Příklady pro distanční zkoušku ze Statistické fyziky a termodynamiky

1. Uvažujte plyn kvantových relativistických částic s klidovou hmotností m v třírozměrném prostoru, pro které platí vztah mezi energií a hybností ve tvaru $E = \sqrt{m^2c^4 + p^2c^2}$. Vztahy počítejte jak pro fermiony, tak pro bosony.

   (a) Spočtěte hustotu stavů jako funkci energie. Jakou minimální energii mohou částice mít? Objevuje se v případě bosonového plynu při nízkých teplotách Boseho-Einsteinova kondenzace?

   (b) Spočtěte integrál z hustoty stavů a s jeho pomocí vyjádřete velký kanonický potenciál. Spočtěte počet částic, entropii a tlak plynu.

   (c) Ukažte, že pokud jsou kvantové efekty zanedbatelné a částice se pohybují rychlostmi podstatně nižšími než rychlost světla, má stavová rovnice tvar stavové rovnice klasického ideálního plynu.

   (d) Spočtěte Fermiho hybnost a Fermiho energii. Pro případ plynu fermionů ukažte, že v limitě $T \to 0$ lze stavovou rovnici napsat ve tvaru $p \sim \rho^{5/3}$ pro případ fermionů pohybujících se rychlostí podstatně nižší než rychlost světla a $p \sim \rho^{4/3}$ pro případ fermionů pohybujících se rychlostí blízkou rychlosti světla (ρ je hustota).

2. Matice hustoty harmonického oscilátoru s hamiltoniánem

$$\hat{H} = \frac{1}{2m}\hat{p}^2 + \frac{1}{2}m\omega^2\hat{x}^2$$

   má v souřadnicové reprezentaci tvar

$$\rho(x, x', T) = \sqrt{\frac{m\omega}{\pi\hbar}\tanh\left(\frac{\hbar\omega}{2kT}\right)}\exp\left\{-\frac{m\omega}{2\hbar\sinh\left(\frac{\hbar\omega}{kT}\right)}\left[\left(x^2 + x'^2\right)\cosh\left(\frac{\hbar\omega}{kT}\right) - 2xx'\right]\right\}.$$

   (a) Spočtěte střední hodnotu energie $E = \langle\hat{H}\rangle$.

   (b) Ukažte, že pro $T \to \infty$ platí pro střední hodnotu energie ekvipartiční teorém.