb{T}$ je vlastní hodnotou lineární transformace φ na V_n právě tehdy, když splňuje rovnici*

$$|A_\varphi - \lambda\, E_n| = 0\,, \tag{1.2.5}$$

kde A_φ je matice φ v libovolné bázi ve V_n a E_n je jednotková matice řádu n.

Důkaz. Předpokládejme, že λ je vlastní hodnotou která přísluší vlastnímu vektoru $\mathbf{u}$ lineární transformace φ. Potom $\varphi(\mathbf{u}) = \lambda\,\mathbf{u}$ a v souřadnicích $A_\varphi\,(\mathbf{u}) = \lambda\,(\mathbf{u})$, což upravíme na

$$(A_\varphi - \lambda\, E_n)\,(\mathbf{u}) = (\mathbf{o})\,. \tag{1.2.6}$$

Rovnice (1.2.6) je maticovým zápisem soustavy homogenních lineárních rovnic a z předpokladu, že $\mathbf{u}$ je nenulový vektor, vyplývá, že tato soustava musí být závislá, t.j. determimant $|A_\varphi - \lambda\, E_n|$ matice této soustavy musí být nulový. □

Poznámka 1.2.7. Uvědomme si, že jednotková matice E_n je maticí identické lineární transformace na V_n vyjádřené v libovolné bázi. Je tedy matice $(A_\varphi - \lambda\, E_n)$ maticí lineární transformace $(\varphi - \lambda\,\mathrm{id}_{V_n})$ a vlastní vektory lineární transformace φ příslušné vlastnímu číslu λ patří do jádra $\mathrm{Ker}(\varphi - \lambda\,\mathrm{id}_{V_n})$. ♢

Ve Větě 1.2.4 jsme předpokládali souřadnicové vyjádření lineární transformace φ vzhledem k nějaké zvolené bázi. V následující větě si ukážeme, že řešení rovnice $|A_\varphi - \lambda\, E_n| = 0$, a tím i vlastní hodnoty lineární transformace φ, jsou na zvolené bázi nezávislé.

Věta 1.2.5. *Nechť A a B jsou dvě podobné čtvercové matice řádu n. Pak*

$$|A - \lambda\, E_n| = |B - \lambda\, E_n|\,. \tag{1.2.7}$$

Důkaz. A a B jsou podobné matice, t.j existuje regulární matice S řádu n taková, že $B = S^{-1}\,A\,S$. Pak

$$\begin{aligned} |B - \lambda\, E_n| &= |S^{-1}\,A\,S - \lambda\, S^{-1}\,E_n\,S| = |S^{-1}\,(A - \lambda\, E_n)\,S| \\ &= |S^{-1}|\,|A - \lambda\, E_n|\,|S| = |A - \lambda\, E_n|\,. \end{aligned}$$

□

Poznámka 1.2.8. Rovnice (1.2.5) se nazývá *charakteristická rovnice lineární transformace* φ (případně matice A_φ). Snadno se vidí, že charakteristická rovnice je polynomiální, proto hovoříme o *charakteristickém polynomu lineární transformace* φ (případně matice A_φ). Opravdu

$$\begin{aligned} |A_\varphi - \lambda\, E_n| = (-\lambda)^n + J_1\,(-\lambda)^{n-1} + J_2\,(-\lambda)^{n-2} \\ + \cdots + J_{n-1}\,(-\lambda) + J_n\,, \end{aligned} \tag{1.2.8}$$

kde J_i jsou součty hlavních minorů řádu i matice A_φ, speciálně tedy J_1 je součet prvků na diagonále matice A_φ, takzvaná *stopa matice* A_φ, a J_n je determinat matice A_φ. ♢

Důsledek 1.2.2. Protože lineární transformace na V_n má v různých bázích matice, které jsou si navzájem podobné, je charakteristická rovnice lineární transformace jednoznačně určená lineární transformaci nezávisle na jejím souřadnicovém vyjádření.

Podobně i kořeny charakteristické rovnice, t.j. vlastní hodnoty lineární transformace, jsou jednoznačně určeny lineární transformaci nezávisle na jejím souřadnicovém vyjádření. ◇

Věta 1.2.6. *Nechť φ je lineární transformace vektorového prostoru V_n a $\lambda \in \mathbb{T}$ je vlastní hodnota φ. Pak vlastní vektor $\mathbf{u}$ příslušný λ vyjádřený v souřadnicích vzhledem k nějaké bázi $\mathcal{V}$ je řešením homogenní soustavy rovnic*

$$\begin{array}{ccccccccc} (a_{11}-\lambda)\,u_1 & + & a_{12}\,u_2 & + & \dots & + & a_{1n}\,u_n & = & 0\,, \\ a_{21}\,u_1 & + & (a_{22}-\lambda)\,u_2 & + & \dots & + & a_{2n}\,u_n & = & 0\,, \\ \vdots & & \vdots & & & & \vdots & & \vdots \\ a_{n1}\,u_1 & + & a_{n2}\,u_2 & + & \dots & + & (a_{nn}-\lambda)\,u_n & = & 0\,, \end{array} \tag{1.2.9}$$

kde $A_\varphi = (a_{ij})$ je matice φ vzhledek k bázi $\mathcal{V}$.

Důkaz. Vlastní vektor příslušný vlastní hodnotě λ musí být řešením rovnice (1.2.6), což je právě maticový zápis homogenní soustavy rovnic (1.2.9). □

Poznámka 1.2.9. Ve Větě 1.2.5 jsme ukázali, že charakteristická rovnice, a tím i její kořeny, lineární transformace φ jsou nezávislé na bázi, ve které vyjádříme lineární transformaci pomocí souřadnic. Souřadnice vlastního vektoru jsou ovšem na použitých souřadnicích závislé. Opravdu, jsou-li matice A_φ a B_φ matice φ v různých bázích $\mathcal{V}$ a $\mathcal{V}'$ a S je matice přechodu od první báze k druhé, transformuje se homogenní soustava rovnic

$$(B_\varphi - \lambda E_n)(\mathbf{u}') = (\mathbf{o}) \tag{1.2.10}$$

do soustavy

$$S^{-1}(A_\varphi - \lambda E_n)S(\mathbf{u}') = (\mathbf{o})$$

t.j., po vynásobení maticí S zleva,

$$(A_\varphi - \lambda E_n)(S(\mathbf{u}')) = (\mathbf{o}). \tag{1.2.11}$$

Je-li tedy vektor $(\mathbf{u}')$ řešením homogenní soustavy (1.2.10), je vlastním vektorem lineární transformace φ příslušným vlastní hodnotě λ a vyjádřeným v souřadnicích vzhledem k bázi $\mathcal{V}'$. Řešení homogenní soustavy (1.2.11) je ale potom vektor o souřadnicích $S(\mathbf{u}')$, což je tentýž vlastní vektor jen vyjádřený v souřadnicích vzhledem k bázi $\mathcal{V}$. ◇

Poznámka 1.2.10. Posloupnost vlastních hodnot lineární transformace φ se nazývá *spektrum* lineární transformace φ. $\diamondsuit$

Příklad 1.2.3. Jestliže hodnost lineární transformace φ na V_n je menší než n, potom $\mathrm{Ker}(\varphi)$ je netriviální vektorový podprostor (dimenze $n - h(\varphi)$) a každý nenulový vektor $\mathbf{u} \in \mathrm{Ker}(\varphi)$ je vlastní vektor φ pro vlastní hodnotu $\lambda = 0$, opravdu $\varphi(\mathbf{u}) = 0 \cdot \mathbf{u} = \mathbf{o}$. $\heartsuit$

Úloha 1.2.1. Lineární transformace na $\mathbb{R}^2$ je dána maticí $\begin{pmatrix} 8 & -5 \\ -1 & 4 \end{pmatrix}$. Určete její vlastní čísla a vlastní vektory.

Řešení: Charakteristický polynom je $\lambda^2 - 12\,\lambda + 27 = 0$ a jeho kořeny jsou $\lambda_1 = 9$ a $\lambda_2 = 3$. Potom vlastní hodnotě $\lambda_1 = 9$ odpovídají vlastní vektory, které jsou řešením homogenní soustavy rovnic

$$\begin{aligned} -u_1 - 5\,u_2 &= 0\,, \\ -u_1 - 5\,u_2 &= 0\,, \end{aligned}$$

a podobně vlastní hodnotě $\lambda_2 = 3$ odpovídají vlastní vektory, které jsou řešením homogenní soustavy rovnic

$$\begin{aligned} 5\,u_1 - 5\,u_2 &= 0\,, \\ -u_1 + u_2 &= 0\,. \end{aligned}$$

Jsou tedy příslušné vlastní vektory $\mathbf{u}_1 = k\,(-5;1)$ a $\mathbf{u}_2 = l\,(1;1)$, kde k, l jsou libovolná nenulová reálná čísla. $\triangle$

Věta 1.2.7. *Nechť φ je lineární transformace na V. Pak vlastní vektory φ příslušné navzájem různým vlastním hodnotám jsou lineárně nezávislé.*

Důkaz. Nechť $\lambda_1, \ldots, \lambda_r$ jsou navzájem různé vlastní hodnoty a $\mathbf{u}_1, \ldots, \mathbf{u}_r$ příslušné vlastní vektory lineární transformace φ. Nechť $\mathbf{u}_1, \ldots, \mathbf{u}_k$, $1 \le k \le r$, je maximální posloupnost lineárně nezávislých vlastních vektorů.

Dále budeme postupovat sporem. Předpokládejme $k < r$, pak

$$\mathbf{u}_{k+1} = \sum_{i=1}^{k} c_i\,\mathbf{u}_i\,.$$

Aplikujeme na tuto rovnost lineární transformaci φ a dostaneme z linearity φ

$$\varphi(\mathbf{u}_{k+1}) = \sum_{i=1}^{k} c_i\,\varphi(\mathbf{u}_i)\,.$$

Protože jsou vektory $\mathbf{u}_i$ vlastní vektory pro λ_i, $i = 1, \ldots, r$, dostaneme

$$\lambda_{k+1}\,\mathbf{u}_{k+1} = \sum_{i=1}^{k} \lambda_i\, c_i\, \mathbf{u}_i$$

a současně musí být

$$\lambda_{k+1}\,\mathbf{u}_{k+1} = \sum_{i=1}^{k} \lambda_{k+1}\, c_i\, \mathbf{u}_i.$$

Porovnáním koeficientů u $\mathbf{u}_i$, $i = 1, \ldots, k$, dostaneme

$$\lambda_i\, c_i = \lambda_{k+1}\, c_i.$$

Tato rovnost je splněna buďto pro $\lambda_i = \lambda_{k+1}$, což je spor s předpokladem, že vlastní hodnoty byly různé, nebo pro $c_i = 0$, $\forall i = 1, \ldots, k$, ale potom $\mathbf{u}_{k+1} = \mathbf{o}$, což je spor s definicí vlastního vektoru. Musí tedy být $k = r$ a všechny vlastní vektory $\mathbf{u}_1, \ldots, \mathbf{u}_r$ jsou lineárně nezávislé. $\square$

Důsledek 1.2.3. Nechť φ je lineární transformace vektorového prostoru V_n, která má n navzájem různých vlastních hodnot v $\mathbb{T}$. Pak V_n je přímým součtem n jednodimenzionálních podprostorů, které jsou invariantní vzhledem k φ a ve vhodné bázi prostoru V_n je matice A_φ diagonální. Rozklad V_n na přímý součet invariantních podprostorů je jednoznačný, až na jejich pořadí.

Důkaz. Jestliže má charakteristická rovnice φ celkem n navzájem různých kořenů $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$, potom podle Věty 1.2.7 má n odpovídajících lineárně nezávislých vlastních vektorů $\mathbf{u}_1, \ldots, \mathbf{u}_n$, které tvoří bázi V_n. Matice A_φ má v této bázi diagonální tvar, kde na diagonále budou vlastní hodnoty $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$ v tom pořadí, v jakém použijeme vektory v bázi $\mathbf{u}_1, \ldots, \mathbf{u}_n$. $\square$

Věta 1.2.7 hovoří o vlastních vektorech lineární transformace, které přísluší různým kořenům charakteristického polynomu. Jaká situace ale nastane pro stejné kořeny, t.j. kořeny s násobností vyšší než jedna? Předpokládejme, že charakteristická rovnice má k-násobný kořen λ, kde $k > 1$. V tomto případě homogenní soustava rovnic (1.2.9) pro výpočet vlastních vektorů může mít jako řešení podprostor dimenze 1 až k. Že mohou nastat všechny možnosti si budeme demonstrovat v následující úloze.

Úloha 1.2.2. Lineární transformace na $\mathbb{R}^3$ jsou dány maticemi:

$$\text{a) } A_1 = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad \text{b) } A_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad \text{c) } A_3 = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}.$$

Určete vlastní čísla a vlastní vektory lineární transformace φ_{A_i}, $i = 1, 2, 3$.

Řešení: a) Charakteristický polynom je $|A_1 - \lambda\, E_3| = (1-\lambda)^3$, t.j. $\lambda_{1,2,3} = 1$. Matice pro výpočet vlastních vektorů je potom $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ a odtud je každý vlastní vektor nenulovým násobkem vektoru $(1;0;0)$, t.j. dimenze prostoru obecného řešení homogenní soustavy rovnic pro výpočet vlastních vektorů je jedna.

b) Charakteristický polynom je $|A_2 - \lambda\, E_3| = (1-\lambda)^3$, t.j. $\lambda_{1,2,3} = 1$. Matice pro výpočet vlastních vektorů je potom $\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ a odtud je každý vlastní vektor lineární kombinací vektorů $(1;0;0)$ a $(0;1;0)$, t.j. dimenze prostoru obecného řešení homogenní soustavy rovnic pro výpočet vlastních vektorů je dvě.

c) Charakteristický polynom je $|A_3 - \lambda\, E_3| = (3-\lambda)^3$, t.j. $\lambda_{1,2,3} = 3$. Matice pro výpočet vlastních vektorů je nulová, t.j. dimenze prostoru obecného řešení homogenní soustavy rovnic pro výpočet vlastních vektorů je tři. △

Poznámka 1.2.11. Zvláštní roli mezi vícenásobnými kořeny charakteristického polynomu hraje nulový kořen. Z Příkladu 1.2.3 víme, že řešení homogenní soustavy rovnic pro výpočet vlastních vektorů příslušných vlastní hodnotě $\lambda = 0$ je jádro lineární transformace φ. Má-li jádro dimenzi k, $k \geq 1$, je 0 nejméně k-násobným kořenem charakteristického polynomu. Opravdu, protože v tomto případě je hodnost $h(\varphi) = h(A_\varphi) = (n-k)$, jsou všechny hlavní minory řádu většího než $(n-k)$ matice A_φ nulové a z Poznámky 1.2.8 vyplývá, že 0 je nejméně k-násobným kořenem charakteristického polynomu. Naopak, je-li 0 právě k-násobným kořenem charakteristického polynomu, je jádro lineárního zobrazení netriviální podprostor, a jeho dimenze je menší nebo rovna k. To, že dimenze jádra může být ostře menší než k si ukážeme na následujícím příkladu. Nechť má lineární zobrazení v nějaké bázi matici $A_\varphi = \begin{pmatrix} 4 & -5 & 2 \\ 5 & -7 & 3 \\ 6 & -9 & 4 \end{pmatrix}$. Kořeny charakteristické rovnice $|A_\varphi - \lambda\, E_3| = -\lambda^3 + \lambda^2 = 0$ jsou $\lambda_1 = 1$ a $\lambda_{2,3} = 0$. Nula je tedy dvojnásobným vlastním číslem a zobrazení má netriviální jádro. Protože ale hodnost $h(A_\varphi) = 2$, je dimenze jádra $1 < 2$. ♢

Obecně, pro k-násobný kořen charakteristického polynomu lineární transformace platí věta, jejíž důkaz přesahuje rámec tohoto textu a uvedeme si ji proto bez důkazu. Důkaz viz např. [Sl].

Věta 1.2.8. *Nechť λ je právě k-násobným kořenem charakteristického polynomu lineární transformace φ na V_n, $n \geq k \geq 1$. Potom existuje k-dimenzionální vektorový podprostor U_k prostoru V_n, který je invariantní vzhledem k φ. Navíc existuje taková báze V_n, že maticový diagonální blok příslušný podprostoru U_k je horní trojúhelníková matice, která má na diagonále hodnotu λ.* □

Poznámka 1.2.12. Je-li $k = 1$, je trojúhelníková matice tvořena jediným prvkem. Pro $k > 1$ je horní trojúhelníková matice v předchozí Větě 1.2.8 matice, která má všechny prvky pod diagonálou nulové. Všechny tři případy v Úloze 1.2.2 byly tohoto typu, přitom v případě c) je příslušný 3-rozměrný invariantní podprostor přímým součtem jednodimenzionálních invariantních podprostorů. To platí i obecně, t.j. k-dimenzionální vektorový podprostor U_k, který přísluší k-násobnému kořeni λ charakteristického polynomu, $k \geq 2$, může být přímým součtem invariantních podprostorů nižších dimenzí. Tento rozklad už ale není jednoznačný. $\diamondsuit$

Popišme nyní (bez důkazu), jak lze nalézt invariantní podprostor U_k příslušný k-násobnému kořeni λ charakteristického polynomu lineární transformace φ na V_n. Máme $U_k = \operatorname{Ker}(\varphi - \lambda \operatorname{id}_{V_n})^k$, kde $(\varphi - \lambda \operatorname{id}_{V_n})^k$ je lineární transformace, která vznikne složením transformace $(\varphi - \lambda \operatorname{id}_{V_n})$ samé se sebou k-krát. Důkaz toho, že pro k-násobný kořen charakteristického polynomu φ je dimenze jádra $\operatorname{Ker}(\varphi - \lambda \operatorname{id}_{V_n})^k$ právě k a že U_k je invariantní podprostor lineární transformace φ lze nalézt např. v textu [Sl]. Snadno se vidí, že všechny vlastní vektory příslušné vlastnímu číslu λ patří do U_k. Opravdu, je-li $\mathbf{u}$ vlastním vektorem příslušným λ, je

$$(\varphi - \lambda \operatorname{id}_{V_n})(\mathbf{u}) = \mathbf{o}$$

a tedy i $\mathbf{u} \in \operatorname{Ker}(\varphi - \lambda \operatorname{id}_{V_n})^k = U_k$. Máme tedy $L(\mathbf{u}_1, \dots, \mathbf{u}_j) \subseteq U_k$, kde $\mathbf{u}_1, \dots, \mathbf{u}_j$ jsou lineárně nezávislé vlastní vektory, které přísluší λ. Pro $j = k$ je $\varphi|U_k$ lineární transformace, která má v bázi $\mathbf{u}_1, \dots, \mathbf{u}_k$ diagonální (t.j. horní trojúhelníkovou) matici s hodnotou λ na diagonále.

Je-li $j < k$, hledáme další vektor $\mathbf{u}_{j+1} \notin L(\mathbf{u}_1, \dots, \mathbf{u}_j)$ takový, že

$$(\varphi - \lambda \operatorname{id}_{V_n})(\mathbf{u}_{j+1}) = \mathbf{w}_1, \quad \mathbf{o} \neq \mathbf{w}_1 \in L(\mathbf{u}_1, \dots, \mathbf{u}_j)\,, \tag{1.2.12}$$

t.j. takový, že

$$\varphi(\mathbf{u}_{j+1}) = \lambda\,(\mathbf{u}_{j+1}) + \mathbf{w}_1 \in L(\mathbf{u}_1, \dots, \mathbf{u}_j, \mathbf{u}_{j+1})\,. \tag{1.2.13}$$

Takový vektor patří do U_k, protože pro $\mathbf{w}_1 = \sum_{i=1}^{j} a_i\, \mathbf{u}_i$ je

$$(\varphi - \lambda \operatorname{id}_{V_n})(\mathbf{w}_1) = \sum_{i=1}^{j} a_i\, \varphi(\mathbf{u}_i) - \lambda \sum_{i=1}^{j} a_i\, \mathbf{u}_i = \mathbf{o}\,,$$

a tedy

$$(\varphi - \lambda \operatorname{id}_{V_n})^2(\mathbf{u}_{j+1}) = \mathbf{o}$$

Přidáme vektor $\mathbf{u}_{j+1}$ do posloupnosti nezávislých vektorů $\mathbf{u}_1, \dots, \mathbf{u}_j, \mathbf{u}_{j+1}$ a v dalším kroku hledáme vektor $\mathbf{u}_{j+2} \notin L(\mathbf{u}_1, \dots, \mathbf{u}_{j+1})$, takový, že

$$(\varphi - \lambda \operatorname{id}_{V_n})(\mathbf{u}_{j+2}) = \mathbf{w}_2, \quad \mathbf{o} \neq \mathbf{w}_2 \in L(\mathbf{u}_1, \dots, \mathbf{u}_{j+1})\,. \tag{1.2.14}$$

Takový vektor patří do U_k, protože $(\varphi - \lambda\,\mathrm{id}_{V_n})^2(\mathbf{w}_2) = \mathbf{o}$, a tedy

$$(\varphi - \lambda\,\mathrm{id}_{V_n})^3(\mathbf{u}_{j+2}) = \mathbf{o}\,.$$

Přidáme ho do posloupnosti nezávislých vektorů $\mathbf{u}_1, \dots, \mathbf{u}_j, \mathbf{u}_{j+1}, \mathbf{u}_{j+2}$. Takto pokračujeme, až po $(k-j)$ krocích proces ukončíme. Potom se snadno vidí, že $\varphi|U_k$ má v bázi $\mathbf{u}_1, \dots, \mathbf{u}_k$ horní trojúhelníkovou matici, kde na diagonále je λ a nad diagonálou jsou 0 pro vlastní vektory příslušné λ a hodnoty, které odpovídají zvoleným vektorům $\mathbf{w}_i$ pro vektory $\mathbf{u}_{j+i}$, $i = 1, \dots, k-j$.

Úloha 1.2.3. Lineární transformace na $\mathbb{R}^3$ je dána maticí $A = \begin{pmatrix} 2 & 2 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 2 & 2 & 2 \end{pmatrix}$.

Ukažte, že charakteristický polynom má trojnásobný kořen a najděte takovou bázi, že v ní má φ_A horní trojúhelníkovou matici.

Řešení: Charakteristický polynom je $|A - \lambda\,E_3| = -\lambda^3 + 6\lambda^2 - 12\lambda + 8 = (2-\lambda)^3$, t.j. $\lambda_{1,2,3} = 2$. Matice pro výpočet vlastních vektorů je potom $\begin{pmatrix} 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 2 & 2 & 0 \end{pmatrix}$ a odtud je každý vlastní vektor nenulovým násobkem vektoru $\mathbf{u}_1 = (0;0;1)$. Dále řešíme soustavu rovnic $(\varphi_A - 2\,\mathrm{id})(\mathbf{x}) = a\,\mathbf{u}_1$, $a \neq 0$, t.j. řešíme soustavu nehomogeních rovnic

$$\begin{array}{rrrcl} & 2\,x_2 & & = & 0 \\ & & 0 & = & 0 \\ 2\,x_1 & +2\,x_2 & & = & a\,. \end{array}$$

Řešením je např., pro $a = 2$, vektor $\mathbf{u}_2 = (1;0;1)$. V dalším kroku hledám vektor $(\varphi_A - 2\,\mathrm{id})(\mathbf{x}) = a\,\mathbf{u}_1 + b\,\mathbf{u}_2$, $a^2 + b^2 \neq 0$, t.j. řešíme soustavu nehomogeních rovnic

$$\begin{array}{rrrcl} & 2\,x_2 & & = & b \\ & & 0 & = & 0 \\ 2\,x_1 & +2\,x_2 & & = & a+b\,. \end{array}$$

Řešení je např., pro $a = 2, b = 2$, vektor $\mathbf{u}_3 = (1;1;1)$. Protože je $\varphi_A(\mathbf{u}_1) = (0;0;2) = 2\,\mathbf{u}_1$, $\varphi_A(\mathbf{u}_2) = (2;0;4) = 2\,\mathbf{u}_1 + 2\,\mathbf{u}_2$ a konečně $\varphi_A(\mathbf{u}_3) = (4;2;6) = 2\,\mathbf{u}_1 + 2\,\mathbf{u}_2 + 2\,\mathbf{u}_3$, je matice transformace v bázi $\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \mathbf{u}_3$ matice $B = \begin{pmatrix} 2 & 2 & 2 \\ 0 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$.

Poznamenéjme ještě, že tato matice není určena jednoznačně, protože jsme provedli celou řadu voleb při výběru vektorů báze $\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \mathbf{u}_3$ a tyto volby ovlivní podobu matice B nad diagonálou. △

Úloha 1.2.4. Nechť má lineární transformace φ vlastní vektor $\mathbf{u}$, který přísluší vlastní hodnotě λ. Dokažte, že $\varphi^k(\mathbf{u}) = \lambda^k\,\mathbf{u}$ pro každé přirozené k a φ^k je lineární transformace, která vznikne složením φ samého se sebou k-krát. △

1.3 Rozklad reálného vektorového prostoru na invariantní podprostory

Ve "středoškolské"geometrii se zabýváme pouze reálnými bodovými (afinními, euklidovskými) prostory. Proto úvahy o invariantních prostorech z části 1.2 budeme specifikovat pro těleso reálných čísel $\mathbb{R}$. Předpokládejme tedy, že V_n je vektorový prostor nad tělesem reálných čísel. Potom v libovolné bázi je matice lineární transformace φ na V_n reálná čtvercová matice a charakteristický polynom $|A_\varphi - \lambda\, E_n|$ je polynom stupně n s reálnými koeficienty.

Z algebry, [Ho93, Ho94, Ro], víme, že charakteristický polynom nad $\mathbb{R}$ nemusí být obecně řešitelný v $\mathbb{R}$. Při hledání kořenů charakteristického polynomu a příslušných vlastních vektorů tak mohou nastat následující situace.

A) Charakteristický polynom má pouze reálné kořeny.

B) Charakteristický polynom má nejméně jednu dvojici komplexně sdružených kořenů.

Rozeberme si nyní jednotlivé možnosti.

A) Má-li charakteristická rovnice lineární transformace φ na V_n celkem n různých reálných kořenů, je podle Důsledku 1.2.3 V_n přímým součtem n jednodimenzionálních vlastních směrů a v bázi, která je tvořena vlastními vektory, má matice A_φ diagonální tvar, kde na diagonále jsou vlastní hodnoty φ.

Úloha 1.3.1. Lineární transformace φ na $\mathbb{R}^3$ je dána maticí
$A = \begin{pmatrix} 3 & 2 & 0 \\ -2 & 5 & -4 \\ 0 & -7 & 3 \end{pmatrix}$. Určete vlastní čísla a vlastní vektory φ.

Řešení: Charakteristický polynom φ je $|A - \lambda\, E_3| = -\lambda^3 + 11\lambda^2 - 15\lambda - 27$, jeho kořeny jsou $\lambda_1 = -1$, $\lambda_2 = 3$ a $\lambda_3 = 9$. Matice homogenní soustavy rovnic (1.2.9) pro λ_1 je $\begin{pmatrix} 4 & 2 & 0 \\ -2 & 6 & -4 \\ 0 & -7 & 4 \end{pmatrix}$ a obecné řešení této soustavy je generováno vektorem $\mathbf{u}_1 = (-2; 4; 7)$. Dále matice pro λ_2 je $\begin{pmatrix} 0 & 2 & 0 \\ -2 & 2 & -4 \\ 0 & -7 & 0 \end{pmatrix}$ a obecné řešení je generováno vektorem $\mathbf{u}_2 = (-2; 0; 1)$. Konečně matice pro λ_3 je $\begin{pmatrix} -6 & 2 & 0 \\ -2 & -4 & -4 \\ 0 & -7 & -6 \end{pmatrix}$ a obecné řešení je generováno vektorem $\mathbf{u}_3 = (2; -6; 7)$. Snadno se vidí, že $\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \mathbf{u}_3$ jsou lineárně nezávislé. Potom v bázi $\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \mathbf{u}_3$ má matice lineární transformace φ tvar $\begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 9 \end{pmatrix}$. $\triangle$

Má-li charakteristický polynom reálný kořen s násobností $k > 1$, potom mu odpovídá k dimenzionální invariantní podprostor U_k. V závěru části 1.2 a Úloze 1.2.3 jsme ukázali, že v tomto případě můžeme nalézt bázi U_k takovou, že odpovídající matice je horní trojúhelníková matice řádu k.

B) Nechť má nyní charakteristický polynom lineární transformace φ dvojici komplexně sdružených kořenů $\lambda = \alpha + i\,\beta$ a $\bar{\lambda} = \alpha - i\,\beta$. V tomto případě předpokládáme, že λ a $\bar{\lambda}$ jsou vlastní hodnoty lineární transformace na komplexním vektorovém prostoru, která má stejnou reálnou matici, jako φ. To můžeme udělat např. konstrukcí komplexního rozšíření reálného vektorového prostoru a konstrukcí komplexního rozšíření lineární transformace, které jsou popsány ve skriptu [JaSe].

Podobným způsobem, jako se v teorii čísel sestrojí komplexní rozšíření tělesa reálných čísel v těleso komplexních čísel, sestrojíme i komplexní rozšíření reálného vektorového prostoru V.

Uvažujme množinu $V \times V$ a definujme na ní operaci sčítání a násobení komplexním číslem následujícím způsobem

$$(\mathbf{a}, \mathbf{b}) + (\mathbf{c}, \mathbf{d}) = (\mathbf{a} + \mathbf{c}, \mathbf{b} + \mathbf{d})\,, \tag{1.3.1}$$

$$(\alpha + i\beta)(\mathbf{a}, \mathbf{b}) = (\alpha\mathbf{a} - \beta\mathbf{b}, \alpha\mathbf{b} + \beta\mathbf{a})\,. \tag{1.3.2}$$

Snadno se ověří, že $V \times V$ spolu s operacemi sčítání a násobení komplexními čísly definovanými (1.3.1) a (1.3.2) je vektorovým prostorem nad tělesem komplexních čísel $\mathbb{C}$.

Definice 1.3.1. Množinu $V \times V$ s operacemi sčítání a násobení komplexními čísly definovanými vztahy (1.3.1) a (1.3.2) budeme nazývat *komplexní rozšíření* reálného vektorového prostoru V a označovat $V^{\mathbb{C}}$.

Uvažujme podmnožinu $M = \{(\mathbf{u}, \mathbf{o}) \in V \times V\} \subset V^{\mathbb{C}}$. Snadno ověříme, že M je uzavřená vzhledem ke sčítání a násobení reálnými čísly. Uvažujme zobrazení V na M, které přiřadí vektoru $\mathbf{u} \in V$ vektor $(\mathbf{u}, \mathbf{o}) \in M$. Toto zobrazení je izomorfismem vektorového prostoru V na M. Při ztotožnění V a M tedy dostáváme, že $V \subset V^{\mathbb{C}}$.

Poznámka 1.3.1. V je podmnožina ve $V^{\mathbb{C}}$, ale ne vektorový podprostor, protože V je definováno nad $\mathbb{R}$ a $V^{\mathbb{C}}$ nad $\mathbb{C}$. ♢

Nyní můžeme každý vektor $(\mathbf{u}, \mathbf{v}) \in V^{\mathbb{C}}$ psát následujícím způsobem

$$(\mathbf{u}, \mathbf{v}) = (\mathbf{u}, \mathbf{o}) + (\mathbf{o}, \mathbf{v}) = (\mathbf{u}, \mathbf{o}) + i(\mathbf{v}, \mathbf{o}) = \mathbf{u} + i\mathbf{v}\,.$$

Můžeme tedy formálně psát $V^{\mathbb{C}} = V \oplus i\,V$.

Vektor $\mathbf{u} \in V$ budeme nazývat *reálnou složkou (částí)* a vektor $\mathbf{v} \in V$ *imaginární složkou (částí)* vektoru $\mathbf{w} = \mathbf{u} + i\mathbf{v} \in V^{\mathbb{C}}$ a označovat $\mathbf{u} = \mathfrak{Re}(\mathbf{w})$, $\mathbf{v} = \mathfrak{Im}(\mathbf{w})$. Nulovým vektorem $V^{\mathbb{C}}$ je $(\mathbf{o}, \mathbf{o}) = \mathbf{o} + i\mathbf{o} = \mathbf{o}$.

Věta 1.3.1. *Vektory* $\langle \mathbf{u}_1, \dots, \mathbf{u}_k \rangle \in V$ *jsou lineárně nezávislé v prostoru* V *tehdy a jen tehdy, jsou-li lineárně nezávislé v prostoru* $V^{\mathbb{C}}$*.*

Důkaz. Je zřejmé, že jsou-li $\langle \mathbf{u}_1, \dots, \mathbf{u}_k \rangle \in V$ lineárně závislé ve V, jsou i lineárně závislé ve $V^{\mathbb{C}}$. Nechť jsou $\langle \mathbf{u}_1, \dots, \mathbf{u}_k \rangle$ lineárně závislé ve $V^{\mathbb{C}}$. Potom existují komplexní čísla $\alpha_j + i\beta_j$, $j = 1, \dots, k$, taková, že alespoň jedno z nich je nenulové a platí

$$\sum_{j=1}^{k} (\alpha_j + i\beta_j)\mathbf{u}_j = \mathbf{o}\,,$$

tj.

$$\sum_{j=1}^{k} \alpha_j \mathbf{u}_j + i \sum_{j=1}^{k} \beta_j \mathbf{u}_j = \mathbf{o}_{V^{\mathbb{C}}} = \mathbf{o}_V + i\,\mathbf{o}_V\,.$$

Musí tedy platit $\sum_{j=1}^{k} \alpha_j \mathbf{u}_j = \mathbf{o}$ a současně $\sum_{j=1}^{k} \beta_j \mathbf{u}_j = \mathbf{o}$, přičemž alespoň jedno $\alpha_j \in \mathbb{R}$ nebo $\beta_j \in \mathbb{R}$ je nenulové, což znamená, že vektory $\langle \mathbf{u}_1, \dots, \mathbf{u}_k \rangle$ jsou lineárně závislé ve V. Dokázali jsme tedy, že $\langle \mathbf{u}_1, \dots, \mathbf{u}_k \rangle$ jsou lineárně závislé ve V tehdy a jen tehdy, jsou-li lineárně závislé ve $V^{\mathbb{C}}$, což je tvrzení ekvivalentní tvrzení Věty 1.3.1. □

Důsledek 1.3.1. Každá báze prostoru V_n je i bází prostoru $V_n^{\mathbb{C}}$.

Důkaz. Opravdu, je-li $\mathcal{V} = \langle \mathbf{u}_1, \dots, \mathbf{u}_n \rangle$ je báze vektorového prostoru V_n. Potom vektory báze $\mathcal{V}$ jsou lineárně nezávislé ve $V^{\mathbb{C}}$ a musíme dokázat, že $\mathcal{V}$ je systém generátorů $V^{\mathbb{C}}$. Buď $\mathbf{w} = \mathbf{x} + i\,\mathbf{y} \in V^{\mathbb{C}}$ libovolný vektor. Potom existují reálná čísla $x_1; \dots; x_n; y_1; \dots; y_n$ tak, že $\mathbf{x} = \sum_{j=1}^{n} x_j \mathbf{u}_j$, $\mathbf{y} = \sum_{j=1}^{n} y_j \mathbf{u}_j$. Odtud

$$\mathbf{w} = \mathbf{x} + i\,\mathbf{y} = \sum_{j=1}^{n} x_j \mathbf{u}_j + i \sum_{j=1}^{n} y_j \mathbf{u}_j = \sum_{j=1}^{n} (x_j + i\,y_j)\mathbf{u}_j$$

a tedy $\mathbf{w} = (x_1 + i\,z_1, \dots, x_n + i\,y_n)$ v bázi $\mathcal{V}$, což dokazuje náš Důsledek 1.3.1. □

Definice 1.3.2. Každá báze prostoru $V^{\mathbb{C}}$, která je současně i bází V, se nazývá *reálná báze*.

Poznámka 1.3.2. Výhoda použití reálných bází $V^{\mathbb{C}}$ spočívá v tom, že reálné vektory mají všechny souřadnice reálné, kdežto vektory, které nejsou reálné mají alespoň jednu souřadnici komplexní číslo s nenulovou imaginární částí.

Má-li reálný vektorový prostor V dimenzi (reálnou) n, potom komplexní prostor $V^{\mathbb{C}}$ má komplexní dimenzi n ale prostor $V \times V$ má reálnou dimenzi $2\,n$. ♢

Věta 1.3.2. *Buď U podprostor vektorového prostoru V. Potom $U^{\mathbb{C}}$ je podprostorem vektorového prostoru $V^{\mathbb{C}}$.*

Důkaz. Věta 1.3.2 je přímým důsledkem definice komplexního rozšíření vektorového prostoru. □

Definice 1.3.3. Podprostor W vektorového prostoru $V^{\mathbb{C}}$, který je komplexním rozšířením podprostoru $U \subseteq V$, se nazývá *reálný podprostor* a označujeme ho $U^{\mathbb{C}}$.

Ne každý podprostor ve $V^{\mathbb{C}}$ je reálný, ale každý podprostor ve $V^{\mathbb{C}}$ obsahuje nějaký reálný podprostor, minimálně triviální podprostor $\{\mathbf{o}\}$.

Vektory $\mathbf{u} + i\,\mathbf{v}$ a $\mathbf{u} - i\,\mathbf{v}$ se nazývají vektory *komplexně sdružené.* Je-li $\mathbf{w} \in V^{\mathbb{C}}$, budeme komplexně sdružený vektor označovat $\overline{\mathbf{w}}$. Je-li $W \subseteq V^{\mathbb{C}}$ vektorový podprostor, je $\overline{W} = \{\overline{\mathbf{w}} | \mathbf{w} \in W\}$ vektorový podprostor nazývaný *komplexně sdružený podprostor* k podprostoru W.

Pro komplexně sdružené vektory ve $V^{\mathbb{C}}$ platí vztahy obdobné vztahům pro komplexně sdružená čísla. Pro $\mathbf{w}, \mathbf{w}' \in V^{\mathbb{C}}$, $k \in \mathbb{C}$, platí

$$\overline{\mathbf{w} + \mathbf{w}'} = \overline{\mathbf{w}} + \overline{\mathbf{w}'}\,,$$
$$\overline{k\mathbf{w}} = \overline{k}\;\overline{\mathbf{w}}\,.$$

kde $\overline{k}$ je komplexně sdružené číslo k číslu k. Dále platí

$$\mathfrak{Re}(\mathbf{w}) = \tfrac{1}{2}(\mathbf{w} + \overline{\mathbf{w}}),\ \mathfrak{Im}(\mathbf{w}) = \tfrac{i}{2}(\overline{\mathbf{w}} - \mathbf{w}).$$

Reálnou část podprostoru W vektorového prostoru $V^{\mathbb{C}}$ určíme jako

$$\mathfrak{Re}W = W \cap \overline{W}\,.$$

Věta 1.3.3. *Nechť V a U jsou reálné vektorové prostory a $\varphi : V \to U$ je lineární zobrazení. Potom existuje právě jedno lineární zobrazení $\varphi^{\mathbb{C}} : V^{\mathbb{C}} \to U^{\mathbb{C}}$ takové, že pro každý vektor $\mathbf{x} \in V$ je $\varphi^{\mathbb{C}}(\mathbf{x}) = \varphi(\mathbf{x})$. Je-li lineární zobrazení φ prosté, je i lineární zobrazení $\varphi^{\mathbb{C}}$ prosté a je-li φ surjektivní, je i $\varphi^{\mathbb{C}}$ surjektivní.*

Důkaz. Nechť $\varphi : V \to U$ je lineární zobrazení. Definujme zobrazení $\varphi^{\mathbb{C}}$ z $V^{\mathbb{C}}$ do $U^{\mathbb{C}}$ vztahem

$$\varphi^{\mathbb{C}}(\mathbf{x} + i\,\mathbf{y}) = \varphi(\mathbf{x}) + i\,\varphi(\mathbf{y}) \tag{1.3.3}$$

pro každé $\mathbf{x} + i\,\mathbf{y} \in V^{\mathbb{C}}$. Je zřejmé, že $\varphi^{\mathbb{C}}(\mathbf{x}) = \varphi(\mathbf{x})$ pro každý vektor $\mathbf{x} \in V$. Ověříme, že $\varphi^{\mathbb{C}}$ je lineární zobrazení. Nechť $\mathbf{x}_j + i\,\mathbf{y}_j \in V^{\mathbb{C}}$, $\alpha_j + i\,\beta_j \in \mathbb{C}$, $j = 1, 2$.

Potom

$$\begin{gathered}
\varphi^{\mathbb{C}}((\alpha_1 + i\,\beta_1)(\mathbf{x}_1 + i\,\mathbf{y}_1) + (\alpha_2 + i\,\beta_2)(\mathbf{x}_2 + i\,\mathbf{y}_2)) = \\
= \varphi^{\mathbb{C}}((\alpha_1\mathbf{x}_1 - \beta_1\mathbf{y}_1 + \alpha_2\mathbf{x}_2 - \beta_2\mathbf{y}_2) + i\,(\alpha_1\mathbf{y}_1 + \beta_1\mathbf{x}_1 + \alpha_2\mathbf{y}_2 + \beta_2\mathbf{x}_2)) = \\
= \varphi(\alpha_1\mathbf{x}_1 - \beta_1\mathbf{y}_1 + \alpha_2\mathbf{x}_2 - \beta_2\mathbf{y}_2) + i\,\varphi(\alpha_1\mathbf{y}_1 + \beta_1\mathbf{x}_1 + \alpha_2\mathbf{y}_2 + \beta_2\mathbf{x}_2) = \\
= \alpha_1\varphi(\mathbf{x}_1) - \beta_1\varphi(\mathbf{y}_1) + \alpha_2\varphi(\mathbf{x}_2) - \beta_2\varphi(\mathbf{y}_2) + \\
+ i\,(\alpha_1\varphi(\mathbf{y}_1) + \beta_1\varphi(\mathbf{x}_1) + \alpha_2\varphi(\mathbf{y}_2) + \beta_2\varphi(\mathbf{x}_2)) = \\
= (\alpha_1 + i\,\beta_1)(\varphi(\mathbf{x}_1) + i\,\varphi(\mathbf{y}_1)) + (\alpha_2 + i\,\beta_2)(\varphi(\mathbf{x}_2) + i\,\varphi(\mathbf{y}_2)) = \\
= (\alpha_1 + i\,\beta_1)\varphi^{\mathbb{C}}(\mathbf{x}_1 + i\,\mathbf{y}_1) + (\alpha_2 + i\,\beta_2)\varphi^{\mathbb{C}}(\mathbf{x}_2 + i\,\mathbf{y}_2).
\end{gathered}$$

Předpokládejme, že $\psi^{\mathbb{C}}$ je lineární zobrazení z $V^{\mathbb{C}}$ do $U^{\mathbb{C}}$ takové, že $\psi^{\mathbb{C}}(\mathbf{x}) = \varphi(\mathbf{x})$ pro každý vektor $\mathbf{x} \in V$. Potom z linearity dostáváme, že musí platit vztah (1.3.3), a tedy $\varphi^{\mathbb{C}} \equiv \psi^{\mathbb{C}}$.

Nechť je lineární zobrazení φ prosté a $\varphi^{\mathbb{C}}(\mathbf{x}_1 + i\,\mathbf{y}_1) = \varphi^{\mathbb{C}}(\mathbf{x}_2 + i\,\mathbf{y}_2)$. Potom z (1.3.3) je $\varphi(\mathbf{x}_1) = \varphi(\mathbf{x}_2)$ a $\varphi(\mathbf{y}_1) = \varphi(\mathbf{y}_2)$, a tedy musí být $\mathbf{x}_1 = \mathbf{x}_2$ a $\mathbf{y}_1 = \mathbf{y}_2$, což znamená, že i $\varphi^{\mathbb{C}}$ je prosté zobrazení.

Nechť lineární zobrazení φ je surjektivní zobrazení. Nechť $\mathbf{x}' + i\,\mathbf{y}' \in U^{\mathbb{C}}$ je libovolný vektor. Protože φ je surjektivní zobrazení, existují vektory $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in V$ takové, že $\varphi(\mathbf{x}) = \mathbf{x}'$ a $\varphi(\mathbf{y}) = \mathbf{y}'$. Potom $\varphi^{\mathbb{C}}(\mathbf{x} + i\,\mathbf{y}) = \mathbf{x}' + i\,\mathbf{y}'$, a tedy i $\varphi^{\mathbb{C}}$ je surjektivní. □

Definice 1.3.4. Zobrazení $\varphi^{\mathbb{C}}$ definované ve Větě 1.3.3 se nazývá *komplexní rozšíření lineárního zobrazení* φ.

Nechť $\mathcal{V} = \langle \mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_n \rangle$, respektive $\mathcal{U} = \langle \mathbf{u}_1, \ldots, \mathbf{u}_m \rangle$, je báze vektorového prostoru V_n, respektive U_m. Nechť vzhledem k těmto bázím má lineární zobrazení φ z V_n do U_m matici A_φ. Protože každá báze prostoru V_n je i bází prostoru $V_n^{\mathbb{C}}$ a podobně, každá báze prostoru U_m je i bází prostoru $U_m^{\mathbb{C}}$, můžeme vyjádřit i matici $A_{\varphi^{\mathbb{C}}}$ vzhledem k bázím $\mathcal{V}$ a $\mathcal{U}$.

Věta 1.3.4. *Pro libovolné lineární zobrazení φ z V_n do U_m jsou matice A_φ a $A_{\varphi^{\mathbb{C}}}$ vzhledem k reálným bázím ve $V_n^{\mathbb{C}}$ a $U_m^{\mathbb{C}}$ totožné.*

Důkaz. Nechť v bázích $\mathcal{V} = \langle \mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_n \rangle$ ve V_n a $\mathcal{U} = \langle \mathbf{u}_1, \ldots, \mathbf{u}_m \rangle$ v U_m je A_φ matice lineárního zobrazení φ z V_n do U_m. Podle (1.3.3) je $(\varphi^{\mathbb{C}}(\mathbf{x} + i\mathbf{y})) = (\varphi(\mathbf{x})) + i(\varphi(\mathbf{y})) = A_\varphi\,(\mathbf{x}) + i\,A_\varphi\,(\mathbf{y}) = A_\varphi\,(\mathbf{x} + i\,\mathbf{y})$. □

Poznámka 1.3.3. Je třeba si uvědomit, jaký je rozdíl mezi souřadnicovým vyjádřením libovolného lineárního zobrazení z $V^{\mathbb{C}}$ do $U^{\mathbb{C}}$ a komplexním rozšířením lineárního zobrazení z V do U. Zatímco matice komplexního rozšíření reálného lineárního zobrazení vzhledem k reálným bázím je definována nad $\mathbb{R}$, je obecně matice libovolného lineárního zobrazení z $V^{\mathbb{C}}$ do $U^{\mathbb{C}}$ definována nad $\mathbb{C}$. ♢

Nyní uvažujme lineární transformaci φ na reálném vektorovém prostoru V_n a uvažujme lineární transformaci $\varphi^{\mathbb{C}}$ na komplexním rozšíření $V_n^{\mathbb{C}}$, která vznikne komplexním rozšířením φ. Potom (reálné) vlastní vektory, které přísluší reálným kořenům charakteristického polynomu φ jsou i vlastní (reálné) vektory lineární transformace $\varphi^{\mathbb{C}}$. Má-li ale charakteristický polynom dvojici komplexně sdružených kořenů $\lambda = \alpha + i\,\beta$, $\bar{\lambda} = \alpha - i\,\beta$, $0 \neq \beta \in \mathbb{R}$, potom lineární transformace $\varphi^{\mathbb{C}}$ má dvojici vlastních vektorů, které jsou navzájem komlexně sdružené. Opravdu, je-li $\mathbf{w} \in V_n^{\mathbb{C}}$ vlastní vektor $\varphi^{\mathbb{C}}$ příslušný λ, t.j.

$$\varphi^{\mathbb{C}}(\mathbf{w}) = \lambda\,\mathbf{w}\,,$$

potom

$$\varphi^{\mathbb{C}}(\bar{\mathbf{w}}) = \bar{\lambda}\,\bar{\mathbf{w}}\,.$$

To vyplývá z toho, že pro $\varphi^{\mathbb{C}}$ platí $\overline{\varphi^{\mathbb{C}}(\mathbf{w})} = \varphi^{\mathbb{C}}(\bar{\mathbf{w}})$, což je vidět přímo z (1.3.3). Potom vlastní vektor příslušný $\bar{\lambda}$ je vektor komplexně sdružený s $\mathbf{w}$. Přitom $\mathbf{w} = \mathbf{v}_1 + i\,\mathbf{v}_2$ je vektor takový, že reálné vektory $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2$ jsou lineárně nezávislé. Opravdu, protože λ a $\bar{\lambda}$ jsou různé kořeny charakteristického polynomu, musí jim odpovídat podle Věty 1.2.7 lineárně nezávislé vlastní vektory ve $V_n^{\mathbb{C}}$. Ale $\mathbf{w}$ a $\bar{\mathbf{w}}$ jsou lineárně nezávisle ve $V_n^{\mathbb{C}}$ právě tehdy, když $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2$ jsou lineárně nezávislé ve V_n.

Nechť $\mathbf{w} = \mathbf{v}_1 + i\,\mathbf{v}_2$, $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2 \in V_n$, je vlastní vektor příslušný vlastní hodnotě $\lambda = \alpha + i\,\beta$. Potom

$$\varphi^{\mathbb{C}}(\mathbf{w}) = \varphi^{\mathbb{C}}(\mathbf{v}_1 + i\,\mathbf{v}_2) = \varphi(\mathbf{v}_1) + i\,\varphi(\mathbf{v}_2)$$

a současně

$$\varphi^{\mathbb{C}}(\mathbf{w}) = \lambda\,\mathbf{w} = (\alpha + i\,\beta)\,(\mathbf{v}_1 + i\,\mathbf{v}_2) = \alpha\,\mathbf{v}_1 - \beta\,\mathbf{v}_2 + i\,(\beta\,\mathbf{v}_1 + \alpha\,\mathbf{v}_2)\,.$$

Porovnáním reálných a imaginárních složek dostaneme

$$\varphi(\mathbf{v}_1) = \alpha\,\mathbf{v}_1 - \beta\,\mathbf{v}_2\,, \quad \varphi(\mathbf{v}_2) = \beta\,\mathbf{v}_1 + \alpha\,\mathbf{v}_2\,,$$

t.j. dvoudimenzionální podprostor $L(\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2) \subseteq V_n$ je invariantní vzhledem k φ a příslušný blok řádu dva v matici A_φ vzhledem bázi, kde použijeme vektory $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2$, je matice $\begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ -\beta & \alpha \end{pmatrix}$.

Poznámka 1.3.4. V předchozích úvahách jsme uvažovali pouze jednonásobné komplexní kořeny charakteristického polynomu. Pro vícenásobné komplexní kořeny bychom mohli aplikovat Větu 1.2.8 pro těleso komplexních čísel. Vzhledem k tomu, že dále se budeme zabývat především prostory dimenze dvě a tři, nemůže tato situace nastat a proto se ji dále nebudeme zabývat. $\diamondsuit$

Poznámka 1.3.5. Komplexně sdružené kořeny charakteristického polynomu lineární transformace φ na reálném vektorovém prostoru V_n jsou vlastní hodnoty lineární transformace $\varphi^{\mathbb{C}}$, ale nejsou to vlastní hodnoty pro φ protože nepatří do tělesa $\mathbb{R}$. $\diamondsuit$

Předešlé úvahy nyní můžeme shrnout. Nechť má charakteristický polynom lineární transformace φ na reálném vektorovém prostoru V_n celkem $m \geq 0$ reálných různých kořenů s násobností $k_i \geq 1$, $i = 0, \dots, m$, a celkem $l \geq 0$ dvojic různých komplexně sdružených jednonásobných kořenů, t.j. $n = 2\,l + \sum_{i=0}^{m} k_i$. Potom V_n je přímý součet invariantních podprostorů

$$V_n = U_1 \oplus \cdots \oplus U_m \oplus W_1 \oplus \cdots \oplus W_l$$

kde U_i je k_i-dimenzionální invariantní podprostor, který odpovídá k_i-násobnému i-tému reálnému kořeni charakteristického polynomu a W_j, $j = 0, \dots, l$, je dvoudimenzionální invariantní podprostor, který odpovídá j-tému komplexnímu kořeni charakteristického polynomu. Tento rozklad je až na pořadí jednoznačný. Navíc, existuje taková báze V_n, že matice A_φ je blokově diagonální s $(m + l)$ diagonálními bloky A_{k_i} a B_j, kde A_{k_i} je horní trojúhelníková matice řádu k_i příslušná i-tému reálnému kořeni charakteristického polynomu a $B_j = \begin{pmatrix} \alpha_j & \beta_j \\ -\beta_j & \alpha_j \end{pmatrix}$, $\beta_j \neq 0$, jsou matice řádu 2 příslušné j-tému komplexnímu kořeni $\lambda_j = \alpha_j + i\,\beta_j$ charakteristického polynomu.

Úloha 1.3.2. Lineární transformace φ na $\mathbb{R}^3$ je dána maticí $A = \begin{pmatrix} 3 & -1 & 0 \\ 6 & -3 & 2 \\ 8 & -6 & 5 \end{pmatrix}$. Rozložte $\mathbb{R}^3$ na invariantní podprostory vzhledem k lineární transformaci φ a najděte takovou bázi, ve které se matice φ rozpadá na diagonální bloky.

Řešení: Charakteristický polynom φ je $|A - \lambda\,E_3| = -\lambda^3 + 5\lambda^2 - 9\lambda + 5$, jeho kořeny jsou $\lambda_1 = 1$, $\lambda_{2,3} = 2 \pm i$. Matice homogenní soustavy rovnic (1.2.9) pro $\lambda_1 = 1$ je $\begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 \\ 6 & -4 & 2 \\ 8 & -6 & 4 \end{pmatrix}$ a obecné řešení této soustavy je generováno vektorem $\mathbf{u}_1 = (1; 2; 1)$. Dále pro komplexní kořen $\lambda_2 = 2+i$ uvažujeme homogenní soustavu rovnic (1.2.9) nad komplexními čísly s maticí $\begin{pmatrix} 1-i & -1 & 0 \\ 6 & -5-i & 2 \\ 8 & -6 & 3-i \end{pmatrix}$. Obecné řešení je generováno vektorem $\mathbf{w} = (1; 1-i; -2i) = (1; 1; 0) + i\,(0; -1; -2) = \mathbf{v}_1 + i\,\mathbf{v}_2$. Potom $\mathbb{R}^3 = U_1 \oplus W_2$, kde $U_1 = L(\mathbf{u}_1)$ je vlastní směr příslušný vlastní hodnotě $\lambda_1 = 1$ a $W_2 = L(\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2)$ je dvoudimenzionální invariantní podprostor příslušný kořenům $\lambda_{2,3} = 2 \pm i$. Snadno se vidí, že v bázi $\langle \mathbf{u}_1, \mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2 \rangle$ má φ matici $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & -1 & 2 \end{pmatrix}$. Opravdu $\varphi(\mathbf{u}_1) = (1; 2; 1) = 1\,\mathbf{u}_1$, $\varphi(\mathbf{v}_1) = (2; 3; 2) = 2\,\mathbf{v}_1 - \mathbf{v}_2$ a $\varphi(\mathbf{v}_2) = (1; -1; -4) = \mathbf{v}_1 + 2\,\mathbf{v}_2$.

Poznámka: V komplexní bázi $\mathbf{u}_1, \mathbf{w}, \bar{\mathbf{w}}$ má totéž zobrazení diagonální matici $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2+i & 0 \\ 0 & 0 & 2-i \end{pmatrix}$, která je ale komplexní. △

Úloha 1.3.3. Lineární transformace φ na $\mathbb{R}^2$ je dána maticí $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -2 & -1 \end{pmatrix}$. Ukažte, že kořeny charakteristického polynomu jsou komplexne sdružené a nalezněte takovou bázi, ve které má matice φ tvar $\begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ -\beta & \alpha \end{pmatrix}$. Ukažte, že v $(\mathbb{R}^2)^{\mathbb{C}}$ můžeme nalézt komplexní bázi takovou, že vzhledem k ní má $\varphi^{\mathbb{C}}$ diagonální tvar.

Řešení: Charakteristický polynom φ je $|A - \lambda\, E_2| = \lambda^2 + 1$, t.j. jeho kořeny jsou $\lambda_{1,2} = \pm i$. Potom matice homogenní soustavy rovnic (1.2.9) nad komplexními čísly je $\begin{pmatrix} 1-i & 1 \\ -2 & -1-i \end{pmatrix}$. Obecné řešení je generováno vektorem $\mathbf{w} = (1; -1+i) = (1; -1) + i\,(0; 1) = \mathbf{v}_1 + i\,\mathbf{v}_2$. Potom $\varphi(\mathbf{v}_1) = (0; -1) = -\mathbf{v}_2$ a $\varphi(\mathbf{v}_2) = (1; -1) = \mathbf{v}_1$, t.j. v bázi $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2$ prostoru $\mathbb{R}^2$, má φ matici $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$.

Uvažujme nyní lineární transformaci $\varphi^{\mathbb{C}}$ v $(\mathbb{R}^2)^{\mathbb{C}}$ a vyjádřeme její matici vzhledem k bázi $\mathbf{w} = \mathbf{v}_1 + i\,\mathbf{v}_2$, $\bar{\mathbf{w}} = \mathbf{v}_1 - i\,\mathbf{v}_2$. Matice přechodu od reálné báze $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2$ ke komplexní bázi $\mathbf{w}, \bar{\mathbf{w}}$ je komplexní matice $S = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ i & -i \end{pmatrix}$. Její inverzní matice je $S^{-1} = -\frac{1}{2i} \begin{pmatrix} -i & -1 \\ -i & 1 \end{pmatrix}$. Potom matice $\varphi^{\mathbb{C}}$ vzhledem k bázi $\mathbf{w}, \bar{\mathbf{w}}$ musí být

$$-\frac{1}{2i} \begin{pmatrix} -i & -1 \\ -i & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ i & -i \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} i & 0 \\ 0 & -i \end{pmatrix}.$$ △

1.4 Ortogonální zobrazení a transformace

Naše úvahy uzavřeme ortogonálními lineárními zobrazeními a transformacemi euklidovských vektorových prostorů.

Připomeňme, že euklidovský vektorový prostor je reálný vektorový prostor V se skalárním součinem, který zanačíme $\mathbf{v} \cdot \mathbf{u}$, $\mathbf{u}, \mathbf{v} \in V$. Všechny báze $\mathcal{E} = \langle \mathbf{e}_1, \ldots, \mathbf{e}_n \rangle$ euklidovského vektorového prostoru V_n uvažujeme ortonormální, t.j.

$\mathbf{e}_i \cdot \mathbf{e}_j = 0$ pro $i \neq j$ a $\mathbf{e}_i \cdot \mathbf{e}_i = 1$, $i, j = 1, \ldots, n$. V libovolné ortonormální bázi má potom skalární součin vyjádření

$$\mathbf{v} \cdot \mathbf{u} = u_1 v_1 + \cdots + u_n v_n = \begin{pmatrix} u_1 & \ldots & u_n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} v_1 \\ \vdots \\ v_n \end{pmatrix} = (\mathbf{u})^T (\mathbf{v}) = (\mathbf{u})^T E_n (\mathbf{v}) \,,$$

kde $(\mathbf{u})^T$ je řádková matice souřadnic vektoru $\mathbf{u}$, která vznikne transponováním sloupcové matice $(\mathbf{u})$.

Definice 1.4.1. Lineární zobrazení φ z euklidovského vektorového prostoru V do euklidovského vektorového prostoru W se nazývá *ortogonální zobrazení* z V do W, jestliže platí

$$\varphi(\mathbf{u}) \cdot \varphi(\mathbf{v}) = \mathbf{u} \cdot \mathbf{v} \tag{1.4.1}$$

pro libovolné vektory $\mathbf{u}, \mathbf{v} \in V$.

Je-li navíc φ bijektivní, nazývá se izomorfismus euklidovského vektorového prostoru V na W. Euklidovské prostory V a W se potom nazývají *izomorfní*.

Je-li φ ortogolální zobrazení V na sebe, nazývá se *ortogonální transformace* euklidovského vektorového prostoru V.

Ortogonální lineární zobrazení tedy zachovává hodnoty skalárního součinu. Jako důsledek tak dostáváme, [Ho07].

Důsledek 1.4.1. Nechť φ je ortogonální zobrazení z V do W. Pak

1) $\| \varphi(\mathbf{u}) \| = \| \mathbf{u} \|$ pro každé $\mathbf{u} \in V$.

2) Ortogonální transformace zachovává odchylku vektorů, t.j. pro dva nenulové vektory $\mathbf{u}, \mathbf{v}$ je $\sphericalangle(\varphi(\mathbf{u}), \varphi(\mathbf{v})) = \sphericalangle(\mathbf{u}, \mathbf{v})$.

3) Ortonormální posloupnost $\mathbf{e}_1, \ldots, \mathbf{e}_k$ ve V se zobrazí na ortonormální posloupnost $\varphi(\mathbf{e}_1), \ldots, \varphi(\mathbf{e}_k)$ v W.

4) φ je injektivní zobrazení, t.j. $\dim V \leq \dim W$. ◇

Věta 1.4.1. *Nechť φ je ortogonální zobrazení z V do W. Pak vzhledem k libovolným ortonormálním bázím ve V a W splňuje matice A_φ podmínku*

$$A_\varphi^T A_\varphi = E_n \,. \tag{1.4.2}$$

Důkaz. Nechť $\mathcal{E} = \langle \mathbf{e}_1, \ldots, \mathbf{e}_n \rangle$ a $\mathcal{F} = \langle \mathbf{f}_1, \ldots, \mathbf{f}_m \rangle$ jsou ortonormální báze ve V_n a W_m. Nechť A_φ je matice ortogonálního zobrazení φ z V_n do W_m vzhledem k těmto bázím, t.j. $\varphi(\mathbf{u}) = A_\varphi (\mathbf{u})$. Potom platí

$$\begin{aligned}(\mathbf{u})^T E_n (\mathbf{v}) = \mathbf{u} \cdot \mathbf{v} = \varphi(\mathbf{u}) \cdot \varphi(\mathbf{v}) &= (\varphi(\mathbf{u}))^T E_m \,(\varphi(\mathbf{v})) \\ &= (A_\varphi \,(\mathbf{u}))^T E_m \,(A_\varphi \,(\mathbf{v})) = (\mathbf{u})^T A_\varphi^T A_\varphi \,(\mathbf{v})).\end{aligned}$$

Porovnáním prvního a posledního výrazu dostaneme $A_\varphi^T A_\varphi = E_n$. □

Nechť nyní je φ ortogonální transformace na euklidovském vektorovém prostoru V_n. Podmínka (1.4.2) znamená, že matice ortogonální transformace vzhledem k libovolné ortonormální bázi je ortonormální čtvercová matice. Připomeňme, že v tomto případě je $A_\varphi^T = A_\varphi^{-1}$, $|A_\varphi| = \pm 1$.

Věta 1.4.2. *Nechť φ je ortogonální transformace na V_n. Je-li $U_k \subseteq V_n$, $0 < k < n$, invariantní podprostor transformace φ, je i $(n-k)$-dimenzionální podprostor $U_k^\perp$ invariantní podprostor transformace φ.*

Důkaz. Nechť $U_k \subseteq V_n$ je invariantní podprostor ortogonální transformace φ. Potom pro každý $\mathbf{u} \in U_k$ je i $\varphi(\mathbf{u}) \in U_k$. Protože $\varphi|U_k$ je ortogonální transformace na U_k je i $\varphi^{-1}(\mathbf{u}) \in U_k$. Potom pro každý $\mathbf{v} \in U_k^\perp$ máme

$$\varphi(\mathbf{v}) \cdot \mathbf{u} = \varphi(\mathbf{v}) \cdot \varphi(\varphi^{-1}(\mathbf{u})) = \mathbf{v} \cdot \varphi^{-1}(\mathbf{u}) = 0\,,$$

a tedy $\varphi(\mathbf{v}) \perp \mathbf{u}, \forall \mathbf{u} \in U_k$, a $\varphi(\mathbf{v}) \in U_k^\perp$. □

Jako důsledek Věty 1.4.2 tak dostáváme, že má-li ortogonální transformace φ na V_n netriviální invariantní podprostory, je V_n přímým součtem navzájem ortogonálních podprostorů a existuje taková ortonormální báze V_n, že se v ní matice φ rozpadá na ortonormální diagonální bloky.

Platí $\|\varphi(\mathbf{u})\| = \|\mathbf{u}\|$ a odtud vyplývá, že reálné vlastní hodnoty ortogonální transformace mohou být pouze 1 a (-1). Opravdu, protože pro vlastní vektor $\mathbf{u}$ příslušný vlastní hodnotě λ máme $\varphi(\mathbf{u}) = \lambda\,\mathbf{u}$, dostaneme

$$\|\varphi(\mathbf{u})\| = |\lambda| \cdot \|\mathbf{u}\| = \|\mathbf{u}\|$$

t.j. $|\lambda| = 1$. Podobně komplexní kořeny charakteristické rovnice jsou tvaru $\lambda = \cos\alpha \pm i\,\sin\alpha$, $\sin\alpha \neq 0$, t.j. dvourozměrný blok odpovídající komplexnímu λ je ortonormální matice $\begin{pmatrix} \cos\alpha & \sin\alpha \\ -\sin\alpha & \cos\alpha \end{pmatrix}$.

Navíc platí, že vlastní vektory, které patří různým vlastním hodnotám charakteristického polynomu jsou kolmé. Opravdu, je-li $\mathbf{u}$ vlastní vektor příslušný vlastnímu číslu 1 a $\mathbf{v}$ je vlastní vektor příslušný vlastnímu číslu (-1), máme

$$\mathbf{u} \cdot \mathbf{v} = \varphi(\mathbf{u}) \cdot \varphi(\mathbf{v}) = \mathbf{u} \cdot (-\mathbf{v})$$

a odtud $\mathbf{u} \cdot \mathbf{v} = 0$, a tedy $\mathbf{u}$ a $\mathbf{v}$ jsou kolmé. Vždy je můžeme brát jako jednotkové.

Podobně vlastní vektor, který patří nějaké vlastní hodnotě charakteristického polynomu, je kolmý na dvoudimenzionální invariantní podprostor, který je přiřazen komplexnímu kořeni charakteristické rovnice. Je-li totiž $\mathbf{w} = \mathbf{v}_1 + i\,\mathbf{v}_2$

komplexní vektor příslušný komplexnímu koření $\lambda = \cos\alpha + i\,\sin\alpha$, $\sin\alpha \neq 0$, charakteristické rovnice, dostaneme

$$\begin{aligned}\mathbf{u}\cdot\mathbf{v}_1 &= \varphi(\mathbf{u})\cdot\varphi(\mathbf{v}_1) = \mathbf{u}\cdot(\cos\alpha\,\mathbf{v}_1 - \sin\alpha\,\mathbf{v}_2)\,,\\ \mathbf{u}\cdot\mathbf{v}_2 &= \varphi(\mathbf{u})\cdot\varphi(\mathbf{v}_2) = \mathbf{u}\cdot(\sin\alpha\,\mathbf{v}_1 + \cos\alpha\,\mathbf{v}_2)\,.\end{aligned}$$

Odtud

$$\begin{aligned}(\cos\alpha - 1)\,(\mathbf{u}\cdot\mathbf{v}_1) - \sin\alpha\,(\mathbf{u}\cdot\mathbf{v}_2) &= 0\,,\\ \sin\alpha\,(\mathbf{u}\cdot\mathbf{v}_1) + (\cos\alpha - 1)\,(\mathbf{u}\cdot\mathbf{v}_2) &= 0\,.\end{aligned} \tag{1.4.3}$$

Protože

$$\begin{vmatrix}\cos\alpha - 1 & -\sin\alpha\\ \sin\alpha & \cos\alpha - 1\end{vmatrix} = -2\,(\cos\alpha - 1) \neq 0\,,$$

je soustava rovnic (1.4.3) splněna pouze pro $\mathbf{u}\cdot\mathbf{v}_1 = 0$ a $\mathbf{u}\cdot\mathbf{v}_2 = 0$, t.j. vektor $\mathbf{u}$ je kolmý na podprostor $L(\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2)$. Pro vektor $\mathbf{v}$ příslušný vlastnímu číslu (-1) dostáváme analogicky stejný výsledek.

Konečně, pro komplexní kořen $\lambda = \cos\alpha + i\,\sin\alpha$, $\sin\alpha \neq 0$, charakteristické rovnice jsou příslušné reálné vektory $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2$ kolmé, a vždy je můžeme brát jednotkové. Opravdu

$$\begin{aligned}\mathbf{v}_1\cdot\mathbf{v}_1 &= \varphi(\mathbf{v}_1)\cdot\varphi(\mathbf{v}_1) = (\cos\alpha\,\mathbf{v}_1 - \sin\alpha\,\mathbf{v}_2)\cdot(\cos\alpha\,\mathbf{v}_1 - \sin\alpha\,\mathbf{v}_2)\\ &= \cos^2\alpha\,(\mathbf{v}_1\cdot\mathbf{v}_1) - 2\,\sin\alpha\,\cos\alpha\,(\mathbf{v}_1\cdot\mathbf{v}_2) + \sin^2\alpha\,(\mathbf{v}_2\cdot\mathbf{v}_2)\,,\end{aligned}$$

což upravíme na

$$-\sin^2\alpha\,(\mathbf{v}_1\cdot\mathbf{v}_1) - 2\,\sin\alpha\,\cos\alpha\,(\mathbf{v}_1\cdot\mathbf{v}_2) + \sin^2\alpha\,(\mathbf{v}_2\cdot\mathbf{v}_2) = 0\,. \tag{1.4.4}$$

Pro $\mathbf{v}_2\cdot\mathbf{v}_2$ dostaneme stejnou podmínku (1.4.4). Konečně

$$\begin{aligned}\mathbf{v}_1\cdot\mathbf{v}_2 &= \varphi(\mathbf{v}_1)\cdot\varphi(\mathbf{v}_2) = (\cos\alpha\,\mathbf{v}_1 - \sin\alpha\,\mathbf{v}_2)\cdot(\sin\alpha\,\mathbf{v}_1 + \cos\alpha\,\mathbf{v}_2)\\ &= \cos\alpha\,\sin\alpha\,(\mathbf{v}_1\cdot\mathbf{v}_1) + (\cos^2\alpha - \sin^2\alpha)\,(\mathbf{v}_1\cdot\mathbf{v}_2)\\ &\quad - \cos\alpha\,\sin\alpha\,(\mathbf{v}_2\cdot\mathbf{v}_2)\,,\end{aligned}$$

t.j.

$$\cos\alpha\,\sin\alpha\,(\mathbf{v}_1\cdot\mathbf{v}_1) - 2\,\sin^2\alpha\,(\mathbf{v}_1\cdot\mathbf{v}_2) - \cos\alpha\,\sin\alpha\,(\mathbf{v}_2\cdot\mathbf{v}_2) = 0\,. \tag{1.4.5}$$

Vynásobením (1.4.4) $\cos\alpha$ a (1.4.5) $\sin\alpha$ a sečtením dostaneme

$$-2\,\sin\alpha\,(\cos^2\alpha + \sin^2\alpha)\,(\mathbf{v}_1\cdot\mathbf{v}_2) = 0\,,$$

což je splněno právě tehdy, když $\mathbf{v}_1\cdot\mathbf{v}_2 = 0$, t.j. $\mathbf{v}_1$ a $\mathbf{v}_2$ jsou kolmé. Potom ale z (1.4.4) dostaneme

$$\sin^2\alpha\,(\mathbf{v}_1\cdot\mathbf{v}_1 - \mathbf{v}_2\cdot\mathbf{v}_2) = 0\,,$$

což je splněno právě tehdy, když $\mathbf{v}_1 \cdot \mathbf{v}_1 = \mathbf{v}_2 \cdot \mathbf{v}_2$, t.j. $\|\mathbf{v}_1\| = \|\mathbf{v}_2\|$ a vždy můžeme volit $\|\mathbf{v}_1\| = \|\mathbf{v}_2\| = 1$. Pro komplexní kořen $\lambda = \cos\alpha + i\sin\alpha$, $\sin\alpha \neq 0$, tak vždy máme otonormální bázi ve 2-dimenzionálním invariantním podprostoru, který odpovídá λ.

Zbývá nám už pouze prodiskutovat případ vícenásobných kořenů charakteristického polynomu ortogonálná transformace φ na V_n. Nechť je nejdříve nějaká vlastní hodnota λ_0 (1 nebo (-1)) k-násobným kořenem charakteristického polynomu ortogonálná transformace. V tomto případě uvažujme libovolný jednotkový vlastní vektor $\mathbf{u}_1$ příslušný k-násobnému kořeni λ_0. Označme $U_1 = L(\mathbf{u}_1)$. Potom je $V_n = U_1 \oplus U_1^\perp$ a v libovolné ortonormální bázi ve V_n, ve které použijeme vektor $\mathbf{u}_1$ jako první bázový vektor, má matice transformace tvar $A_\varphi = \begin{pmatrix} \lambda_0 & 0 \\ 0 & A_{n-1} \end{pmatrix}$, kde A_{n-1} je ortonormální matice řádu $(n-1)$. Potom $|A_\varphi - \lambda\, E_n| = (\lambda_0 - \lambda)|A_{n-1} - \lambda\, E_{n-1}|$ a tedy zúžení $\varphi|U_1^\perp$ je ortogonální transformace na $U_1^\perp$, jejíž charakteristický polynom dělí charakteristický polynom φ a λ_0 je jeho $(k-1)$-násobným kořenem. Uvažujme libovolný jednotkový vlastní vektor $\mathbf{u}_2 \in U_1^\perp$ příslušný $(k-1)$-násobnému kořeni λ_0 charakteristického polynomu ortogonální transformace $\varphi|U_1^\perp$ a označme $U_2 = L(\mathbf{u}_2)$. Potom $U_1^\perp = U_2 \oplus (U_1 \oplus U_2)^\perp$, t.j. $V_n = U_1 \oplus U_2 \oplus (U_1 \oplus U_2)^\perp$ a v libovolné ortonormální bázi ve V_n, ve které použijeme vektory $\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2$ jako první bázové vektory, má matice transformace tvar $A = \begin{pmatrix} \lambda_0 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_0 & 0 \\ 0 & 0 & A_{n-2} \end{pmatrix}$, kde A_{n-2} je ortonormální matice řádu $(n-2)$. Analogicky jako v předchozím kroku postupujeme pro ortogonální transformaci $\varphi|(U_1 \oplus U_2)^\perp$ a dále, až nalezneme celkem k ortonormálních vlastních vektorů příslušných vlastní hodnotě λ_0. Je tedy k-dimenzionální podprostor příslušný k-násobné vlastní hodnotě přímým součtem k ortogonálních jednodimenzionálních vlastních podprostorů.

Podobně pro l-násobný, $l > 1$, komplexní kořen charakteristického polynomu $\lambda_1 = \cos\alpha_1 + i\sin\alpha_1$, $\sin\alpha_1 \neq 0$, uvažujme invariantní 2-dimenzionální podprostor $W_{11} = L(\mathbf{v}_{11}, \mathbf{v}_{21})$. Potom $V_n = W_{11} \oplus W_{11}^\perp$ a zúžení $\varphi|W_{11}^\perp$ na invariantní $(n-2)$-dimenzionální podprostor má charakteristický polynom, pro který je λ_1 $(l-1)$-násobným kořenem. Pro tento kořen existuje dvoudimenzionální podprostor $W_{12} = L(\mathbf{v}_{12}, \mathbf{v}_{22}) \subseteq W_{11}^\perp$ invariantní vzhledem k $\varphi|W_{11}^\perp$, t.j. i vzhledem k φ. Potom $V_n = W_{11} \oplus W_{12} \oplus (W_{11} \oplus W_{12})^\perp$. Takto postupujeme dále až po l krocích dostaneme l vzájemně ortogonálních 2-dimenzionálních podprostorů takových, že

$$V_n = W_{11} \oplus \cdots \oplus W_{1l} \oplus (W_{11} \oplus \cdots \oplus W_{1l})^\perp .$$

Dostáváme tak, že l -násobnému komplexnímu kořeni charakteristického polynomu odpovídá $2\,l$ -dimenzionální invariantní podprostor, který je přímým součtem l 2-dimenzionálních navzájem ortogonálních podprostorů. V prostoru V_n potom existuje taková ortonormální báze, že v ní má φ matici v blokově diagonálním tvaru $A = \begin{pmatrix} B_1 & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & \dots & B_1 & 0 \\ 0 & \dots & 0 & A_{n-2\,l} \end{pmatrix}$, kde blok $B_1 = \begin{pmatrix} \cos\alpha_1 & \sin\alpha_1 \\ -\sin\alpha_1 & \cos\alpha_1 \end{pmatrix}$ a $A_{n-2\,l}$ je ortonormální matice řádu $(n-2\,l)$. 0 zde značí nulovou matici příslušného řádu.

Poznámka 1.4.1. Z podoby matice B_1 pro komplexní kořen charakteristického polynomu $\lambda_1 = \cos\alpha_1 + i\sin\alpha_1$, $\sin\alpha_1 \neq 0$, vyplývá , že zúžení $\varphi|W_{1j}$, $j = 1,\dots,l$, na 2-dimenzionální podprostor, který odpovídá λ_1 je "otočení"prostoru W_{1j} o úhel α_1. Opravdu $\mathbf{v}_{1j}\cdot\varphi(\mathbf{v}_{1j}) = \mathbf{v}_{1j}\cdot(\cos\alpha_1\,\mathbf{v}_{1j} - \sin\alpha_1\,\mathbf{v}_{2j}) = \cos\alpha_1$ a podobně $\mathbf{v}_{2j}\cdot\varphi(\mathbf{v}_{2j}) = \mathbf{v}_{2j}\cdot(\sin\alpha_1\,\mathbf{v}_{1j} + \cos\alpha_1\,\mathbf{v}_{2j}) = \cos\alpha_1$. Je tedy odchylka $\sphericalangle(\mathbf{v}_{1j},\varphi(\mathbf{v}_{1j})) = \alpha_1 = \sphericalangle(\mathbf{v}_{2j},\varphi(\mathbf{v}_{2j}))$. $\diamondsuit$

Předchozí úvahy můžeme shrnout do následující Věty.

Věta 1.4.3. *Nechť k_1, k_2, j jsou celá nezáporná čísla a nechť φ je ortogonální transformace na V_n, která má 1 jako k_1-násobnou vlastní hodnotu, (-1) jako k_2-násobnou vlastní hodnotu a dále má j dvojic komplexně sdružených kořenů s násobností l_i, $i = 1,\dots,j$, t.j. $n = k_1 + k_2 + 2\sum_{i=0}^{j} l_i$. Potom V_n je přímým součtem*

$$V_n = U_1 \oplus \cdots \oplus U_{k_1+k_2} \oplus W_{11} \oplus \cdots \oplus W_{jl_j}$$

kde U_i, $i = 0,\dots,k_1$, jsou jednodimenzionální invariantní podprostory příslušné vlastní hodnotě 1 , U_{k_1+i}, $i = 0,\dots,k_2$, jsou jednodimenzionální invariantní podprostory příslušné vlastní hodnotě (-1) a W_{il_i} je 2-dimenzionální l_i-tý invariantní podprostor daný komplexním kořenem λ_i, $i = 0,\dots,j$. Navíc ve V_n existuje ortonormální báze taková, že v ní má matice transformace φ matici v blokově diagonálním tvaru, kde na diagonále je nejdříve k_1 hodnot 1, potom k_2 hodnot (-1) a l_i bloků $B_i = \begin{pmatrix} \cos\alpha_i & \sin\alpha_i \\ -\sin\alpha_i & \cos\alpha_i \end{pmatrix}$ řádu 2, $i = 0,\dots,j$.

Důkaz. Věta vyplývá z předchozích úvah. $\square$

Úloha 1.4.1. Ortogonální transformace φ na $\mathbb{R}^3$ je dána maticí $A = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{\sqrt{6}}{3} & -\frac{\sqrt{3}}{6} \\ 0 & -\frac{1}{3} & -\frac{2\sqrt{2}}{3} \\ -\frac{\sqrt{3}}{2} & \frac{\sqrt{2}}{3} & -\frac{1}{6} \end{pmatrix}$. Rozložte $\mathbb{R}^3$ na invariantní podprostory vzhledem k lineární transformaci φ a najděte takovou bázi, ve které se matice φ rozpadá na diagonální bloky.

Řešení: Charakteristický polynom φ je $|A - \lambda E_3| = -\lambda^3 + 1$, jeho kořeny jsou $\lambda_1 = 1$, $\lambda_{2,3} = -\frac{1}{2} \pm i\,\frac{\sqrt{3}}{2}$. Matice homogenní soustavy rovnic (1.2.9) pro

$\lambda_1 = 1$ je $\begin{pmatrix} -\frac{1}{2} & \frac{\sqrt{6}}{3} & -\frac{\sqrt{3}}{6} \\ 0 & -\frac{4}{3} & -\frac{2\sqrt{2}}{3} \\ -\frac{\sqrt{3}}{2} & \frac{\sqrt{2}}{3} & -\frac{7}{6} \end{pmatrix}$ a obecné řešení této soustavy je generováno jednotkovým vektorem $\mathbf{u}_1 = (\frac{\sqrt{6}}{3}; \frac{1}{3}; -\frac{\sqrt{2}}{3})$. Dále pro komplexní kořen $\lambda_2 = -\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}$ uvažujeme homogenní soustavu rovnic (1.2.9) nad komplexními čísly s maticí $\begin{pmatrix} 1 - i\frac{\sqrt{3}}{2} & \frac{\sqrt{6}}{3} & -\frac{\sqrt{3}}{6} \\ 0 & \frac{1}{6} - i\frac{\sqrt{3}}{2} & -\frac{2\sqrt{2}}{3} \\ -\frac{\sqrt{3}}{2} & \frac{\sqrt{2}}{3} & \frac{1}{3} - i\frac{\sqrt{3}}{2} \end{pmatrix}$. Obecné řešení je generováno vektorem s jednotkovými reálými a imaginárními částmi $\mathbf{w} = (-\frac{\sqrt{3}}{6} - i\frac{1}{2}; \frac{2\sqrt{2}}{3}; \frac{1}{6} - i\frac{\sqrt{3}}{2}) = (-\frac{\sqrt{3}}{6}; \frac{2\sqrt{2}}{3}; -\frac{1}{6}) + i\,(-\frac{1}{2}; 0; -\frac{\sqrt{3}}{2}) = \mathbf{v}_1 + i\,\mathbf{v}_2$. Potom $\mathbb{R}^3 = U_1 \oplus W_2$, kde $U_1 = L(\mathbf{u}_1)$ je vlastní směr příslušný vlastní hodnotě $\lambda_1 = 1$ a $W_2 = L(\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2)$ je dvoudimenzionální invariantní podprostor příslušný kořenům $\lambda_{2,3} = -\frac{1}{2} \pm i\frac{\sqrt{3}}{2}$. Snadno se vidí, že báze $\langle \mathbf{u}_1, \mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2 \rangle$ je ortonormální a že v ní má φ matici $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{1}{2} & \frac{\sqrt{3}}{2} \\ 0 & -\frac{\sqrt{3}}{2} & -\frac{1}{2} \end{pmatrix}$.

V komplexní bázi $\mathbf{u}_1 = (\frac{\sqrt{6}}{3}; \frac{1}{3}; -\frac{\sqrt{2}}{3})$, $\mathbf{w} = (-\frac{\sqrt{3}}{6} - i\frac{1}{2}; \frac{2\sqrt{2}}{3}; \frac{1}{6} - i\frac{\sqrt{3}}{2})$ a $\bar{\mathbf{w}} = (-\frac{\sqrt{3}}{6} + i\frac{1}{2}; \frac{2\sqrt{2}}{3}; \frac{1}{6} + i\frac{\sqrt{3}}{2})$ má $\varphi^{\mathbb{C}}$ matici $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{1}{2} + i\,\frac{\sqrt{3}}{2} & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{1}{2} - i\,\frac{\sqrt{3}}{2} \end{pmatrix}$. $\triangle$

Kapitola 2

AFINNÍ ZOBRAZENÍ

V této kapitole budeme studovat zobrazení afinních prostorů, která zobecňují dobře známá zobrazení euklidovských prostorů. Poprvé tato zobrazení studoval Leonard Euler v roce 1738 v práci *Introductio in analysis infinitorum*. Název afinní zobrazení je odvozen od latinského slova *affinis*, tj. příbuzný, a vyjadřuje vztah mezi křivkami, které se v těchto zobrazeních na sebe zobrazují. Příkladem takovýchto příbuzných křivek je elipsa, která je afinním obrazem kružnice.

Všude v této kapitole předpokládáme, že afinní prostory (značíme $\mathcal{A}$, $\mathcal{B}$, …) jsou reálné a konečnědimenzionální. Pokud bude nutno zvýraznit dimenzi, budeme pro afinní prostor $\mathcal{A}$ dimenze n používat označení $\mathcal{A}_n$.

2.1 Afinní zobrazení

V této části skript definujeme afinní zobrazení a popíšeme některé vlastnosti afinních zobrazení. Základním pojmem, který je nutný pro definici afinního zobrazení, je dělící poměr tří kolineárních (ležících na jedné přímce) bodů, [HoJa]. Připomeňme, že pro tři kolineární různé body $A, B, C \in \mathcal{A}$, definujeme dělící poměr bodu C vzhledem k bodům A, B (v tomto pořadí), jako reálné číslo $\lambda = (C; A, B)$ takové, že

$$\overrightarrow{AC} = \lambda \overrightarrow{BC}\,,$$

kde $0 \neq \lambda \neq 1$.

Definice 2.1.1. Zobrazení f afinního prostoru $\mathcal{A}$ do afinního prostoru $\mathcal{A}'$ se nazývá *afinní zobrazení*, jestliže má následující vlastnost: leží-li navzájem různé body $A, B, C \in \mathcal{A}$ na přímce, pak buď jejich obrazy $f(A), f(B), f(C)$ splývají, nebo jsou navzájem různé, leží na jedné přímce a

$$(f(C); f(A), f(B)) = (C; A, B)\,.$$

Poznámka 2.1.1. Afinní zobrazení tedy můžeme charakterizovat jako lineární zobrazení (zobrazuje přímky na přímky) afinních prostorů, které navíc zachovává dělící poměr tří bodů. Existují lineární zobrazení, která nezachovávají dělící poměr tří bodů, např. středové projekce. ♢

Příklad 2.1.1. Všechna shodná a podobná zobrazení, se kterými jsme se setkali na střední škole, jsou afinní zobrazení. Podobně také rovnoběžné promítání prostoru (dimenze 3) do roviny, které se používá v konstrukční geometrii, je afinní zobrazení. Středové promítání prostoru do roviny není afinní zobrazení. ♡

Věta 2.1.1. *Zobrazení $f : \mathcal{A} \to \mathcal{A}'$ je afinní právě tehdy, když*

$$\overrightarrow{AC} = \lambda \overrightarrow{BC} \quad \Rightarrow \quad \overrightarrow{f(A)f(C)} = \lambda \overrightarrow{f(B)f(C)}, \tag{2.1.1}$$

kde $A, B, C \in \mathcal{A}$ jsou libovolné.

Důkaz. Nejdříve ukážeme, že pro afinní zobrazení je splněna implikace (2.1.1). Jsou-li $A, B, C \in \mathcal{A}$ tři různé kolineární body, splňuje $\lambda = (C; A, B)$, $0 \neq \lambda \neq 1$, předpoklad implikace (2.1.1). Podle Definice 2.1.1 jsou buď $f(A) = f(B) = f(C)$, a tedy $\overrightarrow{f(A)f(C)} = \mathbf{o} = \lambda \overrightarrow{f(B)f(C)}$, nebo $f(A), f(B), f(C)$ jsou tři různé kolineární body takové, že $\lambda = (f(C); f(A), f(B))$, tj. z definice dělícího poměru $\overrightarrow{f(A)f(C)} = \lambda \overrightarrow{f(B)f(C)}$. Implikace (2.1.1) je tedy splněna.

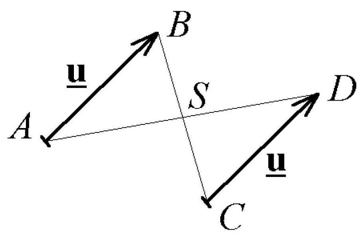
Nechť naopak platí implikace (2.1.1) pro libovolnou trojici bodů $A, B, C \in \mathcal{A}$ splňující předpoklad. Pokud jsou body A, B, C různé, musí být z předpokladu implikace kolineární a $\lambda = (C; A, B)$, $0 \neq \lambda \neq 1$. Pokud $f(A) = f(C)$, dostaneme $\mathbf{o} = \lambda \overrightarrow{f(B)f(C)}$, tj. $f(B) = f(C)$. Podobně, pro $f(B) = f(C)$, dostaneme $\mathbf{o} = \overrightarrow{f(A)f(C)}$, tj. $f(A) = f(C)$. Konečně, pro $f(A) = f(B)$, dostaneme $\overrightarrow{f(A)f(C)} = \lambda \overrightarrow{f(A)f(C)}$. To je možné buď pro $\lambda = 1$, což je ale ve sporu s předpokladem, nebo $f(A) = f(C)$. Dohromady tak dostáváme, že podkud splývají dva z bodů $f(A), f(B), f(C)$, musí s nimi splývat i třetí. Nechť jsou konečně všechny body $f(A), f(B), f(C) \in \mathcal{A}'$ různé, potom $\overrightarrow{f(A)f(C)} = \lambda \overrightarrow{f(B)f(C)}$ je ekvivalentní s tím, že jsou tyto body kolineární a $\lambda = (f(C); f(A), f(B))$. Je tedy f splňující implikaci (2.1.1) afinní zobrazení. □

Věta 2.1.2. *Nechť $f : \mathcal{A} \to \mathcal{A}'$ je afinní zobrazení. Potom pravidlo*

$$\varphi_f(\overrightarrow{AB}) = \overrightarrow{f(A)f(B)}, \qquad \forall A, B \in \mathcal{A},$$

určuje lineární zobrazení φ_f ze $Z(\mathcal{A})$ do $Z(\mathcal{A}')$.

Důkaz. Nejdříve se musí ukázat, že φ_f je korektně definované zobrazení, tj. že nezávisí na umístění vektoru $\mathbf{u} = \overrightarrow{AB}$. Nechť $\overrightarrow{CD}$ je jiné umístění vektoru $\mathbf{u}$. Z



Obrázek 2.1.1: K důkazu Věty 2.1.2

ekvipolence to nastává právě tehdy, když středy úseček AD a BC splývají (viz Obrázek 2.1.1).

Protože afinní zobrazení zachovává dělicí poměr, zobrazí střed úsečky opět do středu úsečky (střed úsečky je bod s dělícím poměrem minus jedna vzhledem ke krajním bodům). Odtud je bod $f(S)$ společným středem úseček $f(A)f(D)$ a $f(B)f(C)$, a tedy vektory $\overrightarrow{f(A)f(B)}$ a $\overrightarrow{f(C)f(D)}$ jsou umístěním téhož vektoru $\varphi_f(\mathbf{u})$. Je tedy φ_f korektně definované zobrazení.

Nechť $\mathbf{u} = \overrightarrow{AB}$ a $\mathbf{v} = \overrightarrow{BC}$ jsou dva vektory. Podle druhého axiomu afinního prostoru je $\mathbf{u} + \mathbf{v} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AC}$. Potom $\varphi_f(\mathbf{u}) + \varphi_f(\mathbf{v}) = \overrightarrow{f(A)f(B)} + \overrightarrow{f(B)f(C)} = \overrightarrow{f(A)f(C)} = \varphi_f(\mathbf{u}+\mathbf{v})$ a je tedy splněna první podmínka pro lineární zobrazení.

Nechť $\mathbf{u} = \overrightarrow{AB}$ a $\mathbf{v} = \overrightarrow{AC}$ jsou dva vektory takové, že $\mathbf{v} = k\mathbf{u}$, tj. $\overrightarrow{AC} = k\overrightarrow{AB}$. Odtud je podle Věty 2.1.1 $\overrightarrow{f(A)f(C)} = k\overrightarrow{f(A)f(B)}$, což znamená, že $\varphi_f(\mathbf{v}) = k\varphi_f(\mathbf{u})$, a tedy φ_f je lineární zobrazení. □

Definice 2.1.2. Lineární zobrazení $\varphi_f : Z(\mathcal{A}) \to Z(\mathcal{A}')$ definované v předchozí Větě 2.1.2 se nazývá *asociované lineární zobrazení* afinního zobrazení $f : \mathcal{A} \to \mathcal{A}'$.

Poznámka 2.1.2. Libovolný bod $X \in \mathcal{A}$ má vyjádření $X = B + \overrightarrow{BX} = B + \mathbf{u}$, kde $\mathbf{u} = \overrightarrow{BX}$. Potom $\varphi_f(\mathbf{u}) = \varphi_f(\overrightarrow{BX}) = \overrightarrow{f(B)f(X)} = f(X) - f(B)$ implikuje

$$f(X) = f(B) + \varphi_f(\overrightarrow{BX}) = f(B) + \varphi_f(\mathbf{u})\,.$$

♢

Poznámka 2.1.3. Asociované lineární zobrazení daného afinního zobrazení f je tedy jediné lineární zobrazení takové, že komutuje následující diagram

$$\begin{tikzcd}
\mathcal{A}\times\mathcal{A} \arrow[r, "f\times f"] \arrow[d, "\to"'] & \mathcal{A}'\times\mathcal{A}' \arrow[d, "\to"] \\
Z(\mathcal{A}) \arrow[r, "\varphi_f"] & Z(\mathcal{A}')
\end{tikzcd}$$
$\diamondsuit$

Ve Větě 2.1.2 jsme jednoznačně danému afinnímu zobrazení $f : \mathcal{A} \to \mathcal{A}'$ přiřadili asociované lineární zobrazení $\varphi_f : Z(\mathcal{A}) \to Z(\mathcal{A}')$. Opačně ale dané lineární zobrazení ještě neurčuje afinní zobrazení.

Věta 2.1.3. *Nechť $\varphi : Z(\mathcal{A}) \to Z(\mathcal{A}')$ je lineární zobrazení a nechť $B \in \mathcal{A}$ a $B' \in \mathcal{A}'$ jsou libovolné body. Pak existuje jediné afinní zobrazení $f : \mathcal{A} \to \mathcal{A}'$ takové, že $f(B) = B'$ a $\varphi \equiv \varphi_f$.*

Důkaz. Existence: Nechť libovolný bod $X \in \mathcal{A}$ má vyjádření $X = B + \mathbf{u} = B + \overrightarrow{BX}$. Definujme zobrazení $f : \mathcal{A} \to \mathcal{A}'$ předpisem

$$f(X) = B' + \varphi(\mathbf{u})\,. \tag{2.1.2}$$

Ukážeme, že f je afinní zobrazení. Stačí dokázat platnost (2.1.1). Nechť tedy $X, Y, Z \in \mathcal{A}$ jsou tři různé body takové, že $\overrightarrow{XZ} = \lambda\overrightarrow{YZ}$. Potom

$$\begin{aligned}
\overrightarrow{f(X)f(Z)} &= f(Z) - f(X) = B' + \varphi(\overrightarrow{BZ}) - B' - \varphi(\overrightarrow{BX}) \\
&= \varphi(\overrightarrow{BZ} - \overrightarrow{BX}) = -\varphi(\overrightarrow{ZX}) = \varphi(\overrightarrow{XZ}) \\
&= \varphi(\lambda\overrightarrow{YZ}) = \lambda\varphi(\overrightarrow{YZ}) = \lambda\varphi(\overrightarrow{YB} + \overrightarrow{BZ}) \\
&= \lambda(\varphi(\overrightarrow{BZ}) - \varphi(\overrightarrow{BY})) = \lambda((f(Z) - B') - (f(Y) - B')) \\
&= \lambda(f(Z) - f(Y)) = \lambda\overrightarrow{f(Y)f(Z)}\,.
\end{aligned}$$

Snadno se nahlédne, že $f(B) = B'$ a $\varphi_f \equiv \varphi$.

Jednoznačnost: Nechť $g : \mathcal{A} \to \mathcal{A}'$ je afinní zobrazení takové, že $g(B) = B'$ a $\varphi_g \equiv \varphi$. Potom $g(X) = g(B+\mathbf{u}) = g(B)+\varphi_g(\mathbf{u}) = B'+\varphi(\mathbf{u})$ a odtud $g \equiv f$. $\square$

Označme jako $f(\mathcal{A})$ úplný obraz afinního prostoru $\mathcal{A}$, tj.

$$f(\mathcal{A}) = \{X' \in \mathcal{A}' | \exists X \in \mathcal{A} : f(X) = X'\}\,.$$

Věta 2.1.4. *$f(\mathcal{A})$ je afinní podprostor v $\mathcal{A}'$.*

Důkaz. Zvolme libovolný bod $B \in \mathcal{A}$. Potom každý bod $X \in \mathcal{A}$ je tvaru $X = B + \mathbf{u}$, $\mathbf{u} \in Z(\mathcal{A})$, a

$$f(\mathcal{A}) = \{f(X) = f(B) + \varphi_f(\mathbf{u}) | \forall \mathbf{u} \in Z(\mathcal{A})\} = \{f(B); \mathrm{Im}(\varphi_f)\}\,,$$

tj. $f(\mathcal{A})$ je afinní podprostor v $\mathcal{A}'$ určený bodem $f(B)$ a zaměřením $\mathrm{Im}(\varphi_f)$. $\square$

Poznámka 2.1.4. Protože $f(\mathcal{A})$ je afinní podprostor v $\mathcal{A}'$, je $\dim(f(\mathcal{A})) \leq \dim \mathcal{A}'$ a podobně je $\dim(f(\mathcal{A})) \leq \dim \mathcal{A}$ (to plyne z toho, že pro lineární zobrazení φ_f je $\dim(\mathrm{Im}(\varphi_f)) \leq \dim Z(\mathcal{A})$). Přitom $\dim(f(\mathcal{A})) = \dim \mathcal{A}$ právě tehdy, když f je prosté, a $\dim(f(\mathcal{A})) = \dim \mathcal{A}'$ právě tehdy, když f je surjektivní. $\diamondsuit$

Věta 2.1.5. *Afinní zobrazení f je prosté právě tehdy, když jeho asociované zobrazené φ_f je prosté. Afinní zobrazení f je surjektivní právě tehdy, když jeho asociované zobrazené φ_f je surjektivní.*

Důkaz. Pro každé dva body $X, Y \in \mathcal{A}$ platí $\overrightarrow{f(X)f(Y)} = \varphi_f(\overrightarrow{XY})$. Není-li f prosté, existují dva různé body X, Y takové, že $f(X) = f(Y)$ a tedy existuje nenulový vektor $\mathbf{u} = \overrightarrow{XY}$ takový, že $\varphi_f(\mathbf{u}) = \mathbf{o}$, tj. φ_f není prosté. Není-li naopak φ_f prosté, existuje nenulový vektor $\mathbf{u}$ takový, že $\varphi_f(\mathbf{u}) = \mathbf{o}$ a $f(X+\mathbf{u}) = f(X) + \varphi_f(\mathbf{u}) = f(X)$. Protože $X \neq X + \mathbf{u}$ není ani f prosté. Dohromady tak dostáváme, že f je prosté právě tehdy, když φ_f je prosté.

Nechť f je surjektivní zobrazení a $\mathbf{v}' \in Z(\mathcal{A}')$ je libovolný vektor. Nechť K', $L' \in \mathcal{A}'$ jsou takové body, že $\mathbf{v}' = \overrightarrow{K'L'}$. Pak existují body $K, L \in \mathcal{A}$ takové, že $f(K) = K'$, $f(L) = L'$ a odtud $\varphi_f(\mathbf{v}) = \mathbf{v}'$, kde $\mathbf{v} = \overrightarrow{KL}$. Tedy také φ_f je surjektivní. Nechť obráceně φ_f je surjektivní zobrazení a $Z \in \mathcal{A}'$ je libovolný bod. Zvolme libovolný bod $B \in \mathcal{A}$ a položme $\mathbf{v}' = \overrightarrow{f(B)Z}$. Podle předpokladu existuje vektor $\mathbf{v} \in Z(\mathcal{A})$ takový, že $\varphi_f(\mathbf{v}) = \mathbf{v}'$. To ale znamená, že $Z = f(B) + \varphi_f(\mathbf{v}) = f(B + \mathbf{v})$, a tedy f je surjektivní. $\square$

Definice 2.1.3. *Hodností afinního zobrazení $f : \mathcal{A} \to \mathcal{A}'$* rozumíme dimenzi podprostoru $f(\mathcal{A})$. Hodnost afinního zobrazení f budeme označovat $h(f)$.

Poznámka 2.1.5. Protože hodnost afinního zobrazení je dána dimenzí $f(\mathcal{A})$, která je dána dimenzí $\mathrm{Im}\varphi_f$, je $h(f) = h(\varphi_f)$. $\diamondsuit$

Důsledek 2.1.1. Nechť $f : \mathcal{A}_n \to \mathcal{A}'_m$ je afinní zobrazení. Pak:

1. f je prosté $\Leftrightarrow h(f) = n \leq m$;
2. f je surjektivní $\Leftrightarrow n \geq h(f) = m$;
3. f je bijekce $\Leftrightarrow h(f) = n = m$.

Důkaz. Využijeme Větu 2.1.4 a Poznámku 2.1.4.

1. f je prosté $\Leftrightarrow n = \dim \mathcal{A} = \dim f(\mathcal{A}) \leq \dim \mathcal{A}' = m$.
2. f je surjektivní $\Leftrightarrow f(\mathcal{A}) \equiv \mathcal{A}' \Leftrightarrow m = \dim \mathcal{A}' = \dim f(\mathcal{A}) \leq \dim \mathcal{A} = n$.
3. Toto tvrzení je přímým důsledkem 1. a 2. tvrzení věty. $\square$

Věta 2.1.6. *Afinní zobrazení $f : \mathcal{A} \to \mathcal{A}'$ zobrazuje podprostor v $\mathcal{A}$ na podprostor v $\mathcal{A}'$ a zachovává rovnoběžnost podprostorů.*

Důkaz. Nechť $\mathcal{B} \subset \mathcal{A}$ je podprostor určený bodem B a zaměřením W, tj. $\mathcal{B} = \{B; W\}$. Potom $X \in \mathcal{B}$ je ekvivalentní $X = B + \mathbf{w}$, kde $\mathbf{w} \in W$. Odtud

$$f(\mathcal{B}) = \{f(B) + \varphi_f(\mathbf{w}) | \mathbf{w} \in W\}$$

a protože $\mathrm{Im}(\varphi_f|W) = \varphi_f(W)$ je vektorový podprostor v $Z(\mathcal{A}')$, je $f(\mathcal{B}) = \{f(B); \varphi_f(W)\}$ afinní podprostor v $\mathcal{A}'$.

Nechť $\mathcal{B} = \{B; W\}$ a $\mathcal{C} = \{C; U\}$ jsou dva rovnoběžné podprostory v $\mathcal{A}$. Připomeňme, že $\mathcal{B} \parallel \mathcal{C} \Leftrightarrow W \subseteq U \vee U \subseteq W$. Odtud $\varphi_f(W) \subseteq \varphi_f(U) \vee \varphi_f(U) \subseteq \varphi_f(W)$, což je ekvivalentní $f(\mathcal{B}) \parallel f(\mathcal{C})$. □

Poznámka 2.1.6. Afinní zobrazení nezachovává obecně dimenzi prostoru, proto se např. dvě rovnoběžné přímky zobrazí buď do rovnoběžných přímek nebo na dva body, které ale chápeme také jako rovnoběžné afinní podprostory. ♢

Poznámka 2.1.7. Uvažujme afinní zobrazení $f : \mathcal{A} \to \mathcal{A}'$, jehož asociované lineární zobrazení má nenulové jádro, t.j. existuje nenulový vektor $\mathbf{u} \in \mathrm{Ker}(\varphi_f)$. Potom každá přímka $p : X = B + t\,\mathbf{u}$ se zobrazí do bodu $f(B) \in \mathcal{A}'$. Obecně $f(\{B; \mathrm{Ker}(\varphi_f)\}) = f(B)$. ♢

Věta 2.1.7. *Je-li $f : \mathcal{A} \to \mathcal{A}'$ afinní zobrazení a $\mathcal{B} \subseteq \mathcal{A}$ afinní podprostor, je $f|\mathcal{B} : \mathcal{B} \to \mathcal{A}'$ afinní zobrazení a jeho asociované lineární zobrazení je $\varphi_f|Z(\mathcal{B})$.*

Důkaz. Toto tvrzení je přímým důsledkem Definice 2.1.1 a Věty 2.1.1. Opravdu, pokud platí (2.1.1) pro libovolné body $A, B, C \in \mathcal{A}$, platí to i pro $A, B, C \in \mathcal{B} \subseteq \mathcal{A}$. □

Věta 2.1.8. *Nechť $f : \mathcal{A} \to \mathcal{A}'$ a $g : \mathcal{A}' \to \mathcal{A}''$ jsou dvě afinní zobrazení. Potom $g \circ f : \mathcal{A} \to \mathcal{A}''$ je opět afinní zobrazení takové, že $\varphi_{g\circ f} = \varphi_g \circ \varphi_f$.*

Důkaz. Platí-li pro tři body $A, B, C \in \mathcal{A}$ rovnost $\overrightarrow{AC} = \lambda\overrightarrow{BC}$, platí také rovnost $\overrightarrow{f(A)f(C)} = \lambda\overrightarrow{f(B)f(C)}$ protože f je afinní zobrazení. Potom ale také

$$\overrightarrow{g(f(A))g(f(C))} = \lambda\overrightarrow{g(f(B))g(f(C))}$$

protože i g je afinní zobrazení. Podle Věty 2.1.1 je tedy $g \circ f$ afinní zobrazení. Pro asociované lineární zobrazení dostaneme $\varphi_{g\circ f}(\overrightarrow{AB}) = \overrightarrow{g(f(A))g(f(B))} = \varphi_g(\overrightarrow{f(A)f(B)}) = \varphi_g(\varphi_f(\overrightarrow{AB}) = (\varphi_g \circ \varphi_f)(\overrightarrow{AB})$. □

Věta 2.1.9. (O určenosti afinního zobrazení) *Nechť $A_0, \dots, A_n \in \mathcal{A}_n$ jsou libovolné body v obecné poloze a nechť $A'_0, \dots, A'_n \in \mathcal{A}'_m$ jsou libovolné body. Pak existuje právě jedno afinní zobrazení $f : \mathcal{A}_n \to \mathcal{A}'_m$ takové, že $f(A_i) = A'_i$, $i = 1, \dots, n$.*

Důkaz. Předpoklad, že body $A_0, \ldots, A_n \in \mathcal{A}_n$ jsou v obecné poloze je ekvivalentní s tím, že vektory $\overrightarrow{A_0A_1}, \ldots, \overrightarrow{A_0A_n}$ tvoří bázi $Z(\mathcal{A}_n)$. Definujme zobrazení $\varphi : Z(\mathcal{A}_n) \to Z(\mathcal{A}'_m)$ předpisem $\varphi(\overrightarrow{A_0A_i}) = \overrightarrow{A'_0A'_i}$, $i = 1, \ldots, n$. Podle Věty 1.1.2 je hodnotami na bázi určeno jediné lineární zobrazení φ a podle Věty 2.1.3 je předpisem

$$f(X) = A'_0 + \varphi(\overrightarrow{A_0X})$$

určeno jediné afinní zobrazení, které má zřejmě požadované vlastnosti, protože

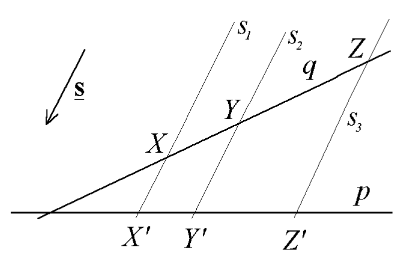
$$f(A_i) = A'_0 + \varphi(\overrightarrow{A_0A_i}) = A'_0 + \overrightarrow{A'_0A'_i} = A'_i\,,$$

jak plyne z předpokladu. □

Poznámka 2.1.8. Afinní zobrazení z afinní roviny $\mathcal{A}_2$ je tedy určeno obrazy tří bodů v obecné poloze (vrcholů trojúhelníka) a afinní zobrazení z afinního prostoru $\mathcal{A}_3$ je určeno obrazy čtyř bodů v obecné poloze (vrcholů čtyřstěnu). Specielně tak např. dostáváme, že libovolné dva trojúhelníky $\triangle ABC$ a $\triangle A'B'C'$ v $\mathcal{A}_2$ jsou afinní ve smyslu, že existuje jediné afinní zobrazení $\mathcal{A}_2$ na sebe, které zobrazí $\triangle ABC$ na $\triangle A'B'C'$. ♢

Úloha 2.1.1. Nechť je dána afinní rovina $\mathcal{A}_2$, v ní přímka p a směr $L(\mathbf{s})$ nerovnoběžný s p. Dokažte, že zobrazení, které každému bodu $X \in \mathcal{A}_2$ přiřadí bod $X' = p \cap \{X; L(\mathbf{s})\}$ je afinní zobrazení $\mathcal{A}_2$ na p.

Řešení: Nechť $X, Y, Z \in \mathcal{A}_2$ jsou tři různé body ležící na jedné přímce q. Potom buď $q \parallel \mathbf{s}$, a tedy $X' = Y' = Z'$, nebo q není rovnoběžná s $\mathbf{s}$ a X', Y', Z' jsou tři různé kolineární body (leží na přímce p). Musíme ještě ukázat, že např. $(Z; X, Y) = (Z'; X', Y')$ (viz Obrázek 2.1.2). To je ovšem důsledkem Věty 8.4

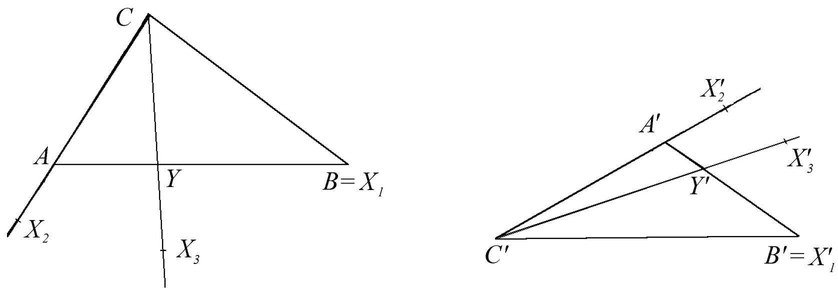


Obrázek 2.1.2: K Úloze 2.1.1

skript [HoJa]. Tato věta říká, že jsou-li s_1, s_2, s_3 tři různé navzájem rovnoběžné přímky, potom je libovolná s nimi různoběžná přímka r protíná v trojici bodů $S_i = s_i \cap r$ a dělící poměr $(S_3; S_1, S_2)$ je konstantní, nezávislý na volbě přímky r. Aplikací této věty na $s_1 = \{X; L(\mathbf{s})\} \parallel s_2 = \{Y; L(\mathbf{s})\} \parallel s_3 = \{Z; L(\mathbf{s})\}$ a přímky p, q dostaneme požadovaný výsledek. △

Úloha 2.1.2. V $\mathcal{A}_2$ je dán $\triangle ABC$ a libovolné tři body A', B', C'. Určete obraz libovolného bodu X v afinním zobrazení $\mathcal{A}_2$ do $\mathcal{A}_2$, které zobrazí $A \mapsto A', B \mapsto B', C \mapsto C'$.

Řešení: Úlohu vyřešíme konstrukčně nejdříve pro obecný případ, kdy jsou body A', B', C' v obecné poloze (viz Obrázek 2.1.3). Je-li bod X_1 totožný s některým



Obrázek 2.1.3: K Úloze 2.1.2

bodem A, B, C, je i jeho obraz X_1' totožný s příslušným bodem A', B', C' (na Obrázku 2.1.3 je to bod B). Leží-li bod X_2 na některé z přímek určené body A, B, C, např. na přímce AC, leží jeho obraz na obrazu této přímky tak, že se zachová dělící poměr vzhledem k příslušným vrcholům. Tedy na přímce $A'C'$ existuje jediný bod X_2' takový, že $(X_2; A, C) = (X_2'; A', C')$. Konečně, neleží-li bod X_3 na žádné z přímek určené body A, B, C, spojíme ho s libovolným z těchto bodů, např. s bodem C, a označíme Y průsečík této spojnice s přímkou určenou zbývajícími body, tj. body A, B. Podle předchozího kroku existuje jediný bod Y' na na přímce $A'B'$, takový, že $(Y; A, B) = (Y'; A', B')$. Potom je bod X_3' jediný bod na přímce $C'Y'$ takový, že $(X_3; Y, C) = (X_3'; Y', C')$.

Situace, kdy jsou body A', B', C' kolineární různé se vyřeší naprosto stejně.

Splývají-li některé dva z bodů A', B', C', např. $A' = B'$, pak každý bod přímky AB se zobrazí do bodu A'. Jinak je postup zachován.

Pokud splynou všechny body A', B', C', je obraz libovolného bodu X roven A'. $\triangle$

2.2 Analytické vyjádření afinního zobrazení

Nechť $\mathcal{R} = \langle P; \mathbf{e}_1, \dots, \mathbf{e}_n \rangle$ je afinní repér v afinním prostoru $\mathcal{A}_n$ a nechť dále $\mathcal{R}' = \langle Q; \mathbf{d}_1, \dots, \mathbf{d}_m \rangle$ je afinní repér v afinním prostoru $\mathcal{A}'_m$. Uvažujme afinní zobrazení $f : \mathcal{A}_n \to \mathcal{A}'_m$ a jeho asociované zobrazení $\varphi_f : Z(\mathcal{A}_n) \to Z(\mathcal{A}'_m)$. Označme jako $[b_1; \dots; b_m]$ afinní souřadnice bodu $f(P) \in \mathcal{A}'_m$ v repéru $\mathcal{R}'$, tj.

$$f(P) = Q + \sum_{j=1}^{m} b_j \mathbf{d}_j \, .$$

Označme $(a_{1i}; \dots ; a_{mi})$ souřadnice vektoru $\varphi_f(\mathbf{e}_i)$ v bázi $\langle \mathbf{d}_1, \dots, \mathbf{d}_m \rangle$, tj.

$$\varphi_f(\mathbf{e}_i) = \sum_{j=1}^{m} a_{ji}\mathbf{d}_j \,, \qquad i = 1, \dots, n \,.$$

Nechť $X \in \mathcal{A}_n$ je libovolný bod, který má v repéru $\mathcal{R}$ afinní souřadnice $[x_1; \dots ; x_n]$, tj.

$$X = P + \sum_{i=1}^{n} x_i \mathbf{e}_i \,.$$

Souřadnice bodu $f(X) \in \mathcal{A}'_m$ v repéru $\mathcal{R}'$ označme $[x'_1; \dots ; x'_m]$, tj.

$$f(X) = Q + \sum_{j=1}^{m} x'_j \mathbf{d}_j \,. \tag{2.2.1}$$

Na druhé straně

$$\begin{aligned} f(X) &= f(P + \sum_{i=1}^{n} x_i \mathbf{e}_i) = f(P) + \varphi_f(\sum_{i=1}^{n} x_i \mathbf{e}_i) \\ &= f(P) + \sum_{i=1}^{n} x_i \varphi_f(\mathbf{e}_i) \\ &= Q + \sum_{j=1}^{m} b_j \mathbf{d}_j + \sum_{i=1}^{n} x_i \sum_{j=1}^{m} a_{ji} \mathbf{d}_j \,. \end{aligned} \tag{2.2.2}$$

Protože je souřadnicové vyjádření bodu dáno jednoznačně, dostaneme porovnáním souřadnicových vyjádření (2.2.1) a (2.2.2) vztah pro souřadnice bodů X a $f(X)$ ve tvaru

$$x'_j = \sum_{i=1}^{n} a_{ji} x_i + b_j \,, \quad j = 1, \dots, m \,, \tag{2.2.3}$$

který budeme častěji psát maticově

$$\begin{pmatrix} x'_1 \\ \vdots \\ x'_m \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_m \end{pmatrix} , \tag{2.2.4}$$

nebo symbolicky

$$(f(X)) = A(X) + B \,, \tag{2.2.5}$$

kde $(X) = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$ označuje sloupcovou matici souřadnic bodu X vzhledem k afinnímu repéru $\mathcal{R}$ a $(f(X)) = (X') = \begin{pmatrix} x'_1 \\ \vdots \\ x'_m \end{pmatrix}$ označuje sloupcovou matici souřadnic bodu $f(X)$ vzhledem k afinnímu repéru $\mathcal{R}'$.

Naopak uvažujme reálnou matici $A = (a_{ij})$ typu m/n, reálnou matici $B = (b_i)$ typu $m/1$ a zobrazení, které každému bodu $X = [x_1; \dots ; x_n] \in \mathcal{A}_n$ přiřadí bod $f(X) = X' = [x'{}_1; \dots ; x'{}_m] \in \mathcal{A}'_m$ takový, že

$$x'_j = \sum_{i=1}^{n} a_{ji} x_i + b_j \, , \; j = 1, \dots , m \, . \tag{2.2.6}$$

Ukážeme, že f je afinní zobrazení. Uvažujme tři body $X, Y, Z \in \mathcal{A}_n$ takové, že $\overrightarrow{XZ} = \lambda \overrightarrow{YZ}$. V souřadnicích to znamená, že $(z_i - x_i) = \lambda(z_i - y_i)$, $\forall i = 1, \dots , n$. Pro souřadnice $[x'{}_1; \dots ; x'{}_m]$, $[y'{}_1; \dots ; y'{}_m]$, $[z'{}_1; \dots ; z'{}_m]$ obrazů X', Y', Z' bodů X, Y, Z pak dostaneme

$$\begin{aligned} z'_j - x'_j &= \sum_{i=1}^{n} a_{ji} z_i + b_j - (\sum_{i=1}^{n} a_{ji} x_i + b_j) = \sum_{i=1}^{n} a_{ji}(z_i - x_i) \\ &= \lambda \sum_{i=1}^{n} a_{ji}(z_i - y_i) \, , \\ z'_j - y'_j &= \sum_{i=1}^{n} a_{ji} z_i + b_j - (\sum_{i=1}^{n} a_{ji} y_i + b_j) = \sum_{i=1}^{n} a_{ji}(z_i - y_i) \, , \end{aligned}$$

tj. $\overrightarrow{X'Z'} = \lambda \overrightarrow{Y'Z'}$ a podle Věty 2.1.1 je f afinní zobrazení.

Předchozí úvahy tak můžeme shrnout do následující věty.

Věta 2.2.1. *Nechť jsou dány afinní repéry $\mathcal{R} = \langle P; \mathbf{e}_1, \dots , \mathbf{e}_n \rangle$ v $\mathcal{A}_n$ a $\mathcal{R}' = \langle Q; \mathbf{d}_1, \dots , \mathbf{d}_m \rangle$ v $\mathcal{A}'_m$. Je-li $f : \mathcal{A}_n \to \mathcal{A}'_m$ afinní zobrazení, pak existuje reálná matice $A = (a_{ij})$ typu m/n a reálná matice $B = (b_i)$ typu $m/1$ takové, že pro souřadnice bodu $X = [x_1; \dots ; x_n]$ a $f(X) = [x'{}_1; \dots ; x'{}_m]$ platí vztah (2.2.4).*

Naopak, je-li $A = (a_{ij})$ reálná matice typu m/n a $B = (b_i)$ reálná matice typu $m/1$, je zobrazení, které každému bodu $X = [x_1; \dots ; x_n] \in \mathcal{A}_n$ přiřadí bod $f(X) = X' = [x'{}_1; \dots ; x'{}_m] \in \mathcal{A}'_m$ takový, že

$$x'_j = \sum_{i=1}^{n} a_{ji} x_i + b_j \, , \; j = 1, \dots , m \tag{2.2.7}$$

afinní zobrazení. $\square$

Definice 2.2.1. Vztahy (2.2.3) – (2.2.5) se nazývají *souřadnicovým vyjádřením* nebo *souřadnicovými rovnicemi* afinního zobrazení f vzhledem k daným afinním repérům $\mathcal{R}$ a $\mathcal{R}'$.

Poznámka 2.2.1. Při pevně zvolených afinních repérech v $\mathcal{A}_n$ a $\mathcal{A}'_m$ je tedy vztah mezi afinními zobrazeními a maticemi A, B vzájemně jednoznačný. Z výše popsaného popisu souřadnicového vyjádření afinního zobrazení vyplývá, jaký je geometrický význam matic A, B. Matice A je typu m/n a její sloupce jsou souřadnice vektorů $\varphi_f(\mathbf{e}_i) \in Z(\mathcal{A}'_m)$ vzhledem k bázi $\langle \mathbf{d}_1, \dots, \mathbf{d}_m \rangle$. Sloupcová matice B typu $m/1$ je tvořena souřadnicemi bodu $f(P) \in \mathcal{A}'_m$ vzhledem k repéru $\mathcal{R}'$, tj. $B = (f(P))$. ♢

Poznámka 2.2.2. Afinní repér $\mathcal{R}$ v $\mathcal{A}_n$ (respektive $\mathcal{R}'$ v $\mathcal{A}'_m$) je možno chápat jako bijekci $\mathcal{R} : \mathcal{A}_n \to \mathbb{R}^n$ (respektive $\mathcal{R}' : \mathcal{A}'_m \to \mathbb{R}^m$), [HoJa]. Souřadnicové vyjádření afinního zobrazení $f : \mathcal{A}_n \to \mathcal{A}'_m$ je potom zobrazení z $\mathbb{R}^n$ do $\mathbb{R}^m$, které je dáno složením zobrazení $\mathcal{R}' \circ f \circ \mathcal{R}^{-1}$ podle následujícího diagramu

$$\begin{tikzcd}
\mathcal{A}_n \arrow[d, "f"'] & \mathbb{R}^n \arrow[l, "\mathcal{R}^{-1}"'] \arrow[d] \\
\mathcal{A}'_m \arrow[r, "\mathcal{R}'"] & \mathbb{R}^m
\end{tikzcd}$$

♢

Definice 2.2.2. Matice A v (2.2.5) se nazývá *matice afinního zobrazení* f vzhledem k daným afinním repérům $\mathcal{R}$ a $\mathcal{R}'$.

Poznámka 2.2.3. Z definice hodnosti afinního zobrazení je zřejmé, že $h(f) = h(A)$, kde A je matice zobrazení vzhledem k libovolným repérům. ♢

Příklad 2.2.1. Množinu reálných čísel $\mathbb{R}$ můžeme chápat jako jednorozměrný afinní prostor. Potom lineární funkce $f(x) = ax + b$ je vlastně afinní zobrazení $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$. ♡

Uvažujme vektor $\mathbf{u} = \overrightarrow{XY} = (u_1; \dots ; u_n) \in Z(\mathcal{A}_n)$. Z definice asociovaného lineárního zobrazení je v souřadnicích

$$(\varphi_f(\mathbf{u})) = A(Y) + B - (A(X) + B) = A((Y) - (X)) = A(\mathbf{u})\,,$$

tj. souřadnicové vyjádření asociovaného lineárního zobrazení φ_f je tvaru

$$\begin{pmatrix} u'_1 \\ \vdots \\ u'_m \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_1 \\ \vdots \\ u_n \end{pmatrix}, \tag{2.2.8}$$

nebo maticově

$$(\mathbf{u}') = A(\mathbf{u})\,, \tag{2.2.9}$$

kde $(\varphi_f(\mathbf{u})) = (\mathbf{u}') = \begin{pmatrix} u'_1 \\ \vdots \\ u'_m \end{pmatrix}$ označuje sloupcovou matici souřadnic vektoru $\varphi_f(\mathbf{u})$ vzhledem k afinnímu repéru $\mathcal{R}'$. Matice A je tedy současně i maticí φ_f v bázích $\langle \mathbf{e}_1, \dots, \mathbf{e}_n \rangle$ na $Z(\mathcal{A}_n)$ a $\langle \mathbf{d}_1, \dots, \mathbf{d}_m \rangle$ na $Z(\mathcal{A}'_m)$.

Matice A, B přiřazené afinnímu zobrazení závisí na zvolených afinních repérech. V následující větě si ukážeme, jaký je vztah mezi maticemi téhož afinního zobrazení v různých afinních repérech.

Věta 2.2.2. *Nechť $\mathcal{R}$, $\bar{\mathcal{R}}$ jsou dva afinní repéry na $\mathcal{A}_n$ a $\mathcal{R}'$, $\bar{\mathcal{R}}'$ jsou dva afinní repéry na $\mathcal{A}'_m$. Označme transformační rovnice přechodu od repéru $\mathcal{R}$ k repéru $\bar{\mathcal{R}}$ maticově $(X) = K(\bar{X})+L$ a transformační rovnice přechodu od repéru $\mathcal{R}'$ k repéru $\bar{\mathcal{R}}'$ maticově $(X') = M(\bar{X}') + N$. Nechť $f : \mathcal{A}_n \to \mathcal{A}'_m$ je afinní zobrazení, které má souřadnicové vyjádřejí vzhledem k repérům $\mathcal{R}$ a $\mathcal{R}'$ dáno maticově $(X') = A(X) + B$ a souřadnicové vyjádřejí vzhledem k repérům $\bar{\mathcal{R}}$ a $\bar{\mathcal{R}}'$ je dáno maticově $(\bar{X}') = C(\bar{X}) + D$. Pak*

$$C = M^{-1}AK, \quad D = M^{-1}(AL + B - N)\,. \tag{2.2.10}$$

Důkaz. Do maticové rovnice f vzhledem k repérům $\mathcal{R}$ a $\mathcal{R}'$ dosadíme na levou stranu transformační rovnice přechodu od repéru $\mathcal{R}'$ k repéru $\bar{\mathcal{R}}'$ a na pravou stranu transformační rovnice přechodu od repéru $\mathcal{R}$ k repéru $\bar{\mathcal{R}}$. Dostaneme

$$M(\bar{X}') + N = A(K(\bar{X}) + L) + B\,.$$

Protože je matice M regulární, dostaneme odtud úpravou

$$(\bar{X}') = M^{-1}AK(\bar{X}) + M^{-1}(AL + B - N)\,,$$

což je maticový zápis souřadnicového vyjádření f vzhledem k repérům $\bar{\mathcal{R}}$ a $\bar{\mathcal{R}}'$. Porovnáním s původním zápisem potom dostaneme tvrzení věty. □

Protože souřadnicové vyjádření afinního zobrazení je závislé na zvolených afinních repérech, zajímá nás, zda není možné zvolit afinní repéry tak, aby mělo afinní zobrazení nejjednodušší možné rovnice. Dostáváme větu.

Věta 2.2.3. *Nechť $f : \mathcal{A}_n \to \mathcal{A}'_m$ je afinní zobrazení hodnosti h. Potom existují takové afinní repéry $\mathcal{R} = \langle P; \mathbf{e}_1, \dots, \mathbf{e}_n \rangle$ v $\mathcal{A}_n$ a $\mathcal{R}' = \langle Q; \mathbf{d}_1, \dots, \mathbf{d}_m \rangle$ v $\mathcal{A}'_m$, že vzhledem k těmto repérům má f souřadnicové vyjádření*

$$\begin{aligned} x'_1 &= x_1\,, & x'_{h+1} &= 0\,, \\ &\vdots & &\vdots \\ x'_h &= x_h\,, & x'_m &= 0\,. \end{aligned} \tag{2.2.11}$$

Důkaz. Afinní repér $\mathcal{R} = \langle P; \mathbf{e}_1, \dots, \mathbf{e}_n \rangle$ v $\mathcal{A}_n$ zvolíme libovolně tak, aby vektory $\mathbf{e}_j$, $j = h+1, \dots, n$, ležely v $\mathrm{Ker}(\varphi_f)$. To znamená že vektory $\varphi_f(\mathbf{e}_i)$, $i = 1, \dots, h$, jsou lineárně nezávislé a tvoří bázi v $\mathrm{Im}\varphi_f \subseteq Z(\mathcal{A}'_m)$. Afinní repér $\mathcal{R}' = \langle Q; \mathbf{d}_1, \dots, \mathbf{d}_m \rangle$ v $\mathcal{A}'_m$ volíme následujícím způsobem. $Q = f(P)$, $\mathbf{d}_i = \varphi_f(\mathbf{e}_i)$, $i = 1, \dots, h$, $\mathbf{d}_j$, $j = h+1, \dots, m$, volíme libovolně tak aby $\langle \mathbf{d}_1, \dots, \mathbf{d}_m \rangle$ byla báze $Z(\mathcal{A}'_m)$. V takto zvolených repérech má f uvedené rovnice (4.1.1). □

Poznámka 2.2.4. Afinní repéry ztotožňují afinní prostor $\mathcal{A}_n$ s $\mathbb{R}^n$ a afinní prostor $\mathcal{A}'_m$ s $\mathbb{R}^m$. Potom z předchozí Věty 2.2.3 a Poznámky 2.2.2 vyplývá, že souřadnicové vyjádření injektivního afinního zobrazení $f : \mathcal{A}_n \to \mathcal{A}'_m$, $h(f) = n \leq m$, je ve vhodně zvolených souřadnicích vlastně kanonické vložení $\mathbb{R}^n$ do $\mathbb{R}^m$, kdy uspořádanou n-tici $[x_1; \dots ; x_n]$ doplníme na m-tici reálných čísel nulami, tj. $[x_1; \dots ; x_n] \mapsto [x_1; \dots ; x_n; 0; \dots ; 0]$.

Podobně pro surjektivní afinní zobrazení, kdy $h(f) = m \leq n$, je ve vhodných souřadnicích toto zobrazení vyjádřeno jako kanonická projekce $\mathbb{R}^n$ na $\mathbb{R}^m$, kdy z uspořádané n-tice $[x_1; \dots ; x_n]$ vezmeme pouze prvních m členů a ostatní vynecháme, tj. $[x_1; \dots ; x_m; x_{m+1}; \dots ; x_n] \mapsto [x_1; \dots ; x_m]$. ♢

Věta 2.2.4. *Nechť na afinním prostoru $\mathcal{A}_n$ je dán repér $\mathcal{R}$, na afinním prostoru $\mathcal{A}'_m$ je dán repér $\mathcal{R}'$ a na afinním prostoru $\mathcal{A}''_p$ je dán repér $\mathcal{R}''$. Nechť $f : \mathcal{A}_n \to \mathcal{A}'_m$ je afinní zobrazení, které má vzhledem k repérům $\mathcal{R}$ a $\mathcal{R}'$ maticové vyjádření $(X') = A(X) + B$. Nechť $g : \mathcal{A}'_m \to \mathcal{A}''_p$ je afinní zobrazení, které má vzhledem k repérům $\mathcal{R}'$ a $\mathcal{R}''$ maticové vyjádření $(X'') = C(X') + D$. Pak afinní zobrazení $g \circ f : \mathcal{A}_n \to \mathcal{A}''_p$ má vzhledem k repérům $\mathcal{R}$ a $\mathcal{R}''$ maticové vyjádření*

$$(X'') = CA(X) + CB + D\,. \tag{2.2.12}$$

Důkaz. Stačí dosadit z maticového vyjádření f do maticového vyjádření g. □

Poznámka 2.2.5. Matice složeného zobrazení $g \circ f$ je tedy součin matic původních zobrazení v příslušném pořadí. Protože B je matice tvořená souřadnicemi obrazu počátku repéru $\mathcal{R}$ v zobrazení f, je matice $CB + D$ obrazem počátku repéru $\mathcal{R}$ v zobrazení $g \circ f$, a to je v souladu s geometrickým významem těchto koeficientů popsaným v Poznámce 2.2.1. ♢

Úloha 2.2.1. Afinní zobrazení $f : \mathcal{A}_2 \to \mathcal{A}_3$ je dáno obrazy tří bodů A_1, A_2, A_3 v obecné poloze. Určete rovnice tohoto zobrazení jestliže vzhledem k nějakým afinním repérům $\mathcal{R}$ v $\mathcal{A}_2$ a $\mathcal{R}'$ v $\mathcal{A}_3$ je $A_1 = [1; 1] \mapsto A'_1 = [4; 4; 0]$, $A_2 = [-1; 1] \mapsto A'_2 = [2; 8; 0]$, $A_3 = [-1; -1] \mapsto A'_3 = [-2; 2; -2]$.

Řešení: Označme jako obvykle afinní souřadnice na $\mathcal{A}_2$ jako $[x; y]$ a na $\mathcal{A}_3$ jako $[x'; y'; z']$. Potom rovnice afinního zobrazení $f : \mathcal{A}_2 \to \mathcal{A}_3$ jsou dány maticově

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix}.$$

Dosazením souřadnic bodů A_i na pravou stranu a souřadnic bodů A'_i na levou stranu souřadnicových rovnic dostaneme soustavu devíti nehomogenních lineárních rovnic pro devět koeficientů a_{ij}, b_i, $i = 1,2,3$, $j = 1,2$. Tato soustava se rozpadne na tři soustavy pro koeficienty jednotlivých řádků a tyto soustavy mají stejnou matici zhomogenizované soustavy. Dají se tedy řešit současně úpravami matic. Dostaneme

$$\left(\begin{array}{rrr|r|r|r} 1 & 1 & 1 & 4 & 4 & 0 \\ -1 & 1 & 1 & 2 & 8 & 0 \\ -1 & -1 & 1 & -2 & 2 & -2 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{rrr|r|r|r} 1 & 0 & 0 & 1 & -2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 2 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 3 & -1 \end{array}\right).$$

Sloupce za čarou odpovídají neznámým příslušného řádku matic A a B a souřadnicové rovnice zobrazení f je tvaru

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -2 & 3 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ -1 \end{pmatrix}.$$

Praktická poznámka: Při úpravě matice soustavy na schodovitý tvar je výhodné převést matici před čarou až na jednotkovou matici. Potom za čarou dostaneme přímo výsledek. Ve sloupcích za čarou jsou koeficienty příslušných řádků matic A a B. △

Úloha 2.2.2. Určete maticovou rovnici afinního zobrazení $f : \mathcal{A}_3 \to \mathcal{A}_3$, jestliže jsou v souřadnicích vzhledem k pevnému afinnímu repéru $\mathcal{R} = \langle P; \mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3 \rangle$ dány obrazy $\varphi_f(\mathbf{v}_1), \varphi_f(\mathbf{v}_2), \varphi_f(\mathbf{v}_3)$ vektorů $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3$ v homomorfismu φ_f asociovaném s f a obraz $f(R) = R'$ bodu R : $\mathbf{v}_1 = (1;1;0) \mapsto \varphi_f(\mathbf{v}_1) = (1;2;0)$, $\mathbf{v}_2 = (-1;0;2) \mapsto \varphi_f(\mathbf{v}_2) = (1;1;-4)$, $\mathbf{v}_3 = (2;1;-1) \mapsto \varphi_f(\mathbf{v}_3) = (1;1;3)$, $R = [0;-1;3] \mapsto R' = [2;-3;-1]$.

Řešení: I. metoda: Jestliže je $(X') = A(X) + B$ maticová rovnice afinního zobrazení $f : A_3 \to A_3$, kde (X) a $(X)'$ jsou sloupcové matice souřadnic bodů X a $f(X) = X'$ vzhledem k afinnímu repéru $\mathcal{R}$, pak $(\mathbf{u}') = A(\mathbf{u})$ je maticová rovnice lineárního zobrazení $\varphi_f : Z(\mathcal{A}_3) \to Z(\mathcal{A}_3)$ asociovaného s f. Určíme nejdříve matici A. Dosazením souřadnic vektorů $\mathbf{v}_i$, $i = 1,2,3$, do pravé strany a souřadnic vektorů $\varphi_f(\mathbf{v}_i)$ do levé strany souřadnicového vyjádření φ_f dostaneme soustavu devíti nehomogenních lineárních rovnic pro devět neznámých koeficientů matice A. Tato soustava je regulární (plyne z nezávislosti vektorů $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3$) a rozpadne se na tři soustavy po třech neznámých koeficientech jednotlivých řádků. Protože jsou matice zhomogenizovaných soustav stejné, dají se tyto tři soustavy řešit současně úpravami matic. Dostaneme

$$\left(\begin{array}{rrr|r|r|r} 1 & 1 & 0 & 1 & 2 & 0 \\ -1 & 0 & 2 & 1 & 1 & -4 \\ 2 & 1 & -1 & 1 & 1 & 3 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{rrr|r|r|r} 1 & 0 & 0 & 1 & -1 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 3 & -2 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & -1 \end{array}\right).$$

Sloupce za čarou odpovídají neznámým příslušného řádku matice A, tj.

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ -1 & 3 & 0 \\ 2 & -2 & -1 \end{pmatrix}.$$

Matici B nyní dostaneme dosazením souřadnic R a R' do obecné rovnice afinního zobrazení, tj. $B = (R') - A(R)$, což v našem případě dává

$$B = \begin{pmatrix} 2 \\ -3 \\ -1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ -1 & 3 & 0 \\ 2 & -2 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Maticová rovnice afinního zobrazení je tedy

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ -1 & 3 & 0 \\ 2 & -2 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ y \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

II. metoda: Víme, že ve sloupcích matice A jsou souřadnice vektorů $\varphi_f(\mathbf{e}_i)$. Zadání obrazů vektorů $\mathbf{v}_i$ se dá interpretovat také vektorovými rovnicemi

$$\begin{aligned} \varphi_f(\mathbf{e}_1) + \varphi_f(\mathbf{e}_2) \phantom{{}- \varphi_f(\mathbf{e}_3)} &= \mathbf{e}_1 + 2\mathbf{e}_2\,, \\ -\varphi_f(\mathbf{e}_1) \phantom{{}+ \varphi_f(\mathbf{e}_2)} + \varphi_f(\mathbf{e}_3) &= \mathbf{e}_1 + \mathbf{e}_2 - 4\mathbf{e}_3\,, \\ 2\varphi_f(\mathbf{e}_1) + \varphi_f(\mathbf{e}_2) - \varphi_f(\mathbf{e}_3) &= \mathbf{e}_1 + \mathbf{e}_2 + 3\mathbf{e}_3\,, \end{aligned}$$

odkud úpravami dostaneme

$$\begin{aligned} \varphi_f(\mathbf{e}_1) &= \mathbf{e}_1 - \mathbf{e}_2 + 2\mathbf{e}_3\,, \\ \varphi_f(\mathbf{e}_2) &= 3\mathbf{e}_2 - 2\mathbf{e}_3\,, \\ \varphi_f(\mathbf{e}_3) &= \mathbf{e}_1 - \mathbf{e}_3\,, \end{aligned}$$

a tedy matice A je stejná jako při I. metodě. Matice B se určí naprosto stejným způsobem jako v I. metodě.

III. metoda: Protože jsou vektory $\mathbf{v}_i$, $i = 1, 2, 3$, lineárně nezávislé, jsou body R, $R+\mathbf{v}_1$, $R+\mathbf{v}_2$, $R+\mathbf{v}_3$ v obecné poloze. Protože známe jejich souřadnicová vyjádření i souřadnicová vyjádření jejich obrazů, můžeme použít metodu popsanou v řešení Úlohy 2.2.1. Výsledné rovnice budou totožné jako v I. medodě. △

Úloha 2.2.3. Ztransformujte rovnice afinního zobrazení f z Cvičení 2.2.1 do nových repérů $\bar{\mathcal{R}} = \langle P; \mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2 \rangle$ v $\mathcal{A}_2$ a $\bar{\mathcal{R}}' = \langle Q; \mathbf{d}_1, \mathbf{d}_2, \mathbf{d}_3 \rangle$ v $\mathcal{A}_3$, kde ve starých souřadnicích je $P = [1; 1]$, $\mathbf{e}_1 = (1; 2)$, $\mathbf{e}_2 = (-1; 1)$, $Q = [1; 0; 1]$, $\mathbf{d}_1 = (2; 1; 2)$, $\mathbf{d}_2 = (0; 1; 1)$, $\mathbf{d}_3 = (1; 2; 0)$.

Řešení: Transformační rovnice pro souřadnice při přechodu od afinního repéru $\mathcal{R}$ k repéru $\bar{\mathcal{R}}$ v $\mathcal{A}_2$ (respektive od afinního repéru $\mathcal{R}'$ k repéru $\bar{\mathcal{R}}'$ v $\mathcal{A}_3$) jsou tvaru

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \bar{x} \\ \bar{y} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \text{respektive} \begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \\ 2 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \bar{x}' \\ \bar{y}' \\ \bar{z}' \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Dosazením transformačních rovnic v $\mathcal{A}_3$ do levé strany a transformačních rovnic v $\mathcal{A}_2$ do pravé strany v rovnicích f dostaneme

$$\begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \\ 2 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \bar{x}' \\ \bar{y}' \\ \bar{z}' \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -2 & 3 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \left[\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \bar{x} \\ \bar{y} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right] + \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ -1 \end{pmatrix},$$

odkud určíme (X') tím, že vynásobíme obě strany maticové rovnice maticí $\frac{1}{5}\begin{pmatrix} 2 & -1 & 1 \\ -4 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & -2 \end{pmatrix}$, která je invezní maticí k matici $\begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \\ 2 & 1 & 0 \end{pmatrix}$. Po roznásobení a úpravě dostaneme maticovou rovnici f v nových repérech ve tvaru

$$\begin{pmatrix} \bar{x}' \\ \bar{y}' \\ \bar{z}' \end{pmatrix} = \frac{1}{5} \begin{pmatrix} 8 & -2 \\ -2 & 9 \\ 9 & 9 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \bar{x} \\ \bar{y} \end{pmatrix} + \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 3 \\ -6 \\ 4 \end{pmatrix}. \qquad \triangle$$

2.3 Modul afinního zobrazení, grupa afinit

V této a následujících částech skript se budeme zabývat afinními zobrazeními n-rozměrného afinního prostoru na sebe. Protože složením dvou afinních zobrazení dostaneme opět afinní zobrazení, je množina všech afinních zobrazení daného afinního prostoru uzavřená vzhledem k operaci skládání zobrazení. Dostaneme tak pologrupu s neutrálním prvkem, kterým je identita. Navíc je tato pologrupa nekomutativní.

V souřadnicích potom vyjadřujeme afinní zobrazení pouze vzhledem k jednomu afinnímu repéru a matice zobrazení je čtvercová matice řádu n.

Věta 2.3.1. *Nechť má afinní zobrazení v nějakém afinním repéru souřadnicové vyjádření $(f(X)) = A(X) + B$. Potom číslo $|A|$ je nezávislé na zvoleném repéru.*

Důkaz. Mějme na $\mathcal{A}_n$ dva repéry $\mathcal{R}$ a $\mathcal{R}'$. Nechť Q je matice přechodu od prvního repéru k druhému, a nechť $(f(X)) = A(X)+B$ je souřadnicové vyjádření afinního zobrazení f vzhledem k repéru $\mathcal{R}$ a $(f(X)) = C(X)+D$ je souřadnicové vyjádření f vzhledem k repéru $\mathcal{R}'$. Potom podle Věty 2.2.2 je $C = Q^{-1}AQ$ a odtud

$$|C| = |Q^{-1}AQ| = |Q^{-1}| \cdot |A| \cdot |Q| = \frac{1}{|Q|} \cdot |A| \cdot |Q| = |A|. \qquad \square$$

Definice 2.3.1. Číslo $|A|$, které je jednoznačně přiřazeno afinnímu zobrazení f, se nazývá *modul afinního zobrazení* a značíme ho $m(f)$.

Věta 2.3.2. *Nechť f, g jsou dvě afinní zobrazení na $\mathcal{A}_n$. Potom*

$$m(f \circ g) = m(g \circ f) = m(f) \cdot m(g)\,.$$

Důkaz. Mějme v nějakém repéru zobrazení f a g dána maticovými rovnicemi $(f(X)) = A(X) + B$, $(g(X)) = C(X) + D$. Potom $((f \circ g)(X)) = A(C(X) + D) + B = AC(X) + AD + B$ a $m(f \circ g) = |AC| = |A| \cdot |C| = m(f) \cdot m(g)$. Podobně $((g \circ f)(X)) = C(A(X) + B) + D = CA(X) + CB + D$ a $m(g \circ f) = |CA| = |C| \cdot |A| = |A| \cdot |C| = m(f) \cdot m(g)$. □

Poznámka 2.3.1. Modul je tedy příkladem homomorfismu z nekomutativní pologrupy do komutativní pologrupy reálných čísel. ♢

Mezi afinními zobrazeními $\mathcal{A}_n$ na sebe hrají významnou roli ta zobrazení, jejichž modul je nenulový, tj. jejichž matice v libovolném repéru je regulární. Tyto afinní zobrazení se nazývají *regulární afinní zobrazení.*

Definice 2.3.2. Vzájemně jednoznačné afinní zobrazení n-rozměrného afinního prostoru $\mathcal{A}_n$ na sebe se nazývá *afinní transformace* nebo *afinita* prostoru $\mathcal{A}_n$.

Poznámka 2.3.2. Afinita prostoru $\mathcal{A}_n$ je regulární zobrazení, protože jeho matice je regulární. To vyplývá z toho, že je-li afinní zobrazení f bijekce na $\mathcal{A}_n$, je jeho hodnost rovna n a odtud vzhledem k libovolnému repéru je $n = h(f) = h(A) \Leftrightarrow |A| \neq 0$. ♢

Věta 2.3.3. *Všechny afinity afinního prostoru $\mathcal{A}_n$ tvoří grupu vzhledem k operaci skládání zobrazení.*

Důkaz. Složením dvou afinit je opět afinita (to je důsledek toho, že složením dvou bijekcí je bijekce a složením dvou afinních zobrazení je afinní zobrazení - Věta 2.1.8) a identita je afinita. Stačí tedy ukázat, že pro libovolnou afinitu je i f^{-1} afinita. Uvažujme libovolné tři různé kolineární body $X', Y', Z' \in \mathcal{A}_n$ takové, že $\lambda = (Z'; X', Y')$. Označme X vzor bodu X' v zobrazení f (protože f je bijekce, je X určen jednoznačně) a Y vzor bodu Y'. Označme Z bod na přímce XY takový, že $\lambda = (Z; X, Y)$. Potom také $\lambda = (f(Z); f(X), f(Y)) = (f(Z); X', Y')$, a tedy $f(Z) = Z'$ a odtud je f^{-1} afinita. □

Poznámka 2.3.3. Při označení z důkazu předchozí věty je pro afinitu f asociované lineární zobrazení určeno $\varphi_f(\overrightarrow{XY}) = \overrightarrow{X'Y'}$ a $\varphi_{f^{-1}}(\overrightarrow{X'Y'}) = \overrightarrow{XY}$. Protože φ_f je bijekce, je ${\varphi_f}^{-1} \equiv \varphi_{f^{-1}}$.

Podobně, je-li A_f matice afinity v nějakém afinním repéru, je $A_{f^{-1}} = A_f^{-1}$. ♢

Definice 2.3.3. Grupu všech afinních transformací n-rozměrného afinního prostoru $\mathcal{A}_n$ nazýváme *afinní grupou* nebo *grupou afinit* prostoru $\mathcal{A}_n$ a značíme $(\mathfrak{A}_n, \circ)$.

Věta 2.3.4. *Nechť afinita $f : \mathcal{A}_n \to \mathcal{A}_n$ má vzhledem k afinnímu repéru $\mathcal{R}$ v $\mathcal{A}_n$ souřadnicové vyjádření*

$$f : (X') = A(X) + B\,,$$

pak f^{-1} má souřadnicové vyjádření

$$f^{-1} : (X') = A^{-1}(X) - A^{-1}B\,.$$

Důkaz. Protože f je bijekce, je matice A regulární a z rovnic f vynásobením A^{-1} dostaneme tvrzení věty. □

Věta 2.3.5. *Zobrazení m, které přiřadí afinitě f její modul, je grupový homomorfismus z $(\mathfrak{A}_n, \circ)$ do $(\mathbb{R} - \{0\}, \cdot)$.*

Důkaz. Tato věta je důsledkem Věty 2.3.2. □

Využitím toho, že úplným vzorem libovolné podgrupy v $(\mathbb{R} - \{0\}, \cdot)$ je podgrupa v $(\mathfrak{A}_n, \circ)$, můžeme definovat některé významné podgrupy grupy afinit. Uvažujme v $(\mathbb{R} - \{0\}, \cdot)$ podgrupu kladných reálných čísel $(\mathbb{R}^+, \cdot)$. Odpovídající podgrupa v grupě afinit je podgrupa všech afinit (značíme $({\mathfrak{A}_n}^+, \circ)$), jejichž modul je kladný, tj. $m(f) > 0$. Takovéto afinity budeme nazývat *přímé afinity*. Naopak afinity, jejichž modul je záporný, budeme nazývat *nepřímé afinity*. Snadno se vidí, že složením dvou nepřímých afinit je přímá afinita a tedy nepřímé afinity grupu netvoří. Geometrický význam přímé a nepřímé afinity je následující. Uvažujme afinní repér $\mathcal{R} = \langle P; \mathbf{e}_1, \ldots, \mathbf{e}_n\rangle$ v $\mathcal{A}_n$. Potom $\langle f(P); \varphi_f(\mathbf{e}_1), \cdots, \varphi_f(\mathbf{e}_n)\rangle$ je také afinní repér v $\mathcal{A}_n$ a matice A afinního zobrazení f vzhledem k repéru $\langle P; \mathbf{e}_1, \ldots, \mathbf{e}_n\rangle$ je maticí přechodu od prvního repéru k druhému. Pokud je $|A| > 0$, tj. f je přímá afinita, jsou oba repéry souhlasně orientované, a tedy přímá afinita zachovává orientaci prostoru. Pokud je naopak $|A| < 0$, tj. f je nepřímá afinita, jsou oba repéry opačně orientované, a tedy nepřímá afinita mění orientaci prostoru.

Uvažujme v $(\mathbb{R} - \{0\}, \cdot)$ konečnou podgrupu $(\{1; -1\}, \cdot)$. Odpovídající podgrupa v grupě afinit je podgrupa všech afinit (značíme $(\mathfrak{E}_n, \circ)$), jejichž modul je roven 1 nebo (-1), tj. $m(f) = \pm 1$. Takovéto afinity budeme nazývat *ekviafinní zobrazení $\mathcal{A}_n$*. Geometrický význam ekviafinních zobrazení si ukážeme později v Části 3.2.

Úloha 2.3.1. Nechť A, B, C, D jsou čtyři body v obecné poloze v $\mathcal{A}_3$. Afinita $f : \mathcal{A}_3 \to \mathcal{A}_3$ je dána obrazy $A \mapsto C\,,\ B \mapsto D\,,\ C \mapsto B\,,\ D \mapsto A\,.$ Určete rovnice f vzhledem afinnímu repéru $\mathcal{R} = \langle A; \overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}, \overrightarrow{AD} \rangle$. Zjistěte, zda je f přímá nebo nepřímá afinita. Určete rovnice f^{-1}.

Řešení: V daném afinním repéru je $A = [0;0;0]$, $B = [1;0;0]$, $C = [0;1;0]$, $D = [0;0;1]$. Souřadnicové rovnice f můžeme určit některou z metod použitých v Úloze 2.2.1 nebo 2.2.2. Použijeme II. metodu Úlohy 2.2.2. Máme $\overrightarrow{AB} \mapsto \overrightarrow{CD} = (0;-1;1)$, $\overrightarrow{AC} \mapsto \overrightarrow{CB} = (1;-1;0)$, $\overrightarrow{AD} \mapsto \overrightarrow{CA} = (0;-1;0)$. Odtud dostáváme přímo rovnice f ve tvaru

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -1 & -1 & -1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Protože je $|A| = -1$, je modul afinity záporné číslo a f je nepřímá afinita, která je navíc ekviafinním zobrazením.

Inverzní afinitu můžeme určit dvojím způsobem.

a) Ze zadání je jasné, že f^{-1} je určeno obrazy $A \mapsto D$, $B \mapsto C$, $C \mapsto A$, $D \mapsto B$. Potom postupujeme stejně, jako při určování rovnic f, tj. $\overrightarrow{AB} \mapsto \overrightarrow{DC} = (0;1;-1)$, $\overrightarrow{AC} \mapsto \overrightarrow{CA} = (0;0;-1)$, $\overrightarrow{AD} \mapsto \overrightarrow{DB} = (1;0;-1)$, a dostaneme souřadnicové vyjádření f^{-1} ve tvaru

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ -1 & -1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

b) Souřadnicové vyjádření f^{-1} můžeme také dostat z rovnic f vynásobením maticí inverzní k matici A. △

2.4 Samodružné prvky afinního zobrazení

V této části skript budeme studovat samodružné útvary afinního zobrazení $f : \mathcal{A} \to \mathcal{A}$. Definujme nejdříve samodružné útvary pro libovolné zobrazení.

Definice 2.4.1. Nechť M je neprázdná množina a $f : M \to M$ je zobrazení. Prvek $X \in M$ nazýváme *samodružným prvkem (pevným prvkem)* zobrazení f, jestliže $f(X) = X$.

Neprázdná podmnožina $U \subseteq M$ se nazývá *silně samodružná* podmnožina zobrazení f, je-li $f(X) = X$ pro všechna $X \in U$.

Neprázdná podmnožina $U \subseteq M$ se nazývá *slabě samodružná* podmnožina zobrazení f, je-li $f(U) \subseteq U$ a U není silně samodružná. Jinými slovy $f(X) \in U$ pro všechna $X \in U$ a existuje $Y \in U$ takový, že $f(Y) \neq Y$.

Poznámka 2.4.1. Silně samodružná podmnožina nějakého zobrazení je tedy samodružná prvek po prvku, kdežto slabě samodružná podmnožina je samodružná jen jako celek, její jednotlivé prvky nemusí být samodružné. Představme si například osovou symetrii v rovine s osou o. Potom osa je silně samodružná množina, ale každá přímka kolmá na osu je slabě samodružná. $\diamondsuit$

Aplikujme nyní předchozí Definici 2.4.1 na afinní zobrazení $f : \mathcal{A}_n \to \mathcal{A}_n$. V tomto případě hovoříme o *samodružných (pevných) bodech* afinního zobrazení f.

Věta 2.4.1. *Pokud má afinní zobrazení samodružné body, je množina samodružných bodů afinním podprostorem v $\mathcal{A}_n$.*

Důkaz. Nechť má f alespoň jeden samodružný bod, např. A. Pokud nemá f již další samodružné body, je množina samodružných bodů 0-dimenzionální podprostor tvořený jediným bodem A.

Nechť má f další samodružný bod $B \neq A$. Potom každý bod přímky $p(AB)$ je samodružný. Opravdu, pro $X \in p(AB)$, $A \neq X \neq B$, je z $\overrightarrow{AX} = \lambda\overrightarrow{BX}$ pro nějaké $0 \neq \lambda \neq 1$ podle Věty 2.1.1 $\overrightarrow{f(A)f(X)} = \lambda\overrightarrow{f(B)f(X)} \Leftrightarrow \overrightarrow{Af(X)} = \lambda\overrightarrow{Bf(X)}$. Odtud je $f(X) \in p(AB)$ a $(f(X); A, B) = (X; A, B)$, což je možné pouze pro $f(X) = X$. Pokud již neexistuje samodružný bod neležící na přímce $p(AB)$, je množina samodružných bodů právě přímka $p(AB)$, tj. podprostor dimenze jedna.

Pokud existuje samodružný bod C, který neleží na přímce $p(AB)$, je podle předchozí kostrukce libovolný bod přímek určených bodem C a libovolným bodem přímky $p(AB)$ také samodružný. Tyto body tvoří rovinu $\rho(ABC)$ samodružných bodů. Pokud již neexistuje samodružný bod neležící v rovině $\rho(ABC)$, je množina samodružných bodů právě rovina $\rho(ABC)$, tj. podprostor dimenze dva.

Výše popsaným způsobem tak dojdeme po konečném počtu kroků k tomu, že množina samodružných bodů afinního zobrazení f je podprostor dimenze $k \leq n$. $\square$

Popišme nyní výpočet samodružných bodů v souřadnicovém vyjádření afinního zobrazení vzhledem k libovolnému repéru $\mathcal{R}$ v $\mathcal{A}_n$. Předpokládejme, že má f souřadnicové vyjádření $(X') = A(X) + B$. Potom pro samodružný bod X je $(X') = (X)$ a dostaneme

$$(A - E_n)(X) + B = (0)\,, \tag{2.4.1}$$

kde E_n je jednotková matice řádu n a (0) je sloupcová matice tvořena nulami. Po rozepsání dostaneme tuto soustavu ve tvaru

$$\begin{aligned} (a_{11}-1)x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n + b_1 &= 0\,, \\ a_{21}x_1 + (a_{22}-1)x_2 + \cdots + a_{2n}x_n + b_2 &= 0\,, \\ &\vdots \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \cdots + (a_{nn}-1)x_n + b_n &= 0\,. \end{aligned} \tag{2.4.2}$$

Je zřejmé, že množina řešení soustavy (2.4.2), pokud je to neprázdná množina, je opravdu podprostor v $\mathcal{A}_n$, což je v souladu s Větou 2.4.1. Navíc, je-li matice $(A - E_n)$ regulární, má soustava (2.4.2) právě jedno řešení a tedy zobrazení f má právě jeden samodružný bod.

Věta 2.4.2. *Pokud má afinní zobrazení f alespoň jeden samodružný bod, pak existuje takový afinní repér $\mathcal{R}$ v $\mathcal{A}_n$, že f má vzhledem k tomuto repéru souřadnicové vyjádření*

$$(f(X)) = A(X)\,. \tag{2.4.3}$$

Důkaz. Je-li $\mathcal{R} = \langle P; \mathbf{e}_1, \ldots, \mathbf{e}_n \rangle$ afinní repér a počátek je samodružný bod f, tj. $f(P) = P$, pak tvrzení plyne z $P = [0; \ldots; 0]$. □

Definice 2.4.2. Nechť f je afinní zobrazení prostoru $\mathcal{A}_n$ do sebe a φ_f je jeho asociované lineární zobrazení. *Vlastním směrem*, respektive *vlastním vektorem*, respektive *vlastním číslem*, afinního zobrazení f rozumíme vlastní směr, respektive vlastní vektor, respektive vlastní číslo, asociovaného lineárního zobrazení φ_f.

Připomeňme, jak je definován vlastní směr, vlastní vektor a vlastní číslo lineárního zobrazení $\varphi_f : Z(\mathcal{A}_n) \to Z(\mathcal{A}_n)$. *Vlastní směr lineárního zobrazení φ_f* je jednodimenzionální podprostor $L(\mathbf{u})$, který je invariantní vzhledem k φ_f, tj. $\varphi_f(L(\mathbf{u})) \subset L(\mathbf{u})$. Nenulový vektor $\mathbf{u}$, který generuje vlastní směr, se nazývá *vlastní vektor lineárního zobrazení φ_f* a musí pro něj platit $\varphi_f(\mathbf{u}) = \lambda\mathbf{u}$. Reálné číslo λ z předchozího vyjádření se nazývá *vlastní číslo lineárního zobrazení φ_f* příslušné vlastnímu vektoru $\mathbf{u}$.

Poznámka 2.4.2. Z geometrického významu vlastního směru vyplývá, že přímka, jejíž zaměření je vlastním směrem, se zobrazí buď do bodu (pro nulové vlastní číslo) nebo se zobrazí na přímku rovnoběžnou. ♢

Vyjádřeme nyní podmínky pro vlastní směry v libovolných souřadnicích. Nechť vzhledem k libovolnému repéru v $\mathcal{A}_n$ má φ_f souřadnicové vyjádření $(\mathbf{u}') = A(\mathbf{u})$. Podmínka $\varphi_f(\mathbf{u}) = \lambda\mathbf{u}$ pro vlastní vektor je nyní tvaru $A(\mathbf{u}) = \lambda(\mathbf{u})$, což upravíme na tvar

$$(A - \lambda E_n)(\mathbf{u}) = (\mathbf{o})\,, \tag{2.4.4}$$

kde E_n je jednotková matice řádu n a $\mathbf{o}$ je nulový vektor. (2.4.4) jsou maticovým zápisem soustavy homogenních lineárních rovnic

$$\begin{aligned} (a_{11} - \lambda)u_1 + a_{12}u_2 + \cdots + a_{1n}u_n &= 0\,, \\ a_{21}u_1 + (a_{22} - \lambda)u_2 + \cdots + a_{2n}u_n &= 0\,, \\ &\vdots \\ a_{n1}u_1 + a_{n2}u_2 + \cdots + (a_{nn} - \lambda)u_n &= 0\,. \end{aligned} \tag{2.4.5}$$

Protože podle předpokladu musí být vlastní vektor nenulový, musí mít soustava (2.4.5) nenulové řešení a tedy determinant matice soustavu $(A-\lambda E_n)$ musí být nulový.

Věta 2.4.3. *Hodnota determinantu $|A-\lambda E_n|$ je nezávislá na zvoleném afinním repéru v $\mathcal{A}_n$.*

Důkaz. Je-li $\mathcal{R}'$ jiný repér v $\mathcal{A}_n$ a Q je matice přechodu od repéru $\mathcal{R}$ k repéru $\mathcal{R}'$, je podle Věty 2.2.2 matice φ_f vzhledem k repéru $\mathcal{R}'$ tvaru $Q^{-1}AQ$. Potom $|Q^{-1}AQ-\lambda E_n| = |Q^{-1}AQ - Q^{-1}\lambda E_n Q| = |Q^{-1}(A-\lambda E_n)Q| = |Q^{-1}|\cdot|(A-\lambda E_n)|\cdot|Q| = \frac{1}{|Q|}\cdot|(A-\lambda E_n)|\cdot|Q| = |(A-\lambda E_n)|$. □

Definice 2.4.3. Nechť f je afinní zobrazení prostoru $\mathcal{A}_n$ do sebe a φ_f je jeho asociované lineární zobrazení. Nechť má f vzhledem k nějakém afinnímu repéru souřadnicové rovnice $(X') = A(X) + B$. Rovnice

$$|A-\lambda E_n| = 0 \tag{2.4.6}$$

se nazývá *charakteristická rovnice* afinního zobrazení f.

Poznámka 2.4.3. Charakteristická rovnice (2.4.6) afinního zobrazení je tedy totožná s charakteristickou rovnicí asociovaného lineárního zobrazení φ_f. Z Věty 2.4.3 vyplývá, že charakteristická rovnice je nezávislá na použitých souřadnicích a je to tedy opravdu rovnice přiřazená jednoznačně danému afinnímu zobrazení. ♢

Poznámka 2.4.4. Rozepišme charakteristickou rovnici (2.4.6) afinního zobrazení podrobněji. Dostaneme

$$\begin{vmatrix} (a_{11}-\lambda) & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & (a_{22}-\lambda) & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & (a_{nn}-\lambda) \end{vmatrix} = 0 \tag{2.4.7}$$

a odtud je okamžitě vidět, že charakteristická rovnice je polynomiální rovnice stupně n. Vlastní čísla afinního zobrazení jsou potom reálné kořeny charakteristické rovnice. Z nezávislosti charakteristické rovnice na afinním repéru, vzhledem ke kterému vyjadřujeme rovnice afinního zobrazení, vyplývá, že také vlastní čísla jsou na zvoleném repéru nezávislá.

Poznamenejme ještě, že má-li charakteristická rovnice afinního zobrazení f dvojici komplexně sdružených kořenů, odpovídá jim dvoudimenzionální podprostor invariantní vzhledem k φ_f, a tedy roviny, které mají tento podprostor jako zaměření se zobrazí na rovnoběžné roviny. ♢

Pro libovolný nenulový kořen charakteristické rovnice (2.4.7) dostaneme, že homogenní soustava (2.4.5) má nenulové řešení a každý nenulový vektor, který je řešením soustavy (2.4.5), je vlastním vektorem příslušným k tomuto kořenu.

Poznámka 2.4.5. Pro nulový kořen charakteristické rovnice (2.4.6) afinního zobrazení platí, že mu odpovídající vektory se zobrazí na nulový vektor. Je tedy obecné řešení soustavy (2.4.5) pro $\lambda = 0$ jádrem φ_f. Protože prosté lineární zobrazení má triviální jádro, dostáváme tak, že f je prosté (je to afinita) právě tehdy, když nula není vlastním číslem f. $\diamondsuit$

Později, při klasifikacích afinit, budeme potřebovat následující větu.

Věta 2.4.4. *Jestliže jednička není vlastním číslem $f : \mathcal{A}_n \to \mathcal{A}_n$, pak má f právě jeden samodružný bod.*

Důkaz. Provedeme v libovolném repéru. Jestliže jednička není kořenem charakteristické rovnice, je matice $(A - E_n)$ regulární a nehomogenní soustava (2.4.2) má právě jedno řešení. $\square$

Věta 2.4.5. *Vlastní vektory příslušné různým vlastním číslům jsou lineárně nezávislé.*

Důkaz. Nechť $\lambda_1, \dots \lambda_k$ jsou navzájem různá vlastní čísla lineárního zobrazení φ_f a $\langle \mathbf{u}_1, \dots, \mathbf{u}_k \rangle$ jsou jim odpovídající vlastní vektory. Z posloupnosti $\langle \mathbf{u}_1, \dots, \mathbf{u}_k \rangle$ vybereme libovolnou maximální posloupnost nezávislých vektorů, nechť je to například prvních r vektorů $\langle \mathbf{u}_1, \dots, \mathbf{u}_r \rangle$, $1 \leq r \leq k$. Nyní pokračujeme sporem. Předpoládejme, že $r < k$. Potom

$$\mathbf{u}_{r+1} = \sum_{i=1}^{r} c_i \cdot \mathbf{u}_i\,, \qquad c_i \in \mathbb{R}\,,$$

a tedy $\lambda_{r+1} \cdot \mathbf{u}_{r+1} = \sum_{i=1}^{r} \lambda_{r+1} \cdot c_i \cdot \mathbf{u}_i$. Na druhé straně

$$\lambda_{r+1} \cdot \mathbf{u}_{r+1} = \varphi_f(\mathbf{u}_{r+1}) = \varphi_f(\sum_{i=1}^{r} c_i \cdot \mathbf{u}_i) = \sum_{i=1}^{r} c_i \cdot \varphi_f(\mathbf{u}_i) = \sum_{i=1}^{r} c_i \cdot \lambda_i \cdot \mathbf{u}_i\,.$$

Porovnáním dostaneme

$$\sum_{i=1}^{r} \lambda_{r+1} \cdot c_i \cdot \mathbf{u}_i = \sum_{i=1}^{r} c_i \cdot \lambda_i \cdot \mathbf{u}_i$$

tj.

$$\sum_{i=1}^{r} c_i \cdot (\lambda_{r+1} - \lambda_i) \cdot \mathbf{u}_i = \mathbf{o}\,.$$

Z lineární nezávislosti $\langle \mathbf{u}_1, \dots, \mathbf{u}_r \rangle$ plyne $c_i \cdot (\lambda_{r+1} - \lambda_i) = 0$, $i = 1, \cdots, r$, a podle předpokladu $(\lambda_{r+1} - \lambda_i) \neq 0$ musí být $c_i = 0$ pro všechna $i = 1, \cdots, r$. Potom ale $\mathbf{u}_{r+1} = \mathbf{o}$ a to je ve sporu s definicí vlastního vektoru, který musí být nenulový. Tedy $r = k$ a vektory $\langle \mathbf{u}_1, \dots, \mathbf{u}_k \rangle$ jsou lineárně nezávislé. □

Věta 2.4.6. *Nechť má afinní zobrazení $f : \mathcal{A}_n \to \mathcal{A}_n$ n různých (reálných) vlastních čísel $\lambda_1, \dots, \lambda_n$. Potom vzhledem k afinnímu repéru, kde za základní souřadné vektory vezmeme vlastní vektory f, má f souřadnicové rovnice*

$$\begin{aligned} x_1' &= \lambda_1 x_1 + b_1 \,, \\ &\dots \\ x_n' &= \lambda_n x_n + b_n \,, \end{aligned}$$

tj. matice afinního zobrazení je diagonální. Má-li navíc f alespoň jeden samodružný bod, volbou počátku afinního repéru do samodružného bodu dostaneme $b_i = 0$, $i = 1, \dots, n$.

Důkaz. Je-li v afinním repéru $\mathcal{R} = \langle P; \mathbf{e}_1, \dots, \mathbf{e}_n \rangle$ vektor $\mathbf{e}_i$ vlastní vektor f příslušný vlastnímu číslu λ_i, jsou v i-tém sloupci matice zobrazení souřadnice vektoru $\varphi_f(\mathbf{e}_i) = (0; \cdots; 0; \lambda_i; 0; \cdots; 0)$, kde λ_i je na i-tém místě. □

Úloha 2.4.1. Určete všechny samodružné body a vlastní směry afinního zobrazení na $\mathcal{A}_3$, které je dáno vzhledem k nějakému repéru rovnicemi

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & -2 & 6 \\ 1 & 0 & 3 \\ -1 & 1 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -2 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Řešení: Zobrazení má rovinu samodružných bodů $\rho : x - y + 3z + 1 = 0$. Charakteristická rovnice je $-\lambda^3 + \lambda^2 + \lambda - 1 = 0$. Kořeny jsou $\lambda_{1,2} = 1$ a $\lambda_3 = -1$. Kořeni $\lambda_{1,2} = 1$ odpovídá dvoudimenzionální prostor vlastních vektorů $k\,(-3; 0; 1) + l\,(1; 1; 0)$ a kořeni $\lambda_3 = -1$ odpovídá jednodimenzionální prostor vlastních vektorů $m\,(-2; -1; 1)$. △

2.5 Posunutí, stejnolehlost, homotetie

Na střední škole jsme studovali posunutí a stejnolehlost v euklidovských prostorech. Tato zobrazení se ale dají definovat již v afinních prostorech libovolné dimenze. Začneme s posunutím.

Definice 2.5.1. Nechť $\mathbf{u} \in Z(\mathcal{A}_n)$ je vektor. Zobrazení, které přiřadí každému bodu $X \in \mathcal{A}_n$ bod $X' \in \mathcal{A}_n$ takový, že

$$X' = X + \mathbf{u} \tag{2.5.1}$$

se nazývá *posunutí (translace) afinního prostoru* $\mathcal{A}_n$ o vektor $\mathbf{u}$ a značíme ho $t_{\mathbf{u}}$.

Věta 2.5.1. *Posunutí o nulový vektor je identita, posunutí o nenulový vektor je afinita $\mathcal{A}_n$, která nemá žádný samodružný bod a všechny směry jsou vlastní směry.*

Důkaz. Nechť $\mathbf{u} = \mathbf{o}$. Potom $t_{\mathbf{o}}(X) = X + \mathbf{o} = X$, a tedy $t_{\mathbf{o}} \equiv \mathrm{id}_{\mathcal{A}_n}$.

Nechť $\mathbf{u} \neq \mathbf{o}$. Protože $t_{\mathbf{u}}(X) = X + \mathbf{u}$, je podle axiomů afinního prostoru ([HoJa]) $t_{\mathbf{u}}$ bijekce $\mathcal{A}_n$. Nechť $X, Y, Z \in \mathcal{A}_n$ jsou tři body takové, že $\overrightarrow{XZ} = \lambda\overrightarrow{YZ}$, $\lambda \in \mathbb{R}$. Potom

$$\begin{aligned}\overrightarrow{t_{\mathbf{u}}(X)t_{\mathbf{u}}(Z)} &= (Z + \mathbf{u}) - (X + \mathbf{u}) = \overrightarrow{XZ} = \lambda\overrightarrow{YZ}\\ &= \lambda(Z - Y) = \lambda((Z + \mathbf{u}) - (Y + \mathbf{u}))\\ &= \lambda\overrightarrow{t_{\mathbf{u}}(Y)t_{\mathbf{u}}(Z)}\,,\end{aligned}$$

a podle Věty 2.1.1 je $t_{\mathbf{u}}$ afinní zobrazení.

Dále, pro samodružný bod platí $X = X + \mathbf{u}$, a z vlastností afinních prostorů to je možné pouze pro $\mathbf{u} = \mathbf{o}$, kdy je každý bod samodružný. Pro $\mathbf{u} \neq \mathbf{o}$ nemůže být žádný bod samodružný.

Pro asociované lineární zobrazení $\varphi_{t_{\mathbf{u}}}$ platí

$$\begin{aligned}\varphi_{t_{\mathbf{u}}}(\overrightarrow{XY}) &= \overrightarrow{t_{\mathbf{u}}(X)t_{\mathbf{u}}(Y)}\\ &= (Y + \mathbf{u}) - (X + \mathbf{u}) = \overrightarrow{XY}\,,\end{aligned}$$

tj. $\varphi_{t_{\mathbf{u}}} \equiv \mathrm{id}_{Z(\mathcal{A}_n)}$, která má všechny směry samodružné. □

Vyjádřeme nyní posunutí o vektor $\mathbf{u}$ v libovolném afinním repéru. Nechť $\mathbf{u} = (u_1; \dots ; u_n)$ je souřadnicové vyjádření vektoru $\mathbf{u}$. $X = [x_1; \dots ; x_n]$ je libovolný bod a $X' = X + \mathbf{u}$. Potom v souřadnicích tomu odpovídá maticový zápis

$$(X') = E_n(X) + (\mathbf{u})\,, \tag{2.5.2}$$

kde E_n je jednotková matice řádu n. Rozepsáním jednotlivých souřadnic dostaneme

$$\begin{aligned} t_{\mathbf{u}}:\quad x_1' &= x_1 + u_1\,,\\ &\dots\\ x_n' &= x_n + u_n\,. \end{aligned} \tag{2.5.3}$$

Posunutí je tedy afinita s jednotkovou maticí jako maticí zobrazení v libovolném souřadnicovém vyjádření.

Věta 2.5.2. *Množina všech posunutí $\mathfrak{T}_n$ s operací skládání zobrazení je komutativní podgrupa v grupě afinit afinního prostoru $\mathcal{A}_n$. Navíc je zobrazení $Z(\mathcal{A}_n) \to \mathfrak{T}_n$ zadané předpisem $\mathbf{u} \mapsto t_{\mathbf{u}}$ izomorfismem grup.*

Důkaz. Posunutí příslušné nulovému vektoru je identita, které je neutrálním prvkem vzhledem ke skládání zobrazení. Mějme dále dva vektory $\mathbf{u}$ a $\mathbf{v}$. Potom

$$(t_{\mathbf{v}} \circ t_{\mathbf{u}})(X) = (X + \mathbf{u}) + \mathbf{v} = X + (\mathbf{u} + \mathbf{v}) = (X + \mathbf{v}) + \mathbf{v} = (t_{\mathbf{u}} \circ t_{\mathbf{v}})(X)\,.$$

Tedy $t_{\mathbf{v}} \circ t_{\mathbf{u}} = t_{\mathbf{u}+\mathbf{v}} = t_{\mathbf{u}} \circ t_{\mathbf{v}}$. □

Definice 2.5.2. Nechť $S \in \mathcal{A}_n$ je bod a $0 \neq \kappa \in \mathbb{R}$. Zobrazení, které přiřadí každému bodu $X \in \mathcal{A}_n$ bod $X' \in \mathcal{A}_n$ takový, že

$$\overrightarrow{SX'} = \kappa \overrightarrow{SX} \tag{2.5.4}$$

se nazývá *stejnolehlost afinního prostoru* $\mathcal{A}_n$ a značíme ho $s(S, \kappa)$. Bod S se nazývá *střed stejnolehlosti* a číslo κ *koeficient stejnolehlosti*. Pro $\kappa \neq 1$ hovoříme o *vlastní stejnolehlosti.*

Poznámka 2.5.1. Na střední škole byla stejnolehlost definována jako zobrazení v euklidovské rovině, které bylo dáno bodem S (středem stejnolehlosti) a reálným číslem $\kappa \neq 0$ (koeficientem stejnolehlosti). Každý bod $X \neq S$ se zobrazil do bodu X' takového, že platí:

1. polopřímky SX a SX' jsou totožné pro $\kappa > 0$ a opačné pro $\kappa < 0$;
2. $|SX'| = |\kappa| \cdot |SX|$, tj. $|\kappa| = \frac{|SX'|}{|SX|}$.

Snadno se vidí, že tato definice se dá rozšířit na euklidovský prostor libovolné dimenze a že určuje totéž zobrazení jako Definice 2.5.2. ♢

Poznámka 2.5.2. Snadno se vidí, že rovnici (2.5.2) můžeme přepsat do tvaru

$$X' = \kappa\, X + (1 - \kappa)\, S\,, \tag{2.5.5}$$

což znamená, že X' je afinní kombinací bodů X a S, leží tedy, pro $X \neq S$, na přímce SX. ♢

Věta 2.5.3. *Stejnolehlost s koeficientem $\kappa = 1$ je identita, stejnolehlost s koeficientem $\kappa \neq 1$ je afinita $\mathcal{A}_n$, která má jediný samodružný bod S a všechny směry jsou vlastní směry.*

Důkaz. Nechť $\kappa = 1$, potom $s(S,1)(X) = X$, a tedy $s(S,1) \equiv \mathrm{id}_{\mathcal{A}_n}$.

Nechť $\kappa \neq 1$, označujme v tomto důkaze krátce $s(S,\kappa) = s$.

s je bijekce. Opravdu máme $s(X) = s(Y) \Leftrightarrow \kappa X + (1-\kappa)S = \kappa Y + (1-\kappa)S \Leftrightarrow \kappa X = \kappa Y \Leftrightarrow \kappa\overrightarrow{XY} = \mathbf{o} \Leftrightarrow X = Y$, tj. s je injektivní. Podobně, je-li $X' \in \mathcal{A}_n$, pak existuje právě jeden bod $X \in \mathcal{A}_n$ takový, že $s(X) = X'$ a to bod $X = \frac{1}{\kappa}X' - \frac{1-\kappa}{\kappa}S$, což znamená, že s je surjektivní.

Nechť $X, Y, Z \in \mathcal{A}_n$ jsou tři body takové, že $\overrightarrow{XZ} = \lambda\overrightarrow{YZ}$. Potom

$$\begin{aligned}\overrightarrow{s(X)s(Z)} &= (\kappa Z + (1-\kappa)S) - (\kappa X + (1-\kappa)S) = \kappa\overrightarrow{XZ} \\ &= \kappa\lambda\overrightarrow{YZ} = \lambda((\kappa Z + (1-\kappa)S) - (\kappa Y + (1-\kappa)S) \\ &= \lambda\overrightarrow{s(Y)s(Z)}\,,\end{aligned}$$

a podle Věty 2.1.1 je s afinní zobrazení.

Pro samodružné body platí $X = \kappa X + (1-\kappa)S \Leftrightarrow (1-\kappa)X = (1-\kappa)S \Leftrightarrow (1-\kappa)\overrightarrow{XS} = \mathbf{o} \Leftrightarrow \kappa = 1 \vee X = S$. Tedy pro $\kappa = 1$ je každý bod samodružný (stejnolehlost je identita) a pro $\kappa \neq 1$ je samodružný jediný bod S.

Pro libovolný vektor $\overrightarrow{XY}$ je $\varphi_s(\overrightarrow{XY}) = \overrightarrow{s(X)s(Y)} = \kappa\overrightarrow{XY}$, tj. $\mathbf{u} = \overrightarrow{XY}$ je vlastní vektor příslušný vlastnímu číslu κ. Protože $\mathbf{u}$ byl libovolný vektor, jsou všechny směry vlastní směry s příslušné vlastnímu číslu κ. $\square$

Připomeňme, že vyjádření (2.5.4) se dá psát jako $X' = \kappa X + (1-\kappa)S$ a v souřadnicích v libovolném afinním repéru tomu odpovídá maticový zápis

$$(X') = \kappa E_n(X) + (1-\kappa)(S)\,, \tag{2.5.6}$$

což pro $S = [s_1; \ldots; s_n]$ rozepíšeme

$$\begin{aligned} s(S,\kappa):\quad x_1' &= \kappa x_1 + (1-\kappa)s_1\,, \\ &\ \ldots \\ x_n' &= \kappa x_n + (1-\kappa)s_n\,, \end{aligned} \tag{2.5.7}$$

a tedy stejnolehlost s koeficientem κ je afinita s maticí κE_n v libovolném souřadnicovém vyjádření.

Poznámka 2.5.3. Protože vzhledem k libovolnému afinnímu repéru je matice stejnolehlosti, respektive posunutí, rovna κE_n, respektive E_n, je modul stejnolehlosti roven κ^n, respektive je modul posunutí roven 1.

Posunutí je tedy vždy přímá afinita. Je-li dimenze afinního prostoru sudá, je $\kappa^n > 0$ a každá vlastní stejnolehlost je přímá afinita. Je-li dimenze prostoru lichá, jsou stejnolehlosti s kladným koeficieltem přímé afinity a stejnolehlosti se záporným koeficientem nepřímé afinity. $\diamondsuit$

Z Vět 2.5.1 a 2.5.3 vyplývá, že stejnolehlosti a posunutí mají společnou vlastnost – všechny směry prostoru $\mathcal{A}_n$ jsou vlastní směry těchto zobrazení. Studujme obecně všechna afinní zobrazení na $\mathcal{A}_n$, která mají tuto vlastnost.

Definice 2.5.3. Afinita afinního prostoru $\mathcal{A}_n$, pro kterou je libovolný směr vlastním směrem, se nazývá *homotetie afinního prostoru* $\mathcal{A}_n$.

Věta 2.5.4. *Je-li f homotetie afinního prostoru $\mathcal{A}_n$, pak je f buď posunutí, nebo stejnolehlost.*

Důkaz. Nechť f je afinní zobrazení na $\mathcal{A}_n$, které má všechny směry vlastní, tj. pro každý vektor $\mathbf{u} \in Z(\mathcal{A}_n)$ existuje $\lambda(\mathbf{u})$ takové, že platí $\varphi_f(\mathbf{u}) = \lambda(\mathbf{u})\mathbf{u}$, kde λ je funkce $\mathbf{u}$. Nechť $\langle \mathbf{e}_1, \dots, \mathbf{e}_n \rangle$ je libovolná báze $Z(\mathcal{A}_n)$. Potom $\varphi_f(\mathbf{e}_i) = \lambda_i \mathbf{e}_i$, $i = 1 \dots, n$, a odtud

$$\varphi_f(\mathbf{e}_1 + \dots + \mathbf{e}_n) = \lambda_1 \mathbf{e}_1 + \dots + \lambda_n \mathbf{e}_n$$

a současně

$$\varphi_f(\mathbf{e}_1 + \dots + \mathbf{e}_n) = k(\mathbf{e}_1 + \dots + \mathbf{e}_n)\,.$$

Tedy $k = \lambda_1 = \dots = \lambda_n$. Odtud $\varphi_f(\mathbf{u}) = k\mathbf{u}$ pro všechna $\mathbf{u} \in Z(\mathcal{A}_n)$ a všechny směry jsou vlastní směry f příslušné jedinému vlastnímu číslu k.

a) Nechť nyní $k = 0$. Potom $\varphi_f(\mathbf{u}) = \mathbf{o}$ je nulové zobrazení. Uvažujme libovolný bod $B \in \mathcal{A}_n$, potom $f(B + \mathbf{u}) = f(B)$, tj. celý prostor se zobrazuje do jediného bodu $f(B)$. Toto zobrazení ovšem není homotetií, protože není afinitou.

b) Nechť $k \neq 0$. Potom $\varphi_f(\mathbf{u}) = k\mathbf{u}$ a každý směr je vlastním směrem příslušným vlastní hodnotě k, tj. f je homotetie. Potom $f(B + \mathbf{u}) = f(B) + k\overrightarrow{BX}$, kde $X = B + \mathbf{u}$. Pro $k = 1$ je toto zobrazení posunutím o vektor $\overrightarrow{Bf(B)}$ a pro $k \neq 1$ jde o vlastní stejnolehlost s koeficientem k a středem $S = B + \frac{1}{1-k}(f(B) - B)$. $\square$

Věta 2.5.5. *Homotetie afinního prostoru $\mathcal{A}_n$ tvoří podgrupu v grupě afinit.*

Důkaz. Z Definice 2.5.3 je zřejmé, že složením dvou homotetií je opět homotetie a že identita je homotetie. Musíme pouze ukázat, že je-li f homotetie, je i f^{-1} homotetie. V důkaze Věty 2.5.4 jsme dokázali, že pro homotetii f existuje nenulové číslo k takové, že $\varphi_f(\mathbf{u}) = k\mathbf{u}$, $\forall \mathbf{u} \in Z(\mathcal{A}_n)$. Protože je φ_f izomosfizmus, je $\mathbf{u} = (\varphi_f)^{-1}(\varphi_f(\mathbf{u})) = (\varphi_f)^{-1}(k\mathbf{u}) = k(\varphi_f)^{-1}(\mathbf{u})$, a tedy $(\varphi_f)^{-1}(\mathbf{u}) = \frac{1}{k}\mathbf{u}$ a z identity $(\varphi_f)^{-1} \equiv \varphi_{f^{-1}}$ dostaneme, že každý směr je vlastním směrem f^{-1} pro vlastní hodnotu $\frac{1}{k}$, a tedy f^{-1} je homotetie. $\square$

Definice 2.5.4. Podgrupa v grupě afinit prostoru $\mathcal{A}_n$, kterou jsme definovali v předchozí Větě 2.5.5 se nazývá *grupa homotetií afinního prostoru* $\mathcal{A}_n$ a označujeme ji $(\mathfrak{H}_n, \circ)$.

Podle Věty 2.5.5 je složením dvou homotetií opět homotetie. Probereme si jednotlivé možnosti, které mohou nastat.

Nechť jsou obě homotetie posunutím, tj. $t_{\mathbf{u}}$ a $t_{\mathbf{v}}$. Potom

$$(t_{\mathbf{v}} \circ t_{\mathbf{u}})(X) = t_{\mathbf{v}}(X + \mathbf{u}) = (X + \mathbf{u}) + \mathbf{v} = X + (\mathbf{u} + \mathbf{v}) = t_{(\mathbf{u}+\mathbf{v})}(X)\,,$$

a tedy složením dvou posunutí o vektory $\mathbf{u}$, respektive $\mathbf{v}$, je posunutí o vektor $\mathbf{u}+\mathbf{v}$. Operace skládání posunutí je tedy vnitřní operací na množině všech posunutí, a protože identita je také posunutí a $t_{-\mathbf{u}}$ je opačné posunutí k $t_{\mathbf{u}}$, je množina všech posunutí grupa, která je navíc komutativní (to vyplývá z toho, že $t_{\mathbf{v}} \circ t_{\mathbf{u}} = t_{(\mathbf{u}+\mathbf{v})} = t_{(\mathbf{v}+\mathbf{u})} = t_{\mathbf{u}} \circ t_{\mathbf{v}}$). Grupu všech posunutí značíme $(\mathfrak{T}_n, \circ)$ a tato grupa je izomorfní s grupou $(Z(\mathcal{A}_n), +)$. V některých přístupech ke středoškolské látce byl izomorfizmus těchto grup využíván k definici pojmu volného vektoru, který byl definován jako příslušné posunutí.

Nechť je nyní jedna homotetie posunutí $t_{\mathbf{u}}$, $\mathbf{u} \neq \mathbf{o}$, a druhá vlastní stejnolehlost $s(S,\kappa)$. Potom

$$(t_{\mathbf{u}} \circ s(S,\kappa))(X) = t_{\mathbf{u}}(\kappa X + (1-\kappa)S) = (\kappa X + (1-\kappa)S) + \mathbf{u}\,,$$

což je vlastní stejnolehlost s koeficientem κ a středem $S + \frac{1}{1-\kappa}\mathbf{u}$ (poznamenejme, že střed se určí jako samodružný bod). Protože $(\kappa X + (1-\kappa)S) + \mathbf{u} = \kappa(X+\mathbf{u}) + (1-\kappa)(S+\mathbf{u}) = s(S+\mathbf{u},\kappa) \circ t_{\mathbf{u}}(X)$ je $t_{\mathbf{u}} \circ s(S,\kappa) = s(S+\mathbf{u},\kappa) \circ t_{\mathbf{u}}$ takže skládání posunutí a vlastní stejnolehlosti nekomutuje, protože $s(S,\kappa) \not\equiv s(S+\mathbf{u},\kappa)$.

Podobně dostaneme, že $s(S,\kappa) \circ t_{\mathbf{u}}$ je vlastní stejnolehlost s koeficientem κ a středem $S + \frac{\kappa}{1-\kappa}\mathbf{u}$.

Konečně mějme dvě stejnolehlosti $s(S,\kappa)$ a $s(R,\lambda)$. Potom

$$\begin{aligned}(s(R,\lambda) \circ s(S,\kappa))(X) &= s(R,\lambda)(\kappa X + (1-\kappa)S)\\ &= \lambda(\kappa X + (1-\kappa)S) + (1-\lambda)R\\ &= \lambda\kappa X + \lambda(1-\kappa)S + (1-\lambda)R\\ &= \lambda\kappa X + \lambda(S-R) - \lambda\kappa S + R\,.\end{aligned}$$

Odtud okamžitě vyplývá, že pro $\lambda\kappa = 1$ je složené zobrazení posunutím o vektor $(1-\lambda)\overrightarrow{SR}$. Je-li navíc $S \equiv R$, je složené zobrazení identita, a tedy $(s(S,\kappa))^{-1} \equiv s(S, \frac{1}{\kappa})$. Pro $\lambda\kappa \neq 1$ je složené zobrazení opět stejnolehlost s koeficientem $\lambda\kappa$ a středem $\frac{1}{1-\lambda\kappa}\big(\lambda(S-R) - \lambda\kappa S + R\big)$. Pokud bychom složili stejnolehlosti v opačném pořadí, dostaneme

$$(s(S,\kappa) \circ s(R,\lambda))(X) = \lambda\kappa X + \kappa(R-S) - \lambda\kappa R + S$$

tj. skládání stejnolehlostí není komutativní. Složením dvou stejnolehlostí tedy není obecně stejnolehlost ale homotetie, a samotné stejnolehlosti tedy netvoří grupu.

Poznámka 2.5.4. Je-li koeficient stejnolehlosti roven -1, je $X' = -X + 2\,S$, t.j. $\overrightarrow{SX'} = -\overrightarrow{SX}$ a dostáváme *symetrii podle bodu (středovou symetrii)* S jako speciální případ vlastní stejnolehlosti. Bod S se nazývá *středem symetrie*.

Navíc, podle předchozích úvah pro skládání stejnolehlostí a posunutí, dostaneme, že složením středové symetrie a posunutí bude středová symetrie. Konkrétně, je-li $s(S)$ středová symetrie se středem S a $t_{\mathbf{u}}$ posunutí o vektor $\mathbf{u}$, dostaneme

$$\begin{aligned} s(S) \circ t_{\mathbf{u}} : &\quad X' = -X + 2\,(S - \tfrac{1}{2}\mathbf{u})\,, \\ t_{\mathbf{u}} \circ s(S) : &\quad X' = -X + 2\,(S + \tfrac{1}{2}\mathbf{u})\,. \end{aligned}$$

V prvním případě je složené zobrazení středovou symetrií se středem $S - \frac{1}{2}\mathbf{u}$ a ve drohém případě je nový střed symetrie bod $S + \frac{1}{2}\mathbf{u}$.

Dále, složení dvou středových symetrií s různými středy je posunutí. Podle předchozích úvah máme

$$(s(R) \circ s(S))(X) = X + 2\,\overrightarrow{SR}$$

a

$$(s(S) \circ s(R))(X) = X + 2\,\overrightarrow{RS}\,,$$

tj. složením dvou středových symetrií je posunutí o vektor, který je dvojnásobkem vektoru určeného středy symetrií. Orientace závisí na pořadí, v jakém symetrie skládáme. Dostáváme tak následující důsledek. ♢

Důsledek 2.5.1. Množina středových symetrií a posunutí tvoří vzhledem k operaci skládání zobrazení grupu, která je podgrupou v grupě homotetií. □

Věta 2.5.6. *Nechť t je posunutí a h je homotetie, pak $h^{-1} \circ t \circ h$ je posunutí.*

Důkaz. Na základě Vět 2.5.1 a 2.5.4 je posunutí taková homotetie, která nemá samodružný bod. Důkaz nyní provedeme sporem. Nechť homotetie $h^{-1} \circ t \circ h$ má samodružný bod P, tj. $(h^{-1} \circ t \circ h)(P) = P$. Potom $h(P) = (t \circ h)(P)$, a tedy t má samodružný bod $h(P)$ a to je ve sporu s předpokladem, že t je posunutí. Tedy $h^{-1} \circ t \circ h$ nemá samodružné body a jedná se o posunutí. □

Důsledek 2.5.2. Je-li t posunutí a s středová symetrie, je $s^{-1} \circ t \circ s$ posunutí. □

Poznámka 2.5.5. Připoměňme, že podgrupa $\mathfrak{T}$ grupy $\mathfrak{H}$ se nazývá *normální podgrupa*, je-li pro každé $t \in \mathfrak{T}$ a každé $h \in \mathfrak{H}$ prvek $h^{-1} \circ t \circ h \in \mathfrak{T}$. Je tedy grupa posunutí normální podgrupou v grupě homotetií i v podgrupě posunutí a středových symetrií. ♢

Poznámka 2.5.6. Shrneme-li výsledky Části 3 a Vět 2.5.5 a 2.5.6 dostáváme následující graf podgrup grupy všech afinit prostoru $\mathcal{A}_n$, kde šipka znázorňuje inkluzi. Situaci musíme navíc rozlišit pro lichou a sudou dimenzi.

Sudá dimenze $n = 2k$:

$$\begin{tikzcd}
 & (\mathfrak{A}_n, \circ) \arrow[dl] \arrow[dr] & \\
({\mathfrak{A}_n}^+, \circ) \arrow[d] \arrow[drr] & & (\mathfrak{E}_n, \circ) \arrow[d] \\
(\mathfrak{H}_n, \circ) \arrow[dr] & & (\mathfrak{E}_n^+, \circ) \arrow[dl] \\
 & (\mathfrak{T}_n + S.s., \circ) \arrow[d] & \\
 & (\mathfrak{T}_n, \circ) \arrow[d] & \\
 & (\mathrm{Id}, \circ) &
\end{tikzcd}$$

Lichá dimenze $n = 2k + 1$:

$$\begin{tikzcd}
 & (\mathfrak{A}_n, \circ) \arrow[dl] \arrow[d] \arrow[dr] & \\
({\mathfrak{A}_n}^+, \circ) \arrow[d] \arrow[dr] & (\mathfrak{E}_n, \circ) \arrow[d] \arrow[dr] & (\mathfrak{H}_n, \circ) \arrow[dll] \arrow[d] \\
(\mathfrak{H}_n^+, \circ) \arrow[dr] & (\mathfrak{E}_n^+, \circ) \arrow[d] & (\mathfrak{T}_n + S.s., \circ) \arrow[dl] \\
 & (\mathfrak{T}_n, \circ) \arrow[d] & \\
 & (\mathrm{Id}, \circ) &
\end{tikzcd}$$

Připomeňme si kritéria, jak ze souřadnicového vyjádření afinity f poznat, do které podgrupy patří daná afinita. Především pro matici A afinity platí $|A| \neq 0$. Potom $f \in {\mathfrak{A}_n}^+$ právě tehdy, když $|A| > 0$, $f \in \mathfrak{E}_n$ právě tehdy, když $|A| = \pm 1$ a $f \in \mathfrak{H}_n$ právě tehdy, když $A = \kappa E_n$, $\kappa \neq 0$. Potom $f \in \mathfrak{E}_n^+ = \mathfrak{E}_n \cap {\mathfrak{A}_n}^+$ právě tehdy, když $|A| = 1$, $f \in \mathfrak{T}_n = \mathfrak{H}_n \cap \mathfrak{E}_n^+$ právě tehdy, když $A = E_n$, je-li navíc matice B nulová, jedná se o identitu. ♢

Úloha 2.5.1. Nechť je dána stejnolehlost s se středem $S = [1; 2; 1]$ a koeficientem

$\kappa = -2$ a posunutí t o vektor $\mathbf{u} = (-1; 1; 1)$. Ukažte:

a) že zobrazení s^{-1} je stejnolehlost, nalezněte její střed a koeficient;

b) že zobrazení $s \circ t$ je stejnolehlost, nalezněte její střed a koeficient;

c) že zobrazení $t \circ s$ je stejnolehlost, nalezněte její střed a koeficient;

d) že zobrazení $s^{-1} \circ t \circ s$ je posunutí, nalezněte vektor příslušný tomuto posunutí.

Řešení: Úlohu vyřešíme v souřadnicích. Určíme nejdříve souřadnicová vyjádření s a t. Podle (2.5.3) a (2.5.7) je

$$\begin{aligned} s:\ \ x' &= -2x + 3\,, & t:\ \ x' &= x - 1\,,\\ y' &= -2y + 6\,, & y' &= y + 1\,,\\ z' &= -2z + 3\,, & z' &= z + 1\,. \end{aligned}$$

a) Z rovnic s určíme snadno rovnice inverzního zobrazení

$$\begin{aligned} s^{-1}:\ \ x' &= -\tfrac{1}{2}x + \tfrac{3}{2}\,,\\ y' &= -\tfrac{1}{2}y + 3\,,\\ z' &= -\tfrac{1}{2}z + \tfrac{3}{2}\,, \end{aligned}$$

tj. s^{-1} je stejnolehlost s koeficientem $\lambda = -\frac{1}{2}$ a středem $S = [1; 2; 1]$.

b) Dosazením z rovnic t do rovnic s dostaneme

$$\begin{aligned} s \circ t:\ \ x' &= -2x + 5\,,\\ y' &= -2y + 4\,,\\ y' &= -2z + 1\,, \end{aligned}$$

tj. $s \circ t$ je stejnolehlost s koeficientem $\lambda = -2$ a středem $S = [\frac{5}{3}; \frac{4}{3}; \frac{1}{3}]$.

c) Dosazením z rovnic s do rovnic t dostaneme

$$\begin{aligned} t \circ s:\ \ x' &= -2x + 2\,,\\ y' &= -2y + 7\,,\\ y' &= -2z + 4\,, \end{aligned}$$

tj. $t \circ s$ je stejnolehlost s koeficientem $\lambda = -2$ a středem $S = [\frac{2}{3}; \frac{7}{3}; \frac{4}{3}]$.

d) Dosazením z rovnic $t \circ s$ do rovnic s^{-1} dostaneme

$$\begin{aligned} s^{-1} \circ t \circ s:\ \ x' &= x + \tfrac{1}{2}\,,\\ y' &= y - \tfrac{1}{2}\,,\\ y' &= z - \tfrac{1}{2}\,, \end{aligned}$$

tj. $s^{-1} \circ t \circ s$ je posunutí o vektor $\mathbf{u} = (\frac{1}{2}; -\frac{1}{2}; -\frac{1}{2})$. △

2.6 Základní afinní zobrazení

V této části se budeme zabývat těmi afinními zobrazeními prostoru $\mathcal{A}_n$ na sebe, které budou mít za množinu samodružných bodů nejméně nadrovinu. Tato afinní zobrazení hrají velice významnou roli, protože "generují" všechna afinní zobrazení na $\mathcal{A}_n$.

Definice 2.6.1. Afinní zobrazení afinního prostoru $\mathcal{A}_n$ do sebe, které má za množinu samodružných bodů nejméně nadrovinu, se nazývá *základní afinní zobrazení* v prostoru $\mathcal{A}_n$. Afinita afinního prostoru $\mathcal{A}_n$, která má za množinu samodružných bodů právě nadrovinu, se nazývá *základní afinita* prostoru $\mathcal{A}_n$.

Je-li $n = 2$, nazývá se základní afinita *osovou afinitou* a přímka samodružných bodů se nazývá *osou afinity.*

Věta 2.6.1. *Základní afinní zobrazení je určeno nadrovinou samodružných bodů a obrazem jednoho bodu, který v této nadrovině neleží.*

Důkaz. Podle Věty 2.1.9 je afinní zobrazení určeno obrazem $(n+1)$ bodů v obecné poloze. Zvolíme-li prvních n bodů v nadrovině samodružných bodů, tj. jsou samodružné, stačí pro určení afinního zobrazení znát obraz jediného bodu, který v této nadrovině neleží. □

Příklady základních afinních zobrazení známe z konstrukční geometrie v 3-rozměrném prostoru, kde se používá rovnoběžná projekce prostoru do roviny. Projekce se dají zobecnit na libovolnou dimenzi.

Definice 2.6.2. Nechť ρ je nadrovina v $\mathcal{A}_n$ a $\mathbf{o} \neq \mathbf{s} \in Z(\mathcal{A}_n)$ je libovolný vektor, který nepatří do zaměření ρ. Zobrazení, které každému bodu $X \in \mathcal{A}_n$ přiřadí bod $\rho \cap \{X; L(\mathbf{s})\}$ se nazývá *rovnoběžnou projekcí* prostoru $\mathcal{A}_n$ ve směru $L(\mathbf{s})$ do nadroviny ρ, značíme $r(\mathbf{s}, \rho)$. Směr $L(\mathbf{s})$ se nazývá *směrem projekce.*

Věta 2.6.2. *Rovnoběžná projekce prostoru do nadroviny ρ je afinní zobrazení hodnosti $(n-1)$, které má za množinu samodružných bodů nadrovinu ρ.*

Důkaz. Uvažujme rovnoběžnou projekci $r(\mathbf{s}, \rho)$. Nechť jsou dány tři kolineární různé body A, B, C ležící na přímce p. Pokud $p \parallel \mathbf{s}$, je $\{A; L(\mathbf{s})\} \equiv \{B; L(\mathbf{s})\} \equiv \{C; L(\mathbf{s})\}$ a obrazem všech tří bodů je jediný bod. Pokud $p \nparallel \mathbf{s}$, jsou přímky $\{A; L(\mathbf{s})\}$, $\{B; L(\mathbf{s})\}$, $\{C; L(\mathbf{s})\}$ navzájem různé a rovnoběžné. Potom obrazy bodů A, B, C jsou tři různé kolineární body v ρ ležící na přímce q, kterou dostaneme jako průnik ρ s rovinou $\{A; Z(p) + L(\mathbf{s})\}$ (opravdu, podle Věty 6.5 skript [HoJa], je tento průnik přímka). Zachování dělícího poměru vyplývá z Věty 8.4 skript [HoJa] (viz také Úloha 2.1.1), a tedy $r(\mathbf{s}, \rho)$ je afinní zobrazení.

Z definice je zřejmé, že pro $X \in \rho$ je $r(\mathbf{s}, \rho)(X) = X$ a $r(\mathbf{s}, \rho)(\mathcal{A}_n) = \rho$, tj. $h(r(\mathbf{s}, \rho)) = n - 1$. □

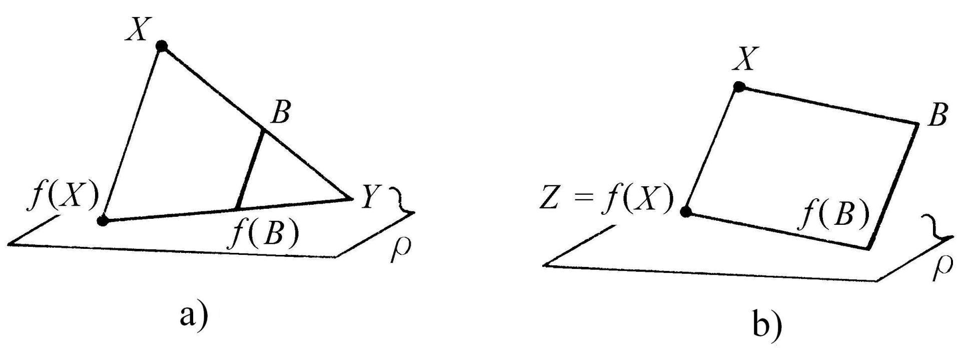
Věta 2.6.3. *Nechť ρ je nadrovina v $\mathcal{A}_n$. Afinní zobrazení, pro které je ρ silně samodružná, je buď identita, nebo rovnoběžná projekce do nadroviny ρ nebo základní afinita.*

Důkaz. Nechť je nadrovina ρ silně samodružná v afinním zobrazení f. Podle Věty 2.6.1 je afinní zobrazení určeno nadrovinou ρ a obrazem jediného bodu $B \notin \rho$.

Mohou nastat následující možnosti:

1. $f(B) = B$, potom $f \equiv \text{id}$.

2. $f(B) \in \rho$. Ukážeme, že v tomto případě je f rovnoběžnou projekcí $\mathcal{A}_n$ na ρ ve směru vektoru $\overrightarrow{Bf(B)}$, tj. musíme ukázat, že pro každé $X \neq B$, $X \notin \rho$, je $f(X) \in \rho$ a $Xf(X) \| Bf(B)$. Situaci rozdělíme na dva případy.



Obrázek 2.6.1: K důkazu Věty 2.6.3

a) Není-li přímka BX rovnoběžná s ρ, označme Y průsečík přímky BX s nadrovinou ρ (viz Obrázek 2.6.1 a)). Bod Y je potom samodružný bod zobrazení f, a tedy $f(Y) = Y$. Potom obraz bodu X leží na přímce $f(B)Y$ a $(f(X); f(B), f(Y)) = (X; B, Y)$. Tedy $f(X) \in \rho$ a přímky $Xf(X)$, $Bf(B)$ jsou rovnoběžné.

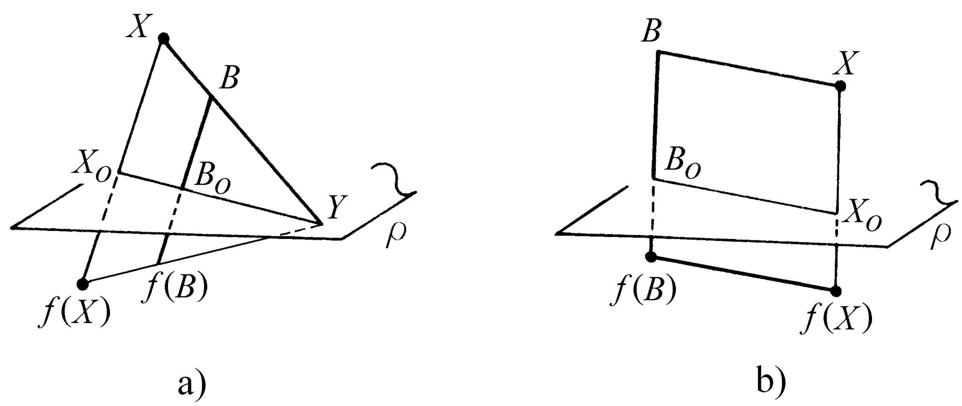
b) Je-li přímka BX rovnoběžná s nadrovinou ρ (viz Obrázek 2.6.1 b)), můžeme zvolit v nadrovině ρ bod Z tak, aby $Bf(B)ZX$ byl rovnoběžník, tedy $X - B = Z - f(B)$. Pak, protože Z a $f(B)$ jsou samodružné body f, je $f(X) - f(B) = Z - f(B)$, tj. $f(X) = Z$. Potom $f(X) \in \rho$ a $f(X) - f(B) = X - B$, tj. opět přímky $Xf(X)$, $Bf(B)$ jsou rovnoběžné.

V obou případech je tedy $f(X)$ rovnoběžnou projekcí bodu X do nadroviny ρ ve směru $\overrightarrow{Bf(B)}$.

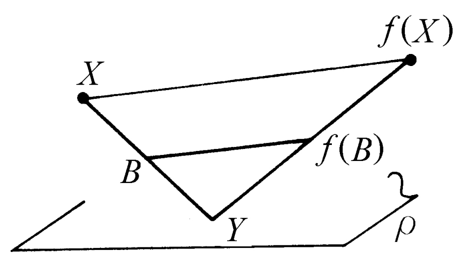
3. Pokud $f(B) \notin \rho$ a $f(B) \neq B$, je f základní afinita. □

Všimněme si nyní blíže základních afinit. Předpokládejme, že základní afinita má nadrovinu samodružných bodů ρ a zobrazí bod $B \notin \rho$ na $f(B) \notin \rho$, $B \neq f(B)$. Nechť nejdříve přímka $Bf(B)$ není rovnoběžná s ρ, tj. přímka $Bf(B)$ má s nadrovinou ρ společný bod B_0, který je samodružným bodem afinity f.

Uvažujme bod $X \neq B$ a sestrojme jeho obraz. Situaci rozdělíme na dvě možnosti. Nechť nejdříve přímka BX není rovnoběžná s ρ (viz Obrázek 2.6.2 a)), pak průsečík Y přímky BX s ρ je samodružným bodem zobrazení f. Protože X je bodem přímky BY, je $f(X)$ bodem přímky $f(B)Y$ a platí $(X; B, Y) = (f(X); f(B), Y)$. Odtud $Xf(X) \| Bf(B)$. Dostaneme tedy obraz $f(X)$ bodu X jako průsečík přímky $f(B)Y$ a rovnoběžky s přímkou $Bf(B)$ vedenou bodem X. Je-li přímka BX rovnoběžná s ρ, je $f(X)$ ten bod, kterým se doplní body $X, B, f(B)$ na rovnoběžník (viz Obrázek 2.6.1 b)).



Obrázek 2.6.2: K důkazu Věty 2.6.3



Obrázek 2.6.3: K důkazu Věty 2.6.3

V případě, že je přímka $Bf(B)$ rovnoběžná s nadrovinou ρ, postupujeme při konstrukci obrazů bodů X naprosto stejným způsobem, jako v předchozím případě (na Obrázku 2.6.3 je tato situace zobrazena jen pro bod X takový, že přímka BX není rovnoběžná s ρ).

Definice 2.6.3. Základní afinita f s nadrovinou samodružných bodů ρ taková, že $\overrightarrow{Bf(B)} \in Z(\rho)$, $B \notin \rho$, se nazývá *elace*.

Poznámka 2.6.1. Z definice elace je zřejmé, že zúžení elace na nadrovinu, která je rovnoběžná s nadrovinou samodružných bodů, je posunutí v této nadrovině. ♢

Věta 2.6.4. *Nechť f je základní afinita, která není elace a je dána nadrovinou samodružných bodů ρ a obrazem bodu $B \notin \rho$. Pro každý bod $X \notin \rho$ označme X_0 průsečík přímky $Xf(X)$ s nadrovinou ρ. Pak dělící poměr $(X_0; X, f(X))$ je konstantní, nezávislý na volbě X.*

Důkaz. Pro základní afinitu, která není elací, jsou body $B, f(B)$ a B_0 tři různé kolineární body. V případě, že $X \neq B$ je takový bod, že přímka BX není rovnoběžná z ρ (viz Obr. 2.6.2 a)), je přímka $Xf(X)$ obrazem přímky $Bf(B)$ ve stejnolehlosti se středem v bodě Y, který je průsečíkem přímky BX a nadroviny ρ. V této stejnolehlosti se zobrazí bod B na X, $f(B)$ na $f(X)$ a B_0 na X_0. Protože stejnolehlost je afinita, je $(X_0; X, f(X)) = (B_0; B, f(B))$. Je-li přímka BX rovnoběžná s ρ, dostaneme $BX \| f(B)f(X) \| B_0X_0$ a podle Věty 8.4 skript [HoJa] je libovolná přímka protíná v trojici bodů, jejichž dělící poměr je konstantní. Aplikujeme-li tuto větu na přímky $Bf(B)$ a $Xf(X)$, dostaneme opět rovnost dělících poměrů $(X_0; X, f(X)) = (B_0; B, f(B))$. □

Definice 2.6.4. Nechť je f základní afinita, která není elací a je určena nadrovinou samodružných bodů ρ a obrazem bodu $B \notin \rho$. Číslo $(B_0; B, f(B))$ se nazýva *chakteristika* základní afinity.

Směr určený nenulovým vektorem $\overrightarrow{Bf(B)}$ se nazývá *směrem základní afinity.*

Elace potom nazýváme *základní afinity bez charakteristiky.*

Poznámka 2.6.2. Základní afinita, která není elací, je určena směrem a charakteristikou. ♢

Poznámka 2.6.3. Z vlastností dělícího poměru tří bodů vyplývá, že pro základní afinitu se zápornou charakteristikou jsou body X a $f(X)$, $X \notin \rho$, oddělovány nadrovinou ρ, tj. leží v různých poloprostorech určených nadrovinou ρ. Pro základní afinity s kladnou charakteristikou leží body X a $f(X)$ ve stejném poloprostoru. ♢

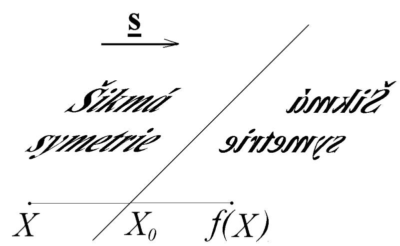
Definice 2.6.5. Zobrazení f prostoru na sebe, které není identitou a složeno samo se sebou dává identitu, se nazývá *involutorní zobrazení* nebo *involuce.*

Dvojice bodů, které si v involuci vymění místo, se nazývá *involutorní dvojice bodů.*

Poznámka 2.6.4. Příkladem afinity, která je involutorní, je středová symetrie. ♢

Věta 2.6.5. *Základní afinita je involutorní zobrazení právě tehdy, když její charakteristika je rovna mínus jedné.*

Důkaz. Elace nemůže být involutorní, protože v nadrovinách rovnoběžných s nadrovinou samodružných bodů se jedná o posunutí (viz Poznámka 2.6.1). Předpokládejme, že involuce f je základní afinita s charakteristikou k a X, X' je involutorní dvojice f. Potom $k = (X_0; X, X')$ a $k = (X_0; X', X)$. Z vlastností dělícího poměru (viz [HoJa]) je $k = 1/k$, a tedy $k = -1$ (připomeňme, že dělící poměr tří bodů je číslo různé od 0 a 1). □



Obrázek 2.6.4: K Poznámce 2.6.5

Poznámka 2.6.5. Pro libovolnou involutorní dvojici bodů X, X' involutorní základní afinity f s nadrovinou samodružných bodů ρ platí, že X_0 je středem úsečky XX' (viz Obrázek 2.6.5). Takovéto základní afinity se proto nazývají *symetrie prostoru* $\mathcal{A}_n$ *podle nadroviny* ρ ve směru základní afinity. Pokud je prostor, ve kterém je symetrie definována, euklidovský, používá se název *šikmá nebo kosá symetrie* podle nadroviny. ♢

Věta 2.6.6. *Ke každému afinnímu zobrazení f afinního prostoru $\mathcal{A}_n$ do sebe existuje nejvýše $(n+1)$ základních afinních zobrazení takových, že f je jejich složením. Mezi těmito základními afinními zobrazeními je nejvýše $(h(f)+1)$ základních afinit a právě $(n - h(f))$ rovnoběžných projekcí do nadrovin.*

Důkaz. Nechť $h(f) \leq n$ je hodnost afinního zobrazení $f : \mathcal{A}_n \to \mathcal{A}_n$. Zvolme v $\mathcal{A}_n$ $(n+1)$ bodů $P_0, P_1, \ldots, P_n$ v obecné poloze tak, že prvních $(h(f)+1)$ bodů $f(P_0), f(P_1), \ldots, f(P_{h(f)})$ je v obecné poloze.

Pokud $P_0 \neq f(P_0)$, zvolme libovolnou nadrovinu ρ_1 takovou, že $P_0 \notin \rho_1$, $f(P_0) \notin \rho_1$. Pak existuje podle Věty 2.6.3 jediná základní afinita f_1, která má ρ_1 za nadrovinu samodružných bodů a zobrazuje P_0 na $f(P_0)$. Označme $f_1(P_i) = P_{1i}$, $i = 1, 2, \ldots, n$. Pokud $P_0 = f(P_0)$ tento krok vynecháme (jako f_1 bereme identitu).

Pokud $P_{11} \neq f(P_1)$, zvolme libovolnou nadrovinu ρ_2 takovou, že $f(P_0) \in \rho_2$, $P_{11} \notin \rho_2$, $f(P_1) \notin \rho_2$. Pak existuje podle Věty 2.6.3 jediná základní afinita f_2, která má ρ_2 za nadrovinu samodružných bodů a zobrazuje P_{11} na $f(P_1)$. Označme $f_2(P_i) = P_{2i}$, $i = 2, 3, \ldots, n$. Pokud $P_{11} = f(P_1)$ tento krok vynecháme (jako f_2 bereme identitu).

Dále pokračujeme analogicky až do $(h(f)+1)$-ního kroku, tj. pro pokud jsou body $P_{h(f),h(f)}$, $f(P_{h(f)})$ různé, zvolíme libovolnou nadrovinu $\rho_{h(f)+1}$ takovou, že $f(P_j) \in \rho_{h(f)+1}$, $j = 0, 1, \ldots, h(f)-1$, $P_{h(f),h(f)} \notin \rho_{h(f)+1}$, $f(P_{h(f)} \notin \rho_{h(f)+1}$. Pak existuje podle Věty 2.6.3 jediná základní afinita $f_{h(f)+1}$, která má $\rho_{h(f)+1}$ za nadrovinu samodružných bodů a zobrazuje $P_{h(f),h(f)}$ na $f(P_{h(f)})$. Označme $f_{h(f)+1}(P_i) = P_{h(f)+1,i}$, $i = h(f)+1, \ldots, n$. Pokud $P_{h(f),h(f)} = f(P_{h(f)})$ tento krok vynecháme (jako $f_{h(f)+1}$ bereme identitu).

Tímto způsobem jsme dostali nejvýše $(h(f)+1)$ základních afinit, jejichž složením je afinita, která zobrazuje body $P_0, P_1, \ldots, P_{h(f)}$ postupně na body $f(P_0)$, $f(P_1), \ldots, f(P_{h(f)})$ a zbývající body $P_{h(f)+1}, \ldots, P_n$ zobrazí postupně na body $P_{h(f)+1,h(f)+1}, \ldots, P_{h(f)+1,n}$. Pro další úvahu je podstatné, že body $f(P_0), f(P_1)$, $\ldots, f(P_{h(f)})$, $P_{h(f)+1,h(f)+1}, \ldots, P_{h(f)+1,n}$ jsou v obecné poloze, tj. žádný z bodů $P_{h(f)+1,h(f)+1}, \ldots, P_{h(f)+1,n}$ neleží v $h(f)$-dimenzionálním podprostoru určeném body $f(P_0), f(P_1), \ldots, f(P_{h(f)})$. Naopak, v tomto podprostoru leží všechny body $f(P_{h(f)+1}), \ldots, f(P_n)$ (to vyplývá z hodnosti zobrazení).

Uvažujme nyní libovolnou nadrovinu $\rho_{h(f)+2}$, která obsahuje body $f(P_0), \ldots$, $f(P_{h(f)})$ a neobsahuje bod $P_{h(f)+1,h(f)+1}$. Protože $f(P_{h(f)+1}) \in \rho_{h(f)+2}$, existuje podle Věty 2.6.3 jediná projekce $f_{h(f)+2}$ prostoru $\mathcal{A}_n$ do nadroviny $\rho_{h(f)+2}$ taková, že $f_{h(f)+2}(P_{h(f)+1,h(f)+1}) = f(P_{h(f)+1})$. Označme $f_{h(f)+2}(P_i) = P_{h(f)+2,i}$, $i = h(f)+2, \ldots, n$. Přitom body $P_{h(f)+2,i}$, $i = h(f)+2, \ldots, n$ nemohou ležet v podprostoru určeném body $f(P_0), f(P_1), \ldots, f(P_{h(f)})$ (to by bylo ve sporu s tím, že projekce do nadroviny má hodnost $n-1$).

Dále uvažujme nadrovinu $\rho_{h(f)+3}$, která neobsahuje bod $P_{h(f)+2,h(f)+2}$. Protože $f(P_{h(f)+2}) \in \rho_{h(f)+3}$, existuje podle Věty 2.6.3 jediná projekce $f_{h(f)+3}$ prostoru $\mathcal{A}_n$ do nadroviny $\rho_{h(f)+3}$ taková, že $f_{h(f)+3}(P_{h(f)+2,h(f)+2}) = f(P_{h(f)+2})$. Označme $f_{h(f)+3}(P_i) = P_{h(f)+3,i}$, $i = h(f)+3, \ldots, n$. Přitom opět ze stejných důvodů jako v předchozím kroku nemohou body $P_{h(f)+3,i}$, $i = h(f)+3, \ldots, n$ ležet v podprostoru určeném body $f(P_0), f(P_1), \ldots, f(P_{h(f)})$.

Postupně tak dostaneme právě $(n-h(f))$ projekcí do nadrovin, které spolu s předtím sestrojenými základními afinitami vyhovují tvrzení naší věty. □

Důsledek 2.6.1. Nechť f je afinita na $\mathcal{A}_n$, pak existuje nejvýše $(n+1)$ základních afinit takových, že f je jejich složením.

Důkaz. Tvrzení je přímým důsledkem předchozí Věty 2.6.6. □

Poznámka 2.6.6. Postup popsaný ve Větě 2.6.6 je dobré zachytit do přehledné tabulky, kde jako P'_i značíme $f(P_i)$.

$$
\begin{array}{ccccccccccc}
 & \overset{f_1}{} & & \overset{f_2}{} & & \overset{f_3}{} & & \overset{f_n}{} & & \overset{f_{n+1}}{} & \\
P_0 & \longmapsto & P'_0 & \longmapsto & P'_0 & \longmapsto & \cdots & \longmapsto & P'_0 & \longmapsto & P'_0; \\
P_1 & \longmapsto & P_{11} & \longmapsto & P'_1 & \longmapsto & \cdots & \longmapsto & P'_1 & \longmapsto & P'_1; \\
\vdots & & \vdots & & \vdots & & & & \vdots & & \vdots \\
P_{n-1} & \longmapsto & P_{n-1,1} & \longmapsto & P_{n-1,2} & \longmapsto & \cdots & \longmapsto & P'_{n-1} & \longmapsto & P'_{n-1}; \\
P_n & \longmapsto & P_{n,1} & \longmapsto & P_{n,2} & \longmapsto & \cdots & \longmapsto & P_{n,n} & \longmapsto & P'_n.
\end{array}
$$

Všimněme si, že rozklad afinních zobrazení na základní afinní zobrazení není jednoznačný. V podstatné míře závisí na zvolených bodech, a také v jednotlivých krocích je možno volit různé nadroviny základních afinit. Dokonce i počet základních afinit v rozkladu není jednoznačný. Pro praktický výpočet je dobré si uvědomit, že například volbou samodružných bodů zobrazení mezi vybrané body, si můžeme ušetřit tolik kroků v rozkladu, kolik samodružných bodů v obecné poloze můžeme zvolit. $\diamondsuit$

Uvažujme nyní na $\mathcal{A}_n$ afinní repér $\mathcal{R} = \langle P; \mathbf{e}_1, \dots, \mathbf{e}_n \rangle$ a vyjádřeme rovnice základních afinních zobrazení vzhledem k tomuto repéru.

Věta 2.6.7. *Nechť je dána nadrovina $\rho \equiv a_1x_1 + \cdots + a_nx_n + a = 0$ a nenulový vektor $\mathbf{s} = (s_1; \dots; s_n)$, $\mathbf{s} \notin Z(\rho)$. Pak rovnoběžná projekce prostoru $\mathcal{A}_n$ na nadrovinu ρ ve směru určeném vektorem $\mathbf{s}$ má souřadnicové vyjádření*

$$x'_i = x_i - \frac{s_i}{\sum_{j=1}^n a_j s_j}(a_1x_1 + \cdots + a_nx_n + a), \quad i = 1, \dots, n\,. \tag{2.6.1}$$

Důkaz. Rovnoběžná projekce $r(\mathbf{s}, \rho)$ zobrazí bod $X = [x_1; \dots; x_n]$ na bod $f(X) = [x'_1; \dots; x'_n]$ takový, že $f(X) \in \rho$ a $\overrightarrow{Xf(X)} = \lambda\mathbf{s}$. Je tedy

$$x'_i - x_i = \lambda s_i, \quad i = 1, \dots, n, \tag{2.6.2}$$

a

$$a_1x'_1 + \cdots + a_nx'_n + a = 0\,. \tag{2.6.3}$$

Dosazením (2.6.2) do (2.6.3) dostaneme

$$-(a_1x_1 + \cdots + a_nx_n + a) = \lambda(a_1s_1 + \cdots + a_ns_n)\,.$$

Protože $\mathbf{s} \notin Z(\rho)$, je $\sum_{j=1}^n a_j s_j \neq 0$ a máme

$$\lambda = -\frac{a_1x_1 + \cdots + a_nx_n + a}{\sum_{j=1}^n a_j s_j} \tag{2.6.4}$$

odkud, dosazením do (2.6.2), dostaneme (2.6.1). $\square$

Věta 2.6.8. *Nechť je dána nadrovina* $\rho \equiv a_1x_1 + \cdots + a_nx_n + a = 0$ *a body* $B = [b_1; \ldots; b_n]$, $B' = [b'_1; \ldots; b'_n]$ *takové, že* $B, B' \notin \rho$, $B \neq B'$. *Pak základní afinní zobrazení pro které je* ρ *silně samodružná a zobrazuje bod* B *na bod* B', *má souřadnicové vyjádření*

$$x'_i = x_i + \lambda_i(a_1x_1 + \cdots + a_nx_n + a), \quad i = 1, \ldots, n\,, \tag{2.6.5}$$

kde

$$\lambda_i = \frac{b'_i - b_i}{\sum_{j=1}^n a_jb_j + a}\,. \tag{2.6.6}$$

Důkaz. Předpokládejme, že pro zobrazení f se souřadnicovými rovnicemi

$$x'_i = \sum_{j=1}^n a_{ij}x_j + b_i, \quad i = 1, \ldots, n\,, \tag{2.6.7}$$

je nadrovina ρ silně samodružná. Potom musí existovat čísla λ_i, $i = 1\ldots, n$, taková, že

$$a_{i1}x_1 + \cdots + (a_{ii} - 1)x_i + \cdots + a_{in}x_n + b_i = \lambda_i(\sum_{j=1}^n a_jx_j + a)\,. \tag{2.6.8}$$

Pomocí (2.6.7) upravíme (2.6.8) na

$$x'_i - x_i = \lambda_i(\sum_{j=1}^n a_jx_j + a)\,.$$

Protože $B \notin \rho$, je $(\sum_{j=1}^n a_jb_j + a) \neq 0$ a dosazením souřadnic bodů B za x_i a bodu B' za x'_i máme

$$\lambda_i = \frac{b'_i - b_i}{\sum_{j=1}^n a_jb_j + a}\,,$$

což dokazuje tvrzení věty. □

Předchozí úvahy shrňme do následující věty.

Věta 2.6.9. *Nechť je dána nadrovina* $\rho \equiv a_1x_1 + \cdots + a_nx_n + a = 0$. *Pak základní afinní zobrazení, pro které je* ρ *silně samodružná, má souřadnicové vyjádření*

$$x'_i = x_i + \lambda_i(a_1x_1 + \cdots + a_nx_n + a), \quad i = 1, \ldots, n\,. \tag{2.6.9}$$

Přitom:

1. *Je-li* $\lambda_1 = \cdots = \lambda_n = 0$, *jedná se i identitu na* $\mathcal{A}_n$.

2. *Je-li* $\sum_{i=1}^n a_i\lambda_i = -1$*, jedná se o rovnoběžnou projekci* $\mathcal{A}_n$ *do nadroviny* ρ *ve směru vektoru* $\mathbf{s} = (\lambda_1; \dots; \lambda_n)$*.*

3. *Je-li alespoň jeden koeficient* λ_i *nenulový a* $\sum_{i=1}^n a_i\lambda_i \neq -1$*, jedná se o základní afinitu, která je*

   (a) *elací pro* $\sum_{i=1}^n a_i\lambda_i = 0$*,*

   (b) *základní afinitou s charakteristikou*

$$k = \frac{1}{\sum_{i=1}^n a_i\lambda_i + 1}$$

   pro $\sum_{i=1}^n a_i\lambda_i \neq 0$*. Navíc, pro* $\sum_{i=1}^n a_i\lambda_i = -2$ *se jedná o symetrii* $\mathcal{A}_n$ *podle nadroviny* ρ *ve směru určeném vektorem* $\mathbf{s} = (\lambda_1; \dots; \lambda_n)$*.*

Důkaz. Podle Věty 2.6.9 má základní afinní zobrazení f, pro které je ρ silně samodružná, souřadnicové vyjádření (2.6.9).

1. f je identitou právě tehdy, když $x_i' = x_i$, tj. právě tehdy, když $\lambda_i = 0$, $i = 1, \dots, n$, v rovnicích (2.6.9).

2. Je-li f rovnoběžnou projekcí $\mathcal{A}_n$ do nadroviny ρ ve směru $L(\mathbf{s})$, má podle Věty 2.6.7 f souřadnicové vyjádření (2.6.9), kde

$$\lambda_i = -\frac{s_i}{\sum_{j=1}^n a_j s_j}\,, \quad i = 1\dots, n\,.$$

Odtud dostaneme okamžitě $\sum_{i=1}^n a_i\lambda_i = -1$.

Naopak, je-li $\sum_{i=1}^n a_i\lambda_i = -1$ ve vyjádření (2.6.9), dostaneme

$$\begin{aligned} a_1x_1' + \dots + a_nx_n' + a &= (a_1x_1 + \dots + a_nx_n + a)(1 + \sum_{i=1}^n a_i\lambda_i) \\ &= 0\,, \end{aligned}$$

tj. $f(X) \in \rho$ pro každé $X \in \mathcal{A}_n$. Podle Věty 2.6.3 se jedná o rovnoběžnou projekci $\mathcal{A}_n$ do ρ. Porovnání (2.6.1) a (2.6.9) dostaneme, že směr projekce je určen právě vektorem $\mathbf{s} = (\lambda_1; \dots; \lambda_n)$.

3. Podle Věty 2.6.3 základní afinní zobrazení, které vyhovuje podmínkám naší věty a není ani identita, ani projekce do nadroviny, je základní afinita. Je-li tedy alespoň jeden koeficien λ_i nenulový a $\sum_{i=1}^n a_i\lambda_i \neq -1$, je zobrazení (2.6.9) základní afinita. Potom z Věty 2.6.8 pro nějaký bod $B = [b_1; \dots; b_n] \notin \rho$ platí

$$\lambda_i = \frac{b_i' - b_i}{\sum_{i=1}^n a_ib_i + a}.$$

a) Zobrazení je elací právě tehdy, když vektor $\overrightarrow{Bf(B)} = (b'_1 - b_1; \dots; b'_n - b_n)$ leží v zaměření nadroviny ρ, tj. právě tehdy, když $\sum_{i=1}^n a_i(b'_i - b_i) = 0$, což je ekvivalentní $\sum_{i=1}^n a_i\lambda_i = 0$.

b) Není-li f elací, je $\overrightarrow{Bf(B)} \notin Z(\rho)$ a musí existovat bod B_0, který je průnikem ρ a přímky $Bf(B)$. Máme tedy $B_0 = B + t\overrightarrow{Bf(B)}$, což vyjádříme vo souřadnicích jako $b_{0i} = b_i + t(b'_i - b_i) = b_i + t.\lambda_i(\sum_{j=1}^n a_j b_j + a)$, a z podmínky $B_0 \in \rho$, t.j. $\sum_{i=1}^n a_i b0i + a = 0$, je $t = -\dfrac{1}{\sum_{i=1}^n a_i\lambda_i}$. Potom $\overrightarrow{BB_0} = -\dfrac{1}{\sum_{i=1}^n a_i\lambda_i}\overrightarrow{Bf(B)}$, to jest $(B; B_0, f(B)) = -\dfrac{1}{\sum_{i=1}^n a_i\lambda_i}$, a odtud

$$\overrightarrow{BB_0} = \frac{1}{\sum_{i=1}^n a_i\lambda_i + 1}\overrightarrow{f(B)B_0}\,,$$

což znamená, že charakteristika f je

$$k = (B_0; B, f(B)) = \frac{1}{\sum_{i=1}^n a_i\lambda_i + 1}.$$

Podle Věty 2.6.5 je f involutorní právě tehdy, je-li $k = -1$, tj. právě tehdy, je-li $\sum_{i=1}^n a_i\lambda_i = -2$. □

Úloha 2.6.1. Určete rovnici rovnoběžné projekce afinního prostoru $\mathcal{A}_3$ do roviny $\rho \equiv 2x + y - z + 2 = 0$ ve směru určeném vektorem $\mathbf{s} = (0; 1; 0)$.

Řešení: I. metoda: Využijeme souřadnicového vyjádření z Věty 2.6.7. Pak dostaneme přímo rovnice projekce ve tvaru

$$\begin{array}{rrrr} x' = & x & & \\ y' = & -2x & +z & -2 \\ z' = & & z & \end{array}.$$

II. metoda: V rovině ρ vybereme tři body v obecné poloze, například $A = [1; 0; 4], B = [0; 1, ;], C = [0; 0; 2]$. Určíme projekci počátku afinního repéru do roviny ρ, tj. průnik ρ a přímky $X = P + t\mathbf{s}$. Dostaneme $f(P) = [0; -2; 0]$. Potom některou z metod popsaných v Úloze 2.2.1 nebo 2.2.2 určíme rovnice projekce. △

Úloha 2.6.2. Určete rovnice základní afinity f v $\mathcal{A}_3$, pro kterou je rovina $\rho \equiv x + y - z = 0$ rovinou samodružných bodů a bod $B = [1; 0; 2]$ se zobrazuje na $B' = [2; 0; 1]$. Je afinita f elací ?

Řešení: Vektor $\overrightarrow{BB'} = (1; 0; -1)$ nepatří do zaměření roviny ρ, a tedy afinita f není elace.

Rovnice afinity: I. metoda: Podle Věty 2.6.8 má základní afinita rovnice

$$x' = x + \lambda_1(x + y - z)$$

$$y' = y + \lambda_2(x + y - z)$$
$$z' = z + \lambda_3(x + y - z)$$

Dosazením souřadnic bodů B a B' určíme $\lambda_1 = -1$, $\lambda_2 = 0$, $\lambda_3 = 1$, a tedy dostaneme rovnice základní afinity ve tvaru

$$\begin{aligned} x' &= \quad\; -y \;+z\,; \\ y' &= \quad\;\;\; y\,; \\ z' &= x \;+y\,. \end{aligned}$$

II. metoda: Zvolíme v ρ tři body v obecné poloze, např. $A = [0;0;0]$, $C = [1;0;1]$, $D = [0;1;1]$. Jsou to body samodružné, tedy $f(A) = A$, $f(C) = C$, $f(D) = D$. Čtvrtým bodem pro určení afinity je bod B. Potom některou z metod popsaných v Úloze 2.2.1 nebo 2.2.2 určíme rovnice základní afinity. $\triangle$

Úloha 2.6.3. V afinní rovině $\mathcal{A}_2$ s repérem $\langle P; \mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2\rangle$ je dána afinita f rovnicemi

$$x' = 2x - y + 1;$$
$$y' = x + y + 3.$$

Rozložte f na osové afinity.

Řešení: Zvolme v $\mathcal{A}_2$ tři body v obecné poloze, a to např. $A = [0;0]$, $B = [1;0]$, $C = [0;1]$; jejich obrazy v afinitě f jsou body $A' = [1;3]$, $B' = [3;4]$, $C' = [0;4]$. Při hledání základních afinit budeme postupovat obdobně jako v důkazu Věty 2.6.6. Při praktickém hledání osových afinit můžeme postupovat dvojím způsobem.

1. způsob: Jednotlivé osové afinity volíme tak, aby jejich osy měly jednoduché rovnice. Osovou afinitu f_1 zvolíme tak, aby bod A zobrazila do bodu A'. Osu o_1 můžeme volit libovolně, jen nesmí procházet body A a A'. Zvolme tedy za osu přímku o rovnici $o_1 \equiv y = 1$. Užitím Věty 2.6.8 snadno určíme rovnice f_1 ve tvaru

$$x' = x - y + 1\,;$$
$$y' = -2y + 3\,.$$

Obrazy bodů B a C v afinitě f_1 jsou $B_1 = [2;3], C_1 = C = [0;1]$.

Osovou afinitu f_2 budeme volit tak, aby $f_2(A') = A'$ a $f_2(B_1) = B'$. Tedy osa o_2 musí procházet bodem A' a nesmí procházet body B_1 a B'. Zvolme za o_2 přímku o rovnici $o_2 \equiv x = 1$. Opět užitím Věty 2.6.8 snadno určíme rovnice f_2 ve tvaru

$$x' = 2x - 1\,;$$
$$y' = x + y - 1\,.$$

Z těchto rovnic vypočteme $f_2(C) = C_2 = [-1, 0]$.

Pro afinitu f_3 musí platit $f_3(A') = A'$, $f_3(B') = B'$, $f_3(C_2) = C'$. Přímka $A'B'$ je přímkou samodružných bodů f_3, tedy osou o_3, jejíž rovnice je $o_3 \equiv x-2y+5 = 0$. Rovnice f_3 jsou potom

$$\begin{aligned} x' &= \frac{5}{4}x - \frac{1}{2}y + \frac{5}{4}\,; \\ y' &= x - y + 5\,. \end{aligned}$$

Výsledný rozklad můžeme shrnout do tabulky

$$\begin{array}{ccccccc} & f_1 & & f_2 & & f_3 & \\ [0;0] & \longmapsto & [1;3] & \longmapsto & [1;3] & \longmapsto & [1;3]; \\ [1;0] & \longmapsto & [2;3] & \longmapsto & [3;4] & \longmapsto & [3;4]; \\ [0;1] & \longmapsto & [0;1] & \longmapsto & [-1;0] & \longmapsto & [0;4], \end{array}$$

odkud je vidět, že složením $f_3 \circ f_2 \circ f_1$ dostaneme původní afinitu f.

2. způsob: Osy jednotlivých základních afinit volíme tak, abychom nemuseli určovat obrazy B_1, C_1, C_2 bodů B a C. Osa $o_1 = BC \equiv x + y - 1 = 0$. Potom určíme rovnice f_1 zobrazující A na A' ve tvaru

$$\begin{aligned} x' &= -y + 1\,; \\ y' &= -x + 1\,. \end{aligned}$$

Základní afinitu f_2 volíme s osou $o_2 = A'C \equiv 2x-y+1 = 0$ tak, aby zobrazila B na B'. Dostaneme

$$\begin{aligned} x' &= \frac{3}{5}x - \frac{2}{3}y + \frac{2}{3}\,; \\ y' &= \frac{8}{3}x - \frac{1}{3}y + \frac{4}{3}\,. \end{aligned}$$

Konečně afinitu f_3 volíme s osou $o_3 = A'B' \equiv x-2y+5 = 0$ tak, aby zobrazila C na C'. Dostaneme

$$\begin{aligned} x' &= x\,; \\ y' &= -\frac{1}{2}y + \frac{9}{2}\,. \end{aligned}$$

Výsledný rozklad můžeme opět shrnout do tabulky

$$\begin{array}{ccccccc} & f_1 & & f_2 & & f_3 & \\ [0;0] & \longmapsto & [1;3] & \longmapsto & [1;3] & \longmapsto & [1;3]\,; \\ [1;0] & \longmapsto & [1;0] & \longmapsto & [3;4] & \longmapsto & [3;4]\,; \\ [0;1] & \longmapsto & [0;1] & \longmapsto & [0;1] & \longmapsto & [0;4]\,. \end{array}$$

△

2.7 Klasifikace afinit v rovině

Na závěr této kapitoly budeme klasifikovat (třídit) všechny afinity v rovině podle počtu samodružných bodů a vlastních směrů. Připomeňme, že je-li afinní zobrazení zadáno v souřadnicích maticemi A a B jsou samodružné body řešením nehomogenní soustavy rovnic

$$
\begin{aligned}
(a_{11} - 1)\, x + a_{12}\, y + b_1 &= 0\,,\\
a_{21}\, x + (a_{22} - 1)\, y + b_2 &= 0\,,
\end{aligned}
$$

t.j. zobrazení buďto nemá žádný samodružný bod, nebo má právě jeden samodružný bod, přímku samodružných bodů a konečně může být každý bod roviny samodružný. V případě, že má zobrazení alespoň jeden samodružný bod, můžeme ho zvolit jako počátek afinního repéru a $(b_1; b_2) = (0; 0)$. V tabulce všech afinit v rovině tedy máme čtyři řádky podle počtu samodružných bodů.

Dále je charakteristická rovnice afinity v rovině kvadratická rovnice s reálnými koeficienty. Nemá-li charakteristická rovnice reálný kořen, nemá afinita žádný vlastní směr. Má-li charakteristické rovnice dva reálné různé kořeny, má afinita podle Věty 2.4.5 dva lineárně nezávislé vlastní směry. Má-li charakteristická rovnice dvojnásobný reálný kořen, mohou nastat dva případy - prostor vlastních vektorů má dimenzi jedna nebo dva (každý směr je vlastní). Máme tedy v tabulce 4 sloupce s možnými počty vlastních směrů.

Připomeňme ještě Větu 2.4.4, která říká, že není-li kořenem charakteristické rovnice 1, má zobrazení právě jeden samodružný bod. Negací tohoto výroku tak dostaneme, že pokud je 1 vlastní hodnotou zobrazení, nemá buďto zobrazení žádný samodružný bod nebo má nejméně přímku samodružných bodů.

Nyní si může zachytit jednotlivé možnosti. Je zřejmé, že jsou-li všechny body samodružné, musí se jednat o identitu, která má i všechny směry vlastní a v posledním řádku tabulky je jediná možnost.

Jestliže nemá charakteristická rovnice žádný reálný kořen, má podle Věty 2.4.4 právě jeden samodružný bod a matice zobrazení je dána reálnou a imaginární složkou komplexního kořene, viz Část 1.3. Je tedy v 1. sloupci tabulky jediná možnost.

Pokud má charakteristická rovnice dva reálné různé kořeny, dělíme situaci ještě na případ, kdy je jeden z nich roven jedné nebo jsou oba různé od jedné. Ve druhém případě máme právě jeden samodružný bod a rovnice zobrazení ve 2. řádku 3. sloupci je dána Větou 2.4.6. V prvním případě máme buďto přímku samodružných bodů (osová afinita - jeden vlastní směr je směr osy odpovídající jedničce jako vlastní hodnotě a druhý vlastní směr je směr osové afinity) nebo není žádný bod samodružný (osová afinita složená s posunutím ve směru osy). V obou případech dostáváme rovnice zobrazení z Věty 2.4.6.

Konečně nechť má charakteristická rovnice dvojnásobný kořen. Je-li navíc tento kořen různý od jedné, má afinita právě jeden samodružný bod a doplňujeme tabulku ve druhém řádku. Vlastní směry potom tvoří buďto podprostor dimenze jedna (druhý sloupec) nebo dva (poslední sloupec). V prvním případě má matice zobrazení horní trojúhelníkový tvar s vlastní hodnotou na diagonále a s nenulovým koeficientem nad diagonálou (viz Část 1.3), ve druhém případě je matice diagonální s vlastní hodnotou na diagonále a jedná se o stejnolehlost.

Konečně poslední možnost je, že jednička je dvojnásobným kořenem charakteristické rovnice. Opět, pokud má prostor vlastních vektorů dimenzi jedna, může mít zobrazení přímku samodružných bodů (jedná se o elaci, směr osy je jediný vlastní směr) nebo nemá žádný samodružný směr (elace složená s posunutím o nenulový vektor ve směru osy). Matice zobrazení je opět horní trojúhelníková matice s jedničkou na diagonále a nenulovým koeficientem nad diagonálou. Pokud má prostor vlastních vektorů dimenzi dva, může nastat pouze situace, kdy zobrazení má buďto každý bod jako samodružný, nebo nemá žádný samodružný bod. Jedná se tedy o posunutí buďto o nulový vektor (identita) nebo o nenulový vektor.

Výsledná tabulka tedy vypadá takto:

	Žadný vlastní směr	Jeden vlastní směr	Dva nezávislé směry	Každý směr vlastní
Žádný samodružný bod	—	$x' = x + a\,y$ $y' = \quad y + b$ $a \neq 0,\ b \neq 0$ Posunutá elace	$x' = x \quad + b$ $y' = \quad \lambda_2\, y$ $0 \neq \lambda_2 \neq 1$ $b \neq 0$ Posunutá o. a.	$x' = x \quad + b_1$ $y' = \quad y + b_2$ $(b_1; b_2) \neq (0; 0)$ Posunutí o vektor $(b_1; b_2)$
Jeden samodružný bod	$x' = \alpha\, x + \beta\, y$ $y' = -\beta\, x + \alpha\, y$ $\beta \neq 0$	$x' = \lambda_1\, x + b\, y$ $y' = \quad \lambda_1\, y$ $0 \neq \lambda_1 \neq 1$ $b \neq 0$	$x' = \lambda_1\, x$ $y' = \quad \lambda_2\, y$ $0 \neq \lambda_1 \neq 1$ $0 \neq \lambda_2 \neq 1$ $\lambda_1 \neq \lambda_2$	$x' = \lambda_1\, x$ $y' = \quad \lambda_1\, y$ $0 \neq \lambda_1 \neq 1$ Stejnolehlost s keoficientem λ_1
Přímka samodružných bodů	—	$x' = x + ay$ $y' = \quad y$ $a \neq 0$ Elace	$x' = x$ $y' = \quad \lambda_2\, y$ $0 \neq \lambda_2 \neq 1$ Osová afinita	—
Všechny body samodružné	—	—	—	$x' = x$ $y' = \quad y$ Identita

Kapitola 3

SHODNÁ A PODOBNÁ ZOBRAZENÍ

V této kapitole budeme studovat zobrazení na euklidovských bodových prostorech. Připomeňme, že euklidovský bodový prostor je afinní prostor, na jehož zaměření je dán skalární součin.

3.1 Shodná zobrazení

V této části skript definujeme shodné zobrazení mezi euklidovskými prostory a ukážeme, že je to afinních zobrazení. Základním pojmem, který je nutný pro definici shodného zobrazení, je vzdálenost bodů, která je dána

$$|XY| = \|\overrightarrow{XY}\| = \sqrt{(\overrightarrow{XY}, \overrightarrow{XY})}\,.$$

Definice 3.1.1. Zobrazení f euklidovského prostoru $\mathcal{E}_n$ do euklidovského prostoru $\mathcal{E}'_m$ se nazývá *shodné zobrazení* (*izometrické zobrazení*), jestliže zachovává vzdálenosti bodů, t.j. pro každé dva body body $X, Y \in \mathcal{E}_n$ platí

$$|f(X)f(Y)| = |XY|\,.$$

Poznámka 3.1.1. Je třeba si uvědomit, že vzdálenosti v $\mathcal{E}_n$ a $\mathcal{E}'_m$ jsou obecně definovány různým způsobem. ♢

Příklad 3.1.1. Ze střední školy známe celou řadu shodných zobrazení v euklidovské rovině či prostoru, např. posunutí, otáčení (kolem středu či přímky), středovou symetrii, osovou symetrii a symetrii podle roviny (zrcadlení). ♡

Věta 3.1.1. *Každé shodné zobrazení je prosté.*

Důkaz. Pro libovolné dva body $B, C \in \mathcal{E}_n$ takové, že $B \neq C$ je $|BC| \neq 0$, potom ale $|BC| = |f(B)f(C)| \neq 0$, a tedy $f(B) \neq f(C)$. $\square$

Poznámka 3.1.2. Z definice je zřejmé, že zúžení shodného zobrazení na podprostor euklidovského prostoru je opět shodné zobrazení. Dále, jsou-li $f : \mathcal{E}_n \to \mathcal{E}'_m$ a $g : \mathcal{E}'_m \to \mathcal{E}''_k$ shodná zobrazení, je i jejich složení $g \circ f$ shodné zobrazení. $\diamondsuit$

Věta 3.1.2. *Každé shodné zobrazení je afinní zobrazení, t.j. tři různé kolineární body zobrazí na tři různé kolineární body a zachová jejich dělící poměr.*

Důkaz. Nechť jsou dány libovolné tři různé kolineární body body $B, C, D \in \mathcal{E}_n$ takové, že $0 > \lambda = (D; B, C)$, t.j. D leží mezi body B, C. Potom $\overrightarrow{BD} = \lambda \overrightarrow{CD}$ a tedy $|BD| = |\lambda|\,|CD|$. Protože D leží mezi body B, C je $|BD| + |DC| = |BC|$ a pro shodné zobrazení f dostaneme $|f(B)f(D)| + |f(D)f(C)| = |f(B)f(C)|$, to ale znamená, že body $f(B), f(C), f(D)$ jsou kolineární a $f(D)$ leží mezi body $f(B), f(C)$, tedy také dělící poměr $\lambda' = (f(D); f(B), f(C))$ je záporné číslo. Potom $\overrightarrow{f(B)f(D)} = \lambda' \overrightarrow{f(C)f(D)}$, a tedy $|f(B)f(D)| = |\lambda'|\,|f(C)f(D)|$. Z rovností $|f(B)f(D)| = |BD|$ a $|f(C)f(D)| = |CD|$ tak dostaneme $|\lambda| = |\lambda'|$ a protože jsou obě hodnoty záporné je $\lambda = \lambda'$. $\square$

Shodná zobrazení tedy mají všechny vlastnosti afinních zobrazení. Např. zobrazují podprostory na podprostory a přitom zachovávají rovnoběžnost podprostorů. Protože je shodné zobrazení prosté, je $n \leq m$. Dále ke shodnému zobrazení můžeme definovat asociované lineární zobrazení předpisem $\varphi_f(\overrightarrow{XY}) = \overrightarrow{f(X)f(Y)}$.

Pomocná věta 3.1.3. *Asociované lineární zobrazení shodného zobrazení zachovává velikost vektorů, t.j. pro každý vektor $\mathbf{u} \in Z(\mathcal{E}_n)$ platí*

$$\|\varphi_f(\mathbf{u})\| = \|\mathbf{u}\| .$$

Důkaz. Nechť $\mathbf{u} = \overrightarrow{BC}$, potom máme

$$\|\varphi_f(\mathbf{u})\| = \|\overrightarrow{f(B)f(C)}\| = |f(B)f(C)| = |BC| = \|\mathbf{u}\| . \qquad \square$$

Věta 3.1.4. *Asociované lineární zobrazení shodného zobrazení zachovává skalární součin vektorů, t.j. pro všechny vektory $\mathbf{u}, \mathbf{v} \in Z(\mathcal{E}_n)$ platí*

$$(\varphi_f(\mathbf{u}), \varphi_f(\mathbf{v})) = (\mathbf{u}, \mathbf{v}) ,$$

t.j. φ_f je ortogonální lineární zobrazení z $Z(\mathcal{E}_n)$ do $Z(\mathcal{E}'_m)$.

Důkaz. Z vlastností skalárního součinu dostáváme

$$(\mathbf{u}+\mathbf{v}, \mathbf{u}+\mathbf{v}) = (\mathbf{u}, \mathbf{u}) + 2\,(\mathbf{u}, \mathbf{v}) + (\mathbf{v}, \mathbf{v}) ,$$

t.j.

$$2\,(\mathbf{u},\mathbf{v}) = \|\mathbf{u}+\mathbf{v}\|^2 - \|\mathbf{u}\|^2 - \|\mathbf{v}\|^2 .$$

Aplikací této rovnosti na vektory $\varphi_f(\mathbf{u})$ a $\varphi_f(\mathbf{v})$ a z Pomocné věty 3.1.3 dostaneme

$$\begin{aligned} 2\,(\varphi_f(\mathbf{u}),\varphi_f(\mathbf{v})) &= \|\varphi_f(\mathbf{u})+\varphi_f(\mathbf{v})\|^2 - \|\varphi_f(\mathbf{u})\|^2 - \|\varphi_f(\mathbf{v})\|^2 \\ &= \|\varphi_f(\mathbf{u}+\mathbf{v})\|^2 - \|\varphi_f(\mathbf{u})\|^2 - \|\varphi_f(\mathbf{v})\|^2 \\ &= \|\mathbf{u}+\mathbf{v}\|^2 - \|\mathbf{u}\|^2 - \|\mathbf{v}\|^2 \\ &= 2\,(\mathbf{u},\mathbf{v})\,. \end{aligned}$$

□

Asociované ortogonální lineární zobrazení je jednoznačně určeno shodným zobrazením. Naopak platí

Věta 3.1.5. *Nechť je dáno ortogonální lineární zobrazení $\varphi : Z(\mathcal{E}_n) \to Z(\mathcal{E}'_m)$ a body $B \in \mathcal{E}_n, B' \in \mathcal{E}'_m$. Pak existuje jediné shodné zobrazení $f : \mathcal{E}_n \to \mathcal{E}'_m$ takové, že $f(B) = B'$ a $\varphi_f = \varphi$.*

Důkaz. Podle Věty 2.1.3 existuje jediné afinní zobrazení daných vlastností určené

$$f(X) = B' + \varphi(\overrightarrow{BX})\,. \tag{3.1.1}$$

Ukážeme, že (3.1.1) je shodné zobrazení. Máme

$$|f(X)f(Y)| = \|\overrightarrow{f(X)f(Y)}\| = \|\varphi(\overrightarrow{XY})\| = \|\overrightarrow{XY}\| = |XY|\,.$$

□

Věta 3.1.6. *Nechť je dáno $(n+1)$ bodů v obecné poloze $P_0, P_1, \dots, P_n \in \mathcal{E}_n$ a body $P'_0, P'_1, \dots, P'_n \in \mathcal{E}'_m$ takové, že*

$$|P_iP_j| = |P'_iP'_j|\,, \qquad i,j = 0,\dots,n\,. \tag{3.1.2}$$

Pak existuje jediné shodné zobrazení $f : \mathcal{E}_n \to \mathcal{E}'_m$ takové, že $f(P_i) = P'_i$ pro všechna $i = 0,\dots,n$.

Důkaz. Protože jsou body $P_0, P_1, \dots, P_n \in \mathcal{E}_n$ v obecné poloze, jsou vektory $\overrightarrow{P_0P_1}, \dots, \overrightarrow{P_0P_n} \in Z(\mathcal{E}_n)$ lineárně nezávislé. Podmínka (3.1.2) znamená, že i body $P'_0, P'_1, \dots, P'_n \in \mathcal{E}'_m$ jsou v obecné poloze, a tedy i vektory $\overrightarrow{P'_0P'_1}, \dots, \overrightarrow{P'_0P'_n} \in Z(\mathcal{E}'_m)$ jsou lineárně nezávislé. Podle Věty 1.1.2 existuje jediné lineární zobrazení $\varphi : Z(\mathcal{E}_n) \to Z(\mathcal{E}'_m)$ takové, že $\varphi(\overrightarrow{P_0P_i}) = \overrightarrow{P'_0P'_i}$. Navíc platí $\|\varphi(\overrightarrow{P_0P_i})\| = \|\overrightarrow{P_0P_i}\|$, a tedy φ je ortogonální zobrazení. Podle Věty 3.1.5 je zobrazení

$$f(X) = P'_0 + \varphi(\overrightarrow{P_0X})$$

shodné zobrazení a snadno se vidí, že $f(P_i) = P'_i$. □

Důsledek 3.1.1. Shodné zobrazení z euklidovské roviny je určeno obrazy vrcholů libovolného trojúhelníka na vrcholy s ním shodného trojúhelníka. $\diamond$

Vyjádření shodného zobrazení v souřadnicích je stejné, jako u afinních zobrazení. Musíme si jen uvědomit, že v euklidovských bodových prostorech používáme kartézské repéry a souřadnice. Mějme tedy kartézský repér $\mathcal{R} = \langle P; \mathbf{e}_1, \ldots, \mathbf{e}_n \rangle$ v $\mathcal{E}_n$ a kartézský repér $\mathcal{R}' = \langle Q; \mathbf{d}_1, \ldots, \mathbf{d}_m \rangle$ v $\mathcal{E}'_m$ a nechť $f : \mathcal{E}_n \to \mathcal{E}'_m$ je shodné zobrazení. Zvolíme-li $Q = f(P)$, $\mathbf{d}_i = \varphi_f(\mathbf{e}_i)$, $i = 1, \ldots, n$, potom stejně jako ve Větě 2.2.3 dostaneme souřadnicové vyjádření f ve tvaru

$$\begin{aligned} x'_1 &= x_1 \,, & x'_{n+1} &= 0 \,, \\ &\vdots & &\vdots \\ x'_n &= x_n \,, & x'_m &= 0 \,. \end{aligned} \tag{3.1.3}$$

V souřadnicích je to tedy kanonické vložení $\mathbb{R}^n$ do $\mathbb{R}^m$, kde $\mathbb{R}^k$ chápeme jako euklidovský bodový prostor.

Pokud je repér $\mathcal{R}' = \langle Q; \mathbf{d}_1, \ldots, \mathbf{d}_m \rangle$ v $\mathcal{E}'_m$ obecný, nezávislý na repéru $\mathcal{R} = \langle P; \mathbf{e}_1, \ldots, \mathbf{e}_n \rangle$ v $\mathcal{E}_n$, dostaneme vyjádření f ve tvaru

$$x'_j = \sum_{i=1}^{n} a_{ji} x_i + b_j \,,\; j = 1, \ldots, m \,, \tag{3.1.4}$$

který budeme častěji psát maticově

$$\begin{pmatrix} x'_1 \\ \vdots \\ x'_m \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_m \end{pmatrix} \,, \tag{3.1.5}$$

nebo symbolicky

$$(f(X)) = A(X) + B \,. \tag{3.1.6}$$

Matice A je ovšem matice asociovaného ortogonálního lineárního zobrazení a tedy podle Části 1.4 splňuje podmínku $A^T A = E_n$.

Nechť je naopak dána matice A typu m/n taková, že $A^T A = E_n$, t.j. taková, že platí $\sum_{j=1}^{m} a_{ji}\, a_{jk} = \delta_{ik}$, $\delta_{ik} = 1, i = k, \delta_{ik} = 0, i \neq k$, a nechť B je libovolná matice typu $m/1$. Ukážeme, že zobrazení

$$x'_j = \sum_{i=1}^{n} a_{ji} x_i + b_j \,,\; j = 1, \ldots, m \tag{3.1.7}$$

je shodné. Máme

$$\begin{aligned}
|X'Y'|^2 &= \sum_{j=1}^{m}(y'_j - x'_j)^2 = \sum_{j=1}^{m}\big[\sum_{i=1}^{n} a_{ji}\,(y_i - x_i)\big]^2 \\
&= \sum_{j=1}^{m}\sum_{i,k=1}^{n} a_{ji}\,(y_i - x_i)\,a_{jk}\,(y_k - x_k) \\
&= \sum_{i,k=1}^{n}(y_i - x_i)\,(y_k - x_k)\sum_{j=1}^{m} a_{ji}\,a_{jk} \\
&= \sum_{i=1}^{n}(y_i - x_i)^2 = |XY|^2\,.
\end{aligned}$$

Je tedy zobrazení (3.1.7) shodné.

Můžeme tedy předchozí úvahy shrnout do následující věty.

Věta 3.1.7. *Nechť $f : \mathcal{E}_n \to \mathcal{E}'_m$ je afinní zobrazení, které má v kartézských souřadnicích na $\mathcal{E}_n$ a $\mathcal{E}'_m$ vyjádření $(f(X)) = A(X) + B$. Potom f je shodné zobrazení právě tehdy, když matice A splňuje podmínku $A^T A = E_n$.*

Úloha 3.1.1. Zobrazení $f : \mathcal{E}_2 \to \mathcal{E}_3$ je dáno obrazy bodů P, A, B. Určete rovnice zobrazení a zjistěte, zda se jedná o shodné zobrazení. Co je $Im(f)$?

$$P = [0,0], A = [1,0], B = [0,1]$$

$$P' = [1,3,-2],$$

$$A' = \left[1, \tfrac{3\sqrt{2}+1}{\sqrt{2}}, \tfrac{-2\sqrt{2}+1}{\sqrt{2}}\right], B' = \left[\tfrac{\sqrt{3}+1}{\sqrt{3}}, \tfrac{3\sqrt{3}+1}{\sqrt{3}}, \tfrac{-2\sqrt{3}-1}{\sqrt{3}}\right].$$

Řešení: Označme

$$X = [x,y] \in \mathcal{E}_2,\;\; f(X) = X' = [x', y', z'] \in \mathcal{E}_3\,,$$

$$A' - P' = \left(0, \tfrac{1}{\sqrt{2}}, \tfrac{1}{\sqrt{2}}\right), B' - P' = \left(\tfrac{1}{\sqrt{3}}, \tfrac{1}{\sqrt{3}}, -\tfrac{1}{\sqrt{3}}\right).$$

Rovnice zobrazení je $(X') = A(X) + P'$, tedy

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{\sqrt{3}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{3}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{3}} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ -2 \end{pmatrix}.$$

Zobrazení je shodné pro $A^T A = E$, tedy

$$\begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{3}} & -\frac{1}{\sqrt{3}} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{\sqrt{3}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{3}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{3}} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Rovnice obrazu $\mathcal{E}_2$ má v $\mathcal{E}_3$ parametrické vyjádření

$$\begin{array}{rrll} x = & 1 & & +\frac{1}{\sqrt{3}}s\,, \\ y = & 3 & +\frac{1}{\sqrt{2}}t & +\frac{1}{\sqrt{3}}s\,, \\ z = & -2 & +\frac{1}{\sqrt{2}}t & -\frac{1}{\sqrt{3}}s\,. \end{array}$$

Z první rovnice vyjádříme s a dosadíme do zbývajících dvou rovnic, dostaneme $s = \sqrt{3}(x-1)$ a

$$y = 3 + \tfrac{1}{\sqrt{2}}t + (x-1)\,, \quad z = -2 + \tfrac{1}{\sqrt{2}}t - (x-1)\,.$$

Vyloučením parametru t dostaneme $y-3-x+1 = z+2+x-1$. Obecné vyjádření $Im(f)$ je tedy

$$\rho \equiv 2x - y + z + 3 = 0\,.$$

3.2 Shodnosti, grupa shodností

V této části budeme uvažovat shodná zobrazení na euklidovském prostoru. Protože je shodné zobrazení prosté, je shodné zobrazení euklidovského prostoru na sebe bijekcí. Protože je každé shodné zobrazení afinní, je shodnost afinita na euklidovském prostoru. Na euklidovském prostoru můžeme uvažovat libovonou afinitu. Objasněme nejdříve, jaký je geometrický význam ekviafinních zobrazení. Připomeňme, že ekviafinní zobrazení jsou afinity s modulem ± 1.

Věta 3.2.1. *Ekviafinní zobrazení euklidovského prostoru $\mathcal{E}_n$ zachovává objemy.*

Důkaz. Uvažujme v $\mathcal{E}_n$ n-rozměrný rovnoběžnostěn $\mathcal{R}(A; \mathbf{u}_1, \ldots, \mathbf{u}_n)$. Jeho objem je dán absolutní hodnotou vnějšího součinu $[\mathbf{u}_1, \ldots, \mathbf{u}_n]$. Afinita f zobrazí rovnoběžnostěn na rovnoběžnostěn $\mathcal{R}'(f(A); \varphi_f(\mathbf{u}_1), \ldots, \varphi_f(\mathbf{u}_n))$. Jeho objem je potom absolutní hodnota vnějšího součinu $[\varphi_f(\mathbf{u}_1), \ldots, \varphi_f(\mathbf{u}_n)]$. V kartézských souřadnicích je vnější součin určen determinantem matice, v jejichž sloupcích jsou souřadnice daných vektorů. Je-li potom f určeno v souřadnicích $(X') = A(X)+B$, je $[\varphi_f(\mathbf{u}_1), \ldots, \varphi_f(\mathbf{u}_n)] = [A(\mathbf{u}_1), \ldots, A(\mathbf{u}_n)] = |A|\cdot[\mathbf{u}_1, \ldots, \mathbf{u}_n]$, a tedy rovnoběžnostěny $\mathcal{R}$ a $\mathcal{R}'$ mají stejný objem právě tehdy, je-li absolutní hodnota determinantu $|A|$ rovna jedné, t.j. $m(f) = \pm 1$ a f je ekviafinní zobrazení. □

Definice 3.2.1. Shodné zobrazení f euklidovského prostoru $\mathcal{E}_n$ na sebe se nazývá *shodnost* (*izometrie*) $\mathcal{E}_n$.

Věta 3.2.2. *Shodná zobrazení euklidovského prostoru $\mathcal{E}_n$ tvoří grupu, tzv. grupu shodností $\mathfrak{S}_n$.*

Důkaz. Důkaz je zřejmý. Složením dvou shodností je shodnost. Z definice shodného zobrazení se snadno vidí, že inverzní zobrazení ke shodnosti je opět shodnost. □

Poznámka 3.2.1. Grupa shodností na $\mathcal{E}_n$ je podgrupou grupy ekviafinních zobrazení na $\mathcal{E}_n$. T.j. $\mathfrak{S}_n \subset \mathfrak{E}_n \subset \mathfrak{A}_n$. ♢

Poznámka 3.2.2. Lineární zobrazení asociované ke shodnosti je ortogonální transformace na zaměření $Z(\mathcal{E}_n)$. V libovolných kartézských souřadnicích je tedy matice shodnosti ortonormální matice, t.j. modul shodnosti je ± 1. Je-li $m(f) = 1$ hovoříme o *přímé shodnosti*, je-li $m(f) = -1$ hovoříme o *nepřímé shodnosti*. Z Části 1.4 vyplývá, že vlastní hodnoty shodnosti jsou pouze čísla ± 1, prostor vlastních směrů, který odpovídá vícenásobné vlastní hodnotě, má dimenzi rovnu násobnosti vlastní hodnoty a vlastní směry, které odpovídají různým vlastním číslům, jsou na sebe kolmé. ♢

Poznámka 3.2.3. Ortogonální transformace na $Z(\mathcal{E}_n)$ asociovaná se shodností zobrazuje ortonormální bázi $Z(\mathcal{E}_n)$ na jinou ortonormální bázi. Rovnice

$$\begin{pmatrix} x'_1 \\ \vdots \\ x'_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix}, \qquad A^T A = E_n\,,$$

tedy můžeme chápat dvojím způsobem. Buďto jako vyjádření souřadnic obrazu X' bodu X v dané shodnosti (obojí souřadnice vzhledem k témuž kartézskému repéru $\mathcal{R} = \langle P; \mathbf{e}_1, \dots, \mathbf{e}_n \rangle$ v $\mathcal{E}_n$) nebo jako vyjádření transformace souřadnic téhož bodu X při přechodu od repéru $\mathcal{R}$ k repéru $\mathcal{R}' = \langle f(P); \varphi_f(\mathbf{e}_1), \dots, \varphi(\mathbf{e}_n) \rangle$. ♢

Úloha 3.2.1. Určete rovnice shodnosti $h : \mathcal{E}_2 \to \mathcal{E}_2$, která zobrazuje bod $A = [0,1]$ do bodu $A' = [\frac{1}{5}, \frac{13}{5}]$ a bod B=[3,1] do bodu $B' = [2,5]$.
Řešení: Jde skutečně o shodnost v E_2, neboť

$$\overrightarrow{AB} = (3,0),\ |AB| = \|\overrightarrow{AB}\| = 3\,.$$

$$\overrightarrow{A'B'} = (\tfrac{9}{5}, \tfrac{12}{5}),\ |A'B'| = \|\overrightarrow{A'B'}\| = \sqrt{\tfrac{81}{25} + \tfrac{144}{25}} = \sqrt{\tfrac{225}{25}} = \sqrt{9} = 3\,.$$

Uvažujme rovnice h ve tvaru

$$x' = ax + by + p\,, \qquad y' = cx + dy + q\,.$$

Aby h bylo shodností pro všechny body $\mathcal{E}_2$, musí být matice $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ ortogonální. To znamená, že musí platit $A^T A = E$. Tedy

$$\begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

To je ekvivalentní soustavě rovnic

$$a^2 + c^2 = 1\,, \quad b^2 + d^2 = 1\,, \quad ab + cd = 0\,.$$

Současně $\varphi_h(\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{A'B'}$, t.j. $3a = \frac{9}{5}, 3c = \frac{12}{5}$, takže $a = \frac{3}{5}, \ \ c = \frac{4}{5}$. Dosazením do předchozích rovnic dostaneme dvě možnosti

$$b_1 = -\frac{4}{5}, \ \ d_1 = \frac{3}{5}; \qquad b_2 = \frac{4}{5}, \ \ d_2 = -\frac{3}{5}.$$

Ověříme, zda v obou případech je matice ortogonální. Opravdu

$$A_1 = \begin{pmatrix} \frac{3}{5} & -\frac{4}{5} \\ \frac{4}{5} & \frac{3}{5} \end{pmatrix}, \quad A_1^T A_1 = E_2\,, \quad |A_1| = 1\,,$$

$$A_2 = \begin{pmatrix} \frac{3}{5} & \frac{4}{5} \\ \frac{4}{5} & -\frac{3}{5} \end{pmatrix}, \quad A_2^T A_2 = E_2\,, \quad |A_2| = -1.$$

Pro matici A_1 dostaneme

$$x' = \tfrac{3}{5}x - \tfrac{4}{5}y + p\,, \qquad y' = \tfrac{4}{5}x + \tfrac{3}{5}y + q\,.$$

Po dosazení bodu B a jeho obrazu B' dostaneme $p = 1$ a $q = 2$. Rovnice shodnosti pro matici A_1 tedy jsou

$$x' = \tfrac{3}{5}x - \tfrac{4}{5}y + 1\,, \qquad y' = \tfrac{4}{5}x + \tfrac{3}{5}y + 2\,.$$

Pro matici A_2 dostaneme

$$x' = \tfrac{3}{5}x + \tfrac{4}{5}y + p\,, \qquad y' = \tfrac{4}{5}x - \tfrac{3}{5}y + q\,.$$

Po dosazení bodu B a jeho obrazu B' dostaneme $p = -\frac{3}{5}$ a $q = \frac{16}{5}$. Rovnice shodnosti pro matici A_1 tedy jsou

$$x' = \tfrac{3}{5}x - \tfrac{4}{5}y - \tfrac{3}{5}\,, \qquad y' = \tfrac{4}{5}x + \tfrac{3}{5}y + \tfrac{16}{5}\,.$$

3.3 Souměrnosti podle podprostorů

Uvažujme nyní v $\mathcal{E}_n$ podprostor ϱ, $0 \leq \dim \varrho = k < n$. Podle skript [JaHo] lze z libovolného bodu X prostoru spustit na ϱ právě jednu kolmici, která protne ϱ v bodě X_0 (pata kolmice). Uvažujme zobrazení, které zobrazí bod X na bod X' takový, že X_0 je středem úsečky XX'. Je zřejmé, že toto zobrazení je (involutorní) bijekce na $\mathcal{E}_n$ a body v ϱ jsou samodružné. Ukážeme, že toto zobrazení je shodnost. Stačí tedy ověřit $|XY| = |X'Y'|$ pro libovolné body X, Y. Rovnost stačí ověřit v libovolně vhodně zvolených kartézských souřadnicích. Zvolme kartézský repér tak, aby měl podprostor ϱ neparametrické vyjádření

$$\varrho : x_{k+1} = 0\,, \dots, x_n = 0\,.$$

Potom pro libovolný bod $X = [x_1; \dots; x_n]$ je pata komice spuštěné z X na ϱ bod $X_0 = [x_1; \dots; x_k; 0; \dots; 0]$ a bod $X' = [x_1; \dots; x_k; -x_{k+1}; \dots; -x_n]$. Je tedy dané zobrazení dáno rovnicemi

$$\begin{aligned} x'_1 &= x_1\,, & x'_{k+1} &= -x_{k+1}\,, \\ &\vdots & &\vdots \\ x'_k &= x_k\,, & x'_n &= -x_n\,, \end{aligned} \tag{3.3.1}$$

t.j. je to afinní zobrazení. Snadno se vidí, že pro libovolné dva body $X = [x_1; \dots; x_n]$ a $Y = [y_1; \dots; y_n]$ a jejich obrazy $X' = [x_1; \dots; x_k; -x_{k+1}; \dots; -x_n]$ a $Y' = [y_1; \dots; y_k; -y_{k+1}; \dots; -y_n]$ platí $|X'Y'| = \sqrt{(y_1 - x_1)^2 + \dots + (y_n - x_n)^2} = |XY|$ a jde o shodnost.

Definice 3.3.1. Nechť ϱ, $0 \leq \dim \varrho = k < n$ je podprostor euklidovského prostoru $\mathcal{E}_n$. Shodnost, která zobrazí každý bod X z $\mathcal{E}_n$ na bod X' z $\mathcal{E}_n$ takový, že střed úsečky XX' je pata kolmice spuštěné z X na ϱ, se nazývá *symetrie (souměrnost)* $\mathcal{E}_n$ podle podprostoru ϱ.

Je-li $\dim \varrho = 0$ (jde o bod R) hovoříme o *středové symetrii (souměrnosti)*. Bod R se nazývá *střed symetrie (souměrnosti)*.

Je-li $\dim \varrho = 1$, respektive $\dim \varrho = 2$, respektive $\dim \varrho = n-1$, hovoříme o *symetrii (souměrnosti) podle přímky* (také *osová symetrie (souměrnost)*), respektive roviny, respektive nadroviny. V případě osové symetrie se přímka nazývá *osa symetrie (souměrnosti)*.

Poznámka 3.3.1. Souměrnosti podle nadrovin mají jako množinu samodružných bodů nadrovinu. Jedná se tedy o základní afinity, které hrají významnou roli, protože podle Věty 2.6.6 je každá afinita složením nejvýše $(n + 1)$ základních afinit. Podobnou roli budou hrát i souměrnosti podle nadrovin. $\diamondsuit$

Věta 3.3.1. *Nechť v nějakém kartézském repéru $\mathcal{R}$ na euklidovském prostoru $\mathcal{E}_n$ je dána nadrovina $\varrho : a_1x_1 + \cdots + a_nx_n + a = 0$, $(a_1; \dots ; a_n) \neq (0; \dots ; 0)$. Potom rovnice souměrnosti podle nadroviny ϱ jsou tvaru*

$$x_i' = x_i - \frac{2\,a_i}{\sum_{j=1}^n a_j^2}(a_1x_1 + \cdots + a_nx_n + a)\,. \tag{3.3.2}$$

Důkaz. Souměrnost podle nadroviny ϱ je základní afinita, a tedy podle Věty 2.6.8 má rovnice tvaru

$$x_i' = x_i + \lambda_i(a_1x_1 + \cdots + a_nx_n + a)\,.$$

Podmínka, že střed usečky XX' leží v ϱ je tvaru

$$\sum_{i=1}^n a_i \frac{x_i' + x_i}{2} + a = 0\,, \tag{3.3.3}$$

t.j.

$$\sum_{i=1}^n a_i\lambda_i(a_1x_1 + \cdots + a_nx_n + a) + 2\,(a_1x_1 + \cdots + a_nx_n + a) = 0\,. \tag{3.3.4}$$

Podobně podmínka, že $\overrightarrow{XX'} \perp \varrho$ je tvaru

$$x_i' - x_i = k\,a_i\,, \tag{3.3.5}$$

t.j.

$$\lambda_i(a_1x_1 + \cdots + a_nx_n + a) = k\,a_i\,, \tag{3.3.6}$$

Dosazením (3.3.6) do (3.3.4) dostaneme

$$k\sum_{i=1}^n a_i^2 + 2\,(a_1x_1 + \cdots + a_nx_n + a) = 0\,, \tag{3.3.7}$$

t.j.

$$k = -\frac{2}{\sum_{i=1}^n a_i^2}(a_1x_1 + \cdots + a_nx_n + a)\,. \tag{3.3.8}$$

Z (3.3.8) a (3.3.5) potom plyne (3.3.2). $\square$

Souměrnost podle nadroviny je dána nadrovinou souměrnosti. Pro její určení již nepotřebujeme obraz žádného bodu (koeficienty λ_i jsou dány jen koeficienty z rovnice nadroviny symetrie). Naopak, zadáme-li dva různé body B a B', potom existuje jediná souměrnost podle nadroviny (t.j. jediná nadrovina), která zobrazí B na B'. Opravdu, nadrovina souměrnosti bodů B a B' je jediná nadrovina, která je kolmá na vektor $\overrightarrow{BB'}$ a prochází středem úsečky BB'.

Věta 3.3.2. *Ke každé shodnosti f na euklidovském prostoru $\mathcal{E}_n$ existuje nejvýše $(n+1)$ souměrností podle nadrovin takových, že f je jejich složením.*

Důkaz. Nechť $f : \mathcal{E}_n \to \mathcal{E}_n$ je shodnost. Zvolme v $(n+1)$ bodů $P_0, P_1, \ldots, P_n$ v obecné poloze, potom i body $P_i' = f(P_i)$ jsou v obecné poloze.

Pokud $P_0 \neq P_0'$, určíme nadrovinu symetrie ρ_1 bodů P_0 a P_0'. Označme jako f_1 symetrii podle nadroviny ρ_1 a $f_1(P_i) = P_{1,i}$, $i = 1, 2, \ldots, n$. Pokud $P_0 = P_0'$ tento krok vynecháme (jako f_1 bereme identitu).

Pokud $P_{1,1} \neq P_1'$, určíme nadrovinu symetrie ϱ_2 bodů $P_{1,1}$ a P_1'. Ukážeme, že bod $P_0' \in \varrho_2$, t.j. že platí $|P_0'P_{1,1}| = |P_0'P_1'|$. Ale $|P_0'P_{1,1}| = |P_0P_1|$ protože jsou to obrazy v symetrii f_1. Podobně $|P_0'P_1'| = |P_0P_1|$ protože jsou to obrazy ve shodnosti f. V symetrii f_2 podle ϱ_2 je tedy P_0' samodružný, $P_{1,1}$ se zobrazí na P_1' a $P_{1,i}$ se zobrazí na $P_{2,i}$, $i = 2, \ldots, n$. Pokud $P_{1,1} = P_1'$ tento krok vynecháme (jako f_2 bereme identitu).

Pokud $P_{2,2} \neq P_2'$, určíme nadrovinu symetrie ϱ_3 bodů $P_{2,2}$ a P_2'. Ukážeme, že body $P_0', P_1' \in \varrho_3$, t.j. že platí $|P_0'P_{2,2}| = |P_0'P_2'|$ a $|P_1'P_{2,2}| = |P_1'P_2'|$. Ale $|P_0'P_{2,2}| = |P_0P_2|$ protože jsou to obrazy ve složení symetrií $f_2 \circ f_1$. Podobně $|P_0'P_2'| = |P_0P_2|$ protože jsou to obrazy ve shodnosti f. Totéž platí i pro bod P_1'. V symetrii f_3 podle ϱ_3 jsou tedy body P_0', P_1' samodružné, $P_{2,2}$ se zobrazí na P_2' a $P_{2,i}$ se zobrazí na $P_{3,i}$, $i = 3, \ldots, n$. Pokud $P_{2,2} = P_2'$ tento krok vynecháme (jako f_3 bereme identitu).

Dále pokračujeme analogicky až do $(n+1)$-ního kroku. Výsledek shrneme v tabulce

$$\begin{array}{ccccccccccc}
 & f_1 & & f_2 & & f_3 & & f_n & & f_{n+1} & \\
P_0 & \longrightarrow & P_0' & \longrightarrow & P_0' & \longrightarrow & \cdots & \longrightarrow & P_0' & \longrightarrow & P_0'; \\
P_1 & \longrightarrow & P_{1,1} & \longrightarrow & P_1' & \longrightarrow & \cdots & \longrightarrow & P_1' & \longrightarrow & P_1'; \\
\vdots & & \vdots & & \vdots & & & & \vdots & & \vdots \\
P_{n-1} & \longrightarrow & P_{n-1,1} & \longrightarrow & P_{n-1,2} & \longrightarrow & \cdots & \longrightarrow & P_{n-1}' & \longrightarrow & P_{n-1}'; \\
P_n & \longrightarrow & P_{n,1} & \longrightarrow & P_{n,2} & \longrightarrow & \cdots & \longrightarrow & P_{n,n} & \longrightarrow & P_n'.
\end{array}$$

Každé zobrazení f_i je symetrie podle nadroviny nebo identita. Složením $f_{n+1} \circ \cdots \circ f_1$ dostaneme původní shodnost f. $\square$

Poznámka 3.3.2. Narozdíl od rozkladu afinity na základní afinity nemáme při výběru souměrnosti podle nadrovin volbu. Jediná volba je volba bodů $P_0, P_1, \ldots, P_n$ v obecné poloze a jejich pořadí. Je výhodné mezi body P_i zařadit maximální počet samodružných bodů. $\diamondsuit$

Poznámka 3.3.3. Souměrnost podle nadroviny je nepřímá shodnost. Složení dvou souměrností podle různých nadrovin je tak přímá shodnost. Máme dvě možnosti.

Jsou-li obě nadroviny symetrie rovnoběžné, dostaneme shodnost, která nemá žádný samodružný bod. Je to posunutí ve směru kolmém na obě nadroviny o vektor velikosti dvojnásobku vzdáleností nadrovin. Jeho orientace závisí na pořadí, v jakém souměrnosti skládáme. Tato situace se snadno konstrukčně vidí v rovině. V prostoru obecné dimenze odvodíme toto tvrzení v souřadnicích. Opravdu, jsou-li ρ a σ dvě různé rovnoběžné nadroviny, máme $\rho : a_1x_1 + \cdots + a_nx_n + a = 0$ a $\sigma : a_1x_1 + \cdots + a_nx_n + b = 0$, kde $\sum_{j=1}^n a_j^2 \neq 0$, $a \neq b$. Potom rovnice souměrností podle ρ a σ, v tomto pořadí, jsou

$$\begin{aligned}
x_i' &= x_i - \frac{2\,a_i}{\sum_{j=1}^n a_j^2}(a_1x_1 + \cdots + a_nx_n + a)\,,\\
x_i'' &= x_i' - \frac{2\,a_i}{\sum_{j=1}^n a_j^2}(a_1x_1' + \cdots + a_nx_n' + b)\,.
\end{aligned}$$

Dosazením dostaneme rovnice složeného zobrazení

$$\begin{aligned}
x_i'' &= x_i - \frac{2\,a_i}{\sum_{j=1}^n a_j^2}(\sum_{k=1}^n a_kx_k + a)\\
&\quad - \frac{2\,a_i}{\sum_{j=1}^n a_j^2}\Big(\sum_{k=1}^n a_k\big(x_k - \frac{2\,a_k}{\sum_{j=1}^n a_j^2}(\sum_{l=1}^n a_lx_l + a)\big) + b\Big)\\
&= x_i - \frac{2\,a_i}{\sum_{j=1}^n a_j^2}\Big(2\sum_{k=1}^n a_kx_k + a - \frac{2\sum_{k=1}^n a_k^2}{\sum_{j=1}^n a_j^2}(\sum_{l=1}^n a_lx_l + a)\big) + b\Big)\\
&= x_i - \frac{2\,a_i}{\sum_{j=1}^n a_j^2}\Big(2\sum_{k=1}^n a_kx_k + a - 2\sum_{l=1}^n a_lx_l - 2\,a + b\Big)\\
&= x_i - \frac{2\,a_i}{\sum_{j=1}^n a_j^2}\Big(b - a\Big)\,,
\end{aligned}$$

které je posunutím o vektor $\mathbf{u} = -2\frac{b-a}{\sum_{j=1}^n a_j^2}(a_1; \ldots ; a_n)$, který je násobkem společného normálového vektoru obou rovin. Navíc jeho velikost je

$$\|\mathbf{u}\| = 2\frac{|b-a|}{|\sum_{j=1}^n a_j^2|}\sqrt{\sum_{j=1}^n a_j^2} = 2\frac{|b-a|}{\sqrt{\sum_{j=1}^n a_j^2}}\,.$$

Určeme vzdálenost rovin ρ a σ. Uvažujme $B \in \sigma$, t.j. $\sum_{j=1}^n a_jb_j = -b$. Potom vydálenost rovin je dána vzdáleností

$$v(B,\rho) = \frac{|\sum_{j=1}^n a_jb_j + a|}{\sqrt{\sum_{j=1}^n a_j^2}} = \frac{|-b+a|}{\sqrt{\sum_{j=1}^n a_j^2}}\,,$$

což je polovina velikosti vektoru $\mathbf{u}$.

Jsou-li obě nadroviny symetrie různoběžné, dostaneme shodnost, která má jako podprostor samodružných bodů průnik nadrovin symetrie, t.j. podprostor dimenze $(n-2)$. Toto zobrazení je *otočení prostoru kolem průniku nadrovin symetrie* o úhel, jehož velikost je dvojnásobná než je odchylka podprostorů. Speciálně složením dvou symetrií podle kolmých nadrovin dostáváme symetrii podle jejich průniku. Tato situace je možná v prostoru minimalní dimenze 2. V rovině tak dostáváme, že složením dvou osových symetrií s různoběžnými osami je známé otočení roviny kolem středu. Podobně v prostoru dimenze 3 je složením symetrií podle rovin s různoběžnými rovinami symetrie otočení prostoru kolem přímky. Jak si ale představit otočení prostoru dimenze n o úhel α kolem podprostoru dimenze $(n-2)$? Mějme pevně zadaný podprostor ρ dimenze $(n-2)$. Potom každým bodem prostoru, prochází právě jeden podprostor dimenze 2 (rovina) totálně kolmý k ρ, který má s daným podprostorem ρ společný právě jeden bod. Otočení prostoru kolem ρ o úhel α je potom zobrazení, které je v každé totálně kolmé rovině otočením kolem společného bodu o úhel α. Ukažme si situaci v souřadnicích. Předpokládejme, že je zadán kartézský repér tak, že ρ je podprostor určený počátkem a prvními $(n-2)$ směrovými vektory. Uvažujme libovolné dvě různé nadroviny, které obsahují ρ, t.j. $\varrho : ax_{n-1} + bx_n = 0$, $a^2 + b^2 \neq 0$, $\sigma : cx_{n-1} + dx_n = 0$, $c^2 + d^2 \neq 0$. Jejich odchylka je dána $\cos\alpha = \frac{|ac+bd|}{\sqrt{a^2+b^2}\sqrt{c^2+d^2}}$, a tedy $\sin\alpha = \frac{|ad-bc|}{\sqrt{a^2+b^2}\sqrt{c^2+d^2}}$. Potom souměrnosti podle ϱ a σ, v tomto pořadí, jsou

$$\begin{aligned} x'_1 &= x_1\,, \qquad \dots \qquad , x'_{n-2} = x_{n-2}\,, \\ x'_{n-1} &= x_{n-1} - \frac{2a}{a^2+b^2}(ax_{n-1} + bx_n)\,, \\ x'_n &= x_n - \frac{2b}{a^2+b^2}(ax_{n-1} + bx_n)\,, \end{aligned}$$

a

$$\begin{aligned} x''_1 &= x'_1\,, \qquad \dots \qquad , x''_{n-2} = x'_{n-2}\,, \\ x''_{n-1} &= x'_{n-1} - \frac{2c}{c^2+d^2}(cx'_{n-1} + dx'_n)\,, \\ x''_n &= x'_n - \frac{2d}{c^2+d^2}(cx'_{n-1} + dx'_n)\,. \end{aligned}$$

Složením dostaneme

$$\begin{aligned} x''_1 &= x_1\,, \qquad \dots \qquad , x''_{n-2} = x_{n-2}\,, \\ x''_{n-1} &= \frac{(a^2-b^2)(c^2-d^2) + 4abcd}{(a^2+b^2)(c^2+d^2)}x_{n-1} + \frac{2ab(c^2-d^2) - 2cd(a^2-b^2)}{(a^2+b^2)(c^2+d^2)}x_n\,, \\ x''_{n-1} &= -\frac{2ab(c^2-d^2) - 2cd(a^2-b^2)}{(a^2+b^2)(c^2+d^2)}x_{n-1} + \frac{(a^2-b^2)(c^2-d^2) + 4abcd}{(a^2+b^2)(c^2+d^2)}x_n\,. \end{aligned}$$

Pokud má být toto zobrazení otočením kolem $\varrho \cap \sigma$ u úhel 2α, musí být $\cos(2\alpha) = \frac{(a^2-b^2)(c^2-d^2)+4abcd}{(a^2+b^2)(c^2+d^2)}$ a $\sin(2\alpha) = \frac{2ab(c^2-d^2)-2cd(a^2-b^2)}{(a^2+b^2)(c^2+d^2)}$. To ale opravdu dostaneme ze vztahů $\cos(2\alpha) = \cos^2\alpha - \sin^2\alpha$ a $\sin(2\alpha) = 2\cos\alpha\sin\alpha$.

Uvědomme si ještě, že jak v případě posunutí, tak v případě otočení, vůbec nezáleží na konkrétní volbě nadrovin symetrie. Podstatná je jen jejich vzdálenost, v případě rovnoběžných nadrovin, nebo odchylka, v případě různoběžných nadrovin. ♢

Úloha 3.3.1. Ověřte konstrukčně, že složením dvou osových symetrií v rovině je buď posunutí (v případě rovnoběžných os symetrie), nebo otočení kolem bodu o úhel, který má dvojnásobnou velikost než je odchylka os.

3.4 Klasifikace shodností v rovině a prostoru

Podobně, jako jsme klasifikovali v afinní rovině afinity podle počtu samodružných bodů a vlastních směrů, budeme nyní klasifikovat i shodnosti v euklidovské rovině a třírozměrném euklidovském prostoru. Uvědomme si při tom, že vlastní hodnoty shodnosti mohou být pouze 1 a -1, že různým vlastním hodnotám odpovídají na sebe kolmé vlastní směry a vicenásobnému kořeni charakteristické rovnice odpovídá podprostor vlastních směrů, jehož dimenze je rovna násobnosti kořene.

V rovině potom dostáváme tabulku, kde v řádcích jsou shodnosti, které nemají žádný samodružný bod, právě jeden samodružný bod, přímku samodružných bodů a konečně mohou být všechny body samodružné.

Charakteristická rovnice je polynomiální stupně dva. Ta nemusí mít žádná reálný kořen, t.j. zobrazení nemá žádný vlastní směr, nebo má dva reálné různé kořeny (1 a -1), t.j. zobrazení má dva na sebe kolmé vlastní směry, nebo konečně má charakteristická rovnice dvojnásobný kořen 1 nebo -1, t.j. každý směr je vlastní.

Dostávame tak následující tabulku shodností v euklidovské rovině, kde počátek kartézského repéru volíme jako samodružný bod, pokud existuje, a směry souřadných os jsou vlastní směry, pokud existují.

	Žádný vlastní směr	Dva kolmé vlastní směry	Každý směr vlastní
Žádný samodružný bod	—	$x' = x \quad + b$ $y' = \quad -y$ $b \neq 0$ Posunutá o. s.	$x' = x \quad + b_1$ $y' = \quad y + b_2$ $(b_1; b_2) \neq (0; 0)$ Posunutí
Jeden samodružný bod	$x' = x \cos\alpha + y \sin\alpha$ $y' = -x \sin\alpha + y \cos\alpha$ $\sin\alpha \neq 0$ Otočení o úhel α	—	$x' = -x$ $y' = \quad -y$ Středová symetrie
Přímka samodružných bodů	—	$x' = x$ $y' = \quad -y$ Osová symetrie	—
Všechny body samodružné	—	—	$x' = x$ $y' = \quad y$ Identita

Důsledek 3.4.1. Protože je každá shodnost v rovině složením nejvýše tří osových symetrií, je každé zobrazení ve výše uvedené tabulce složeno z nejvýše tří osových symetrií. Ukážeme si to u všech zobrazení. Samotná osová symetrie je dána jedinou osovou symetrií.

Přímé shodnosti jsou posunutí a otočení kolem bodu, přitom středovou symetrii a identitu bereme jako zvláštní případ otočení o úhel π nebo 0. Tyto shodnosti musí být složeny ze dvou osových symetrií a podle Poznámky 3.3.3 je posunutí složením dvou osových symetrií s rovnoběžnými osami a otočení je složením dvou osových symetrií s různoběžnými osami.

Poslední zobrazení v tabulce je posunutá osová symetrie. Ta je složením osové symetrie a posunutí ve směru osy o nenulový vektor. Je tedy posunutá osová symetrie v tabulce složením tří osových symetrii, přitom jsou dvě osy symetrie rovnoběžné (v našem případě kolmé na třetí osu x). ◇

Důsledek 3.4.2. Protože je složením dvou přímých shodností opět přímá shodnost, dostáváme tak, že skládání posunutí a otočení je opět posunutí nebo otočení. To, že složením dvou posunutí je opět posunutí je zřejmé. Podobně se snadno nahlédne, že složením posunutí a otočení je opět otočení o stejný úhel kolem jiného středu. Nový střed otočení je ovšem závislý na tom, v jakém pořadí tato dvě zobrazení složíme.

Hůře se vidí, že složením dvou otočení (obecně podle různých středů i úhlů) je buďto posunutí, nebo otočení. Snadno se to vidí analyticky. Mějme dvě otočení $o_1(S,\alpha)$ a $o_2(R,\beta)$ o rovnicích

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos(\alpha) & \sin(\alpha) \\ -\sin(\alpha) & \cos(\alpha) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix}$$

a

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos(\beta) & \sin(\beta) \\ -\sin(\beta) & \cos(\beta) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \end{pmatrix}.$$

Pozor, souřadnice středů otočení dostaneme z výše uvedených rovnic jako souřadnice samodružných bodů. Potom z

$$\begin{aligned} &\begin{pmatrix} \cos(\alpha) & \sin(\alpha) \\ -\sin(\alpha) & \cos(\alpha) \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \cos(\beta) & \sin(\beta) \\ -\sin(\beta) & \cos(\beta) \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} \cos(\alpha)\cos(\beta) - \sin(\alpha)\sin(\beta) & \cos(\alpha)\sin(\beta) + \sin(\alpha)\cos(\beta) \\ -\cos(\alpha)\sin(\beta) - \sin(\alpha)\cos(\beta) & \cos(\alpha)\cos(\beta) - \sin(\alpha)\sin(\beta) \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} \cos(\alpha+\beta) & \sin(\alpha+\beta) \\ -\sin(\alpha+\beta) & \cos(\alpha+\beta) \end{pmatrix} \end{aligned}$$

dostameme, že $o_1 \circ o_2$ i $o_2 \circ o_1$ jsou buďto otočení o úhel $\alpha + \beta$, $\alpha + \beta \neq 2\pi$, kolem bodů, které dostaneme jako samodružný bod složeného zobrazení a pro různé pořadí skládání jsou to různé body pro $S \neq R$. Specielně, pro $\alpha + \beta = \pi$ jde o středovou symetrii.

Pro $(\alpha+\beta) = 2\,\pi$ dostaneme jednotkovou matici a zobrazení je buďto identita (pro stejné středy otáčení) nebo posunutí (pro různé středy otáčení), pro různé pořadí skládání jsou to různá posunutí. ◇

Úloha 3.4.1. Ověřte, že složením otočení a osové symetrie je buďto osová symetrie nebo posunutá osová symetrie. ◇

Úloha 3.4.2. Jaké zobrazení vznikne složením tří osových symetrií podle tří os, které tvoří strany trojúhelníka? ◇

Úloha 3.4.3. V rovině popište grupu shodností rovnostranného trojúhelníka a čtverce. ◇

Podobně jako v rovině, můžeme klasifikovat shodnosti i v prostoru. Charakteristická rovnice shodnosti v prostoru je polynomiální stupně 3. Máme následující tři možnosti:

1. Jeden kořen charakteristické rovnice je reálný (1 nebo -1) a zbývající dva kořeny jsou komplexně sdružené. V tomto případě má shodnost právě jeden vlastní směr. Je-li reálným kořenem -1, má podle Věty 2.4.4 shodnost právě

jeden samodružný bod a dostáváme tak zobrazení, které vzniká složením otočení kolem osy a rovinné symetrie podle roviny kolmé na osu otáčení. V tabulce jde o otočení kolem osy x a rovinné symetrie podle roviny yz. Je-li reálným kořenem 1, má shodnost buďto přímku samodružných bodů (otočení kolem osy) nebo nemá žádný samodružný bod (otočení kolem osy složené s posunutím ve směru osy).

2. Pokud má charakteristická rovnice dva reálné různé kořeny 1 a -1, musí být jeden z nich dvojnásobný. V tomto případě dostaneme jeden vlastní směr odpovídající jednonásobnému kořeni a dvojdimenzionální prostor vlastních směrů, které odpovídají dvojnásobnému kořeni. Přitom jsou tyto prostory na sebe kolmé. Takové zobrazení nemůže mít právě jeden samodružný bod. Má tedy buďto přímku samodružných bodů (symetrie podle přímky, v tabulce osy x), nebo rovinu samodružných bodů (symetrie podle roviny, v tabulce osy xy), nebo nemá žádný samodružný bod. Tato situace může nastat dvojím způsobem, buďto posunutím osové symetrie ve směru osy nebo posunutím rovinné symetrie ve směru roviny symetrie.

3. Konečně pro trojnásobný reálný kořen charakteristické rovnice je každý směr vlastním směrem. Je-li trojnásobným kořenem -1, má shodnost právě jeden samodružný bod a dostáváme středovou symetrii. Je-li trojnásobným kořenem 1, dostáváme buďto posunutí nebo identitu.

	Jeden vlastní směr	Prostor v.s. dim. 2 a kolmý v.s.	Každý směr vlastní
Žádný samodružný bod	$x' = x \quad + b_1$ $y' = \quad y\cos\alpha + z\sin\alpha$ $z' = -y\sin\alpha + z\cos\alpha$ $\sin\alpha \neq 0$, $b_1 \neq 0$ Otočení kolem př. x o úhel α plus posunutí ve směru př. x	$x' = x \quad + b_1$ $y' = \quad -y$ $z' = \quad -z$ $b_1 \neq 0$ Sym. podle př. x plus posunutí ve směru př. x $x' = x \quad + b_1$ $y' = \quad y \quad + b_2$ $z' = \quad -z$ $(b_1; b_2) \neq (0; 0)$ Sym. podle rov. xy plus posunutí ve směru rov. xy	$x' = x \quad + b_1$ $y' = \quad y \quad + b_2$ $z' = \quad z + b_3$ $(b_1; b_2; b_3) \neq \mathbf{o}$ Posunutí
Jeden samodružný bod	$x' = -x$ $y' = \quad y\cos\alpha + z\sin\alpha$ $z' = -y\sin\alpha + z\cos\alpha$ $\sin\alpha \neq 0$ Otočení kolem př. x o úhel α plus sym. podle roviny yz	—	$x' = -x$ $y' = \quad -y$ $z' = \quad -z$ Středová sym.
Přímka samodružných bodů	$x' = x$ $y' = \quad y\cos\alpha + z\sin\alpha$ $z' = -y\sin\alpha + z\cos\alpha$ $\sin\alpha \neq 0$ Otočení kolem př. x o úhel α	$x' = x$ $y' = \quad -y$ $z' = \quad -z$ Sym. podle př. x	—
Rovina samodružných bodů bodů	—	$x' = x$ $y' = \quad y$ $z' = \quad -z$ Sym. podle rov. xy	—
Všechny body samodružné	—	—	$x' = x$ $y' = \quad y$ $z' = \quad z$ Identita

Úloha 3.4.4. Jaké zobrazení vznikne složením dvou otočení kolem os, které jsou
a) rovnoběžné,
b) různoběžné,
c) mimoběžné? $\diamond$

Úloha 3.4.5. Jaké zobrazení vznikne složením dvou osových symetrií kolem os, které jsou
a) rovnoběžné,
b) různoběžné,
c) mimoběžné? $\diamond$

Úloha 3.4.6. Jaké zobrazení vznikne složením čtyř rovinných symetrií podle čtyř rovin, které tvoří stěny 4-stěnu? $\diamond$

Úloha 3.4.7. Popište grupy symetrií pravidelných těles. Jaké jsou jejich netriviální podgrupy? $\diamond$

3.5 Podobná zobrazení, grupa podobností

Definice 3.5.1. Zobrazení f euklidovského prostoru $\mathcal{E}_n$ do euklidovského prostoru $\mathcal{E}'_m$ se nazývá *podobné zobrazení*, jestliže existuje $k \in \mathbb{R}^+$ takové, že pro každé dva body body $X, Y \in \mathcal{E}_n$ platí

$$|f(X)f(Y)| = k\,|XY|\,.$$

Číslo k se nazývá *koeficient podobného zobrazení.*

Poznámka 3.5.1. Pro $k = 1$ v Definici 3.5.1 podobného zobrazení dostáváme shodné zobrazení. Jsou tedy shodná zobrazení speciálním případem podobných zobrazení a podobná zobrazení mají celou řadu stejných vlastností, jako shodná zobrazení. $\diamondsuit$

Příklad 3.5.1. Příkladem podobného zobrazení na euklidovském prostoru je stejnolehlost, kterou jsme probírali v Části 2.5. Opravdu, je-li f stejnolehlost s koeficientem $\kappa \in \mathbb{R}$, $\kappa \neq 0$, a středem S, t.j. $f(X) = \kappa X + (1-\kappa)S$, potom $|f(X)f(Y)| = \|\kappa(Y-X)\| = |\kappa|\,|XY|$, a tedy stejnolehlost s koeficientem κ je podobné zobrazení s koeficientem $|\kappa|$. $\heartsuit$

Věta 3.5.1. *Nechť $f : \mathcal{E}_n \to \mathcal{E}'_m$ je podobné zobrazení s koeficientem k_1 a $g : \mathcal{E}'_m \to \mathcal{E}''_k$ je podobné zobrazení s koeficientem k_2. Potom složené zobrazení $g \circ f : \mathcal{E}_n \to \mathcal{E}''_k$ je podobné zobrazení s koeficientem $k_1.k_2$.*

Důkaz. Důkaz plyne přímo z Definice 3.5.1 podobného zobrazení. Opravdu pro libovolné dva body $X, Y \in \mathcal{E}_n$ máme

$$|(g \circ f)(X)(g \circ f)(Y)| = k_2\,|f(X)f(Y)| = k_2.k_1|XY|\,. \qquad \square$$

Věta 3.5.2. *Nechť $f : \mathcal{E}_n \to \mathcal{E}'_m$ je podobné zobrazení s koeficientem k. Pak*

1) Existuje stejnolehlost $h_1 : \mathcal{E}_n \to \mathcal{E}_n$ s koeficientem k a shodné zobrazení $g_1 : \mathcal{E}_n \to \mathcal{E}'_m$ takové, že $f = g_1 \circ h_1$.

2) Existuje shodné zobrazení $g_2 : \mathcal{E}_n \to \mathcal{E}'_m$ a stejnolehlost $h_2 : \mathcal{E}'_m \to \mathcal{E}'_m$ s koeficientem k takové, že $f = h_2 \circ g_2$.

Důkaz. 1) Na $\mathcal{E}_n$ uvažujme stejnolehlost h_1^{-1} s koeficientem $1/k$ a libovolným středem. Protože stejnolehlost je podobné zobrazení a podle Věty 3.5.1 je složení dvou podobných zobrazení opět podobné zobrazení, je složené zobrazení $g_1 = f \circ h_1^{-1} : \mathcal{E}_n \to \mathcal{E}'_m$ podobné zobrazení s koeficientem $k.1/k = 1$, t.j. je to shodné zobrazení. Protože je h_1^{-1} bijekce, je k ní inverzní zobrazení stejnolehlost s koeficientem k a $f = g_1 \circ h_1$.

1) Na $\mathcal{E}'_m$ uvažujme stejnolehlost h_2^{-1} s koeficientem $1/k$ a libovolným středem. Protože stejnolehlost je podobné zobrazení a podle Věty 3.5.1 je složení dvou podobných zobrazení opět podobné zobrazení, je složené zobrazení $g_2 = h_2^{-1} \circ f : \mathcal{E}_n \to \mathcal{E}'_m$ podobné zobrazení s koeficientem $k.1/k = 1$, t.j. je to shodné zobrazení. Protože je h_2^{-1} bijekce, je k ní inverzní zobrazení stejnolehlost s koeficientem k a $f = h_2 \circ g_2$. $\square$

Věta 3.5.3. *1) Podobné zobrazení je afinní zobrazení.*

2) Podobné zobrazení je prosté, t.j. $n \leq m$.

3) Podobné zobrazení zobrazuje libovolné tři kolineární body opět na tři kolineární body a zachovává dělící poměr.

Důkaz. 1. Shodná zobrazení a stejnolehlosti jsou afinní zobrazení. Protože je podle Věty 3.5.2 podobné zobrazení složením shodného zobrazení a stejnolehlosti, je podle Věty 1.1.8 podobné zobrazení afinní.

2. Protože je stejnolehlost bijekce a shodné zobrazení je prosté, je jejich složení prosté zobrazení.

3. Plyne přím z předchozích dvou vlastností. $\square$

Věta 3.5.4. *Nechť $f : \mathcal{E}_n \to \mathcal{E}'_m$ je podobné zobrazení s koeficientem k. Pak pro asociované lineární zobrazení $\varphi_f : Z(\mathcal{E}_n) \to Z(\mathcal{E}'_m)$ platí:*

1) $\|\varphi_f(\mathbf{u})\| = k\|\mathbf{u}\|$ pro každý vektor $\mathbf{u} \in Z(\mathcal{E}_n)$.

2) $(\varphi_f(\mathbf{u}), \varphi_f(\mathbf{v})) = k^2(\mathbf{u}, \mathbf{v})$ pro každé dva vektory $\mathbf{u}, \mathbf{v} \in Z(\mathcal{E}_n)$.

Důkaz. 1. Nechť $\mathbf{u} = \overrightarrow{AB}$, potom $\|\varphi_f(\mathbf{u})\| = \|\overrightarrow{f(A)f(B)}\| = |f(A)f(B)| = k\,|AB| = k\,\|\mathbf{u}\|$.

2. Máme

$$\begin{aligned}
2\,(\varphi_f(\mathbf{u}),\varphi_f(\mathbf{v})) &= \|\varphi_f(\mathbf{u})+\varphi_f(\mathbf{v})\|^2 - \|\varphi_f(\mathbf{u})\|^2 - \|\varphi_f(\mathbf{v})\|^2 \\
&= \|\varphi_f(\mathbf{u}+\mathbf{v})\|^2 - \|\varphi_f(\mathbf{u})\|^2 - \|\varphi_f(\mathbf{v})\|^2 \\
&= k^2\left(\|\mathbf{u}+\mathbf{v}\|^2 - \|\mathbf{u}\|^2 - \|\mathbf{v}\|^2\right) \\
&= 2\,k^2\,(\mathbf{u},\mathbf{v})\,. \qquad \square
\end{aligned}$$

Důsledek 3.5.1. Podobné zobrazení zachovává odchylky vektorů.

Důkaz. Máme

$$\cos \sphericalangle\big(\varphi_f(\mathbf{u}),\varphi_f(\mathbf{v})\big) = \frac{\big(\varphi_f(\mathbf{u}),\varphi_f(\mathbf{v})\big)}{\|\varphi_f(\mathbf{u})\|\,\|\varphi_f(\mathbf{v})\|} = \frac{k^2\,\big(\mathbf{u}),\mathbf{v}\big)}{k\,\|\mathbf{u}\|\,k\,\|\mathbf{v}\|} = \cos \sphericalangle\big(\mathbf{u},\mathbf{v}\big)\,. \qquad \square$$

Pomocná věta 3.5.5. *Nechť $\varphi : Z(\mathcal{E}_n) \to Z(\mathcal{E}'_m)$ je lineární zobrazení takové, že platí $\|\varphi(\mathbf{u})\| = k\,\|\mathbf{u}\|$ pro všechny $\mathbf{u} \in Z(\mathcal{E}_n)$. Pak $\big(\varphi(\mathbf{u}),\varphi(\mathbf{v})\big) = k^2\,(\mathbf{u},\mathbf{v})$ pro všechny $\mathbf{u},\mathbf{v} \in Z(\mathcal{E}_n)$.*

Důkaz. Máme

$$(\mathbf{u}-\mathbf{v},\mathbf{u}-\mathbf{v}) = (\mathbf{u},\mathbf{u}) + (\mathbf{v},\mathbf{v}) - 2\,(\mathbf{u},\mathbf{v})\,,$$

t.j.

$$2\,(\mathbf{u},\mathbf{v}) = -\|\mathbf{u}-\mathbf{v}\|^2 + \|\mathbf{u}\|^2 + \|\mathbf{v}\|^2\,.$$

Potom

$$\begin{aligned}
2\,(\varphi(\mathbf{u}),\varphi(\mathbf{v})) &= -\|\varphi(\mathbf{u})-\varphi(\mathbf{v})\|^2 + \|\varphi(\mathbf{u})\|^2 + \|\varphi(\mathbf{v})\|^2 \\
&= -\|\varphi(\mathbf{u}-\mathbf{v})\|^2 + \|\varphi(\mathbf{u})\|^2 + \|\varphi(\mathbf{v})\|^2 \\
&= k^2\left(-\|\mathbf{u}-\mathbf{v}\|^2 + \|\mathbf{u}\|^2 + \|\mathbf{v}\|^2\right) \\
&= 2\,k^2\,(\mathbf{u},\mathbf{v})\,. \qquad \square
\end{aligned}$$

Pomocná věta 3.5.6. *Nechť $\langle \mathbf{u}_1,\dots,\mathbf{u}_n\rangle$ je báze prostoru prostoru $Z(\mathcal{E}_n)$ a nechť $\varphi : Z(\mathcal{E}_n) \to Z(\mathcal{E}'_m)$ je lineární zobrazení takové, že platí $\big(\varphi(\mathbf{u}_i),\varphi(\mathbf{u}_j)\big) = k^2\,(\mathbf{u}_i,\mathbf{u}_j)$. Pak $\big(\varphi(\mathbf{u}),\varphi(\mathbf{v})\big) = k^2\,(\mathbf{u},\mathbf{v})$ pro všechny $\mathbf{u},\mathbf{v} \in Z(\mathcal{E}_n)$.*

Důkaz. Jsou-li $\mathbf{u} = \sum_{i=1}^n x_i\,\mathbf{u}_i$ a $\mathbf{v} = \sum_{j=1}^n y_j\,\mathbf{u}_j$ libovolné vektory, je $(\mathbf{u},\mathbf{v}) = \sum_{i,j=1}^n x_i\,y_j\,(\mathbf{u}_i,\mathbf{u}_j)$. Potom

$$\begin{aligned}
(\varphi(\mathbf{u}),\varphi(\mathbf{v})) &= \big(\sum_{i=1}^n x_i\,\varphi(\mathbf{u}_i),\sum_{j=1}^n y_j\,\varphi(\mathbf{u}_j)\big) \\
&= \sum_{i,j=1}^n x_i\,y_j\,(\varphi(\mathbf{u}_i),\varphi(\mathbf{u}_j)) = k^2 \sum_{i,j=1}^n x_i\,y_j\,(\mathbf{u}_i,\mathbf{u}_j) \\
&= k^2\,(\sum_{i=1}^n x_i\,\mathbf{u}_i,\sum_{j=1}^n y_j\,\mathbf{u}_j) = k^2\,(\mathbf{u},\mathbf{v})\,.
\end{aligned}$$

$\square$

Věta 3.5.7. *Nechť je dáno $(n+1)$ bodů v obecné poloze $P_0, P_1, \dots, P_n \in \mathcal{E}_n$ a body $P'_0, P'_1, \dots, P'_n \in \mathcal{E}'_m$ takové, že*

$$k\,|P_iP_j| = |P'_iP'_j|\,, \qquad i,j = 0,\dots,n\,, k \in \mathbb{R}^+. \tag{3.5.1}$$

Pak existuje jediné podobné zobrazení $f : \mathcal{E}_n \to \mathcal{E}'_m$ s koeficientem k takové, že $f(P_i) = P'_i$ pro všechna $i = 0,\dots,n$.

Důkaz. Protože jsou body $P_0, P_1, \dots, P_n \in \mathcal{E}_n$ v obecné poloze, jsou vektory $\mathbf{u}_1 = \overrightarrow{P_0P_1}, \dots, \mathbf{u}_n = \overrightarrow{P_0P_n} \in Z(\mathcal{E}_n)$ lineárně nezávislé. Podmínka (3.5.1) znamená, že i body $P'_0, P'_1, \dots, P'_n \in \mathcal{E}'_m$ jsou v obecné poloze, a tedy i vektory $\mathbf{u}'_1 = \overrightarrow{P'_0P'_1}, \dots, \mathbf{u}'_n = \overrightarrow{P'_0P'_n} \in Z(\mathcal{E}'_m)$ jsou lineárně nezávislé. Podle Věty 1.1.2 existuje jediné lineární zobrazení $\varphi : Z(\mathcal{E}_n) \to Z(\mathcal{E}'_m)$ takové, že $\varphi(\mathbf{u}_i) = \mathbf{u}'_i$. Navíc platí $\|\varphi(\mathbf{u}_i)\| = k\,\|\mathbf{u}_i\|$ a $\|\varphi(\mathbf{u}_i - \mathbf{u}_j)\| = \|\varphi(\overrightarrow{P_jP_i})\| = |P'_jP'_i| = k\,|P_jP_i| = k\,\|(\mathbf{u}_i - \mathbf{u}_j\|$. Potom ale

$$\begin{aligned}
2\,(\varphi(\mathbf{u}_i), \varphi(\mathbf{u}_j)) &= -\|\varphi(\mathbf{u}_i) - \varphi(\mathbf{u}_j)\|^2 + \|\varphi(\mathbf{u}_i)\|^2 + \|\varphi(\mathbf{u}_j)\|^2 \\
&= -\|\varphi(\mathbf{u}_i - \mathbf{u}_j)\|^2 + \|\varphi(\mathbf{u}_i)\|^2 + \|\varphi(\mathbf{u}_j)\|^2 \\
&= k^2 \big(- \|\mathbf{u}_i - \mathbf{u}_j\|^2 + \|\mathbf{u}_i\|^2 + \|\mathbf{u}_j\|^2 \big) \\
&= 2\,k^2\,(\mathbf{u}_i, \mathbf{u}_j)\,.
\end{aligned}$$

$(\varphi(\mathbf{u}), \varphi(\mathbf{v})) = k^2\,(\mathbf{u}, \mathbf{v})$ a $\|\varphi(\mathbf{u})\| = k\,\|\mathbf{u}\|$ pro každý vektor $\mathbf{u}, \mathbf{v} \in Z(\mathcal{E}_n)$. Opravdu jsou-li $\mathbf{u} = \sum_{i=1}^n x_i\,\mathbf{u}_i$ a $\mathbf{v} = \sum_{j=1}^n y_j\,\mathbf{u}_j$. Potom

$$\begin{aligned}
(\varphi(\mathbf{u}), \varphi(\mathbf{v})) &= \Big(\sum_{i=1}^n x_i\,\varphi(\mathbf{u}_i), \sum_{j=1}^n y_j\,\varphi(\mathbf{u}_j)\Big) \\
&= \sum_{i,j=1}^n x_i\,y_j\,(\varphi(\mathbf{u}_i), \varphi(\mathbf{u}_j)) = k^2 \sum_{i,j=1}^n x_i\,y_j\,(\mathbf{u}_i, \mathbf{u}_j) \\
&= k^2\,(\sum_{i=1}^n x_i\,\mathbf{u}_i, \sum_{j=1}^n y_j\,\mathbf{u}_j) = k^2\,(\mathbf{u}, \mathbf{v})\,.
\end{aligned}$$

Odtud okamžitě vyplývá $\|\varphi(\mathbf{u})\| = k\,\|\mathbf{u}\|$.

Podle Věty 3.1.5 je zobrazení

$$f(X) = P'_0 + \varphi(\overrightarrow{P_0X})$$

afinní zobrazení a snadno se vidí, že $f(P_i) = P'_i$. Potom

$$|f(X)f(Y)| = \|\varphi(\overrightarrow{P_0Y}) - \varphi(\overrightarrow{P_0X})\| = \|\varphi(\overrightarrow{XY})\| = k\,\|\overrightarrow{XY}\| = k\,|XY|\,,$$

a tedy je to podobné zobrazení. $\square$

Důsledek 3.5.2. Podobné zobrazení v rovině je určeno vrcholy podobných trojúhelníků. ◇

Uvažujme kartézské repéry $\mathcal{R} = \langle P; \mathbf{e}_1, \ldots, \mathbf{e}_n \rangle$ v prostoru $\mathcal{E}_n$ a $\mathcal{R}' = \langle Q; \mathbf{d}_1, \ldots, \mathbf{d}_m \rangle$ v prostoru $\mathcal{E}'_m$. Potom dostaneme vyjádření f ve tvaru

$$x'_j = \sum_{i=1}^{n} a_{ji} x_i + b_j \, , \; j = 1, \ldots, m \, , \tag{3.5.2}$$

a z podmínky, že f je podobné zobrazení tvaru $(\varphi_f(\mathbf{u}), \varphi_f(\mathbf{v})) = k^2(\mathbf{u}, \mathbf{v})$ dostaneme

$$(\varphi_f(\mathbf{u}), \varphi_f(\mathbf{v})) = (A(\mathbf{u}))^T (A(\mathbf{v})) = (\mathbf{u})^T A^T A(\mathbf{v}) = k^2 (\mathbf{u})^T E_n(\mathbf{v}) \, ,$$

t.j. $A^T A = k^2 E_n$. Dostáváme tedy, že matice A je maticí podobného zobrazení právě tehdy, splňuje-li podmínku

$$A^T A = k^2 E_n \, . \tag{3.5.3}$$

Dále uvažujme podobná zobrazení na euklidovském prostoru.

Definice 3.5.2. Podobné zobrazení f s koeficientem k euklidovského prostoru $\mathcal{E}_n$ na sebe se nazývá *podobnost* $\mathcal{E}_n$.
Je-li $k \neq 1$, nazývá se f *vlastní podobnost.*

Věta 3.5.8. *Podobnosti na euklidovského prostoru $\mathcal{E}_n$ tvoří grupu, tzv.* grupu podobností $\mathfrak{Po}_n$.

Důkaz. Důkaz je zřejmý. Složením dvou podobností je podobnost. Z definice podobného zobrazení se snadno vidí, že inverzní zobrazení k podobnosti s koeficientem k je opět podobnost s koeficientem $1/k$. □

Věta 3.5.9. *Vlastní hodnoty příslušné podobnosti s koeficientem k mohou být pouze $\pm k$.*

Důkaz. Je-li $\mathbf{u}$ vlastní vektor příslusný vlastní hodnotě λ, je z podmínky $\|\varphi_f(\mathbf{u})\| = k\,\|\mathbf{u}\|$ pro asociované lineární zobrazení podobnosti $|\lambda| = k$, a tedy $\lambda = \pm k$. □

Věta 3.5.10. *Modul podobnosti s koeficientem k je $\pm k^n$.*

Důkaz. Podobnost má jako svou matici čtvercovou matici takovou, že $A^T A = k^2\, E_n$. Potom $|A^T A| = k^{2n}$, a tedy $|A|^2 = k^{2n}$ a po odmocnění $|A| = \pm k^n$. □

Věta 3.5.11. *Každá vlastní podobnost euklidovského prostoru $\mathcal{E}_n$ má právě jeden samodružný bod.*

Důkaz. Kořeny charakteristické rovnice pro podobnost mohou být pouze hodnoty $\pm k$. Pro vlastní podobnost jednička není kořenem charakteristické rovnice a podle Věty 2.4.4 má podobnost právě jeden samodružný bod. □

Věta 3.5.12. *Každá vlastní podobnost na $\mathcal{E}_n$ s koeficientem k je složením shodnosti na $\mathcal{E}_n$ a stejnolehlosti s koeficientem k a středem, který je samodružným bodem dané podobnosti.*

Důkaz. Je-li S samodružný bod vlastní podobnosti f, existuje jediná stejnolehlost h^{-1} s koeficientem $1/k$ a středem S. Potom $g_1 = f \circ h^{-1}$ a $g_2 = h^{-1} \circ f$ jsou shodnosti na $\mathcal{E}_n$ a $f = g_1 \circ h = h \circ g_2$. □

Poznámka 3.5.2. Grupa podobností na $\mathcal{E}_n$ je podgrupou grupy afinit na $\mathcal{E}_n$, t.j. $\mathfrak{Po}_n \subset \mathfrak{A}_n$. ♢

Následující graf nám ukazuje hlavní podgrupy v grupě afinit na $\mathcal{E}_n$.
Liché n:

$$\begin{tikzcd}
 & & & (\mathfrak{Af}_n, \circ) \arrow[dll] \arrow[d] \arrow[drr] & & & \\
 & (\mathfrak{Af}_n{}^+, \circ) \arrow[dl] \arrow[dr] & & (\mathfrak{Po}_n, \circ) \arrow[dl] \arrow[dr] \arrow[drrr] & & (\mathfrak{Ek}_n, \circ) \arrow[dlllll] \arrow[dl] & \\
(\mathfrak{Ek}_n{}^+, \circ) \arrow[dr] & & (\mathfrak{Po}_n{}^+, \circ) \arrow[dl] \arrow[dr] & & (\mathfrak{Sh}_n, \circ) \arrow[dlll] \arrow[dr] & & (\mathfrak{Ho}_n, \circ) \arrow[dlll] \arrow[dl] \\
 & (\mathfrak{Sh}_n^+, \circ) \arrow[drr] & & (\mathfrak{Ho}_n^+, \circ) \arrow[d] & & (\mathfrak{T}_n + S.s., \circ) \arrow[dll] & \\
 & & & (\mathfrak{T}_n, \circ) \arrow[d] & & & \\
 & & & (\mathrm{Id}, \circ) & & &
\end{tikzcd}$$

Sudé n:

$$
\begin{tikzcd}
 & & (\mathfrak{Af}_n, \circ) \arrow[dll] \arrow[d] \arrow[drr] & & \\
(\mathfrak{Af}_n{}^+, \circ) \arrow[d] \arrow[drr] & & (\mathfrak{Po}_n, \circ) \arrow[d] \arrow[drr] & & (\mathfrak{Ek}_n, \circ) \arrow[dllll] \arrow[d] \\
(\mathfrak{Ek}_n{}^+, \circ) \arrow[drrr] & & (\mathfrak{Po}_n{}^+, \circ) \arrow[dl] \arrow[dr] & & (\mathfrak{Sh}_n, \circ) \arrow[dl] \\
 & (\mathfrak{Ho}_n, \circ) \arrow[dr] & & (\mathfrak{Sh}_n^+, \circ) \arrow[dl] & \\
 & & (\mathfrak{T}_n + S.s., \circ) \arrow[d] & & \\
 & & (\mathfrak{T}_n, \circ) \arrow[d] & & \\
 & & (\mathrm{Id}, \circ) & &
\end{tikzcd}
$$

Kapitola 4

KRUHOVÁ ZOBRAZENÍ

4.1 Kružnice a její vlastnosti

V tomto paragrafu si připomeneme některé základní vlastnosti a pojmy, které jsou spojeny s kružnicí v euklidovské rovině.

Definice 4.1.1. Nechť S je bod v $\mathcal{E}_2$ a $r > 0$ je reálné číslo. Množina bodů $X \neq S \in \mathcal{E}_2$ takových, že

$$|SX| = r$$

se nazývá *kružnice* se *středem* S a *poloměrem* r. Značíme $k(S; r)$.

Uvažujme v $\mathcal{E}_2$ kartézský repér a nechť vzhledem k němu je $S = [m; n]$ a $X = [x; y]$. Z Definice 4.1.1 plyne, že $X \in k$ právě tehdy, když

$$\sqrt{(x-m)^2 + (y-n)^2} = r\,,$$

což upravíme na tvar

$$k : x^2 + y^2 - 2mx - 2ny + c = 0\,, \tag{4.1.1}$$

kde jsme položili

$$c = m^2 + n^2 - r^2\,. \tag{4.1.2}$$

Poznámka 4.1.1. Rovnici (4.1.1) můžeme vynásobit libovolným nenulovým reálným číslem a dostaneme opět rovnici téže kružnice. Rovnici (4.1.1) potom nazýváme *normovaná rovnice kružnice.* V případě neparametrické rovnice přímky $ax + by + c = 0$ nazýváme tuto rovnici normovanou, jestliže velikost normálového vektoru je 1, t.j. $\sqrt{a^2 + b^2} = 1$. ♢

Úmluva 4.1.1 Z důvodu jednoduchosti zápisu budeme levou stranu rovnice (4.1.1) značit $K(X) = x^2 + y^2 - 2mx - 2ny + c$, a tedy $k : K(X) = 0$.

Poznámka 4.1.2. Uvažujeme-li naopak množinu bodů v rovině, jejichž souřadnice splňují rovnici (4.1.1), pak z (4.1.2) je zřejmé, že se jedná o kružnici pouze za předpokladu, že $m^2 + n^2 - c > 0$. $\diamondsuit$

Definice 4.1.2. Nechť $k : K(X) = 0$ je kružnice a $P = [x_0; y_0] \in \mathcal{E}_2$ je bod. Číslo $K(P) = x_0^2 + y_0^2 - 2mx_0 - 2ny_0 + c$ se nazývá *mocnost bodu P ke kružnici k.*

Body se zápornou mocností se budou nazývat *vnitřní body kružnice k* a body s kladnou mocností se budou nazývat *vnější body kružnice k.*

Připomeňme nejdříve, že reálná přímka kružnici buď reálně neprotíná nebo ji protíná ve dvou reálných bodech, které mohou i splynout (tečna kružnice). Následující věta nám ukáže, jaký je geometrický význam mocnosti bodů.

Věta 4.1.1. *Nechť P je bod, k je kružnice a p je libovolná přímka procházející bodem P, která protíná kružnici k. Potom součin orientovaných velikostí úseků, které jsou na přímce p vyťaty bodem P a průsečíky přímky p s kružnicí k, je nezávislý na volbě přímky p a je roven mocnosti bodu P vzhledem ke kružnici k.*

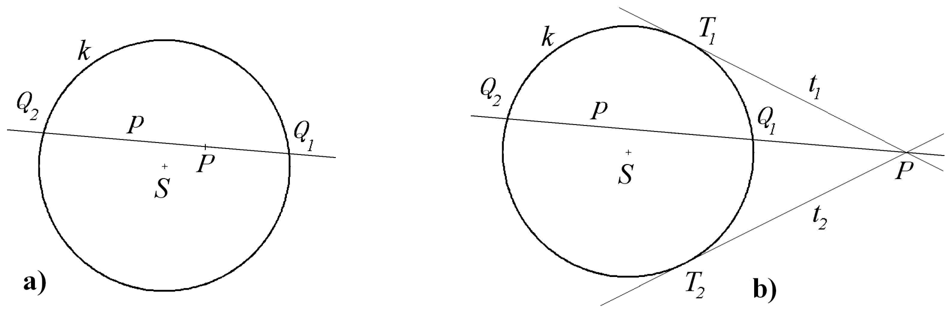
Důkaz. Přímku p určeme parametricky bodem $P = [x_0; y_0]$ a jednotkovým vektorem $(\cos\alpha; \sin\alpha)$, tj. $p \equiv X = [x_0; y_0] + t(\cos\alpha; \sin\alpha)$. V tomto případě, je-li X dán parametrem t, je $|PX| = |t|$. Dosadíme do rovnice kružnice a po úpravě dostaneme kvadratickou rovnici pro t ve tvaru

$$t^2 + 2t[(x_0 - m)\cos\alpha + (y_0 - n)\sin\alpha] + K(P) = 0\,.$$

Jsou-li t_1, t_2 kořeny této kvadratické rovnice, je z kořenových vztahů pro kvadratickou rovnici $t_1 t_2 = K(P)$ a tvrzení nyní plyne z toho, že parametr t určuje vzdálenost příslušného bodu od bodu P. Je-li při tom $K(P) < 0$, mají kořeny t_1 a t_2 různá znaménka, což znamená, že průsečíky přímky p a kružnice k leží na různých polopřímkách určených na přímce p bodem P (Obr. 4.1.1 a)). Pro $K(P) > 0$ mají kořeny t_1 a t_2 shodná znaménka, což znamená, že průsečíky přímky p a kružnice k leží na téže polopřímce určené na přímce p bodem P (Obr. 4.1.1 b)). Tato situace je vyjádřena formulací "orientovaný součin vzdáleností". $\square$

Důsledek 4.1.1. Pro vnější bod P kružnice k je mocnost rovna druhé mocnině délky úsečky, která je určena na tečně bodem P a bodem dotyku (Obr. 4.1.1 b)). $\diamond$

Poznámka 4.1.3. Z Věty 4.1.1 vyplývá, že pojem vnitřního a vnějšího bodu kružnice definovaný v Definici 4.1.2 splývá s intuitivní představou, kdy vnější body jsou ty, ze kterých lze ke kružnici sestrojit tečny. Body ležící na kružnici mají podle definice nulovou mocnost. $\diamondsuit$



Obrázek 4.1.1: K mocnosti bodu ke kružnici

Nechť jsou dány dvě kružnice $k_1(S_1; r_1)$, $k_2(S_2; r_2)$ svými rovnicemi

$$k_1 : K_1(X) = x^2 + y^2 - 2m_1x - 2n_1y + c_1 = 0\,, \qquad (4.1.3)$$
$$m_1^2 + n_1^2 - c_1 > 0\,,$$
$$k_2 : K_2(X) = x^2 + y^2 - 2m_2x - 2n_2y + c_2 = 0\,, \qquad (4.1.4)$$
$$m_2^2 + n_2^2 - c_2 > 0\,.$$

Uvažujme body, které leží na obou kružnicích, tj. splňují rovnice (4.1.3) i (4.1.4). Potom tyto body musí splňovat i rovnici

$$K_1(X) - K_2(X) = 2\,(m_2 - m_1)x + 2\,(n_2 - n_2)y + c_1 - c_2 = 0\,. \qquad (4.1.5)$$

Pro $m_1 = m_2$, $n_1 = n_2$, $c_1 = c_2$, tj. $k_1 \equiv k_2$, je rovnice splněna identicky.

Pro $m_1 = m_2$, $n_1 = n_2$, $c_1 \neq c_2$, tj. k_1 a k_2 mají společný střed, ale různé poloměry, není rovnice splněna nikdy, což znamená, že dvě soustředné kružnice nemají společné (reálné) body.

Pro $(m_1; n_1) \neq (m_2; n_2)$ je rovnice (4.1.5) rovnicí přímky. Společné body dvou nesoustředných kružnic tedy musí ležet na přímce (4.1.5). Protože průnikem přímky a kružnice jsou buď dva různé body, nebo jeden dvojnásobný bod, nebo žádný (reálný) bod, nastává totéž i pro počet (reálných) společných bodů dvou nesoustředných kružnic, které se mohou protínat ve dvou různých bodech, nebo se dotýkají v jednom bodě, nebo se (reálně) neprotínají.

Definice 4.1.3. Nechť k_1, k_2 jsou dvě nesoustředné kružnice o rovnicích (4.1.3) a (4.1.4). Pak přímka (4.1.5) se se nazývá *chordála* kružnic k_1 a k_2.

Věta 4.1.2. *Chordála dvou nesoustředných kružnic je geometrické místo bodů, které mají vzhledem k oběma kružnicím touž mocnost.*

Důkaz. Důkaz je přímým důsledkem definice chordály jako přímky, tvořené takovými body X, že $K_1(X) = K_2(X)$. □

Poznámka 4.1.4. Z rovnice (4.1.5) vyplývá, že chordála je kolmá na spojnici středů daných nesoustředných kružnic. ♢

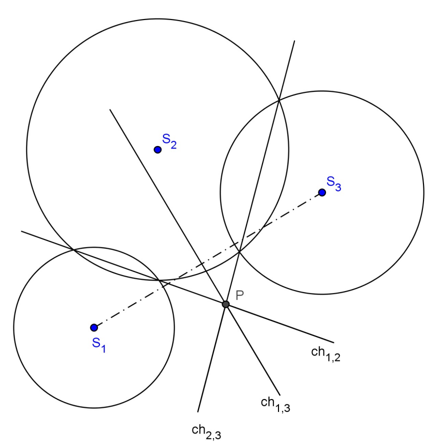
Věta 4.1.3. *Nechť jsou dány tři různé nesoustředné kružnice $k_i(S_i, r_i)$, $i = 1, 2, 3$, takové, že jejich středy neleží na jedné přímce, potom existuje jediný bod, který má stejnou mocnost vzhledem ke všem třem kružnicím.*

Důkaz. Protože středy S_1, S_2, S_3 neleží na stejné přímce, jsou chordály kružnic k_1, k_2 a k_1, k_3 různoběžné přímky. Průsečík těchto chordál má stejnou mocnost vzhledem ke všem třem kružnicím a musí jím tedy procházet i chordála kružnic k_2, k_3, viz Obr. 4.1.2. □

Definice 4.1.4. Bod, který má stejnou mocnost vzhledem ke třem různým kružnicím, jejichž středy neleží na přímce, se nazývá *chordický (potenční) střed* těchto kružnic.

Poznámka 4.1.5. Chordický střed pro tři kružnice, jejichž středy leží na jedné přímce neexistuje, protože chordály každých dvou kružnic jsou kolmice na přímku středů a tedy navzájem rovnoběžné přímky, Obr. udělat. ♢

Poznámka 4.1.6. Chodický střed pro tři kružnice se používá při konstrukci chordály dvou neprotínajících se kružnic. Sestrojíme libovolnou třetí kružnici, která dané dvě kružnice protíná. Potom snadno sestrojíme chordály této kružnice a daných kružnic. Hledaná chordála je potom kolmice spuštěná z průsečíku chordál (chordického středu) na spojnici středů daných kružnic, viz Obr. 4.1.2



Obrázek 4.1.2: Potenční střed tří kružnic

♢

Definice 4.1.5. *Odchylkou dvou nesoustředných kružnic* se společnými reálnými body rozumíme odchylku tečen v libovolném společném bodě.

Odchylkou přímky a kružnice, která má s přímkou společné reálné body, rozumíme odchylku dané přímky a tečny kružnice v libovolném společném bodě.

Poznámka 4.1.7. Protože každé dvě nesoustředné kružnice jsou symetrické podle spojnice středů, je definice odchylky opravdu nezávislá na zvoleném společném bodu kružnic.

Podobně kružnice a přímka jsou symetrické podle kolmice spuštěné ze středu kružnice na přímku.

Je zřejmé, že odchylka dotýkajících se kružnic je nulová. Podobně odchylka kružnice a její tečny je nulová. $\diamondsuit$

Poznámka 4.1.8. Odchylku dvou kružnic tedy nedefinujeme pro dvě soustředné kružnice nebo pro dvě nesoustředné kružnice, které se reálně neprotínají.

Podobně odchylku přímky a kružnice nedefinujeme, je-li vzdálenost přímky od středu kružnice větší než poloměr kružnice. $\diamondsuit$

Věta 4.1.4. *Nechť jsou dány dvě nesoustředné kružnice $k_1(S_1; r_1)$ a $k_2(S_2; r_2)$, které mají společné reálné body. Nechť k_1 a k_2 mají rovnice (4.1.3) a (4.1.4). Pak odchylka $\sphericalangle(k_1, k_2) = \varphi$ je dána vztahem*

$$\begin{aligned}\cos\varphi &= \frac{|2m_1m_2 + 2n_1n_2 - c_1 - c_2|}{2\sqrt{m_1^2 + n_1^2 - c_1}\sqrt{m_2^2 + n_2^2 - c_2}} \\ &= \frac{|r_1^2 + r_2^2 - |S_1S_2|^2|}{2\,r_1r_2}\,.\end{aligned}$$

Důkaz. Dvě kružnice se reálně protínají, jestliže platí jedna z následujících možností

1. $|S_1S_2| \le r_1 + r_2$ a $|S_1S_2| \ge \max(r_1, r_2)$ (viz Obr. 4.1.3 a));
2. $r_2 \le r_1$, $|S_1S_2| + r_2 \ge r_1$ a $|S_1S_2| \le r_1$ (viz Obr. 4.1.3 b)).

Označme P společný bod kružnic k_1 a k_2. Odchylka tečen v bodě P je shodná jako odchylka přímek PS_1 a PS_2 (viz Obr. 4.1.3).

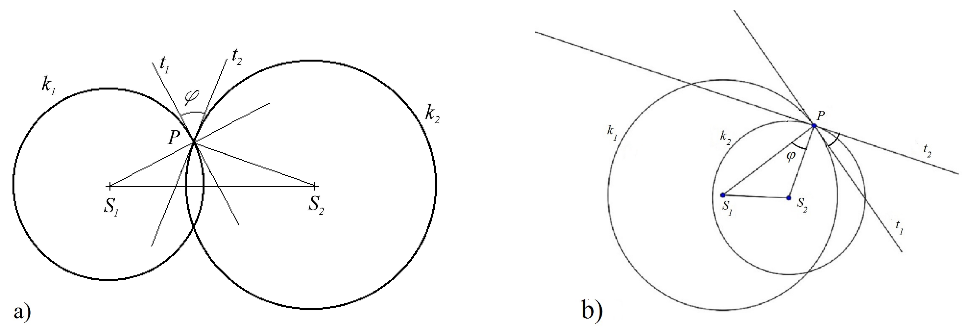
Z kosinové věty pro trojúhelník S_1PS_2 dostaneme

$$\begin{aligned}|S_1S_2|^2 &= r_1^2 + r_2^2 - r_1r_2\cos\widehat{S_1PS_2} \\ \cos\widehat{S_1PS_2} &= \frac{r_1^2 + r_2^2 - |S_1S_2|^2}{2r_1r_2}\,.\end{aligned}$$

Hledaná odchylka φ je míra menšího z úhlů $\widehat{S_1PS_2}$, $\pi - \widehat{S_1PS_2}$, a tedy

$$\cos\varphi = \frac{|r_1^2 + r_2^2 - |S_1S_2|^2|}{2r_1r_2}\,.$$

Dosazením z analytického vyjádření (4.1.3) a (4.1.4) pak snadno dostaneme požadované tvrzení. $\square$



Obrázek 4.1.3: Odchylka dvou kružnic

Poznámka 4.1.9. Snadno se přesvědčíme, že jestliže kružnice nemají společný reálný bod, je

$$\frac{|r_1^2 + r_2^2 - |S_1S_2|^2|}{2r_1r_2} > 1$$

a φ splňující podmínku předchozí věty neexistuje. ♢

Věta 4.1.5. *Nechť je dána přímka p a kružnice $k(S;r)$ takové, že $v(S,p) \leq r$ (tj. přímka a kružnice mají společné reálné body). Nechť $p : ax + by + d = 0$ a $k : x^2 + y^2 - 2mx - 2ny + c = 0$. Pak odchylka $\sphericalangle(p,k) = \varphi$ je dána vztahem*

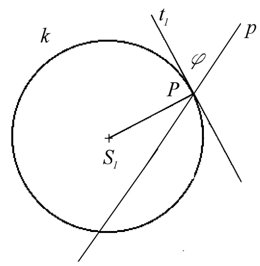
$$\cos\varphi = \frac{|am + bn + d|}{\sqrt{a^2+b^2}\sqrt{m^2+n^2-c}}\,.$$

Důkaz. Odchylka přímky p a kružnice k je dána odchylkou přímky p a tečny t kružnice k ve společném bodě P. Tato odchylka je rovna odchylce normálového vektoru $(a;b)$ přímky p a normálového vektoru $\overrightarrow{SP}$ tečny kružnice ve společném bodě $P = [x_0; y_0]$ přímky a kružnice (viz Obr. **??**). Tento normálový vektor má souřadnicové vyjádření $(m - x_0; n - y_0)$. Tedy

$$\cos\varphi = \frac{|a(m-x_0) + b(n-y_0)|}{\sqrt{a^2+b^2}\sqrt{(m-x_0)^2+(n-y_0)^2}}\,.$$

Protože bod $[x_0; y_0]$ leží na přímce p i kružnici k, vyhovuje jejich rovnicím a dosazením $(-ax_0 - by_0) = d$ do čitatele a $x_0^2 + y_0^2 - 2mx_0 - 2ny_0 = -c$ do jmenovatele dostaneme tvrzení věty.

□



Obrázek 4.1.4: Odchylka kružnice a přímky

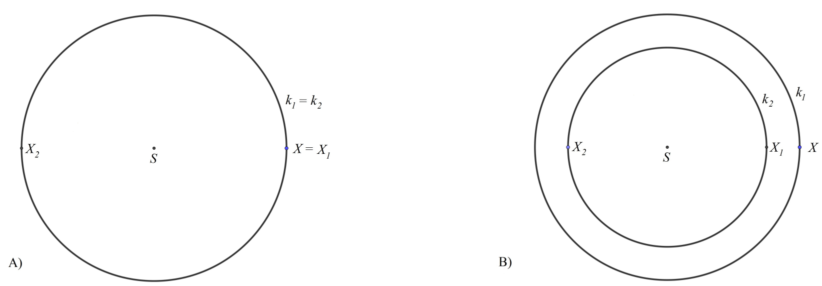
Připomeňme (viz část 2.5), že homotetie je buďto posunutí nebo stejnolehlost. Jako speciální homotetie tak bereme i identitu a středovou symetrii.

Věta 4.1.6. *Jsou-li $k_1(S_1; r_1)$ a $k_2(S_2; r_2)$ libovolné dvě kružnice, potom existují právě dvě homotetie, které zobrazují kružnici k_1 na kružnici k_2.*

Důkaz. Musíme rozlišit celkem čtyři možné situace.

A) Kružnice $k_1(S_1; r_1)$ a $k_2(S_2; r_2)$ jsou totožné, tj. $S_1 = S_2 = S$ a $r_1 = r_2$. V tomto případě je jedna homotetie identita a druhá je středová symetrie podle společného středu S. Na Obr. 4.1.5 A) zobrazuje identita libovolný bod X do bodu X_1 a středová symetrie do bodu X_2.

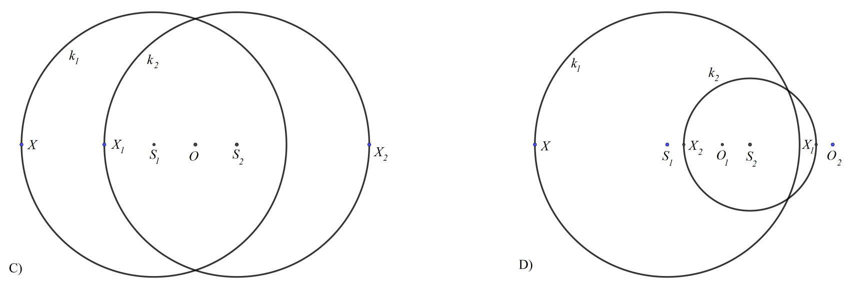
B) Kružnice $k_1(S_1; r_1)$ a $k_2(S_2; r_2)$ jsou soustředné různé, tj. $S_1 = S_2 = S$ a $r_1 \neq r_2$. Potom existují právě dvě stejnolehlosti se středem v bodě S, které převádí k_1 na kružnici k_2. Koeficient první stejnolehlosti je $\kappa_1 = \frac{r_2}{r_1}$ a koeficient druhé stejnolehlosti je $\kappa_2 = -\frac{r_2}{r_1}$. Na Obr. 4.1.5 B) zobrazuje první stejnolehlost libovolný bod X do bodu X_1 a druhá stejnolehlost do bodu X_2.



Obrázek 4.1.5: Homotetie kružnic se stejnými středy

C) Kružnice $k_1(S_1; r_1)$ a $k_2(S_2; r_2)$ jsou shodné a nesoustředné, tj. $S_1 \neq S_2$ a $r_1 = r_2$. V tomto případě je jedna homotetie posunutí o vektor $\overrightarrow{S_1S_2}$ a druhá je středová symetrie podle středu O úsečky S_1S_2. Na Obr. 4.1.6 C) zobrazuje posunutí bod X do bodu X_1 a středová symetrie podle středu O do bodu X_2.

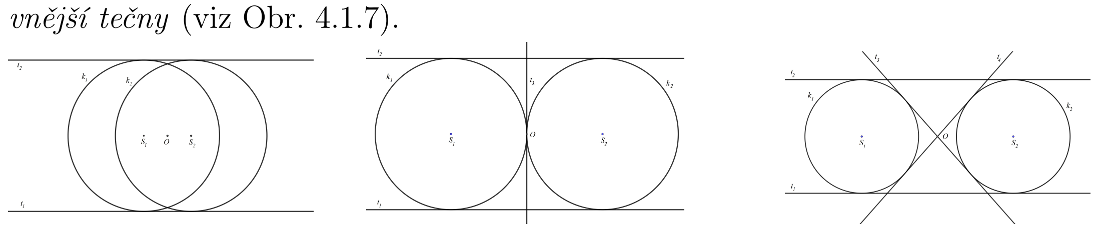
D) Kružnice $k_1(S_1; r_1)$ a $k_2(S_2; r_2)$ jsou neshodné a nesoustředné, tj. $S_1 \neq S_2$ a $r_1 \neq r_2$. Potom existují právě dvě stejnolehlosti, které převádí k_1 na kružnici k_2. Středem první stejnolehlosti je bod $O_1 = \frac{r_2}{r_1+r_2} S_1 + \frac{r_1}{r_1+r_2} S_2$ (*vnitřní střed stejnolehlosti* - je vnitřním bodem úsečky S_1S_2) a koeficient stejnolehlosti je $\kappa_1 = -\frac{r_2}{r_1}$. Druhá stejnolehlost je dána středem $O_2 = -\frac{r_2}{r_1-r_2} S_1 + \frac{r_1}{r_1-r_2} S_2$ (*vnější střed stejnolehlosti* - je vnějším bodem úsečky S_1S_2) a koeficient stejnolehlosti je $\kappa_2 = \frac{r_2}{r_1}$. Na Obr. 4.1.6 D) zobrazuje první stejnolehlost bod X do bodu X_1 a druhá stejnolehlost do bodu X_2.



Obrázek 4.1.6: Homotetie kružnic s různými středy

□

Poznámka 4.1.10. Poznamenejme, že v případě C) mají vždy kružnice dvě navzájem rovnoběžné společné tečny (*vnější tečny* - kružnice leží ve stejných polorovinách určených tečnami). Pokud se kružnice protínají ve dvou reálných bodech, je střed symetrie obou kružnic vnitřním bodem obou kružnic a další společná tečna neexistuje. Pokud mají kružnice vnější dotyk, prochází bodem dotyku (středem symetrie kružnic) třetí společná tečna (*vnější tečna* - kružnice leží v různých polorovinách určených tečnou). Pokud se kružnice reálně neprotínají, je střed symetrie vnějším bodem obou kružnic a procházejí jim další dvě společné *vnější tečny* (viz Obr. 4.1.7).



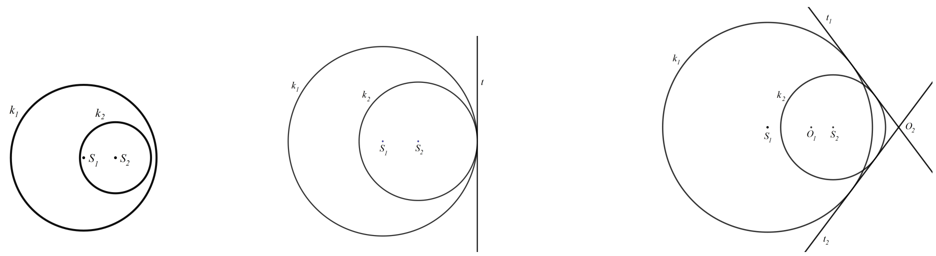
Obrázek 4.1.7: Společné tečny shodných nesoustředných kružnic

Protože stejnolehlost zachovává odchylky, zobrazují se tečny kružnice na tečny obrazu a tedy společné tečny dvou nesoustředných neshodných kružnic prochází středy stejnolehlosti těchto kružnic. Mohou ted v případě D) nastat následující situace - viz Obr. 4.1.8 a 4.1.9:

a) Jedna kružnice leží uvnitř druhé kružnice. V tomto případě neexistují společné tečny.

b) Kružnice mají vnitřní dotyk. V tomto případě je bod dotyku vnějším středem stejnolehlosti obou kružnic a prochází jím jediná společná *vnější tečna*.

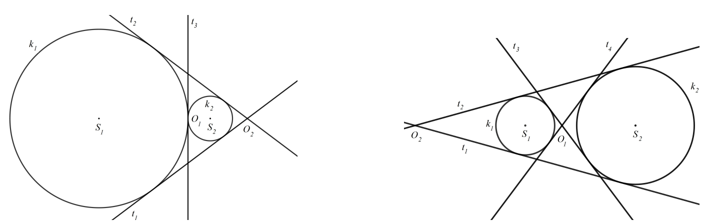
c) Kružnice se protínají ve dvou reálných různých bodech. V tomto případě je vnější střed stejnolehlosti vnějším bodem obou kružnic a prochází jim dvě společné *vnější tečny*. Vnitřní střed stejnolehlosti je vnitřním bodem obou kružnic a žádná další tečna jim neprochází.



Obrázek 4.1.8: Společné tečny neshodných nesoustředných kružnic, a) - c)

d) Kružnice mají vnější dotyk. V tomto případě je vnější střed stejnolehlosti vnějším bodem obou kružnic a prochází jim dvě společné *vnější tečny*. Vnitřní střed stejnolehlosti je bodem dotyku a prochází jím třetí společná *vnitřní tečna*.

e) Kružnice se neprotínají a leží ve vnější oblasti druhé kružnice. V tomto případě oba středy stejnolehlosti jsou vnějšími body obou kružnic a procházejí jimi celkem čtyři společné tečny - dvě *vnitřní tečny* procházející vnitřním bodem stejnolehlosti a dvě *vnější tečny* procházející vnějším bodem stejnolehlosti.



Obrázek 4.1.9: Společné tečny neshodných nesoustředných kružnic, d), e)

◊

4.2 Kruhové křivky

V tomto paragrafu rozšíříme pojem kružnice na pojem kruhové křivky nebo zobecněné kružnice.

Vynásobme rovnici (4.1.1) nenulovým číslem $A \in \mathbb{R}$ a označme $M = Am$, $N = An$, $C = Ac$. Potom má kružnice rovnici

$$A(x^2 + y^2) - 2Mx - 2Ny + C = 0\,, \tag{4.2.1}$$

kde $M^2 + N^2 - AC > 0$.

Uvažujme nyní naopak množinu bodů X v rovině, jejichž souřadnice $[x; y]$ splňují rovnici (4.2.1), kde alespoň jeden s koeficientů A, M, N je nenulový. Vyšetřeme, o jakou množinu se jedná. Mohou nastat následující možnosti:

1. $A = 0$, $M^2 + N^2 \neq 0$. Potom se jedná o rovnici přímky.
2. $A \neq 0$. Rovnici upravíme na tvar

$$x^2 + y^2 - 2\frac{M}{A}x - 2\frac{N}{A}y + \frac{C}{A} = 0$$
$$(x - \frac{M}{A})^2 + (y - \frac{N}{A})^2 + \frac{C}{A} - \frac{M^2}{A^2} - \frac{N^2}{A^2} = 0\,.$$

Potom pro $CA - M^2 - N^2 > 0$ se jedná o prázdnou množinu, pro $CA - M^2 - N^2 = 0$ se jedná o bod $[\frac{M}{A}; \frac{N}{A}]$ a pro $CA - M^2 - N^2 < 0$ se jedná o kružnici o poloměru $r = \frac{\sqrt{M^2+N^2-AC}}{|A|}$ a středu $[\frac{M}{A}; \frac{N}{A}]$. Předchozí úvahy tedy můžeme shrnout do definice.

Definice 4.2.1. Nechť je dána rovnice (4.2.1) taková, že alespoň jeden z koeficientů A, M, N je nenulový a $M^2 + N^2 - AC \geq 0$. Množina bodů $X \in \mathcal{E}_2$, jejichž souřadnice $[x; y]$ vyhovují rovnici (4.2.1), se nazývá *kruhová křivka (zobecněná kružnice)*

Je-li $A \neq 0$ hovoříme o *středové kruhové křivce* se středem $S = [\frac{M}{A}; \frac{N}{A}]$, je-li $A = 0$ hovoříme o *nestředové kruhové křivce*.

Je-li $A \neq 0$, $M^2 + N^2 - AC = 0$, hovoříme o *nulové kruhové křivce.*

Poznámka 4.2.1. Z předchozích úvah tedy vyplývá, že kruhová křivka je buďto kružnice, přímka (nestředová kruhová křivka) nebo bod (nulová kruhová křivka, které také říkáme *nulová kružnice* - kružnice s nulovým poloměrem). Případ, kdy $M^2 + N^2 - AC < 0$ reprezentuje v reálném oboru prázdnou množinu. Pokud bychom uvažovali komplexní rozšíření roviny (viz [JaSe96]), dostali bychom takzvanou *imaginární kružnici.* ♢

Věta 4.2.1. *Nechť jsou dány dvě nenulové kruhové křivky c_1, c_2, které mají společné reálné body. Pak odchylka $\sphericalangle(c_1, c_2) = \varphi$ je dána vztahem*

$$\cos\varphi = \frac{|2M_1M_2 + 2N_1N_2 - A_1C_2 - A_2C_1|}{2\sqrt{M_1^2 + N_1^2 - A_1C_1}\sqrt{M_2^2 + N_2^2 - A_2C_2}}\,.$$

Důkaz. Důkaz vyplývá z Větz 4.1.4 pro odchylku dvou kružnic, Věty 4.1.5 a vzorce pro odchylku dvou přímek (viz [HoJo]). □

Definice 4.2.2. Nechť jsou dány dvě různé kruhové křivky $c_i : K_i(X) = 0$, $i = 1, 2$. Potom množina kruhových křivek, o rovnicích

$$\lambda_1 K_1(X) + \lambda_2 K_2(X) = 0\,,$$

kde $\lambda_i \in \mathbb{R}\,,\ \ (\lambda_1, \lambda_2) \neq (0, 0)$, a platí

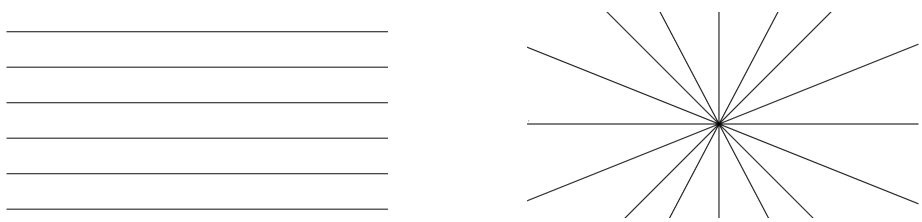
$$(\lambda_1 M_1 + \lambda_2 M_2)^2 + (\lambda_1 N_1 + \lambda_2 N_2)^2 - (\lambda_1 A_1 + \lambda_2 A_2) \cdot (\lambda_1 C_1 + \lambda_2 C_2) \geq 0\,,$$

se nazývá *svazek kruhových křivek.*

Podle typu a polohy kruhových křivek c_1 a c_2 můžeme dostat celkem 6 následujících typů svazků kruhových křivek.

I. *Svazek rovnoběžných přímek*, tj. svazek přímek 2. druhu (viz [HoJa]). Tento svazek dostaneme, pokud jsou obě základní kruhové křivky c_1 a c_2 přímky, které jsou navzájem rovnoběžné (viz Obr. 4.2.1).

II. *Svazek různoběžných přímek*, tj. svazek přímek 1. druhu (viz [HoJa]). Tento svazek dostaneme, pokud jsou obě základní kruhové křivky c_1 a c_2 přímky, které jsou navzájem různoběžné (viz Obr. 4.2.1). Společný bod S všech přímek svazku se nazývá *střed* nebo *vrchol* svazku.

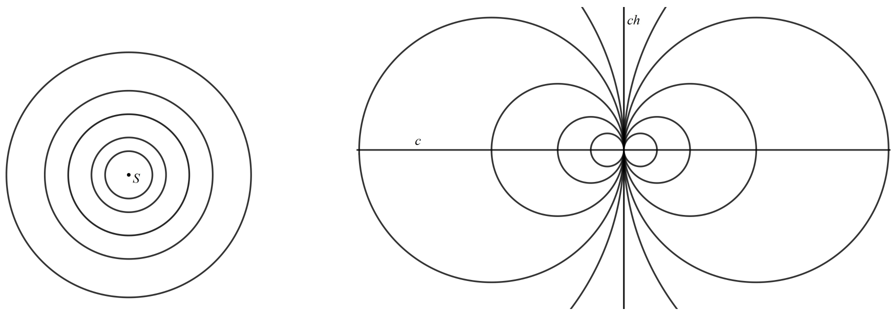


Obrázek 4.2.1: Svazek rovnoběžných a různoběžných přímek

III. *Svazek soustředných kružnic.* Tento svazek dostaneme, pokud jsou obě základní kruhové křivky c_1 a c_2 soustředné kružnice (jedna z nich může být i nulová kruhová křivka - společný střed S všech kružnic svazku, viz Obr. 4.2.2).

IV. *Svazek dotýkajících se kružnic.* Tento svazek dostaneme, pokud jsou obě základní kruhové křivky c_1 a c_2 kružnice s jedním společným bodem dotyku nebo pokud je c_1 kružnice (i nulová) a c_2 její tečna (viz Obr. 4.2.2). Společná tečna *ch* všech kružnic ve svazku je chordálou všech dvojic kružnic ve svazku. Středy všech kružnic leží na přímce c (*centrála svazku*), která je kolmá na chordálu a protíná ji v bodě dotyku všech kružnic.

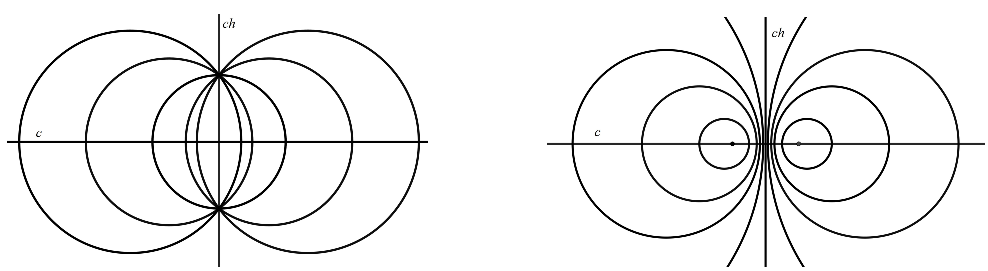
V. *Svazek protínajících se kružnic.* Tento svazek dostaneme, pokud jsou obě základní kruhové křivky c_1 a c_2 kružnice se dvěmi různými společnými body nebo



Obrázek 4.2.2: Svazek soustředných a tečných kružnic

pokud je c_1 kružnice a c_2 její sečna (viz Obr. 4.2.3). Přímka ch určená společnými body všech kružnic ve svazku je jediná nestředová kruhová křivka ve svazku a je chordálou všech dvojic kružnic ve svazku. Středy všech kružnic leží na přímce c (*centrála svazku*), která je kolmá na chordálu.

VI. *Svazek neprotínajících se kružnic.* Tento svazek dostaneme, pokud jsou obě základní kruhové křivky c_1 a c_2 kružnice (mohou to být i nulové kruhové křivky), které nemají společné body (viz Obr. 4.2.3). Ve svazku je jediná nestředová kruhová křivka přímka ch, která je chordálou všech dvojic kružnic ve svazku. Středy všech kružnic leží na přímce c (*centrála svazku*), která je kolmá na chordálu. Ve svazku jsou dvě nulové kruhové křivky.



Obrázek 4.2.3: Svazek protínajících se a neprotínajících se kružnic

Definice 4.2.3. Dva svazky kruhových křivek nazveme *duální*, jestliže každá kruhová křivka jednoho svazku kolmo protíná každou kruhovou křivku druhého svazku. Přitom pro nulovou kruhovou křivku chápeme kolmé protínání s nenulovou kruhovou křivkou tak, že nulová křivka (bod) leží na nenulové kruhové křivce.

Poznámka 4.2.2. V Definici 4.2.2 jsme použili k definování svazku kruhových křivek analytické (souřadnicové) vyjádření základních kruhových křivek c_1 a c_2. Z definice duálních svazků kruhových křivek dostáváme ekvivalentní "geometrickou" definici svazku kruhových křivek. *Nechť c_1 a c_2 jsou dvě různé kruhové* *křivky. Potom množina všech kruhových křivek, které kolmo protínají c_1 a c_2 tvoří svazek kruhových křivek, který je duální ke svazku kruhových křivek určeného křivkami c_1 a c_2.* ♢

Poznámka 4.2.3. Z obrázků je okamžitě vidět, které svazky kruhových křivek jsou navzájem duální. Rozeberme si jednotlivé možnosti.

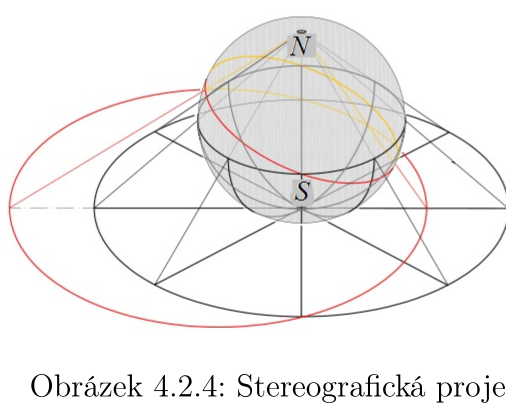
1. Svazek rovnoběžných přímek je duální ke svazku rovnoběžných přímek, kolmých na všechny přímky prvního svazku.

2. Svazek různoběžných přímek je duální ke svazku soustředných kružnic a naopak. Přitom je vrchol svazku různoběžných přímek společným středem svazku soustředných kružnic.

3. Duální svazek ke svazku tečných kružnic je opět svazek tečných kružnic. Přitom si vymění roli chordály a centrály svazků, tj. chordála prvního svazku je centrálou duálního svazku a centrála prvního svazku je chordálou duálního svazku.

4. Duální svazek ke svazku protínajících se kružnic je svazek neprotínajících se kružnic a naopak. Přitom společné body svazku protínajících se kružnic jsou nulovými kruhovými křivkami duálního svazku a chordály a centrály duálních svazků si vymění roli. ♢

Poznámka 4.2.4. S duálními svazky kruhových přímek se můžeme potkat v kartografii. Jeden typ kartografického zobrazení (zobrazení kulové plochy do roviny) je *stereografická projekce*, která zobrazuje body na kulové ploše (glóbu) do tečné roviny kulové plochy (průmětny) projekcí z bodu na kulové ploše, který je diametrálně položen k bodu dotyku. Stereografická projekce zobrazuje kružnice na kulové ploše do kružnic nebo přímek v rovině a zachovává odchylky. Soustavu poledníků se promítne do svazku různoběžných přímek, je-li bod dotyku dané roviny pólem, nebo do svazku protínajících se kružnic v ostatních případech. Soustavu rovnoběžek se potom promítne do duálního svazku soustředných nebo neprotínajících se kružnic. Póly se promítnou do nulových kruhových křivek svazku.



Obrázek 4.2.4: Stereografická projekce

Na Obr. 4.2.4 je stereografická projekce, ve které je bod dotyku roviny jižní pól a střed projekce severní pól (polární stereografická projekce). V této projekci se poledníky promítnou do svazku různoběžných přímek a rovnoběžky do duálního svazku soustředných kružnic. Na mapách vytvořených stereografickou projekcí je možno celou řadu úloh řešit pomocí kruhové inverze. $\diamondsuit$

4.3 Kruhová inverze

V euklidovské rovině jsme se zabývali zobrazením "stejnolehlost", které bylo dáno bodem S (středem stejnolehlosti) a reálným číslem $\kappa \neq 0$ (koeficientem stejnolehlosti). Každý bod $X \neq S$ se zobrazil do bodu X' takového, že platí

1. polopřímky SX a SX' jsou totožné pro $\kappa > 0$ a opačné pro $\kappa < 0$,
2. $|SX'| = |\kappa| \cdot |SX|$, tj. $|\kappa| = \frac{|SX'|}{|SX|}$.

Studujme nyní zobrazení, které je definováno podobně a liší se jen ve 2. vlastnosti, kde podíl nahradíme součinem vzdáleností.

Definice 4.3.1. Nechť S je bod v $\mathcal{E}_2$ a $\kappa \neq 0$ je reálné číslo. Potom zobrazení, které bodu $X \neq S \in \mathcal{E}_2$ přiřadí bod X' takový, že

1. polopřímky SX a SX' jsou totožné pro $\kappa > 0$ a opačné pro $\kappa < 0$
2. $|SX| \cdot |SX'| = |\kappa|$,

nazýváme *kruhovou inverzí s kladnou mocností* (pro $\kappa > 0$) nebo *kruhovou inverzí se zápornou mocností* (pro $\kappa < 0$). Bod S se nazývá *středem kruhové inverze* a κ jejím *koeficientem (mocností)*.

Poznámka 4.3.1. Je zřejmé, že kruhová inverze se zápornou mocností κ je složením kruhové inverze s kladnou mocností $|\kappa|$ a středové symetrie podle S. Dále se tedy budeme zabývat především vlastnostmi kruhové inverze s kladnou mocností. Vlastnosti kruhové inverze se zápornou mocností se potom snadno odvodí. $\diamondsuit$

Poznámka 4.3.2. Kruhová inverze je bijekcí $\mathcal{E}_2 - \{S\}$ na sebe. Abychom nemuseli vylučovat bod S, zavádí se rozšíření euklidovské roviny o jeden bod. $\diamondsuit$

Definice 4.3.2. *Möbiovou rovinou* $\mathcal{M}_2$ rozumíme euklidovskou rovinu $\mathcal{E}_2$ rozšířenou o jeden nevlastní bod ∞, tj. $\mathcal{M}_2 = \mathcal{E}_2 \cup \{\infty\}$.

Definici kruhové inverze nyní rozšíříme o předpis $S \mapsto \infty$ a $\infty \mapsto S$. Kruhová inverze je potom bijekcí na Möbiově rovině.

Věta 4.3.1. *Kruhová inverze je involutorní zobrazení na $\mathcal{M}_2$.*

Důkaz. Je zřejmé, že $S \mapsto \infty \mapsto S$. Nechť $X \neq S$. Pak $X \mapsto X' \mapsto X''$. Musíme dokázat, že $X = X''$. Z 1. podmínky Definice 4.3.1 kruhové inverze vyplývá, že polopřímky SX a SX'' jsou totožné pro každé κ. Potom z 2. podmínky máme $|SX| \cdot |SX'| = |\kappa|$ a $|SX'| \cdot |SX''| = |\kappa|$ a odtud $|SX| = |SX''|$, což dohromady dává $X = X''$. □

Věta 4.3.2. *Kružnice $k \equiv (S, \sqrt{|\kappa|})$ je silně samodružná v kruhové inverzi s kladnou mocností a slabě samodružná v kruhové inverzi se zápornou mocností.*

Důkaz. Nechť $X \in k$, tj. $|SX| = \sqrt{|\kappa|}$. Potom

$$|SX| \cdot |SX'| = |\kappa| \quad \Rightarrow \quad |SX'| = \frac{|\kappa|}{\sqrt{|\kappa|}} = \sqrt{|\kappa|} \quad \Rightarrow \quad X' \in k\,.$$

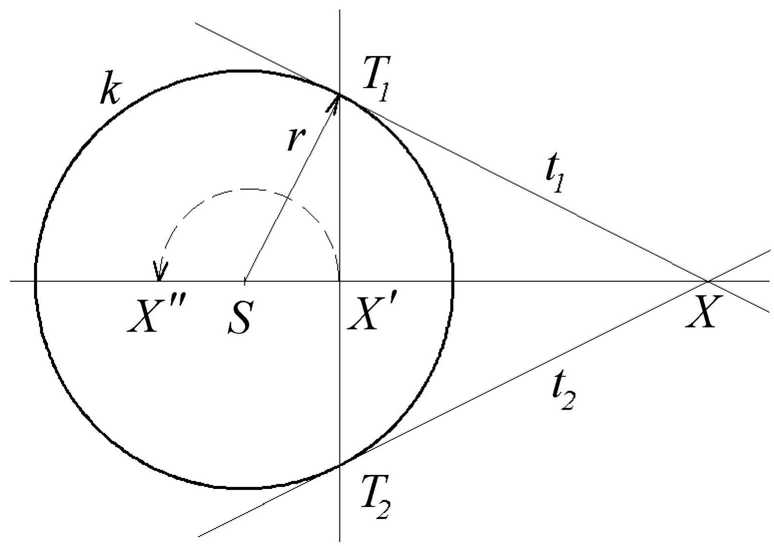
Je-li $\kappa < 0$ je X' diametrální bod k X, je-li $\kappa > 0$ je $X' = X$. □

Definice 4.3.3. Kružnice $k \equiv (S, \sqrt{|\kappa|})$ se nazývá *základní kružnice inverze* nebo jen *kružnice inverze*.

Věta 4.3.3. *V kruhové inverzi se vnitřní body kružnice inverze zobrazují na vnější body a naopak vnější body se zobrazí ve vnitřní body.*

Důkaz. Je-li X vnitřním bodem $k \equiv (S, \sqrt{|\kappa|})$ je $|SX| < \sqrt{|\kappa|}$ a tedy $|\kappa| = |SX| \cdot |SX'| < \sqrt{|\kappa|} \cdot |SX'|$. Odtud $|SX'| > \sqrt{|\kappa|}$ a X' je vnějším bodem kružnice k. Naprosto stejně pro vnější bod X dostaneme, že X' je vnitřním bodem. □

Konstrukce obrazů bodů v kruhové inverzi. Předpokládejme, že $k \equiv (S, r)$ je kružnice inverze a uvažujme její vnější bod X, viz Obr. 4.3.1. Sestrojme přímku SX. Z bodu X sestrojme tečny ke kružnici k a body dotyku označme T_1 a T_2. Průsečík přímky T_1T_2 a přímky SX označme X'. Protože T_1T_2 je kolmice na SX, dostaneme pro pravoúhlý trojúhelník ST_1X na základě euklidovy věty o odvěsně $|SX| \cdot |SX'| = r^2$ a tedy X' je obrazem bodu X v kruhové inverzi s kladnou mocností r^2 a středem S. Označíme-li X'' obraz bodu X' ve středové symetrii podle středu S, je X'' obrazem X v kruhové inverzi se zápornou mocností $-r^2$ a středem S.



Obrázek 4.3.1: Obraz bodu v kruhové inverzi

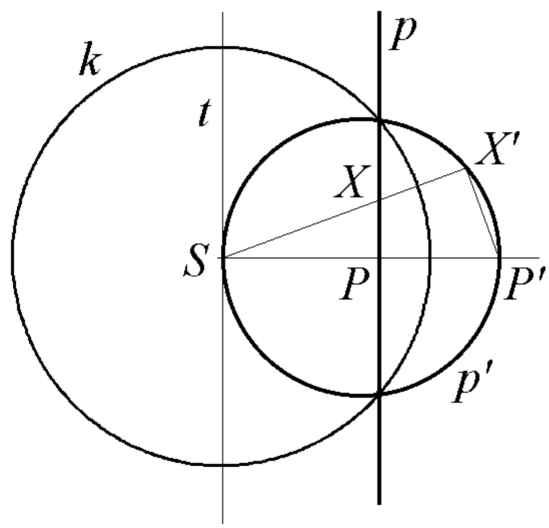
Obraz vnitřního bodu kružnice k se sestrojuje opačnou konstrukcí.

Věta 4.3.4. *Přímka procházející středem inverze se zobrazí sama na sebe (je slabě samodružná).*

Důkaz. Tato věta vyplývá přímo z Definice 4.3.1 a je zřejmá z Obr. 4.3.1. $\square$

Věta 4.3.5. *Přímka neprocházející středem inverze se zobrazí na kružnici, která prochází středem inverze. Navíc, tečna sestrojená k obrazu ve středu inverze je rovnoběžná s danou přímkou.*

Důkaz. Nechť $k \equiv (S, \sqrt{|\kappa|})$ je kružnice inverze a p je přímka neprocházející bodem S, viz Obr. 4.3.2.

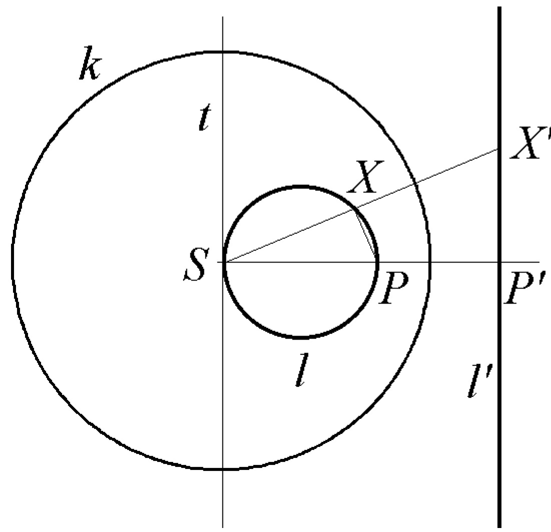


Obrázek 4.3.2: Obraz přímky neprocházející středem inverze

Označme P patu kolmice spuštěné z S na p a P' obraz bodu P. Nechť X je libovolný bod z p a X' jeho obraz. Platí $|SP| \cdot |SP'| = |SX| \cdot |SX'| = |\kappa|$ a odtud $\frac{|SP|}{|SX|} = \frac{|SX'|}{|SP'|}$. Dále úhel $\widehat{PSX}$ se rovná úhlu $\widehat{P'SX'}$ a tedy trojúhelníky SPX a $SP'X'$ jsou podobné. Odtud úhel $\widehat{P'X'S}$ je totožný s pravým úhlem $\widehat{SPX}$ a tedy X' leží na Thaletově kružnici opsané nad úsečkou SP'. Protože tečna t sestrojená ke kružnici p' je kolmá na průměr SP', je t rovnoběžná s p. □

Věta 4.3.6. *Kružnice procházející středem inverze se zobrazí na přímku, která neprochází středem inverze. Navíc je obraz rovnoběžný s tečnou sestrojenou k dané kružnici ve středu inverze.*

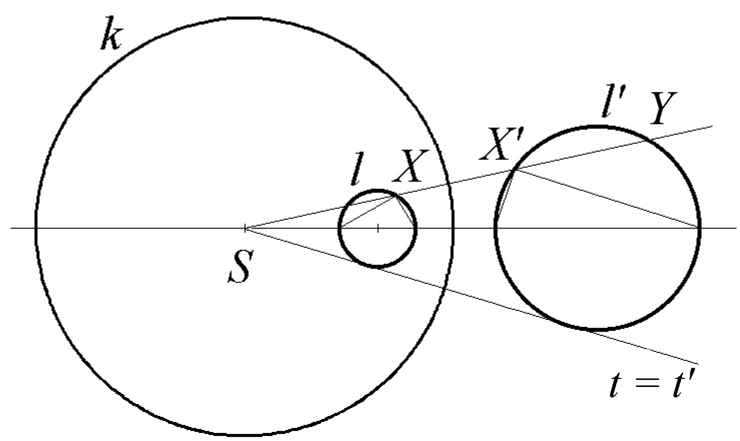
Důkaz. Důkaz této věty se dělá konstrukcí opačnou ke konstrukci z předchozí Věty 4.3.5. Označme P diametrálně položený bod k bodu S na dané kružnici l, viz Obr. 4.3.3.
Nechť P' je jeho obraz v kruhové inverzi. Nechť X je libovolný bod dané kružnice a X' jeho obraz. Stejně jako v předchozím důkazu se dokáže, že trojúhelníky SPX a $SP'X'$ jsou podobné pravoúhlé. Odtud dostaneme, že úhel $\widehat{SP'X'}$ je pravý a tedy X' leží na kolmici k přímce $P'S$, která prochází bodem P'. Protože l' i tečna t sestrojená ke kružnici l v bodě S jsou kolmé na přímku SP, je l' rovnoběžná s t. □



Obrázek 4.3.3: Obraz kružnice procházející středem inverze

Věta 4.3.7. *Kružnice neprocházející středem inverze se zobrazí na kružnici, která neprochází středem inverze.*

Důkaz. Nechť $k \equiv (S, \sqrt{|\kappa|})$ je kružnice inverze a $l \equiv (O, r)$ je kružnice neprocházející bodem S. Označme P, Q průsečíky přímky SO s kružnicí l a P', Q' nechť jsou jejich obrazy (na Obr. 4.3.4 nejsou tyto body označeny).

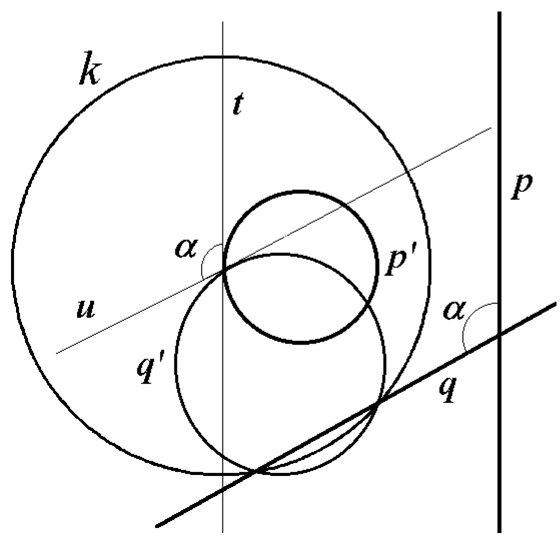


Obrázek 4.3.4: Obraz kružnice neprocházející středem inverze

Nechť X je libovolný bod dané kružnice l a X' je jeho obraz. Úhly $\widehat{SXP}$ a $\widehat{SP'X'}$ jsou totožné protože trojúhelníky SXP a $SX'P'$ jsou podobné na základě věty *sus*. Stejně tak úhly $\widehat{SXQ}$ a $\widehat{SQ'X'}$ jsou totožné, protože jsou podobné trojúhelníky SXQ a $SQ'X'$. Platí $\widehat{PXQ} = \widehat{SXQ} - \widehat{SXP}$ a $\widehat{P'X'Q'} = \widehat{SQ'X'} - \widehat{SP'X'}$ a odtud $\widehat{P'X'Q'} = \widehat{PXQ} = \frac{\pi}{2}$. Tedy X' leží na Thaletově kružnici opsané nad úsečkou $P'Q'$. □

Poznámka 4.3.3. Předchozí 4 věty nám nejen říkají, jak se zobrazí nenulové kruhové křivky, ale dávají také návod, jak příslušné obrazy sestrojit. ♢

Věta 4.3.8. *Kruhová inverze je konformní zobrazení, tj. zachovává odchylky křivek.*



Obrázek 4.3.5: Odchylka v kruhové inverzi

Důkaz. Odchylka křivek je dána odchylkou tečen ve společných bodech. Stačí tedy ukázat, že se zachovává odchylka obrazů dvou přímek. Pokud přímky p a q prochází středem inverze, jsou samodružné a tedy odchylka p' a q' je totožná s odchylkou p a q.

Nechť nyní p, q jsou přímky neprocházející středem inverze. Jejich obrazy p' a q' jsou kružnice, které prochází středem inverze a jejich odchylka je dána odchylkou tečen ve společném bodě S. Tečna t ke kružnici p' v bodě S je rovnoběžná s p a podobně i tečna u ke kružnici q' v bodě S je rovnoběžná s q. Odchylka t a u je tedy stejná, jako odchylka p a q. □

Důsledek 4.3.1. Kruhová inverze zachovává dotyk kruhových křivek. ⋄

Věta 4.3.9. *Kružnice, která neprochází středem inverze, a její obraz v kruhové inverzi jsou stejnolehlé se středem stejnolehlosti ve středu inverze.*

Důkaz. Věta je důsledkem toho, že kruhová inverze zachovává dotyk. Je-li totiž t tečna vedená ke kružnici l ze středu kruhové inverze, je t' tečna l', ale $t \equiv t'$ a tedy l a l' mají společné tečny procházející středem inverze (viz Obr. 4.3.4). □

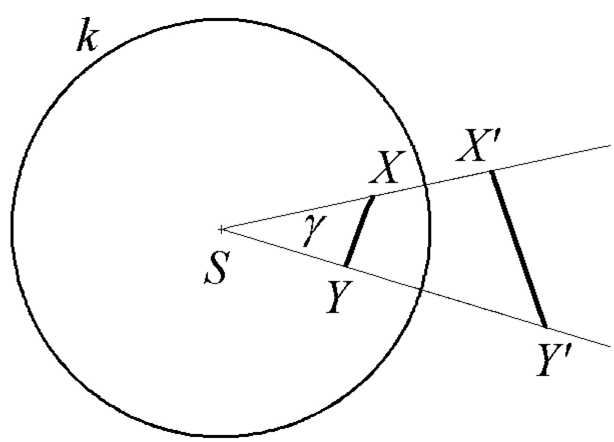
Poznámka 4.3.4. Tato věta nám umožňuje snadněji kreslit obrazy kružnic v kruhové inverzi. Pozor ale na to, že tyto kružnice nejsou stejnolehlé bod po bodu. V Obr. 4.3.4 se bod X zobrazí v kruhové inverzi do bodu X', ale ve stejnolehlosti do bodu Y. ♢

Důsledek 4.3.2. V kruhové inverzi s kladnou mocností jsou slabě samodružné všechny kružnice kolmé na kružnici inverze. Je-li totiž l a l' dvojice kružnic, které se na sebe zobrazují v kruhové inverzi, a t je jejich společná tečna sestrojená ze středu inverze, musí být, z podmínky $l \equiv l'$, bod dotyku l a t samodružným bodem inverze. To ovšem znamená, že l kolmo protíná kružnici inverze. ⋄

Věta 4.3.10. *Pro každé dva body X, Y různé od S a jejich obrazy X', Y' v kruhové inverzi se středem v bodě S a koeficientem κ platí*

$$|X'Y'| = \frac{|\kappa| \cdot |XY|}{|SX| \cdot |SY|}.$$

Důkaz. Nechť X, Y jsou dva body různé od středu inverze S a X', Y' jsou jejich obrazy. Označme $\gamma = \widehat{XSY} = \widehat{X'SY'}$, viz Obr. 4.3.6



Obrázek 4.3.6: Vzdálenost bodů v kruhové inverzi

Využitím kosinové věty dostaneme

$$
\begin{aligned}
|X'Y'|^2 &= |SX'|^2 + |SY'|^2 - 2|SX'| \cdot |SY'| \cos\gamma \\
&= \kappa^2 \left(\frac{1}{|SX|^2} + \frac{1}{|SY|^2} - 2\frac{1}{|SX| \cdot |SY|} \cos\gamma \right) \\
&= \frac{\kappa^2}{|SX|^2|SY|^2} \left(|SY|^2 + |SX|^2 - 2|SX| \cdot |SY| \cos\gamma \right) \\
&= \frac{\kappa^2 |XY|^2}{|SX|^2|SY|^2}.
\end{aligned}
$$

Odmocněním dostaneme naše tvrzení. □

Poznámka 4.3.5. Kruhová inverze nezachovává vzdálenosti a tedy střed kružnice se nezobrazuje do středu kružnice. ♢

Věta 4.3.11. *(Ptolemaiova) Nechť A, B, C, D jsou čtyři nekolineární různé body. Pak platí*

$$|AB| \cdot |CD| + |BC| \cdot |DA| \geq |AC| \cdot |BD|$$

a rovnost nastává právě tehdy, lze-li bodům A, B, C, D (v tomto pořadí) opsat kružnici.

Důkaz. Nechť zvolené body jsou takové, že A, B, D nejsou kolineární. To lze předpokládat vždy, jinak bychom přeznačili body. Potom v kruhové inverzi se středem v A a mocností jedna zobrazíme body B, C, D a jejich obrazy označíme B', C', D'. Pro tyto body platí trojúhelníková nerovnost

$$|B'C'| + |C'D'| \geq |B'D'|.$$

Využitím vzorce pro vzdálenost z Věty 4.3.10 dostaneme

$$\frac{|BC|}{|AB| \cdot |AC|} + \frac{|CD|}{|AC| \cdot |AD|} \geq \frac{|BD|}{|AB| \cdot |AD|}$$

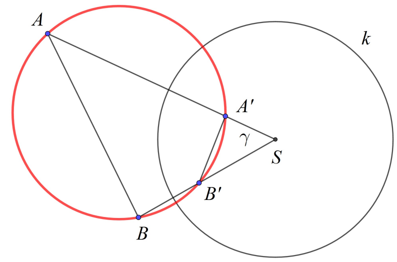
a odtud plyne naše tvrzení. Rovnost v trojúhelníkové nerovnosti nastává právě tehdy, jsou-li body B', C', D' kolineární. To ovšem nastává právě v případě, že body B, C, D (v tomto pořadí) leží na kružnici, která prochází středem inverze - bodem A. □

Úloha 4.3.1. Nechť $k(S, r)$ je kružnice a A, B jsou dva různé body různé od bodu S. Nechť A' a B' jsou obrazy bodů A a B v kruhové inverzi (s kladnou nebo zápornou mocností) s kružnicí inverze k. Dokažte, že platí

$$|AA'| \cdot |BB'| + |AB| \cdot |A'B'| = |AB'| \cdot |A'B|,$$

to znamená, že podle Věty 4.3.11 leží body A, A', B', B na kružnici, která je navíc samodružná v dané kruhové inverzi.

Řešení: Označme γ úhel $\measuredangle(ASB)$ (na Obr. 4.3.7 je úloha zobrazena pro kruhovou inverzi s kladnou mocností) a $|\kappa| = r^2$. Potom z Věty 4.3.10, kosinovy věty a definice kruhové inverze dostaneme



Obrázek 4.3.7: K úloze 4.3.1

$$\begin{aligned}
|AA'|\cdot|BB'| + |AB|\cdot|A'B'| &= (|SA| - \frac{|\kappa|}{|SA|})\cdot(|SB| - \frac{|\kappa|}{|SB|}) + \frac{|\kappa|\cdot|AB|^2}{|SA|\cdot|SB|} \\
&= |SA|\cdot|SB| + \frac{|\kappa|\cdot(|AB|^2 - |SB|^2 - |SA|^2) + |\kappa|^2}{|SA|\cdot|SB|} \\
&= |SA|\cdot|SB| + \\
&\quad + \frac{|SB|\cdot|SB'|\cdot(-2\,|SB|\cdot|SA|\cdot\cos(\gamma)) + |SA|\cdot|SA'|\cdot|SB|\cdot|SB'|}{|SA|\cdot|SB|} \\
&= |SA|\cdot|SB| - 2\,|SB|\cdot|SB'|\cdot\cos(\gamma) + |SA'|\cdot|SB'|\,.
\end{aligned}$$

Na druhou stranu

$$\begin{aligned}
|AB'|\cdot|A'B| &= \frac{|\kappa|\cdot|AB'|^2}{|SA|\cdot|SB'|} \\
&= \frac{|\kappa|\cdot(|SA|^2 + |SB'|^2 - 2\,|SA|\cdot|SB'|\cdot\cos(\gamma))}{|SA|\cdot\frac{|\kappa|}{|SB|}} \\
&= \frac{|SB|^2\cdot(|SA|^2 + |SB'|^2 - 2\,|SA|\cdot|SB'|\cdot\cos(\gamma))}{|SA|\cdot|SB|} \\
&= |SA|\cdot|SB| - 2\,|SB|\cdot|SB'|\cdot\cos(\gamma) + \frac{|SB|\cdot|SB'|^2}{|SA|} \\
&= |SA|\cdot|SB| - 2\,|SB|\cdot|SB'|\cdot\cos(\gamma) + \frac{|SA|\cdot|SA'|\cdot|SB'|}{|SA|} \\
&= |SA|\cdot|SB| - 2\,|SB|\cdot|SB'|\cdot\cos(\gamma) + |SA'|\cdot|SB'|\,.
\end{aligned}$$

Z Věty 4.3.11 potom dostáváme, že čtyřúhelník $AA'B'B$ je vepsán kružnici a protože A', B' jsou obrazy bodů A, B, je tato kružnice samodružná. ◇

Kruhové inverze lze velice efektivně využít pro řešení celé řady planimetrických úloh s kružnicemi. Typické jsou *Appoloniovy úlohy*, které lze s využitím pojmu kruhové křivky naformulovat jedinou formulací.

Úloha 4.3.2. Jsou dány tři různé kruhové křivky. Sestrojte kruhovou křivku, která se daných tří křivek dotýká, přitom jako dotyk nulové a nenulové křivky rozumíme to, že nulová kruhová křivka leží na nenulové. $\diamond$

Poznámka 4.3.6. Protože máme celkem tři typy kruhových křivek a vybíráme z nich s opakováním tři křivky, dostaneme celkem 10 Appoloniových úloh. Označíme-li jako B bod, P přímku a K kružnici, jsou tyto úlohy zapsány jako BBB, BBP, BBK, BPP, BPK, BKK, PPP, PPK, PKK a KKK.

Úlohy BBB, BBP, PPB, PPB a PPK jsou řešitelné se znalostí středoškolské planimetrie. Vyřešte si všechny tyto úlohy.

Pro řešení úloh BBK, BPK a BKK můžeme velice efektivně využít kruhové inverze se středem v daném bodě. Tato inverze nám totiž hledanou kruhovou křivku zobrazí na přímku a úloha se tak v případě BBK převede na hledání tečen kružnice procházejících daným bodem a v případě BPK a BKK se úloha převede na společné tečny dvou kružnic. Obrazem těchto tečen v dané inverzi je potom hledaná kružnice.

Nejsložitější jsou úlohy PKK a KKK, které umíme středoškolskými metodami řešit v některých speciálních polohách. Řešte tyto úlohy v situaci, kdy jsou dvě kružnice soustředné.

Speciální situace nastává tehdy, jestliže mezi třemi kruhovými křivkami je právě jedna nulová kruhová křivka, která leží na nenulové kruhové křivce a je bodem dotyku s hledanou kruhovou křivkou. Takovéto úlohy se nazývají *Pappovy úlohy*. Jde tedy o úlohy: je dána přímka p (kružnice k) a na ní bod T a další přímka q (kružnice l). Sestrojte kružnici, která se dotýká přímky p (kružnice k) v bodě T a dotýká se přímky q (kružnice l). Všechny tyto úlohy jsou řešitelné se znalostí středoškolské planimetrie a měli byste je umět vyřešit. $\diamondsuit$

Úloha 4.3.3. Jsou dány dvě nesoustředné kružnice $k_1(S_1, r_1)$, $k_2(S_2, r_2)$ a bod A. Sestrojte:

a) Kružnici l, která prochází bodem A a kolmo protíná kružnice k_1 a k_2.

b) Kružnici l, která prochází bodem A a kolmo protíná kružnici k_1 a kružnici k_2 protíná v diametrálně položených bodech.

c) Kružnici l, která prochází bodem A a kružnice k_1 a k_2 protíná v diametrálně položených bodech.

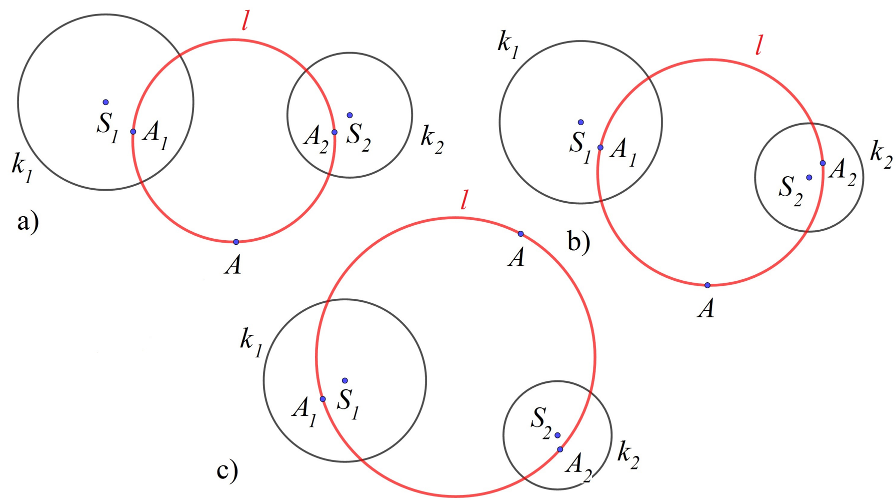
Návod řešení: (viz Obr. 4.3.8) Uvažujeme dvě kruhové inverze s kružnicemi k_1 a k_2. Hledaná kružnice l je v těchto inverzích samodružná a musí tedy procházet obrazem A_1 bodu A v první inverzi a obrazem A_2 bodu A ve druhé inverzi. Kružnice l je tedy určená třemi body A, A_1, A_2. Při tom:

a) Obě kruhové inverze mají kladnou mocnost.

b) První kruhová inverze má kladnou mocnost a druhá zápornou mocnost.

c) Obě kruhové inverze mají zápornou mocnost.

Poznamenejme, že případ a) odpovídá tomu, jak sestrojit kružnici procházející bodem A v duálním svazku ke svazku určeném kružnicemi k_1 a k_2. V situaci na Obr. 4.3.8 a) odpovídají na stereografické mapě kružnice k_1 a k_2 dvěma rovnoběžkám a kružnice l je potom poledník procházející bodem A.



Obrázek 4.3.8: K úloze 4.3.3

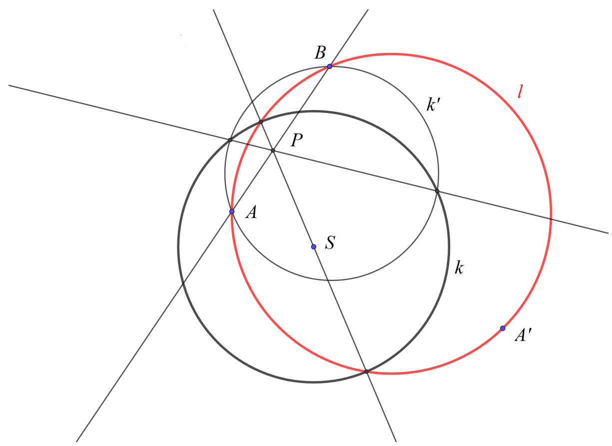
Úloha 4.3.4. Je dána kružnice $k(S,r)$ a dva různé body A, B různé od bodu S. Sestrojte kružnici l, která prochází body A, B a kružnici k protíná v diametrálně položených bodech.

Návod řešení: I. Metoda s použitím potenčního středu: Hledaná kružnice l a kružnice k mají chordálu, která prochází středem S kružnice k (vyplývá z toho, že chordála prochází společnými body kružnic). Hledaná kružnice l a libovolná kružnice, která prochází body A, B mají jako chordálu přímku AB. Sestrojíme tedy pomocnou kružnici k' tak, aby procházela body A, B a protínala kružnici k. Chordála kružnic k, k' a přímka AB se protínají v potenčním středu P kružnic k, k' a l. Přímka určená tímto potenčním středem a bodem S protíná kružnici k v diametrálně položených bodech, kterými prochází kružnice l.

II. Metoda s využitím kruhové inverze: Kružnice l musí být samodružná v kruhové inverzi se zápornou mocností určené kružnicí k. V této inverzi sestrojíme obraz A' bodu A a kružnice určená body A, A' a B je hledaná kružnice l. Jako důsledek Úlohy 4.3.1 dostaneme, že kružnice l prochází i obrazem A' bodu A.

Poznamenejme, že tato úloha má praktické uplatnění v kartografii. Nejkratší spojnice dvou bodů na zemské kouli je oblouk na hlavní kružnici (kružnice na kulové ploše se středem ve středu kulové plochy) procházející těmito body. Každé dvě hlavní kružnice se protínají v diametrálně položených bodech. Představuje-li tedy ve stereografické mapě kružnice k obraz hlavní kružnice v rovině rovnoběžné s průmětnou (v polární stereografické projekci rovník), je oblouk AB na kružnici l nejkratší spojnicí bodů A a B.

Na Obr. 4.3.9 jsou zakresleny prvky pro obě metody řešení.



Obrázek 4.3.9: K úloze 4.3.4

Úloha 4.3.5. Je dána kružnice $k(S, r)$ a dva různé body A, B různé od bodu S. Sestrojte kružnici l, která prochází body A, B a kružnici k kolmo protíná.

Návod řešení: Postupujeme podle konstrukce popsané v Úloze 4.3.1, viz Obr. 4.3.7. ◇

Úloha 4.3.6. Jsou dány dvě nesoustředné neprotínající se kružnice $k_1(S_1, r_1)$ a $k_2(S_2, r_2)$. Nalezněte nulové kružnice svazku kruhových křivek určeného $k_1(S_1, r_1)$ a $k_2(S_2, r_2)$. (Úlohu lze také formulovat takto: Na streografické mapě jsou dány obrazy dvou rovnoběžek, nalezněte obrazy pólů.)

Návod řešení: Podle Úlohy 4.3.3 a) sestrojíme v duálním svazku dvě kruhové křivky (poledníky). Jejich průsečíky jsou hledané body. Uvědomme si, že jeden křivka v duálním svazku je centrála S_1S_2. ◇

Úloha 4.3.7. Jsou dány dvě nesoustředné neprotínající se kružnice $k_1(S_1, r_1)$ a $k_2(S_2, r_2)$. Nalezněte kruhovou inverzi, která zobrazí dané kružnice na soustředné kružnice.

Návod řešení: Kruhová inverze zobrazuje duální svazky na duální svazky. Svazek protínajících se kruhových křivek se volbou středu inverze do jednoho společného bodu všech křivek svazku zobrazí do svazku různoběžných přímek. Duální svazek neprotínajících se kruhových křivek se tedy zobrazí do svazku soustředných kružnic. Pro nalezení středu inverze postupujte podle návodu Úlohy 4.3.6 ◇

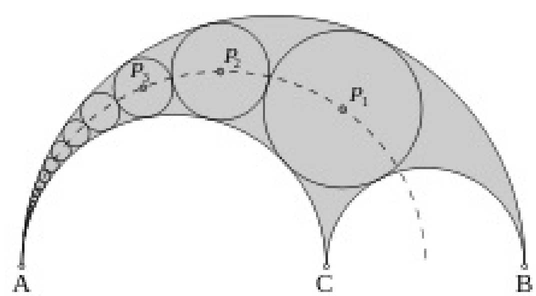
Úloha 4.3.8. Je dána kružnice $k(S, r)$ a na ní dva různé body A, B. Uvažujme kružnice l_1 a l_2, které se dotýkají navzájem v bodě M, kružnice l_1 se dotýká kružnice k v bodě A a kružnice l_2 se dotýká kružnice k v bodě B. Co tvoří geometrické místo bodů M?

Návod řešení: Pomocí kruhové inverze se středem v bodě A převeďte úlohu na ekvivalentní úlohu. ◇

Úloha 4.3.9. Jsou dány 4 kružnice $k_i(S_i, r_i)$, $i = 1, \ldots, 4$, takové, že každá se dotýká dvou sousedních kružnic. Dokažte, že body dotyku kružnic leží na kružnici.

Návod řešení: Pomocí kruhové inverze se středem v jednom z bodů dotyku převeďte úlohu na jednodušší úlohu - obrazy zbývajících tří bodů dotyku musí ležet na přímce. ◇

Úloha 4.3.10. Uvažujme tři různé body A, B, C ležící na jedné přímce takové, že bod C leží mezi body A, B. Uvažujme půlkružnici k_1 sestrojenou nad průměrem AB, půlkružnici k_2 sestrojenou nad průměrem AC a půlkružnici k_3 sestrojenou nad průměrem BC (všechny půlkružnice ve stejné polorovině). Část roviny ohraničená půlkružnicemi k_1, k_2, k_3 se nazývá *arbelos (ševcovský nůž)*. Představme si kružnici l_1, která leží v arbelu a dotýká se k_1, k_2, k_3, a dále posloupnost kružnic l_2, která se dotýká k_1, k_2, l_1, dále l_3 různou od l_1, která se dotýká k_1, k_2, l_2, ..., l_i různou od l_{i-2}, která se dotýká k_1, k_2, l_{i-1}, ... Tato posloupnost kružnic se nazývá *Pappův řetězec*. Sestrojte několik prvních kružnic v Pappopvě řetězci (viz 4.3.10).



Obrázek 4.3.10: K úloze 4.3.10

Návod řešení: Kruhová inverze se středem v bodě A převede polokružnice k_1, k_2 na rovnoběžné polopřímky a polokružnici k_3 na polokružnici, která se dotýká polopřímek v jejich počátečním bodě. Potom kružnice l_i se zobrazí do posloupnosti shodných kružnic, které leží v pásu mezi polopřímkami a navzájem se dotýkají. Obrazy takovýchto kružnic ve zvolené inverzi potom patří do Pappova řetězce. ◇

4.4 Analytické vyjádření kruhové inverze

Nechť $S = [s_1, s_2]$, $X = [x, y]$, $X' = [x', y']$ jsou souřadnice v nějakém kartézském repéru. Nechť je dána kruhová inverze se středem S a mocností κ zobrazující $X \neq S$ na X'. Potom S, X, X' jsou kolineární, a tedy

$$\overrightarrow{SX'} = k \cdot \overrightarrow{SX},$$

kde k má stejné znaménko jako κ. Z definice kruhové inverze je $k = \frac{\kappa}{|SX|^2}$. Tedy

$$X' - S \;= \frac{\kappa}{|SX|^2}(X - S),$$

což můžeme v souřadnicích přepsat

$$\begin{aligned} x' &= s_1 + \frac{\kappa}{(x - s_1)^2 + (y - s_2)^2}(x - s_1), \\ y' &= s_2 + \frac{\kappa}{(x - s_1)^2 + (y - s_2)^2}(y - s_2). \end{aligned}$$

Tyto rovnice jsou souřadnicovým vyjádřením kruhové inverze se středem v bodě S a mocností κ. Pro většinu úvah nehraje žádnou roli umístění středu inverze vzhledem k počátku souřadného repéru. V praxi se proto převážně používá inverze, jejíž střed splývá s počátkem souřadné soustavy. Taková inverze má jednodušší rovnice

$$x' = \frac{\kappa x}{x^2 + y^2}, \quad y' = \frac{\kappa y}{x^2 + y^2}. \tag{4.4.1}$$

S použitím analytického vyjádření se snadno dokáží věty, které jsme si dříve dokázali synteticky. Ukážeme si to na určení obrazů kruhových křivek. Nechť

$$m: \quad A(x^2 + y^2) - 2Mx - 2Ny + C = 0$$

je kruhová křivka. Určeme rovnice jejího obrazu m' v kruhové inverzi se středem v počátku souřadného repéru a koeficientem κ. Dosazením (4.4.1) do rovnic m dostaneme

$$A\frac{\kappa^2 x'^2 + \kappa^2 y'^2}{(x'^2 + y'^2)^2} - 2M\frac{\kappa x'}{x'^2 + y'^2} - 2N\frac{\kappa y'}{x'^2 + y'^2} + C = 0\,.$$

a odtud

$$m': \quad C(x'^2 + y'^2) - 2M\kappa x' - 2N\kappa y' + \kappa^2 A = 0. \tag{4.4.2}$$

Z podmínky $M^2 + N^2 - AC \geq 0$ pro kruhovou křivku dostaneme $M'^2 + N'^2 - A'C' = \kappa^2(M^2 + N^2 - AC) \geq 0$ a tedy m' je kruhová křivka. Rozlišujeme následujících pět možnosti:

1. m je nulová kruhová křivka, tj. $M^2 + N^2 - AC = 0$. Potom i $M'^2 + N'^2 - A'C' = 0$ a m' je nulová kruhová křivka.

2. m prochází středem inverze a je to přímka. Potom $A = 0, C = 0$, tj.

$$\begin{aligned} m: &\quad -2Mx - 2Ny = 0, \\ m': &\quad -2M\kappa x' - 2N\kappa y' = 0, \end{aligned}$$

a odtud $m \equiv m'$.

3. m prochází středem inverze a je to kružnice, tj. $A \neq 0, C = 0$. Potom

$$\begin{aligned} m: &\quad A(x^2 + y^2) - Mx - 2Ny = 0, \\ m': &\quad -2M\kappa x' - 2N\kappa y' + \kappa^2 A \ = 0, \end{aligned}$$

a tedy m' je přímka a neprochází středem inverze.

4. m neprochází středem inverze a je to přímka, tj. $A = 0, C \neq 0$. Potom

$$\begin{aligned} m: &\quad -2Mx - 2Ny + C = 0, \\ m': &\quad C(x'^2 + y'^2) - 2M\kappa x' - 2N\kappa y' = 0, \end{aligned}$$

a m' je kružnice procházející středem inverze.

5. m neprochází středem inverze a je to kružnice, tj. $A \neq 0, C \neq 0$. Potom

$$\begin{aligned} m: &\quad A(x^2 + y^2) - 2Mx - 2Ny + C = 0, \\ m': &\quad C(x'^2 + y'^2) - 2M\kappa x' - 2N\kappa y' + \kappa^2 A \ = 0, \end{aligned}$$

a m' je kružnice, která neprochází středem inverze.

Dokázali jsme tedy najednou všechny čtyři věty o obrazech kruhových křivek v kruhové inverzi.

Poznámka 4.4.1. Z (4.4.2) se snadno odvodí také souřadnicový důkaz Věty 4.3.8. Opravdu, ze souřadnicovém vyjádření pro odchylku dvou kruhových křivek z Věty 4.2.1, dostaneme

$$\begin{aligned} \cos\varphi' &= \frac{|2M_1'M_2' + 2N_1'N_2' - A_1'C_2' - A_2'C_1'|}{2\sqrt{M_1'^2 + N_1'^2 - A_1'C_1'}\sqrt{M_2'^2 + N_2'^2 - A_2'C_2'}} \\ &= \frac{|2\kappa^2 M_1M_2 + 2\kappa^2 N_1N_2 - \kappa^2 A_1C_2 - \kappa^2 A_2C_1|}{2\sqrt{\kappa^2 M_1^2 + \kappa^2 N_1^2 - \kappa^2 A_1C_1}\sqrt{\kappa^2 M_2^2 + \kappa^2 N_2^2 - \kappa^2 A_2C_2}} \\ &= \frac{|2M_1M_2 + 2N_1N_2 - A_1C_2 - A_2C_1|}{2\sqrt{M_1^2 + N_1^2 - A_1C_1}\sqrt{M_2^2 + N_2^2 - A_2C_2}} \\ &= \cos\varphi\,. \end{aligned}$$

◇

4.5 Kruhová zobrazení

Definice 4.5.1. *Kruhové zobrazení* v Möbiově rovině definujeme jako bijektivní zobrazení, které zobrazuje kruhové křivky na kruhové křivky.

Důsledek 4.5.1. Kruhové zobrazení zobrazuje nulovou kruhovou křivku na nulovou kruhovou křivku (body na body) a nenulovou kruhovou křivku na nenulovou kruhovou křivku. Může ale zobrazit středovou kruhovou křivku na nestředovou a naopak.

Je zřejmé, že kruhová zobrazení tvoří grupu, takzvanou *grupu kruhových zobrazení*. V této grupě je grupa podobností a grupa shodností podgrupou. Opravdu, každá shodnost i podobnost zobrazuje kruhové křivky na kruhové křivky a navíc zachováná jejich typ. $\diamond$

V euklidovské rovině je každá shodnost složena z nejvýše tří osových symetrií. Podobně každá podobnost je složení stejnolehlosti a shodnosti, tedy složením stejnolehlosti a nejvýše tří osových symetrií. Podobné tvrzení bude platit i pro kruhová zobrazení.

Definice 4.5.2. Jako *osové souměrnosti (osové inverze)* v Möbiově rovině definujeme symetrie podle přímek a kruhové inverze.

Potom platí následující věta, jejíž důkaz přesahuje rámec tohoto učebního textu.

Věta 4.5.1. *Každé kruhové zobrazení je složeno z konečného počtu osových inverzí.* $\square$

Poznámka 4.5.1. Pokud zachovává kruhové zobrazení typ kruhové křivky, jedná se buďto o shodnost (složenou z nejvýše tří symetrií podle přímek) nebo podobnost. Každá podobnost je složením stejnolehlosti a shodnosti. Stejnolehlost je složením dvou kruhových inverzí se středy ve středu stejnolehlosti. Je tedy podobnost složením dvou kruhových inverzí a nejvýše tří symetrií podle přímky.

Kruhová zobrazení, která nezachovávají typ kruhové křivky musí mít ve svém rozkladu minimálně jednu kruhovou inverzi. $\diamondsuit$

Použitá literatura

Baz В. Т. Базылев, *Сборник задач по геометрии*, Москва 1980.

Ber M. Berger, *Géométrie 1–5*, Paris 1977.

Bic L. Bican, *Lineární algebra*, SNTL, Praha 1979.

Bud B. Budinský, *Analytická a diferenciální geometrie*, SNTL, Praha 1983.

Byd B. Bydžovský, *Úvod do analytické geometrie*, Praha 1956.

Cub О. Н. Цубербиллер, *Задачи и упражнения по аналитической геометрии*, Москва 1957.

Čech E. Čech, *Základy analytické geometrie*, Praha 1951.

Jef Н. В. Ефимов, *Краткий курс по аналитической геометрии*, Москва 1975.

Ho94 P. Horák, *Algebra a teoretická aritmetika I*, skripta MU, Brno 1994.

Ho93 P. Horák, *Algebra a teoretická aritmetika II*, skripta MU, Brno 1993.

Ho07 P. Horák, *Lineární algebra a geometrie 1*, skripta MU, Brno 2007.

HoJa P. Horák, J. Janyška *Analytická geometrie*, skripta MU, 2. vydání, Brno 2002.

JaSe J. Janyška, A. Sekaninová, *Analytická teorie kuželoseček a kvadrik*, skripta MU, 2. vydání, Brno 2001.

Kle А. В. Клетеник, *Сборник задач по аналитической геометрии*, Москва 1986.

Kra E. Kraemer, *Analytická geometrie lineárních útvarů*, Praha 1956.

Mod П. С. Моденов, *Задачи по геометрии*, Москва 1979.

MoSw M. Moszyńska, J. Świecicka, *Geometria z algebra liniova*, Warszawa 1987.

Pog А. В. Погорелов, *Аналитическая геометрия*, Москва 1978.

Ro J. Rosický, *Algebra*, skripta MU, Brno 2002.

Se86 M. Sekanina a kol., *Geometrie I*, Praha 1986.

Se88 M. Sekanina a kol., *Geometrie II*, Praha 1988.

Sl J. Slovák, *Lineární algebra*, učební text MU, Brno 1997-98,
http://www.math.muni.cz/ slovak/Vyuka/la.pdf.

Rejstřík