Domácí úkol z 11. dubna 2019

Nechť p je libovolné liché prvočíslo. Označme g Gaussovu sumu příslušnou Legendreovu symbolu modulo p, tj.

$$g = \sum_{a=1}^{p-1} \left(\frac{a}{p}\right) \cdot \zeta_p^a,$$

kde $\zeta_p = e^{2\pi i/p} = \cos \frac{2\pi}{p} + i \sin \frac{2\pi}{p}$.

Dokažte, že platí

$$g^2 = \left(\frac{-1}{p}\right) \cdot p.$$

[Návod: jeden z klasických důkazů spočívá ve zobecnění sumy na

$$g_b = \sum_{a=1}^{p-1} \left(\frac{ab}{p}\right) \cdot \zeta_p^a,$$

pro libovolné $b \in \mathbb{Z}$ a výpočtu součtu

$$\sum_{b=1}^{p-1} g_b \cdot g_{-b}$$

dvěma různými způsoby.]