SINOVÁ VĚTA

(1) Dokažte, že pro obsah S trojúhelníku ABC platí vzorce

a) $S = \dfrac{a^2 \sin\beta \sin\gamma}{2\sin\alpha}$, b) $S = \dfrac{v_a^2 \sin\alpha}{2\sin\beta\sin\gamma}$, c) $S = 2r^2 \sin\alpha \sin\beta \sin\gamma$.

Vyjádřete rovněž obsah S pomocí výšek v_a, v_b a sinu úhlu γ.

(2) Jsou dány přímky a, b protínající se v bodě O a bod P (různý od O). Libovolná přímka p procházející bodem P protíná přímky a, b po řadě v bodech A, B. Dokažte, že hodnota poměru

$$\frac{|OA|}{|OB|} : \frac{|PA|}{|PB|}$$

nezávisí na volbě přímky p.

(3) Střed kružnice vepsané danému trojúhelníku ABC je označen S. Osa vnitřního úhlu u vrcholu B protíná stranu AC v bodě D, osa vnitřního úhlu u vrcholu C protíná stranu AB v bodě E, přitom platí $|SD| = |SE|$. Dokažte, že platí $|\sphericalangle BAC| = 60^\circ$ nebo je trojúhelník ABC rovnoramenný.

(4) Ve vnitřní oblasti kružnice k se středem S je dán bod Q různý od bodu S. Určete bod P na kružnici k tak, aby byla velikost úhlu SPQ maximální.

(5) Je dán konvexní čtyřúhelník $ABCD$. Předpokládejme, že polopřímky BA, CD se protínají v bodě K a polopřímky BC, AD v bodě M. Dokažte, že pro poloměry kružnic opsaných trojúhelníkům ACM, BDK, ACK, BDM platí při zřejmém označení rovnost

$$r_{ACM} \cdot r_{BDK} = r_{ACK} \cdot r_{BDM}.$$

(6) Dokažte, že pro libovolný vnitřní bod D základny AB rovnoramenného trojúhelníku ABC jsou kružnice opsané trojúhelníkům ACD a BCD shodné.

(7) Je dán ostroúhlý trojúhelník ABC. Pro libovolný bod L jeho strany AB označme K, M paty kolmic z bodu L na strany AC, BC. Zjistěte, pro kterou polohu bodu L je úsečka KM nejkratší.

(8) Patou výšky na libovolnou stranu trojúhelníku ABC veďme kolmice na zbývající dvě strany. Ukažte, že paty těchto dvou kolmic (tzv. druhotné paty původní výšky) mají pro všechny tři výšky stejnou vzdálenost rovnu S/r, kde S je obsah a r je poloměr kružnice opsané trojúhelníku ABC.

(9) Uvnitř ostroúhlého trojúhelníku ABC je dán bod P. Označme A_P, B_P, C_P paty kolmic z bodu P po řadě na strany BC, AC, AB. Určete všechny body P, pro které je trojúhelník $A_PB_PC_P$ podobný trojúhelníku ABC.

(10) Čtyřúhelník s navzájem kolmými úhlopříčkami je vepsán do kružnice o poloměru r. Vyjádřete součet čtverců jeho stran pouze pomocí r.

Typeset by $\mathcal{A}\mathcal{M}\mathcal{S}$-TEX

(11) Je dán trojúhelník ABC, ve kterém $\gamma \geq \alpha$. Na tom oblouku BC kružnice opsané, který neobsahuje bod A, je zvolen vnitřní bod P. Úsečka AP protíná stranu BC v bodě Q, polopřímka BP protíná polopřímku AC v bodě R. Dokažte, že hodnota výrazu

$$\frac{|CA| \cdot |CR| - |CB| \cdot |CQ|}{|CQ| \cdot |CR|}$$

nezávisí na volbě bodu P.

(12) Středy oblouků BC, CA, AB kružnice opsané danému trojúhelníku ABC, na nichž neleží po řadě body A, B, C, označme po řadě P, Q, R a středy stran BC, CA, AB označme po řadě K, L, M. Nechť S je střed kružnice vepsané tomuto trojúhelníku. Dokažte, že platí rovnost

$$|AS| \cdot |BS| \cdot |CS| = 8 \cdot |KP| \cdot |LQ| \cdot |MR|.$$

(13) Je dán trojúhelník ABC ($|AB| \neq |BC|$). Označme D průsečík přímky BC a tečny v bodě A ke kružnici opsané trojúhelníku ABC. Kolmice k přímce BC vedené body B, C protínají osy stran AB, resp. AC po řadě v bodech E, F. Dokažte rovnost

$$\frac{|BE|}{|CF|} = \frac{|BD|}{|CD|}$$

(která bude znamenat, že body D, E, F leží v přímce).

(14) Uvnitř strany AB daného ostroúhlého trojúhelníku ABC zvolte bod S tak, aby trojúhelník SXY, kde X a Y jsou po řadě středy kružnic opsaných trojúhelníkům ASC a BSC, měl nejmenší možný obsah.

(15) V konvexním čtyřúhelníku $ABCD$ je dáno $|\sphericalangle CAB| = 50°$, $|\sphericalangle DBC| = 20°$, $|\sphericalangle ACD| = 40°$, $|\sphericalangle BDA| = 70°$. Určete velikost úhlu ASB, kde S je průsečík úhlopříček AC a BD. (Těžké! Možné velikosti jsou dvě.)

KOSINOVÁ VĚTA

(1) Určete, jakou podmínku splňují vnitřní úhly právě těch trojúhelníků ABC, pro jejichž strany platí

$$\frac{3}{a+b+c} = \frac{1}{a+b} + \frac{1}{a+c}\,.$$

(2) Základny lichoběžníku mají délky 3 a 12, jedno rameno má délku 2 a jedna úhlopříčka 12. Vypočítejte délku druhé úhlopříčky.

(3) Uvnitř rovnostranného trojúhelníku ABC je bod P takový, že $|PA| = 3$, $|PB| = 4$, $|PB| = 5$. Určete délku strany trojúhelníku ABC.

(4) Kružnice vepsaná trojúhelníku ABC se dotýká strany AB v bodě D takovém, že $|AD| = 5$ a $|DB| = 3$. Určete délku strany BC, je-li $\alpha = 60°$.

(5) V rovnoběžníku $ABCD$ je dáno: $|AB| = a$, $|AD| = b$ $(b > a)$, $\sphericalangle BAD = \alpha$, $(\alpha < 90°)$. Na stranách AD, BC leží po řadě body K, M tak, že $BMDK$ je kosočtverec. Kolik měří jeho strana?

(6) Pravoúhlý trojúhelník s pravým úhlem u vrcholu C je vepsán do rovnostranného trojúhelníku PQR ($A \in QR$, $B \in PR$, $C \in PQ$). Určete délku úsečky AQ, je-li dáno $|PC| = 3$, $|BP| = |CQ| = 2$.

(7) Šestiúhelník vepsaný do kružnice má tři sousedící strany délky a a zbylé tři sousedící strany délky b. Vyjádřete pomocí a, b poloměr r opsané kružnice.

(8) V pravoúhlém trojúhelníku ABC s pravým úhlem u vrcholu A je přepona BC rozdělena body M, N na tři shodné úsečky ($|BM| = |MN| = |NC|$). Vyjádřete délku úsečky MN pomocí délek $x = |AM|$ a $y = |AN|$.

(9) Délky těžnic libovolného trojúhelníku vyjádřete pomocí délek jeho stran.

(10) Pro délky stran trojúhelníku ABC platí $a^2 + b^2 = 5c^2$, právě když jsou těžnice z vrcholů A, B navzájem kolmé. Dokažte.

(11) Uvnitř jedné poloroviny s hraniční přímkou AB jsou dány dva různé body P a Q, ve druhé polorovině je nad průměrem AB sestrojena polokružnice. Určete ten její bod M, pro který součet $|PM|^2 + |QM|^2$ nabývá největší hodnoty.

(12) Označme O střed opsané kružnice a T těžiště libovolného trojúhelníku ABC, který není rovnostranný. Dokažte, že úsečky OT a CT jsou navzájem kolmé, právě když pro délky stran platí $a^2 + b^2 = 2c^2$.

(13) Dokažte, že v lichoběžníku $ABCD$ se základnami AB, CD platí

$$\frac{|AB|^2 - |BC|^2 + |AC|^2}{|CD|^2 - |AD|^2 + |AC|^2} = \frac{|AB|^2 - |AD|^2 + |BD|^2}{|CD|^2 - |BC|^2 + |BD|^2} = \frac{|AB|}{|CD|}.$$

s výjimkou případů, kdy první nebo druhý zlomek nemá smysl – ukažte, že tehdy se jedná o zlomek $0/0$.

(14) Dokažte, že v nerovnoramenném lichoběžníku $ABCD$ ($AB \parallel CD$) platí

$$\frac{|AC|^2 - |BD|^2}{|AD|^2 - |BC|^2} = \frac{|AB| + |CD|}{|AB| - |CD|}.$$

(15) Je dán trojúhelník ABC. Nalezněte bod D na straně AC a bod E na straně AB tak, aby byl obsah trojúhelníku ADE roven obsahu čtyřúhelníku $DEBC$ a délka úsečky DE byla minimální.

(16) Je dána kružnice $k(S; r)$ a na ní body M, N takové, že úhel MSN je ostrý. Libovolným bodem X menšího z oblouků MN veďme rovnoběžku s přímkou MS a označme Y její průsečík s úsečkou SN. Sestrojte takový bod X, pro který je obsah trojúhelníku SXY maximální.

(17) Uvnitř trojúhelníku ABC, ve kterém $|\sphericalangle ABC| = 30°$ a $|\sphericalangle BAC| = 60°$, je dán bod P tak, že $|BP| = 4$, $|CP| = 1$ a $|\sphericalangle APB| = 120°$. Vypočtěte délku úsečky AP.

Všechny příklady jsou převzaty z Ph.D. práce Mgr. Barbory Havířové, dostupné v IS MU. V ní najdete i jejich podrobná řešení.