

# 1 Označení rozdělovacích funkcí

Rozdělovací funkci rychlosti částic budu označovat  $g(\vec{v})$ , přičemž platí

$$n = \iiint_{-\infty}^{\infty} g(\vec{v}) dv_1 dv_2 dv_3,$$

kde  $n$  je koncentrace těchto částic. Pokud rozdělovací funkce není symetrická, tj. závisí na směru vektoru  $\vec{v}$ , je možné její tvar hledat ve tvaru nekonečné řady obsahující Legendrovy polynomy kosinu  $\theta$ , např.

$$g(\vec{v}) = g_0(v) + \cos(\theta)g_1(v) + \dots,$$

kde  $\theta$  je úhel mezi rychlostí částice a nějakým význačným směrem, nebo v obecnějším případě rozvojem do sférických funkcí. Pokud ale rozdělovací funkce symetrická je, pak lze lehce spočítat rozdělovací funkci velikosti rychlosti částic  $g_v(v)$  a rozdělovací funkci energie částic  $f(E)$ :

$$\begin{aligned} g_v(v) &= 4\pi v^2 g(v) \\ f(E) &= \frac{g_v\left(\sqrt{\frac{2E}{m}}\right)}{\sqrt{2mE}} \end{aligned}$$

Často se místo vlastní rozdělovací funkce uvádí funkce

$$f_P(E) = \frac{f(E)}{\sqrt{E}}$$

v případě elektronů označovaná EEPF (*electron energy probability function*).

Homogenní izotropní soubor částic, na které nepůsobí vnější síly a které se nesráží s jinými částicemi, by byl v rovnováze popsán Maxwellovou rozdělovací funkcí

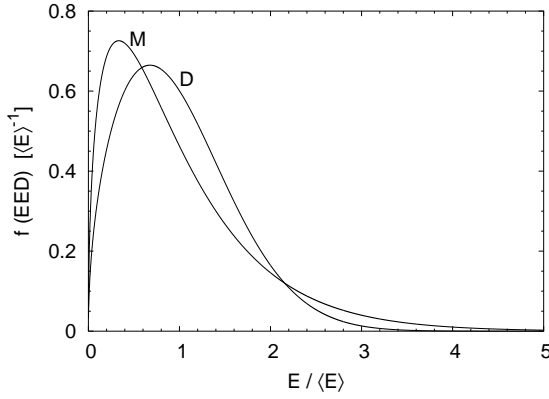
$$\begin{aligned} g(v) &= n \left(\frac{m}{2\pi kT}\right)^{\frac{3}{2}} \exp\left(-\frac{mv^2}{2kT}\right) \\ f(E) &= n \frac{2}{\sqrt{\pi} (kT)^{3/2}} \sqrt{E} \exp\left(-\frac{E}{kT}\right) \end{aligned}$$

V plazmatu se nejčastěji zabýváme rozdělovací funkcí energie elektronů. Když je frekvence vzájemných srážek mezi elektrony vysoká, pak jejich rozdělovací funkce bývá blízká Maxwellově. Pružné srážky s neutrálními částicemi naopak způsobují odklon od Maxwellova rozdělení např. k Druyvesteynovu rozdělení

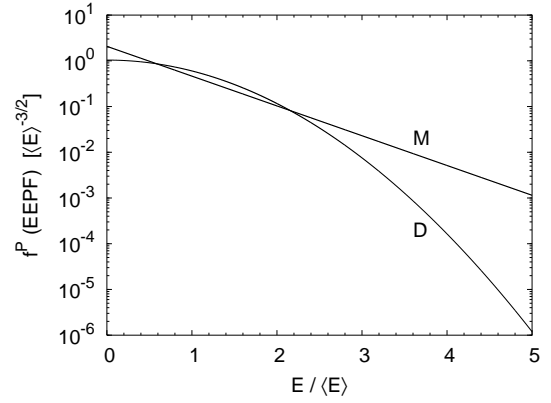
$$f(E) \propto n \sqrt{E} \exp\left(-\frac{E^2}{K}\right),$$

kde  $K$  je konstanta související se střední energií elektronů. Řadu rozdělovacích funkcí je možné psát ve tvaru nazývaném standardní rozdělovací funkce

$$\begin{aligned} f(E) &= C_{st} n \sqrt{E} \exp\left\{-\frac{E^\kappa}{2\kappa E_p^\kappa}\right\} \\ C_{st}^{-1} &= 2^{3/2\kappa} \kappa^{(3-2\kappa)/2\kappa} E_p^{3/2} \Gamma(3/(2\kappa)) \\ \langle E \rangle &= E_p (2\kappa)^{1/\kappa} \frac{\Gamma(5/(2\kappa))}{\Gamma(3/(2\kappa))} \end{aligned}$$



Obrázek 1: *Maxwellovo (M) a Druyvesteynovo (D) rozdělení energií.*



Obrázek 2: *Maxwellova (M) a Druyvesteynova (D) EEPF.*

( $E_p$  je nejpravděpodobnější a  $\langle E \rangle$  střední energie). Pro  $\kappa = 1$  přejde standardní rozdělení na Maxwellovo, pro  $\kappa = 2$  na Druyvesteynovo. Ukázka Maxwellova a Druyvesteynova rozdělení energií je nakreslená na obr. 1, na obr. 2 jsou odpovídající  $f_P$  (EPPF). Mnohem výrazněji se ale neutrály projevují ve vysokoenergetické části rozdělovací funkce díky nepružným srážkám, které snižují koncentraci rychlých elektronů. Naopak vyražení elektronů z elektrod s následující ionizací ve stěnové vrstvě (*sheath*) nebo stochastický ohřev v silném elektrickém poli na okrajích plazmatu mohou vést ke vzniku skupiny extrémně rychlých elektronů. Skutečný tvar rozdělovací funkce tak může být komplikovaný a může nést mnoho informací o plazmatu.

## 2 Langmuirova sonda

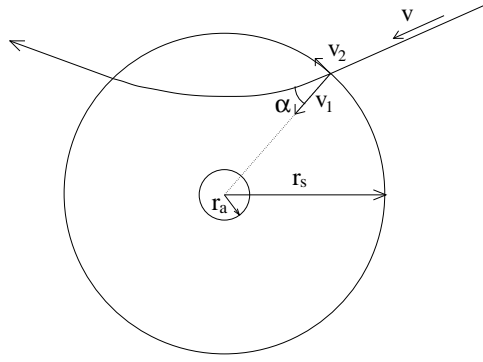
Langmuirovou sondou se nazývá vodič vložený do plazmatu, z jehož V-A charakteristiky je možné určit některé parametry plazmatu, zejména koncentraci a střední energii elektronů, elektrický potenciál plazmatu a rozdělovací funkci energie elektronů. Když sonda není na potenciálu plazmatu, vznikne v jejím okolí vrstva prostorového náboje ovlivňující dráhy nabitých částic. Nedochozí-li v této vrstvě ke srážkám a předpokládáme-li, že za hranicí stěnové vrstvy není plazma sondou ovlivněno, lze relativně jednoduše spočítat, které částice na sondu dopadnou, a zjistit tak proud tekoucí na sondu. V této kapitole zatím uvedu jen základní vzorce pro výpočet elektrického proudu tekoucího na Langmuirovu sondu. Sondy mívají různé tvary, nejčastější bývá sonda válcová. Zde budou uvedeny vztahy pro rovinnou, válcovou a kulovou sondu.

### 2.1 Tok částic odpuzovaných od sondy

Částice s nenulovou kinetickou energií mohou pronikat i na sondu, která je elektrostaticky odpuzuje, tj.  $q(\phi_a - \phi_{pl}) > 0$ , pokud mají rychlost větší než mezní hodnota

$$v^2 \geq \frac{2q(\phi_a - \phi_{pl})}{m},$$

kde  $q$  je náboj částice,  $\phi_a$  potenciál sondy a  $\phi_{pl}$  potenciál plazmatu. Dalším omezením je maximální rychlost  $v_2$  (viz obr. 3), při které částice nemine sondu. Ze zákonů zachování energie



Obrázek 3: Schéma dráhy částice ve stěnové vrstvě okolo sondy.

a momentu hybnosti vyplývá podmínka pro dopad částice na sondu

$$v_2^2 \left( \frac{r_s^2}{r_a^2} - 1 \right) \leq v_1^2 - \frac{2q(\phi_a - \phi_{pl})}{m},$$

kde  $r_a$  je poloměr sondy a  $r_s$  poloměr stěnové vrstvy (sheathu) okolo sondy, takže ani úhel  $\alpha$  mezi počáteční rychlostí částice a její radiální složkou  $v_1$  nesmí překročit jistou mezní hodnotu.

Celkový proud částic na sondu pro bezsrážkovou stěnovou vrstvu lze počítat integrálem

$$I = qS_s \int_{v_{min}}^{\infty} dv \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^{\alpha_m} d\alpha v^2 \sin \alpha g(v) v \cos \alpha,$$

kde  $S_s$  označuje plochu vnějšího povrchu stěnové vrstvy,  $v_{min} = \sqrt{2q(\phi_a - \phi_{pl})/m}$  a  $\alpha_m$  je maximální úhel  $\alpha$ , pod kterým může částice dopadnout na okraj stěnové vrstvy aby ještě dopadla na sondu.  $v^2 \sin \alpha$  je Jacobián transformace do sférických souřadnic a  $qg(v) v \cos \alpha$  vyjadřuje hustotu elektrického proudu částic ve směru složky rychlosti  $v_1$ .

Uvedený postup vede k výsledku

$$\begin{aligned} I &= Sq\pi \int_{\sqrt{\frac{2qU}{m}}}^{\infty} v^3 g(v) \left[ 1 - \frac{2qU}{mv^2} \right] dv = \\ &= qS \frac{1}{2\sqrt{2m}} \int_{qU}^{\infty} \frac{E - qU}{\sqrt{E}} f(E) dE, \end{aligned} \quad (1)$$

kde napětí mezi plazmatem a sondou  $\phi_a - \phi_{pl}$  bylo označeno  $U$  a  $S$  je plocha povrchu sondy. Tento výsledek platí pro rovinnou, válcovou i kulovou sondu. Pokud mají částice Maxwellovu rozdělovací funkci odpovídající teplotě  $T$ , vychází pro proud

$$\begin{aligned} I &= qS \frac{1}{4} n \bar{v} \exp\left(-\frac{qU}{kT}\right) \\ \bar{v} &= \sqrt{\frac{8kT}{\pi m}} \end{aligned} \quad (2)$$

( $\bar{v}$  je střední velikost rychlosti částic).

Výhodou je, že libovolné rozdělení energií elektronů můžeme zjistit z druhé derivace elektronového proudu pomocí známé Druyvesteynovy formule

$$f(qU) = \frac{2\sqrt{2m|U|}}{q^{5/2}S} \frac{d^2I}{d|U|^2} \quad (3)$$

## 2.2 Tok částic přitahovaných k sondě

V případě částic sondou přitahovaných ( $qU < 0$ ) se už vztahy pro proud tekoucí na rovinou, kulovou a válcovou sondu liší. Zde jsou uvedeny vztahy platící v případě Maxwellova rozdělení:

$$I_r = \frac{1}{4}Sq n \bar{v} \quad (4)$$

$$I_k = \frac{1}{4}Sq n \bar{v} \left\{ \left( \frac{r_s}{r_a} \right)^2 - \left[ \left( \frac{r_s}{r_a} \right)^2 - 1 \right] \exp \left( \frac{r_a^2}{r_s^2 - r_a^2} \frac{qU}{kT} \right) \right\} \quad (5)$$

$$I_v = \frac{1}{4}Sq n \bar{v} \left\{ \frac{r_s}{r_a} \sqrt{\operatorname{erf} \left( \frac{r_a^2}{r_s^2 - r_a^2} \frac{-qU}{kT} \right)} + \left[ 1 - \sqrt{\operatorname{erf} \left( \frac{r_s^2}{r_s^2 - r_a^2} \frac{-qU}{kT} \right)} \right] \exp \left( -\frac{qU}{kT} \right) \right\}, \quad (6)$$

kde

$$\operatorname{erf} x = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^x e^{-t^2} dt$$

Nevýhodou je skutečnost, že vztahy závisí na poloměru  $r_s$ , který při měření není známý. Užitečná je limita pro  $r_s \gg r_a$ , tzv. OML (*orbital motion limited*) teorie, ve které vychází pro kulovou sondu

$$I_k \approx \frac{1}{4}Sq n \bar{v} \left( 1 - \frac{qU}{kT} \right)$$

a pro válcovou

$$I_v \approx \frac{1}{4}Sq n \bar{v} \sqrt{1 - \frac{qU}{kT}}$$