Gymnázium, Brno, třída Kapitána Jaroše 14

Písemná maturitní zkouška z matematiky

pro třídu se zaměřením na matematiku

15. dubna 2011

1. Uvažujme výraz
$$V(n) = 4n^3 - 4n + 6\,.$$

   (a) Rozhodněte, zda existuje vhodné $n \in \mathbb{Z}$ takové, aby hodnota zadaného výrazu V v bodě n byla rovna druhé mocnině nějakého přirozeného čísla (tj. zda existují čísla $n \in \mathbb{Z}$ a $k \in \mathbb{N}$, pro něž by platilo $V(n) = k^2$). V kladném případě alespoň jednu dvojici vyhovujících čísel n a k najděte, v záporném případě zdůvodněte, proč požadovaná čísla n a k nemohou existovat.

   (b) Najděte největšího společného dělitele pro všechna $n \in \mathbb{N}$ výrazu V (tj. najděte <u>největší</u> $d \in \mathbb{N}$, které má tu vlastnost, že $d \mid V(n)$ pro všechna $n \in \mathbb{N}$). Svá tvrzení dokažte.

   (c) Určete nejmenší a největší $n \in \mathbb{Z}$, pro které je výraz V dělitelný výrazem $n+2$ (tj. platí $(n+2) \mid V(n)$). Dále zjistěte počet všech celých čísel n s vlastností $(n+2) \mid V(n)$. Nemusíte je tedy všechna vyčíslovat. Svá tvrzení podložte výpočty.

2A. Nechť jsou dány body $A = [2; 3]$ a $K = [5; 2]$ a přímka $q : \ y = 3$.

   (a) Vyšetřete, co je množinou M všech bodů $X = [x; y]$ v rovině, pro které platí
$$|XA| = \sqrt{2}\,|Xq|\ .$$
   (Zápis $|Xq|$ značí vzdálenost bodu X od přímky q, symbolem $|XA|$ je označena délka úsečky AX.) Tvoří-li množinu M nějaká kuželosečka, zjistěte, zda je regulární či singulární, najděte všechny její středy a případné singulární body, určete její asymptotické směry. Jedná-li se o regulární kuželosečku, zjistěte její druh. Pokud jde o kuželosečku singulární, zjistěte, čím je tvořena.

   (b) V množině M z předchozí části úlohy najděte ten bod (případně všechny body, existuje-li jich více), který má od bodu K nejmenší vzdálenost. Svá tvrzení podložte výpočty.

   (c) Označme libovolně B a C ty body množiny M (z části (a) této úlohy), které leží na ose y a D a E opět libovolně ty body množiny M, které leží na ose x (tzn. nebude důležité, který průsečík například označíte B a který C). Najděte body B, C, D a E. Určete počet všech bodů v rovině, ze kterých je každou z úseček BC a DE vidět pod pravým úhlem. Tyto body již nemusíte hledat. Svá tvrzení zdůvodněte.

2B. Nechť je dána kulová plocha $\kappa : \ x^2 + y^2 + z^2 - 2x + 6y - 4z - 11 = 0$, rovina $\sigma : \ x - 2y + 2z - 20 = 0$ a body $A = [8; -5; 3]$, $B = [3; 10; -5]$ a $C = [7; -3; -6]$.

   (a) Vypočtěte střed a poloměr kulové plochy κ.

   (b) Určete střed a poloměr kružnice k, ve které protíná rovina σ kulovou plochu κ.

   (c) Najděte obecnou rovnici tečné roviny kulové plochy κ, která je kolmá k rovině σ a rovnoběžná s přímkou $\overleftrightarrow{AB}$. Příslušný dotykový bod tečné roviny s κ určovat nemusíte. Najděte všechna řešení této úlohy.

   (d) Uvažujme rotační kužel s vrcholem v bodě C, jehož hranici podstavy tvoří dotykové body všech tečen vedených z bodu C ke kulové ploše κ. Dokažte, že tento kužel je rovnostranný (tzn. že délka jeho strany je rovna průměru podstavy).

3A. Uvažujme funkce

$$f_1(x) = e^{4-x} + 1\,, \qquad f_2(x) = \sqrt{x} \qquad \text{a} \qquad f_3(x) = \frac{x^2}{x+2}\,.$$

(a) Najděte tečnu ke grafu funkce f_1, která je rovnoběžná s přímkou o rovnici $y = -x$. Určete rovněž dotykový bod hledané tečny s grafem funkce f_1.

(b) Pomocí prvních tří členů Taylorova polynomu funkce f_2 se středem v bodě $x_0 = 9$ přibližně vypočtěte $\sqrt{11}$.

(c) Vhodnou metodou v $\mathbb{R}$ vyřešte rovnici

$$e^{4-x} + 1 = \sqrt{x}\,.$$

Zdůvodněte přitom, proč má rovnice vámi udávaný počet kořenů.

(d) Vyšetřete obor hodnot funkce f_3. Jiné její vlastnosti studovat nemusíte.

3B. Uvažujme posloupnost $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$, jejíž n-tý člen je definován předpisem

$$a_n = \log_{35}\left(1 + \frac{2}{n}\right)\,.$$

(a) Dokažte, že $a_1 \notin \mathbb{Q}$.

(b) Určete následující vlastnosti posloupnosti $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$.

i. Zjistěte, zda je zadaná posloupnost tvořena pouze kladnými členy. Svou odpověď zdůvodněte.

ii. Vypočtěte

$$\lim_{n\to\infty} a_n$$

a vysvětlete, co tento výsledek znamená pro konvergenci či divergenci řady $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$.

iii. Vyšetřete monotonii uvažované posloupnosti.

(c) Rozhodněte, zda vztahy

$$a_{n+1} = a_n - \log_{35}\frac{n+2}{2n}\,,\ a_1 = \log_{35} 3$$

představují rekurentní vzorce studované posloupnosti $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$, tzn. zjistěte, zda uvedená rekurentní formule je jiným (ekvivalentním) vyjádřením posloupnosti

$$\left\{\log_{35}\left(1 + \frac{2}{n}\right)\right\}_{n=1}^{\infty}\,.$$

Svá tvrzení zdůvodněte.

(d) Vypočtěte součet prvních 48 členů posloupnosti $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ (tj. určete s_{48}, kde $s_{48} = a_1 + a_2 + \cdots + a_{48}$). Výsledek upravte do nejjednoduššího možného tvaru.

(e) V případě, že je nekonečná řada $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ konvergentní či určitě divergentní, najděte její součet.