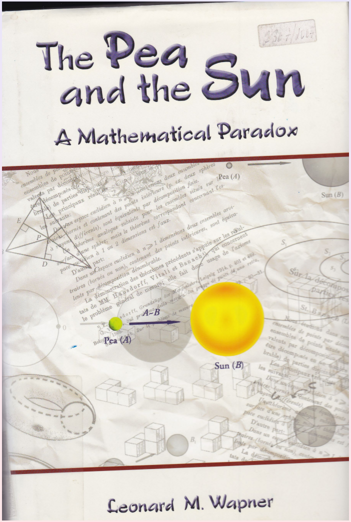
Přednáška se zapomenutým názvem

Luboš Pick (KMA MFF UK Praha)

Brno, 25.04. 2019

Inspirace

Inspirace



Motto (podle L. Wapnera)

Motto (podle L. Wapnera)

Studentova tichá modlitba:

Motto (podle L. Wapnera)

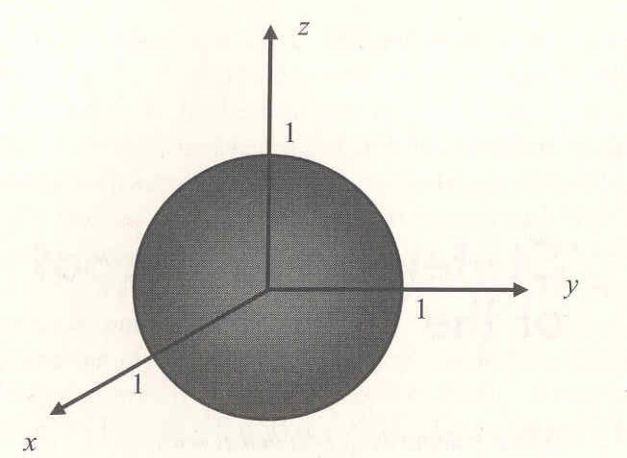
Studentova tichá modlitba:

Milý Bože, kdyby mi zbývala už jen jediná hodina života, dej, ať ji mohu strávit na přednášce z teorie míry. Pak mi bude tato hodina připadat jako věčnost.

(student, jenž si nepřál být jmenován)

Začneme s jednotkovou koulí v 3D

Začneme s jednotkovou koulí v 3D



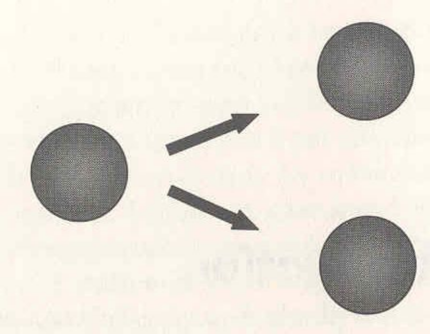
Věta Stefana Banacha a Alfreda Tarského (1924)

Věta Stefana Banacha a Alfreda Tarského (1924)

Jednotkovou kouli v 3D lze rozložit na sjednocení konečně mnoha podmnožin a z nich potom složit dvě koule, obě identické s původní koulí.

Věta Stefana Banacha a Alfreda Tarského (1924)

Jednotkovou kouli v 3D lze rozložit na sjednocení konečně mnoha podmnožin a z nich potom složit dvě koule, obě identické s původní koulí.



Ty následky . . .

Ty následky . . .

Důsledek. Hrášek a sluníčko jsou po částech kongruentní.

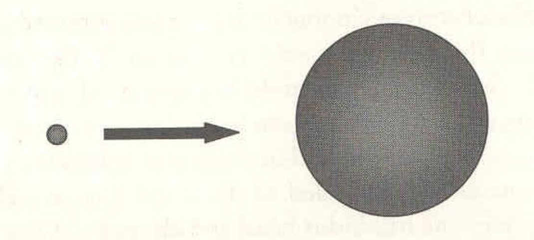
Ty následky . . .

Důsledek. Hrášek a sluníčko jsou **po částech kongruentní**.

Přesněji: množinu velikosti hrášku je možné rozložit na konečně mnoho kousků, a z nich potom sestavit množinu velikosti sluníčka.

Důsledek. Hrášek a sluníčko jsou po částech kongruentní.

Přesněji: množinu velikosti hrášku je možné rozložit na konečně mnoho kousků, a z nich potom sestavit množinu velikosti sluníčka.



FAQ

FAQ

- Opravdu umějí matematikové zdvojnásobovat objem?

FAQ

- Opravdu umějí matematikové zdvojnásobovat objem?
- Jak se to prakticky provádí?

FAQ

- Opravdu umějí matematikové zdvojnásobovat objem?
- Jak se to prakticky provádí?
- Nemělo by se to zakázat?

FAQ

- Opravdu umějí matematikové zdvojnásobovat objem?
- Jak se to prakticky provádí?
- Nemělo by se to zakázat?
- Kdo za to může?

Obrana matematikova

- My nejsme fyzikové ani inženýři, my jsme matematikové.

Obrana matematikova

- My nejsme fyzikové ani inženýři, my jsme matematikové.
- Matematika je deduktivní formalizovaný systém,

Obrana matematikova

- My nejsme fyzikové ani inženýři, my jsme matematikové.
- Matematika je deduktivní formalizovaný systém,
- tudíž musí někde začít.

Obrana matematikova

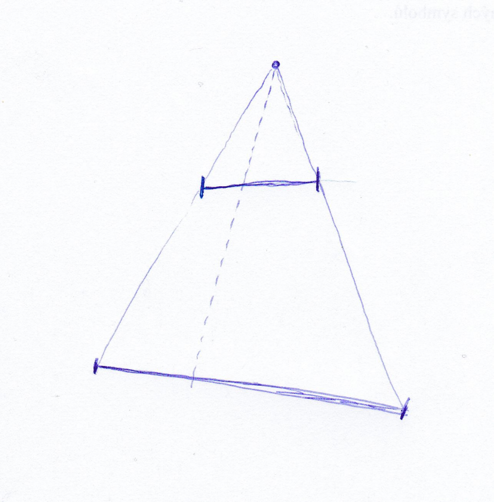
- My nejsme fyzikové ani inženýři, my jsme matematikové.
- Matematika je deduktivní formalizovaný systém,
- tudíž musí někde začít.
- Veškerá matematická tvrzení jsou vyvozována z axiomů,

Obrana matematikova

- My nejsme fyzikové ani inženýři, my jsme matematikové.
- Matematika je deduktivní formalizovaný systém,
- tudíž musí někde začít.
- Veškerá matematická tvrzení jsou vyvozována z axiomů,
- a to nevyhnutelně vede ke vzniku paradoxů.

Chvála konečnosti

Chvála konečnosti



Hlavní postavy příběhu:

Hlavní postavy příběhu:

- Stefan Banach (1892-1945)

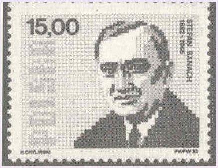
Hlavní postavy příběhu:

- Stefan Banach (1892-1945)
- Alfred Tarski (1901-1983)

Publikace věty: 1924

Publikace věty: 1924

Figure 1.8. Stefan Banach (1892–1945).
(Courtesy of the Mathematical Institute
of the Polish Academy of Sciences.)



Publikace věty: 1924

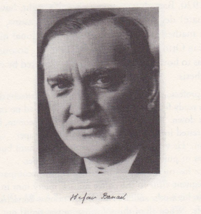
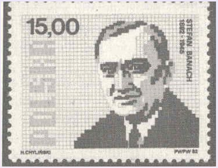
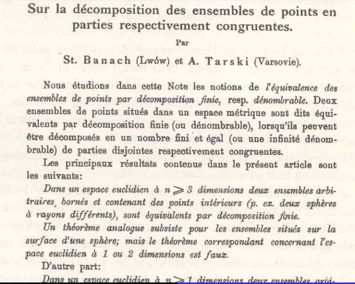


Figure 1.8. Stefan Banach (1892–1945).
(Courtesy of the Mathematical Institute
of the Polish Academy of Sciences.)





Sur la décomposition des ensembles de points en parties respectivement congruentes.

Par

St. Banach (Lwów) et A. Tarski (Varsovie).

Nous étudions dans cette Note les notions de *l'équivalence des ensembles de points par décomposition finie*, resp. *dénombrable*. Deux ensembles de points situés dans un espace métrique sont dits équivalents par décomposition finie (ou dénombrable), lorsqu'ils peuvent être décomposés en un nombre fini et égal (ou une infinité dénombrable) de parties disjointes respectivement congruentes.

Les principaux résultats contenus dans le présent article sont les suivants:

Dans un espace euclidien à $n \geqslant 3$ dimensions deux ensembles arbitraires, bornés et contenant des points intérieurs (p. ex. deux sphères à rayons différents), sont équivalents par décomposition finie.

Un théorème analogue subsiste pour les ensembles situés sur la surface d'une sphère; mais le théorème correspondant concernant l'espace euclidien à 1 ou 2 dimensions est faux.

D'autre part:

Dans un espace euclidien à $n \geqslant 1$ dimensions deux ensembles arbi-

Kam to může dotáhnout matematik?

Kam to může dotáhnout matematik?

Kam to může dotáhnout matematik?

Kam to může dotáhnout matematik?

Tak kdo může za ten paradox?

Tak kdo může za ten paradox?

- existence *nem\u011b\u0159iteln\u00fdch mno\u017ein*

Tak kdo může za ten paradox?

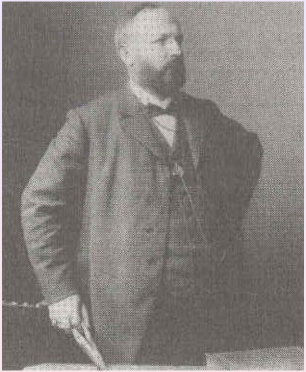
- existence *neměřitelných množin*
- axiom výběru

Tak kdo může za ten paradox?

- existence *nezměřitelných množin*
- axiom výběru
- zásady práce s nekonečnými množinami

Georg Cantor (1845–1918)

Georg Cantor (1845–1918)



Cantorův objev: *kardinalita* množiny

Cantorův objev: *kardinalita* množiny

U konečných množin je to *počet prvků*.

Cantor a nekonečno

Cantorův objev: *kardinalita* množiny

U konečných množin je to *počet prvků*.

U nekonečných množin ...?

Cantor a nekonečno

Cantorův objev: *kardinalita* množiny

U konečných množin je to *počet prvků*.

U nekonečných množin . . . ?

Množina A má kardinalitu *menší než nebo stejnou jako* B, jestliže existuje prosté zobrazení z A do B.

Cantorův objev: *kardinalita* množiny

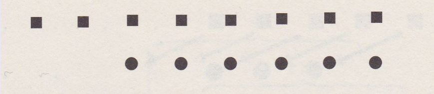
U konečných množin je to *počet prvků*.

U nekonečných množin . . . ?

Množina A má kardinalitu *menší než nebo stejnou jako* B, jestliže existuje prosté zobrazení z A do B.

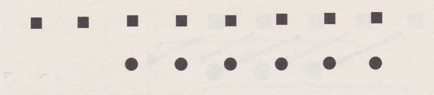
Množiny jsou *ekvivalentní*, jestliže mezi nimi existuje *bijekce*.

Úskalí práce s nekonečnem

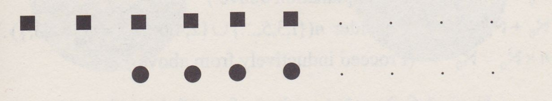


Máme více kostiček než koleček.

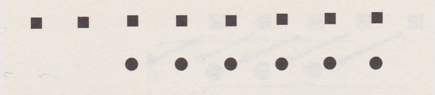
Úskalí práce s nekonečnem



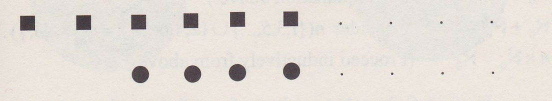
Máme více kostiček než koleček.



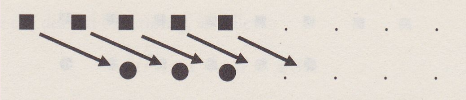
Máme více kostiček než koleček?



Máme více kostiček než koleček.



Máme více kostiček než koleček?



Nemáme!

První Cantorův šok

První Cantorův šok

Množina může být ekvivalentní své vlastní podmnožině!

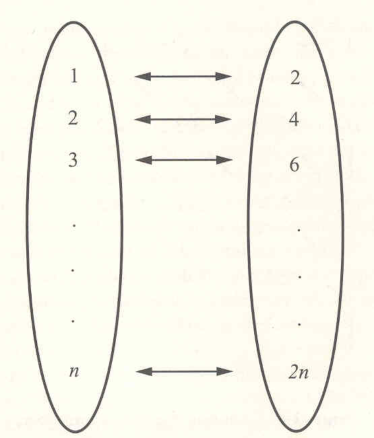
První Cantorův šok

Množina může být ekvivalentní své vlastní podmnožině!

Příklad: přirozená čísla a sudá čísla.

Množina může být ekvivalentní své vlastní podmnožině!

Příklad: přirozená čísla a sudá čísla.



Co je to nekonečná množina?

Co je to nekonečná množina?

DEFINICE:

Co je to nekonečná množina?

DEFINICE: Množina je *nekonečná*, pokud existuje prosté zobrazení této množiny na některou její *vlastní* podmnožinu.

Spočetné množiny

Spočetné množiny

Množiny, mající nejvýše tolik prvků jako $\mathbb{N}$, nazýváme **spočetné**.

Druhý Cantorův šok

Druhý Cantorův šok

Racionálních čísel není více, než přirozených!

Druhý Cantorův šok

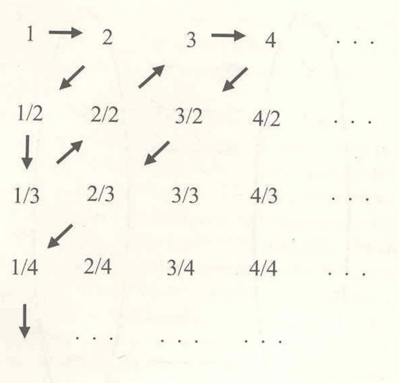
Racionálních čísel není více, než přirozených!

Racionální čísla jsou *spočetná*.

Druhý Cantorův šok

Racionálních čísel není více, než přirozených!

Racionální čísla jsou *spočetná*.



Třetí Cantorův šok

Reálných čísel je podstatně více než přirozených!

Třetí Cantorův šok

Reálných čísel je podstatně více než přirozených!

Reálná čísla jsou **nespočetná**.

Třetí Cantorův šok

Reálných čísel je podstatně více než přirozených!

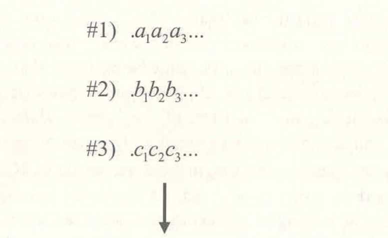
Reálná čísla jsou **nespočetná**.

To vyplývá z *diagonalizační metody*, kterou Cantor vyvinul.

Tvrzení. Interval $(0,1)$ je nespočetná množina.

Tvrzení. Interval $(0,1)$ je nespočetná množina.

Důkaz.


#1) $.a_1a_2a_3\ldots$

#2) $.b_1b_2b_3\ldots$

#3) $.c_1c_2c_3\ldots$

A tedy . . .

A tedy . . .

. . . existuje více druhů nekonečen!

A tedy . . .

. . . existuje více druhů nekonečen!

Cantor dokázal existenci *hierarchie* nekonečen.

A tedy ...

...existuje více druhů nekonečen!

Cantor dokázal existenci *hierarchie* nekonečen.

$$\aleph_0 < \aleph_1 < \aleph_2 < \dots$$

... existuje více druhů nekonečen!

Cantor dokázal existenci *hierarchie* nekonečen.

$$\aleph_0 < \aleph_1 < \aleph_2 < \dots$$

Hypotéza kontinua:

$$c = 2^{\aleph_0} = \aleph_1?$$

A tedy . . .

. . . existuje více druhů nekonečen!

Cantor dokázal existenci *hierarchie* nekonečen.

$$\aleph_0 < \aleph_1 < \aleph_2 < \dots$$

Hypotéza kontinua:

$$c = 2^{\aleph_0} = \aleph_1?$$

Cantor věřil, že ano, ale nedokázal to.

A k tomu jeden citát ...

A k tomu jeden citát ...

. . . odhaduji, že důkaz hypotézy kontinua Vám pošlu asi tak za čtrnáct dní . . .

A k tomu jeden citát ...

...odhaduji, že důkaz hypotézy kontinua Vám pošlu asi tak za čtrnáct dní ...

(z dopisu G. Cantora G. Mittag-Lefflerovi, 1882)

Hilbertův seznam

David Hilbert (Paříž 1900): 23 nejdůležitějších neřešených matematických problémů.

David Hilbert (Paříž 1900): 23 nejdůležitějších neřešených matematických problémů.

První místo na seznamu: *hypotéza kontinua*.

Axiomy teorie množin

Axiomy teorie množin

Cantor, Zermelo, Fränkel (1908)

Axiomy teorie množin

Cantor, Zermelo, Fränkel (1908)

1) axiom existence množiny
2) axiom extenzionality
3) axiom vydělení
4) axiom dvojice
5) axiom sumy
6) axiom potence
7) axiom nahrazení
8) axiom nekonečna
9) axiom výběru

Pozor, na seznamu je ukryt škodič!

Pozor, na seznamu je ukryt škodič!

S jedním z axiomů budou problémy.

Pozor, na seznamu je ukryt škodič!

S jedním z axiomů budou problémy.

Který to je?

Pozor, na seznamu je ukryt škodič!

S jedním z axiomů budou problémy.

Který to je?

1) axiom existence množiny
2) axiom extenzionality
3) axiom vydělení
4) axiom dvojice
5) axiom sumy
6) axiom potence
7) axiom nahrazení
8) axiom nekonečna
9) **axiom výběru**

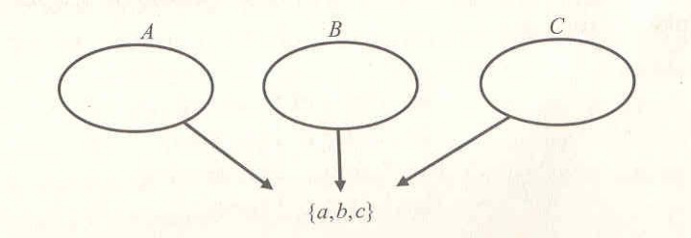
Axiom výběru

Axiom výběru

Axiom výběru: *Pro libovolný soubor množin existuje výběrová množina, která obsahuje po jednom prvku z každé množiny v daném souboru.*

Axiom výběru

Axiom výběru: *Pro libovolný soubor množin existuje výběrová množina, která obsahuje po jednom prvku z každé množiny v daném souboru.*



Axiom výběru v praxi

Axiom výběru v praxi

Pro konečný počet množin je to snadné.

Axiom výběru v praxi

Pro konečný počet množin je to snadné.

Pro nekonečné soubory množin začínají problémy.

Axiom výběru v praxi

Pro konečný počet množin je to snadné.

Pro nekonečné soubory množin začínají problémy.

Příklad Bertranda Russella:

Axiom výběru v praxi

Pro konečný počet množin je to snadné.

Pro nekonečné soubory množin začínají problémy.

Příklad Bertranda Russella:

- *nekonečná množina párů bot*

Axiom výběru v praxi

Pro konečný počet množin je to snadné.

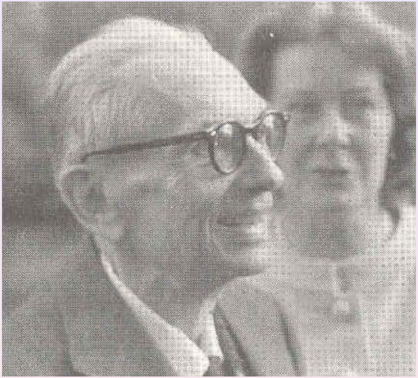
Pro nekonečné soubory množin začínají problémy.

Příklad Bertranda Russella:

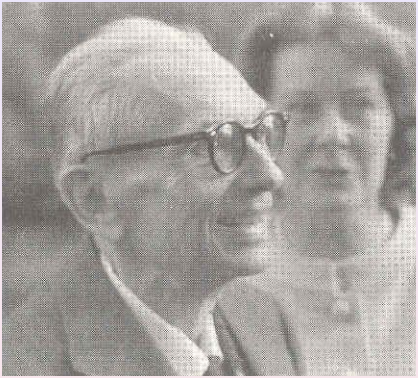
- *nekonečná množina párů bot*
- *nekonečná množina párů ponožek*

Kurt Gödel (1906-1978)

Kurt Gödel (1906-1978)



Kurt Gödel (1906-1978)



Kurt Gödel v roce 1931 dokázal existenci tzv. *nerozhodnutelných tvrzení*.

Axiom výběru – konzistence a nezávislost

Axiom výběru – konzistence a nezávislost

Kurt Gödel 1940: Axiom výběru ani hypotézu kontinua nelze vyvrátit (jsou *konzistetní* s ostatními axiomy).

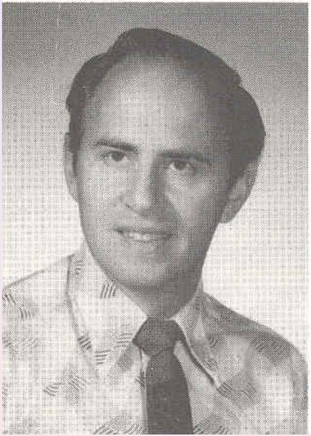
Axiom výběru – konzistence a nezávislost

Kurt Gödel 1940: Axiom výběru ani hypotézu kontinua nelze vyvrátit (jsou *konzistetní* s ostatními axiomy).

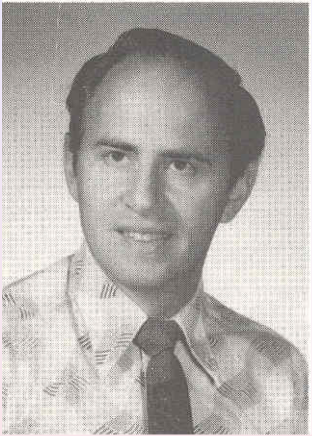
Snažil se dokázat jejich **nezávislost**, ale neúspěšně.

Paul Cohen (1934-2007)

Paul Cohen (1934-2007)



Paul Cohen (1934-2007)



dokázal (1965) **nezávislost** axiomu výběru i hypotézy kontinua.

Úskalí elementární aritmetiky

Vy nejste jen záporná veličina,
vy jste záporná veličina na druhou!

(Josef Vissarionovič Stalin)

Úskalí diferenciálního počtu

Rychlost růstu inflace se zpomaluje.

Rychlost růstu inflace se zpomaluje.

(Richard Nixon)

Úskalí práce s kvantifikátorem

Písňový text:

Úskalí práce s kvantifikátorem

Písňový text:

Vyždímejte kapesníky a nebuďte smutní,
každá holka pro někoho má sluch absolutní!

(Karel Plíhal)

Úskalí manipulace s fyzikálními jednotkami

Ještě jeden písňový text:

Ještě jeden písňový text:

Ten okamžik trval snad celý světelný rok ...

(Zdeněk Rytíř)

Ještě jeden písňový text:

Ten okamžik trval snad celý světelný rok ...

(Zdeněk Rytíř)

PRO SROVNÁNÍ:

Ještě jeden písňový text:

Ten okamžik trval snad celý světelný rok . . .

(Zdeněk Rytíř)

PRO SROVNÁNÍ:

Dnes ráno jsem uběhl patnáct kilogramů.

(Luboš Pick)

Úskalí manipulace se zlomky

Úskalí manipulace se zlomky

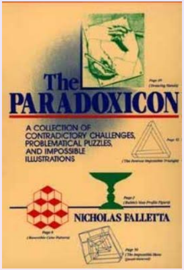
Z té třetiny, co přišla k volbám, mě volila polovina, takže mám důvěru většiny obyvatelstva.

(Miloš Zeman)

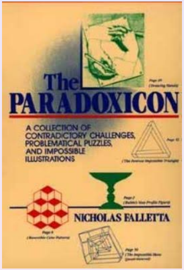
Co je matematický paradox?

Definice?

Definice?

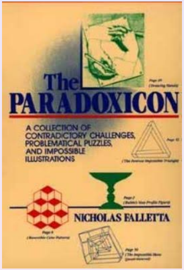

The PARADOXICON
A COLLECTION OF CONTRADICTORY CHALLENGES, PROBLEMATICAL PUZZLES, AND IMPOSSIBLE ILLUSTRATIONS
NICHOLAS FALLETTA

Definice?



Paradox je pravda, která stojí na hlavě, aby upoutala pozornost.

Definice?

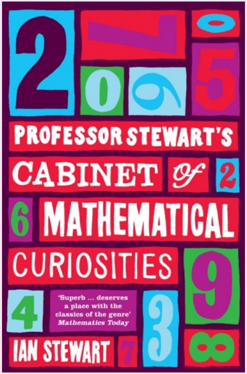


Paradox je pravda, která stojí na hlavě, aby upoutala pozornost.

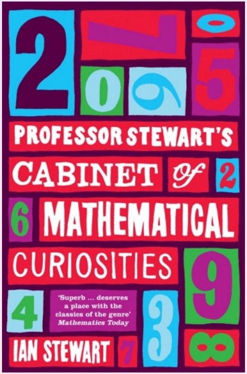
(Nicholas Falletta, 1983)

Inspirace

Inspirace



2
7
0
5
0
9
PROFESSOR STEWART'S
CABINET of
2
6
MATHEMATICAL
CURIOSITIES
9
4
'Superb ... deserves a place with the classics of the genre'
Mathematics Today
3
IAN STEWART
7
8



Ian Stewart: je Richardův paradox opravdu paradoxem?

Jules Richard (1862–1956)

Jules Richard (1862–1956)

Richardův paradox

Richardův paradox

Některé slovní útvary a věty v češtině **definují nějaké číslo**,

Richardův paradox

Některé slovní útvary a věty v češtině **definují nějaké číslo**, zatímco jiné nikoli.

Richardův paradox

Některé slovní útvary a věty v češtině **definují nějaké číslo**, zatímco jiné nikoli.

Například výraz *výška nejvýše položeného místa České republiky v metrech* definuje číslo

Richardův paradox

Některé slovní útvary a věty v češtině **definují nějaké číslo**, zatímco jiné nikoli.

Například výraz *výška nejvýše položeného místa České republiky v metrech* definuje číslo **1638**.

Některé slovní útvary a věty v češtině **definují nějaké číslo**, zatímco jiné nikoli.

Například výraz *výška nejvýše položeného místa České republiky v metrech* definuje číslo **1638**.

Naopak, výraz *nejvýše položené místo České republiky*

Richardův paradox

Některé slovní útvary a věty v češtině **definují nějaké číslo**, zatímco jiné nikoli.

Například výraz *výška nejvýše položeného místa České republiky v metrech* definuje číslo **1638**.

Naopak, výraz *nejvýše položené místo České republiky* žádné číslo nedefinuje.

Richardův paradox - pokračování

OTÁZKA:

Richardův paradox - pokračování

OTÁZKA: Které číslo definuje následující slovní spojení?

OTÁZKA: Které číslo definuje následující slovní spojení?

"Nejmenší přirozené číslo, které není možné žádným způsobem definovat pomocí českého slovního útvaru obsahujícího počet slov menší než dvacet."

Richardův paradox - pokračování

OTÁZKA: Které číslo definuje následující slovní spojení?

“Nejmenší přirozené číslo, které není možné žádným způsobem definovat pomocí českého slovního útvaru obsahujícího počet slov menší než dvacet.”

ODPOVĚĎ:

Richardův paradox - pokračování

OTÁZKA: Které číslo definuje následující slovní spojení?

“Nejmenší přirozené číslo, které není možné žádným způsobem definovat pomocí českého slovního útvaru obsahujícího počet slov menší než dvacet.”

ODPOVĚĎ: Ať je toto číslo jakékoli, právě jsme jej definovali pomocí českého slovního útvaru o pouhých devatenácti slovech.

Pozorování

Pozorování

Podobné paradoxy nevyhnutelně vznikají v každé formalisované teorii umožňující reference na svou vlastní syntaxi.

Je-li něco divné, ještě to nemusí být paradox

Posuďme následující výpočet:

$$-1 = (-1)^3 = (-1)^{\frac{6}{2}} = \sqrt{(-1)^6} = \sqrt{1} = 1$$

Je-li něco divné, ještě to nemusí být paradox

Posuďme následující výpočet:

$$-1 = (-1)^3 = (-1)^{\frac{6}{2}} = \sqrt{(-1)^6} = \sqrt{1} = 1$$

Úloha: rozhodněte, *která* z uvedených pěti rovností je nesprávná.

Kategorisace matematických paradoxů podle L. Wapnera

Existují tři typy paradoxů:

Existují tři typy paradoxů:

paradoxy *typu 1*: tvrzení vypadá absurdně, ale platí;

Existují tři typy paradoxů:

paradoxy *typu 1*: tvrzení vypadá absurdně, ale platí;

paradoxy *typu 2*: tvrzení vypadá věrohodně, ale neplatí;

Kategorisace matematických paradoxů podle L. Wapnera

Existují tři typy paradoxů:

paradoxy *typu 1*: tvrzení vypadá absurdně, ale platí;

paradoxy *typu 2*: tvrzení vypadá věrohodně, ale neplatí;

(obvykle jde o nějaký švindl)

Kategorisace matematických paradoxů podle L. Wapnera

Existují tři typy paradoxů:

paradoxy *typu 1*: tvrzení vypadá absurdně, ale platí;

paradoxy *typu 2*: tvrzení vypadá věrohodně, ale neplatí;

(obvykle jde o nějaký švindl)

paradoxy *typu 3* (antinomy): výroky vedoucí ke sporným důsledkům

Paradoxy typu 3 (antinomy - logické paradoxy)

Russellův paradox (1901): Definujeme množinu všech množin, které nejsou samy sobě svým prvkem. Je tato množina svým vlastním prvkem?

Paradoxy typu 3

Paradoxy typu 3

Russellův paradox je založen na *samovztažnosti*.

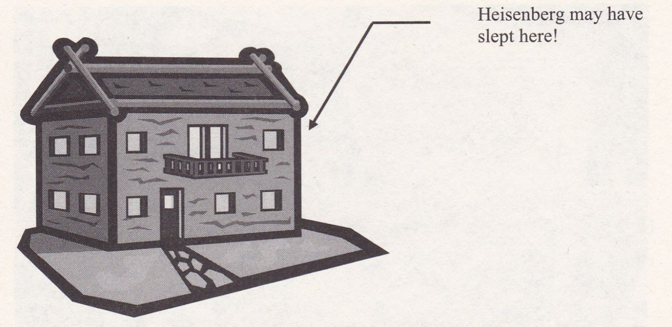
Russellův paradox je založen na *samovztažnosti*.

Ta se objevuje i jinde, například ve fyzice, informatice a humanitních vědách, ale také v hudbě a výtvarném umění.

Samovztažnost v umění

Samovztažnost v umění

Escher: Print Gallery



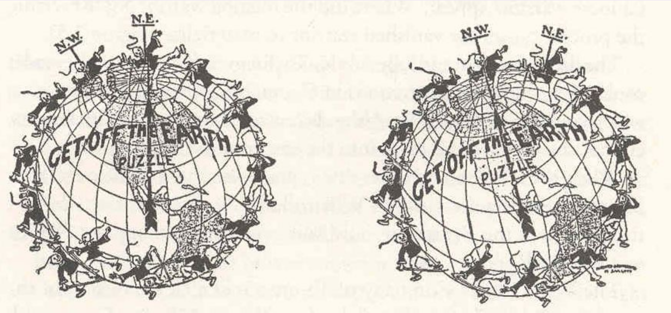
hotelový billboard u silnice v U.S.A.

Paradoxy typu 2 (švindly)

Paradoxy typu 2 (švindly)

Sam Loyd.

Sam Loyd.



The Vanishing Astronaut

The Vanishing Astronaut

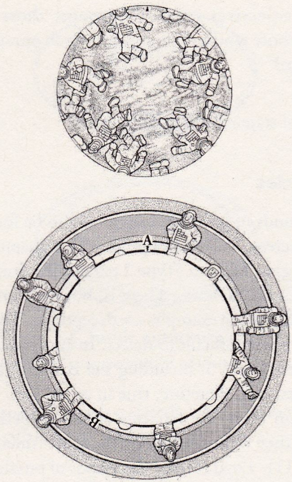
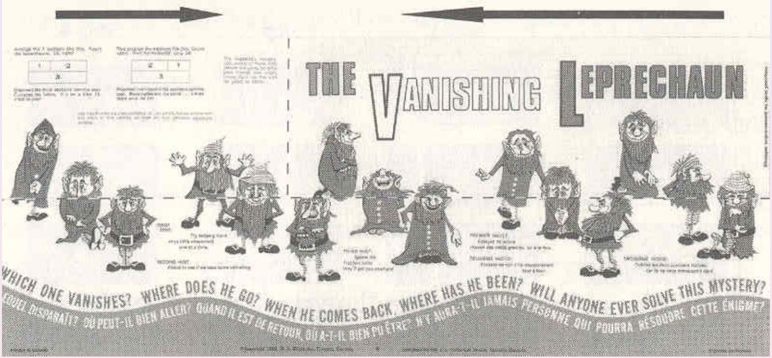
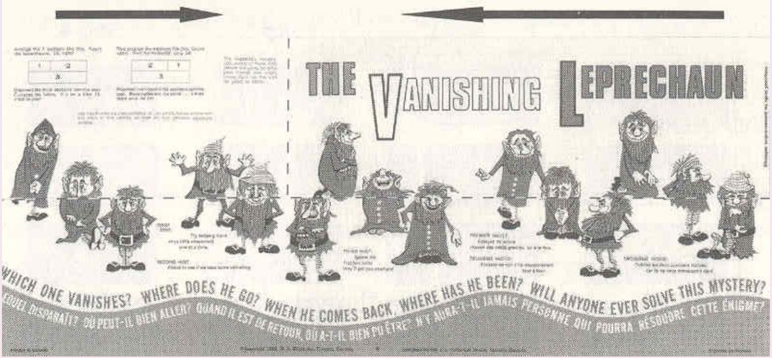


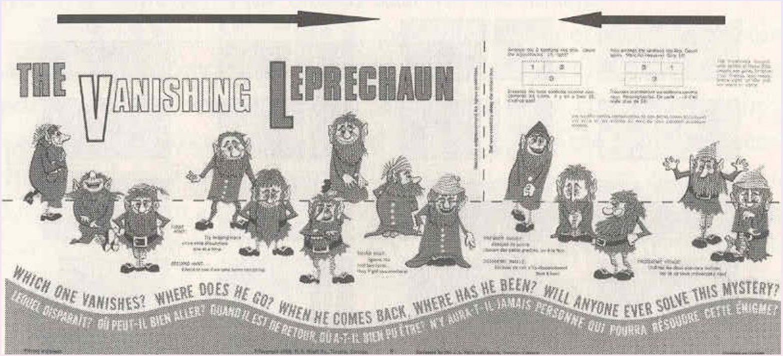
Figure 2.6. *The Vanishing Astronaut.*
(reprinted by permission of the AIMS Education Foundation from *Puzzle Play*

W.A. Elliott Company (Toronto): The Vanishing Leprechaun


THE VANISHING LEPRECHAUN
WHICH ONE VANISHES? WHERE DOES HE GO? WHEN HE COMES BACK, WHERE HAS HE BEEN? WILL ANYONE EVER SOLVE THIS MYSTERY?
LEQUEL DISPARAIT? OU PEUT-IL BIEN ALLER? QUAND IL EST DE RETOUR, OU A-T-IL BIEN PU ETRE? N'Y AURA-T-IL JAMAIS PERSONNE QUI POURRA RESOUDRE CETTE ENIGME?

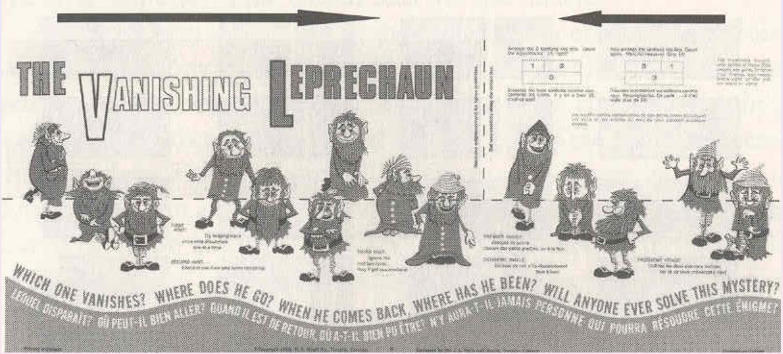


Máme patnáct pidižvíků.



Po záměně horních dílů jich je jen 14.

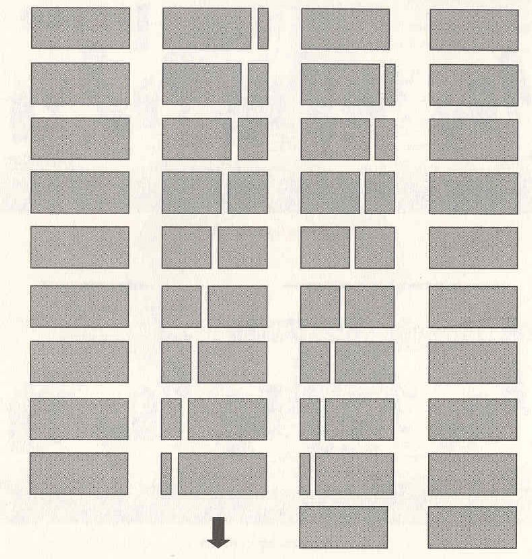
Zmizelý pidižvík



Po záměně horních dílů jich je jen 14.

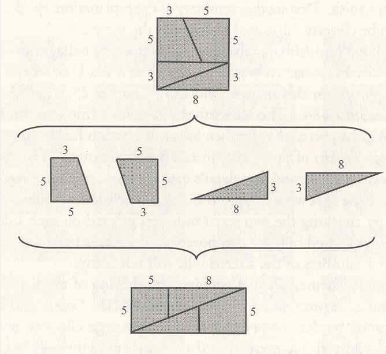
Kam zmizel patnáctý pidižvík?

Jak se obohatit pomocí matematiky

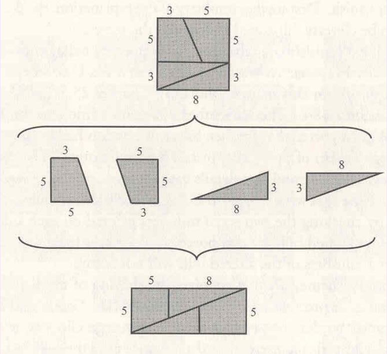


Fígl se čtvercem

Fígl se čtvercem

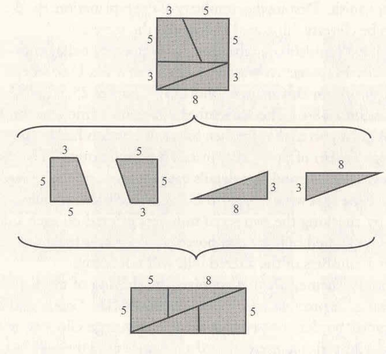


Fígl se čtvercem

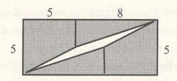


a jeho vysvětlení:

Fígl se čtvercem



a jeho vysvětlení:



Něco podobného se šachovnicí

Něco podobného se šachovnicí

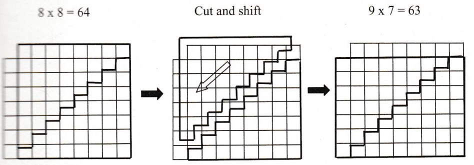


Figure 2.11. Another chessboard dissection.

Trojúhelník Mylese Curryho

Trojúhelník Mylese Curryho

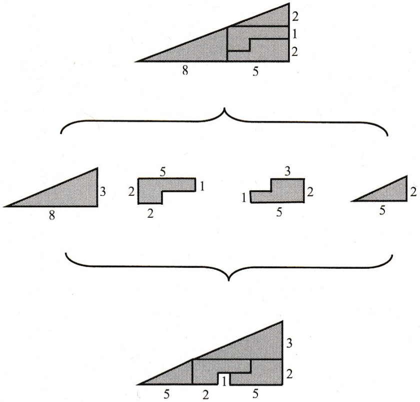


Figure 2.12. Curry triangle.

Králík Mylese Curryho

Králík Mylese Curryho

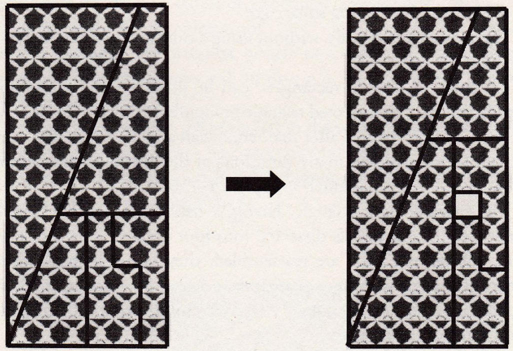


Figure 2.13. The Disappearing Rabbit Paradox.
(Courtesy of Myles Curry.)

Paradoxy typu 1

Braessův paradox:

Paradoxy typu 1

Braessův paradox: Rozšíření sítě může snížit její průchodnost.

Dietrich Braess (*1938)

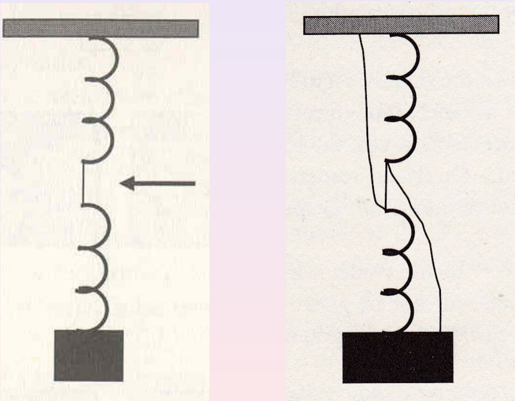
Dietrich Braess (*1938)

Fyzikální model Braessova paradoxu podle Joela Cohena

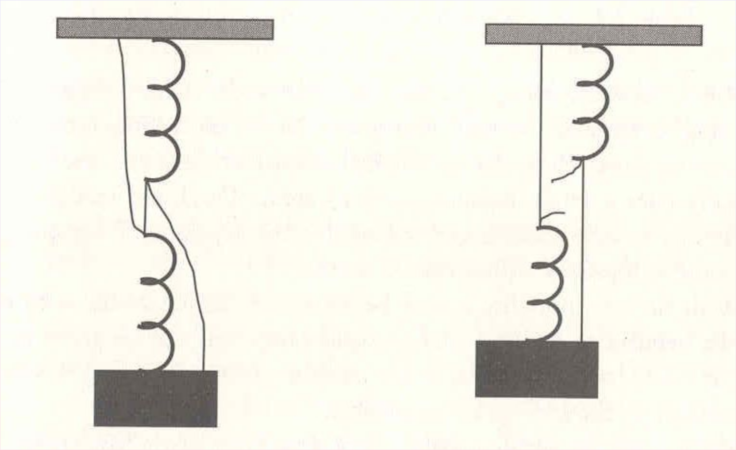
Klesne závaží?

Fyzikální model Braessova paradoxu podle Joela Cohena

Klesne závaží?

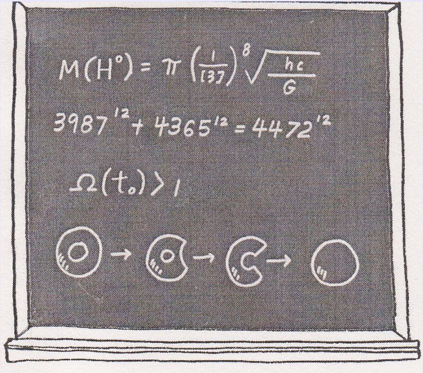


Opak je pravdou!

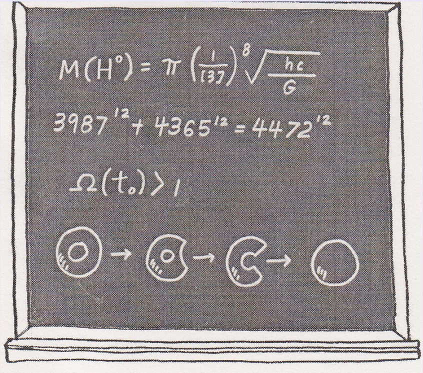


“Simpsonův” paradox

“Simpsonův” paradox

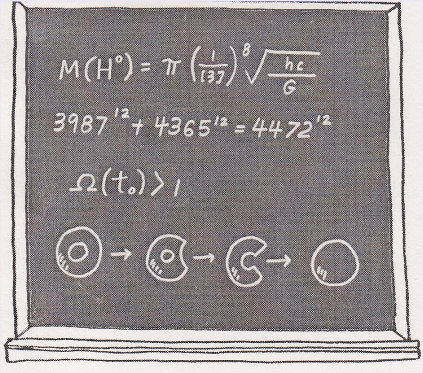


"Simpsonův" paradox



Jak je to doopravdy s tím druhým řádkem?

“Simpsonův” paradox



Jak je to doopravdy s tím druhým řádkem?

$$3987^{12} + 4365^{12} = 4472{,}0000000070576171875^{12}$$

Simpsonův paradox - teď už doopravdy

Simpsonův paradox - teď už doopravdy

Posuzujeme efektivnost dvou druhů léku proti zákeřné chorobě. Máme k dispozici data aplikace léků na **245** pacientů, z toho **200** mužů a **45** žen.

muži

červené pilulky	
PŘEŽIJE	NEPŘEŽIJE
80 (80%)	20 (20%)

žluté pilulky	
PŘEŽIJE	NEPŘEŽIJE
78 (78%)	22 (22%)

ženy

červené pilulky	
PŘEŽIJE	NEPŘEŽIJE
20 (50%)	20 (50%)

žluté pilulky	
PŘEŽIJE	NEPŘEŽIJE
2 (40%)	3 (60%)

celkem

červené pilulky	
PŘEŽIJE	NEPŘEŽIJE
100 (71,4%)	40 (28,6%)

žluté pilulky	
PŘEŽIJE	NEPŘEŽIJE
80 (76,2%)	25 (23,8%)

Zadání: Kdo je lepší?

Simpsonův paradox ve škole

Zadání: Kdo je lepší?

student	Premiant	Zhulenec
1. písemka	30%	25%
2. písemka	100%	75%

Simpsonův paradox ve škole

Zadání: Kdo je lepší?

student	Premiant	Zhulenec
1. písemka	30%	25%
2. písemka	100%	75%

Jenomže, co když ...

Simpsonův paradox ve škole

Zadání: Kdo je lepší?

student	Premiant	Zhulenec
1. písemka	30%	25%
2. písemka	100%	75%

Jenomže, co když ...

student	Premiant	Zhulenec
1. písemka	3 správně z 10	1 správně ze 4
2. písemka	2 správně ze 2	6 správně z 8
Celkem	*5 správně ze 12*	*7 správně z 12*

Simpsonův paradox ve škole

Zadání: Kdo je lepší?

student	Premiant	Zhulenec
1. písemka	30%	25%
2. písemka	100%	75%

Jenomže, co když ...

student	Premiant	Zhulenec
1. písemka	3 správně z 10	1 správně ze 4
2. písemka	2 správně ze 2	6 správně z 8
Celkem	*5 správně ze 12*	*7 správně z 12*

Takže, **kdo je lepší?**

Monty Hall (1921–2017)

Montyho paradox

- za jedněmi ze tří dveří je hlavní cena

Montyho paradox

- za jedněmi ze tří dveří je hlavní cena
- soutěžící zvolí jedny dveře

Montyho paradox

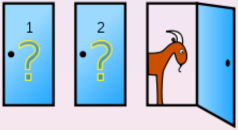
- za jedněmi ze tří dveří je hlavní cena
- soutěžící zvolí jedny dveře
- moderátor otevře jiné dveře, za nimiž je cena útěchy

Montyho paradox

- za jedněmi ze tří dveří je hlavní cena
- soutěžící zvolí jedny dveře
- moderátor otevře jiné dveře, za nimiž je cena útěchy
- soutěžící má možnost svou volbu změnit

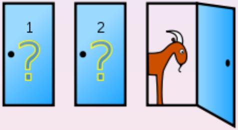
Montyho paradox

- za jedněmi ze tří dveří je hlavní cena
- soutěžící zvolí jedny dveře
- moderátor otevře jiné dveře, za nimiž je cena útěchy
- soutěžící má možnost svou volbu změnit



Montyho paradox

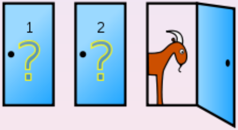
- za jedněmi ze tří dveří je hlavní cena
- soutěžící zvolí jedny dveře
- moderátor otevře jiné dveře, za nimiž je cena útěchy
- soutěžící má možnost svou volbu změnit



Otázka: *Má soutěžící měnit?*

Montyho paradox

- za jedněmi ze tří dveří je hlavní cena
- soutěžící zvolí jedny dveře
- moderátor otevře jiné dveře, za nimiž je cena útěchy
- soutěžící má možnost svou volbu změnit

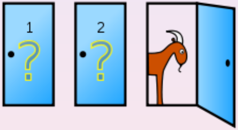


Otázka: *Má soutěžící měnit?*

ODPOVĚĎ: ANO

Montyho paradox

- za jedněmi ze tří dveří je hlavní cena
- soutěžící zvolí jedny dveře
- moderátor otevře jiné dveře, za nimiž je cena útěchy
- soutěžící má možnost svou volbu změnit



Otázka: *Má soutěžící měnit?*

ODPOVĚĎ: **ANO** (jeho šance na výhru hlavní ceny se tím zdvojnásobí (!))

Aniččin paradox?

Aniččin paradox?

Úloha 1: Rodina má dvě děti, z nichž jedno je dcera. Jaká je pravděpodobnost, že tato rodina má dvě dcery?

Aniččin paradox?

Úloha 1: Rodina má dvě děti, z nichž jedno je dcera. Jaká je pravděpodobnost, že tato rodina má dvě dcery?

Úloha 2: Rodina má dvě děti, z nichž jedno je Anička. Jaká je pravděpodobnost, že tato rodina má dvě dcery?

Aniččin paradox?

Úloha 1: Rodina má dvě děti, z nichž jedno je dcera. Jaká je pravděpodobnost, že tato rodina má dvě dcery?

Úloha 2: Rodina má dvě děti, z nichž jedno je Anička. Jaká je pravděpodobnost, že tato rodina má dvě dcery?

OTÁZKA:

Aniččin paradox?

Úloha 1: Rodina má dvě děti, z nichž jedno je dcera. Jaká je pravděpodobnost, že tato rodina má dvě dcery?

Úloha 2: Rodina má dvě děti, z nichž jedno je Anička. Jaká je pravděpodobnost, že tato rodina má dvě dcery?

OTÁZKA: Jsou řešení úloh 1 a 2 stejná?

Aniččin paradox?

Úloha 1: Rodina má dvě děti, z nichž jedno je dcera. Jaká je pravděpodobnost, že tato rodina má dvě dcery?

Úloha 2: Rodina má dvě děti, z nichž jedno je Anička. Jaká je pravděpodobnost, že tato rodina má dvě dcery?

OTÁZKA: Jsou řešení úloh 1 a 2 stejná?

ODPOVĚĎ: **NE**

Aniččin paradox?

Úloha 1: Rodina má dvě děti, z nichž jedno je dcera. Jaká je pravděpodobnost, že tato rodina má dvě dcery?

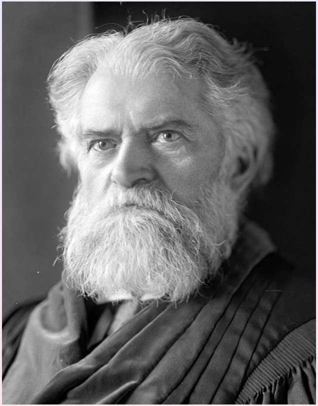
Úloha 2: Rodina má dvě děti, z nichž jedno je Anička. Jaká je pravděpodobnost, že tato rodina má dvě dcery?

OTÁZKA: Jsou řešení úloh 1 a 2 stejná?

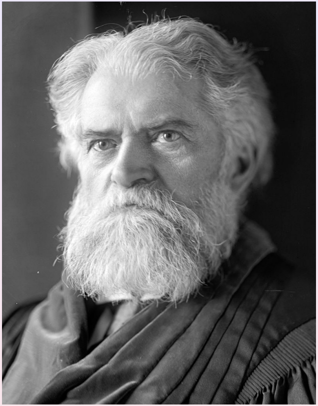
ODPOVĚĎ: **NE** (!)

Podvodníkův paradox

Podvodníkův paradox



Podvodníkův paradox



Simon Newcombe (1835–1909) Frank Benford (1883–1948)

Umíme správně podvádět?

Umíme správně podvádět?

OTÁZKA: Jaká je pravděpodobnost, že ve velkém souboru náhodných dat **bude určité číslo začínat jedničkou**?

OTÁZKA: Jaká je pravděpodobnost, že ve velkém souboru náhodných dat **bude určité číslo začínat jedničkou**?

Příklady takových souborů dat:

Umíme správně podvádět?

OTÁZKA: Jaká je pravděpodobnost, že ve velkém souboru náhodných dat **bude určité číslo začínat jedničkou**?

Příklady takových souborů dat:

- fyzikální konstanty

Umíme správně podvádět?

OTÁZKA: Jaká je pravděpodobnost, že ve velkém souboru náhodných dat **bude určité číslo začínat jedničkou**?

Příklady takových souborů dat:

- fyzikální konstanty
- plocha jednotlivých ostrůvků v rozsáhlém souostroví

Umíme správně podvádět?

OTÁZKA: Jaká je pravděpodobnost, že ve velkém souboru náhodných dat **bude určité číslo začínat jedničkou**?

Příklady takových souborů dat:

- fyzikální konstanty
- plocha jednotlivých ostrůvků v rozsáhlém souostroví
- ceny zboží v supermarketu

Umíme správně podvádět?

OTÁZKA: Jaká je pravděpodobnost, že ve velkém souboru náhodných dat **bude určité číslo začínat jedničkou**?

Příklady takových souborů dat:

- fyzikální konstanty
- plocha jednotlivých ostrůvků v rozsáhlém souostroví
- ceny zboží v supermarketu

Je zřejmé, že **odpověď je $\frac{1}{9}$**?

Benfordův zákon

ŘEŠENÍ: Odpověď ale **není** $\frac{1}{9}$.

ŘEŠENÍ: Odpověď ale **není** $\frac{1}{9}$.

Benfordův zákon (Newcombe 1881, Benford 1934):

ŘEŠENÍ: Odpověď ale **není** $\frac{1}{9}$.

Benfordův zákon (Newcombe 1881, Benford 1934):

Pravděpodobnost, že určité číslo bude začínat číslicí n, kde $n = 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9$, *je dána vzorcem*

ŘEŠENÍ: Odpověď ale **není** $\frac{1}{9}$.

Benfordův zákon (Newcombe 1881, Benford 1934):

Pravděpodobnost, že určité číslo bude začínat číslicí n, kde $n = 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9$, *je dána vzorcem*

$$log(n + 1) - \log n.$$

Benfordův zákon

ŘEŠENÍ: Odpověď ale **není** $\frac{1}{9}$.

Benfordův zákon (Newcombe 1881, Benford 1934):

Pravděpodobnost, že určité číslo bude začínat číslicí n, kde $n = 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9$, *je dána vzorcem*

$$log(n+1) - \log n.$$

Tedy například:

pravděpodobnost, že číslo začne *jedničkou* $= 30,1\%$

pravděpodobnost, že číslo začne *dvojkou* $= 17,6\%$

pravděpodobnost, že číslo začne *trojkou* $= 12,5\%$

pravděpodobnost, že číslo začne *devítkou* $= 4,6\%$

Benfordův zákon - ilustrace

Příklad (demonstrační): Představme si, že vybíráme ze souboru dat

$$1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12, 13, 14, 15, 16, 17, 18, 19.$$

Benfordův zákon - ilustrace

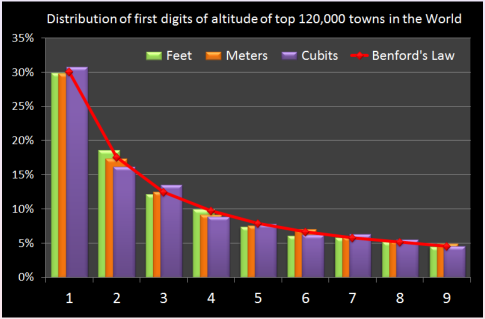
Příklad (demonstrační): Představme si, že vybíráme ze souboru dat

$$1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12, 13, 14, 15, 16, 17, 18, 19.$$

Vidíme, že jedničky vskutku převládají.

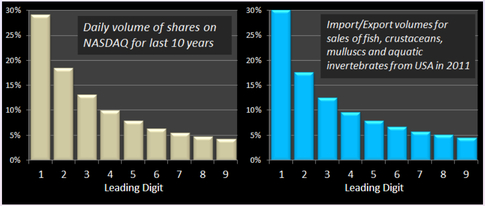
Benford v praxi

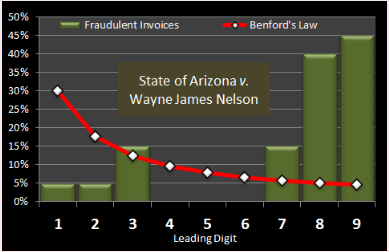
Benford v praxi



Benford v praxi

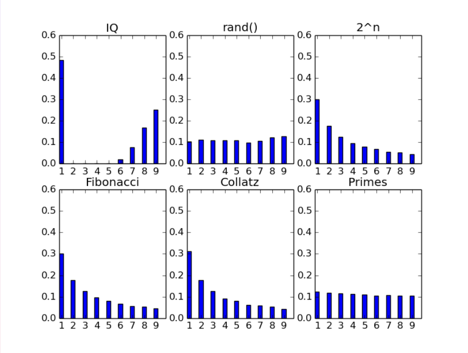
Benford v praxi





A když rozdělení není náhodné . . .

A když rozdělení není náhodné . . .



Paradox psychologické poradny

Paradox psychologické poradny

Na kolik oblastí rozdělí kruh **spojnice** n **bodů**?

Obrázek

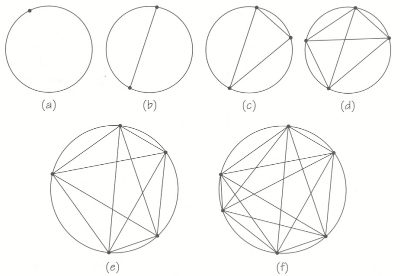
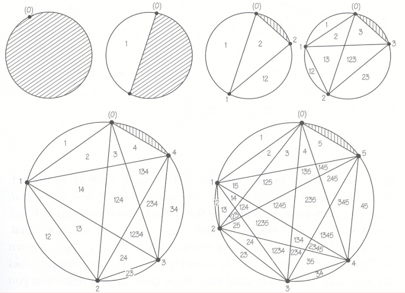


FIGURE 3.11 *A deceptive sequence.*



Prvních pár členů

Prvních pár členů

- Pro $n = 1$ dostaneme 1 oblast.

Prvních pár členů

- Pro $n = 1$ dostaneme 1 oblast.
- Pro $n = 2$ dostaneme 2 oblasti.

Prvních pár členů

- Pro $n = 1$ dostaneme 1 oblast.
- Pro $n = 2$ dostaneme 2 oblasti.
- Pro $n = 3$ dostaneme 4 oblasti.

Prvních pár členů

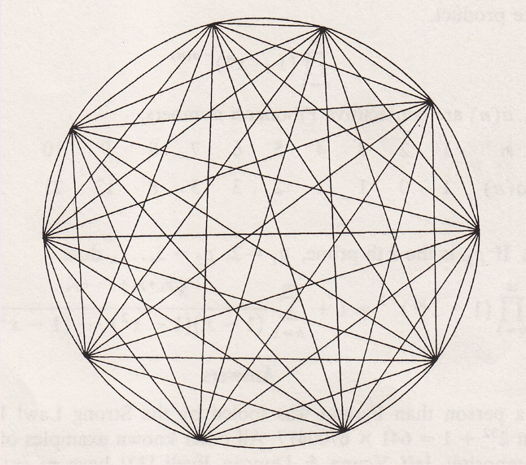
- Pro $n = 1$ dostaneme 1 oblast.
- Pro $n = 2$ dostaneme 2 oblasti.
- Pro $n = 3$ dostaneme 4 oblasti.
- Pro $n = 4$ dostaneme 8 oblastí.

Prvních pár členů

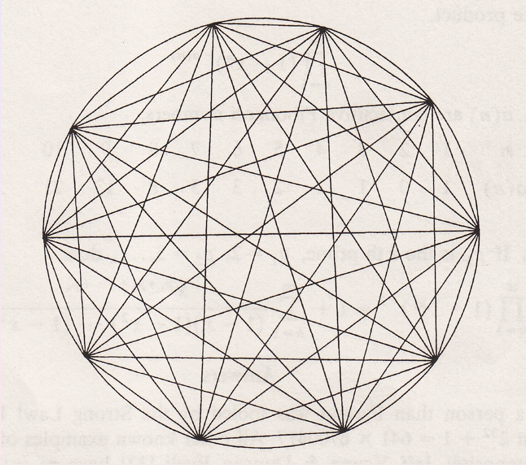
- Pro $n = 1$ dostaneme 1 oblast.
- Pro $n = 2$ dostaneme 2 oblasti.
- Pro $n = 3$ dostaneme 4 oblasti.
- Pro $n = 4$ dostaneme 8 oblastí.
- Pro $n = 5$ dostaneme 16 oblastí.

Nápověda pro fajnšmekry

Nápověda pro fajnšmekry



Nápověda pro fajnšmekry



Pro $n = 10$ dostaneme 256 oblastí.

Záludná otázka

Záludná otázka

Kolik oblastí dostaneme pro $n = 6$?

Záludná otázka

Kolik oblastí dostaneme pro $n = 6$?

Odpověď: **31**.

Je na to dokonce vzorec

Je na to dokonce vzorec

Jenomže tento vzorec nezní

$$2^{n-1},$$

Je na to dokonce vzorec

Jenomže tento vzorec nezní

$$2^{n-1},$$

jak si možná někdo myslel,

Je na to dokonce vzorec

Jenomže tento vzorec nezní

$$2^{n-1},$$

jak si možná někdo myslel, nýbrž

$$\frac{1}{24}\left(n^4 - 6n^3 + 23n^2 - 18n + 24\right)$$

Je na to dokonce vzorec

Jenomže tento vzorec nezní

$$2^{n-1},$$

jak si možná někdo myslel, nýbrž

$$\frac{1}{24}\left(n^4 - 6n^3 + 23n^2 - 18n + 24\right)$$

nebo též

$$\binom{n-1}{0} + \binom{n-1}{1} + \binom{n-1}{2} + \binom{n-1}{3} + \binom{n-1}{4}.$$

A jak to bylo s tou nápovědou?

A jak to bylo s tou nápovědou?

Mohli jste to vědět?

A jak to bylo s tou nápovědou?

Mohli jste to vědět?

ANO!

A jak to bylo s tou nápovědou?

Mohli jste to vědět?

ANO!

Je třeba si neplést

$$1,\ 2,\ 4,\ 8,\ 16,\ 31,\ 57,\ 99,\ 163,$$
$$\mathbf{256},\ 386,\ 562,\ 794,\ 1093,\ \ldots$$

A jak to bylo s tou nápovědou?

Mohli jste to vědět?

ANO!

Je třeba si neplést

$$1,\ 2,\ 4,\ 8,\ 16,\ 31,\ 57,\ 99,\ 163,$$
$$\mathbf{256},\ 386,\ 562,\ 794,\ 1093,\ \dots$$

a

$$1,\ 2,\ 4,\ 8,\ 16,\ 32,\ 64,\ 128,\ \mathbf{256},$$
$$512,\ 1024,\ 2048,\ 4096,\ \dots$$

Obrana matematikova (funguje i v poradně)

Když poznáte, co bude následovat, dostanete certifikát na IQ:

Obrana matematikova (funguje i v poradně)

Když poznáte, co bude následovat, dostanete certifikát na IQ:

$$1, \; 2, \; 3, \; 4, \; 5$$

Obrana matematikova (funguje i v poradně)

Když poznáte, co bude následovat, dostanete certifikát na IQ:

$$1, \; 2, \; 3, \; 4, \; 5$$

Otázka: Kolik je a_6?

Obrana matematikova (funguje i v poradně)

Když poznáte, co bude následovat, dostanete certifikát na IQ:

$$1,\ 2,\ 3,\ 4,\ 5$$

Otázka: Kolik je a_6?

Odpověď: $a_6 = 2019$.

Když poznáte, co bude následovat, dostanete certifikát na IQ:

$$1,\ 2,\ 3,\ 4,\ 5$$

Otázka: Kolik je a_6?

Odpověď: $a_6 = 2019$.

Vzorec:

$$a_n = n + 2013 \cdot \frac{(n-1)(n-2)(n-3)(n-4)(n-5)}{5!}.$$

Hilbertův hotel má *nekonečně* mnoho pokojů

Hilbertův hotel má *nekonečně* mnoho pokojů

a všechny jsou obsazené.

Hilbertův hotel má *nekonečně* mnoho pokojů

a všechny jsou obsazené.

Přijíždí nový turista.

Hilbertův hotel má *nekonečně* mnoho pokojů

a všechny jsou obsazené.

Přijíždí nový turista.

Hilbert posune všechny hosty do pokoje *s číslem o jedničku vyšším*.

Hilbertův hotel

Hilbertův hotel má *nekonečně* mnoho pokojů

a všechny jsou obsazené.

Přijíždí nový turista.

Hilbert posune všechny hosty do pokoje *s číslem o jedničku vyšším*.

Přijíždí autobus s *nekonečně mnoha turisty*.

Hilbertův hotel má *nekonečně* mnoho pokojů

a všechny jsou obsazené.

Přijíždí nový turista.

Hilbert posune všechny hosty do pokoje *s číslem o jedničku vyšším*.

Přijíždí autobus s *nekonečně mnoha turisty*.

Hilbert posune každého hosta do pokoje s *dvojnásobným číslem*.

Hotel Infinity

Hotel Infinity

On a dark desert highway – not much scenery
Except this long hotel stretchin' far as I could see.
Neon sign in front read "No Vacancy,"
But it was late and I was tired, so I went inside to plea.

The clerk said, "No problem. Here's what can be done—
We'll move those in a room to the next higher one.
That will free up the first room and that's where you can stay."
I tried understanding that as I heard him say:

CHORUS: "Welcome to the HOTEL INFINITY—
Where every room is full (every room is full)
Yet there's room for more.
Yeah, plenty of room at the HOTEL INFINITY—
Move 'em down the floor (move 'em down the floor)
To make room for more."

I'd just gotten settled, I'd finally unpacked
When I saw 8 more cars pull into the back.
I had to move to room 9; others moved up 8 rooms as well.
Never more will I confuse a Hilton with a Hilbert Hotel!

My mind got more twisted when I saw a bus without end
With an infinite number of riders coming up to check in.
"Relax," said the nightman. "Here's what we'll do:
Move to the double of your room number: that frees the
odd-numbered rooms."

(Repeat Chorus)

Last thing I remember at the end of my stay—
It was time to pay the bill but I had no means to pay.
The man in 19 smiled, "Your bill is on me.
20 pays mine, and so on, so you get yours for free!"

Aplikace práce s nekonečněm

Otázka: Jaký je podle Vás *nejblbější* název filmu na světě?

Aplikace práce s nekonečnem

Otázka: Jaký je podle Vás *nejblbější* název filmu na světě?

Správná odpověď:

Aplikace práce s nekonečnem

Otázka: Jaký je podle Vás *nejblbější* název filmu na světě?

Správná odpověď: *Nekonečný příběh II*.

Superslovník Hyperwebster

Superslovník Hyperwebster

Všechny výrazy, které lze formulovat z 26 písmen anglické abecedy.

Všechny výrazy, které lze formulovat z 26 písmen anglické abecedy.

Začíná: $A, AA, AAA, AAAA, \ldots$

Všechny výrazy, které lze formulovat z 26 písmen anglické abecedy.

Začíná: $A, AA, AAA, AAAA, \dots$

Po nekonečně mnoha výrazech: $AB, ABA, ABAA, \dots$

Superslovník Hyperwebster

Všechny výrazy, které lze formulovat z 26 písmen anglické abecedy.

Začíná: $A, AA, AAA, AAAA, \dots$

Po nekonečně mnoha výrazech: $AB, ABA, ABAA, \dots$

Není to sice **výkladový** slovník, ale definice a poučky v něm budou (bohužel platné i neplatné):

Všechny výrazy, které lze formulovat z 26 písmen anglické abecedy.

Začíná: *A, AA, AAA, AAAA, ...*

Po nekonečně mnoha výrazech: *AB, ABA, ABAA, ...*

Není to sice **výkladový** slovník, ale definice a poučky v něm budou (bohužel platné i neplatné):

LICHOBEZNIK-JE-CTYRUHELNIK-KTERY-MA-PRAVE-DVE-STRANY-ROVNOBEZNE

Všechny výrazy, které lze formulovat z 26 písmen anglické abecedy.

Začíná: *A, AA, AAA, AAAA, ...*

Po nekonečně mnoha výrazech: *AB, ABA, ABAA, ...*

Není to sice **výkladový** slovník, ale definice a poučky v něm budou (bohužel platné i neplatné):

LICHOBEZNIK-JE-CTYRUHELNIK-KTERY-MA-PRAVE-DVE-STRANY-ROVNOBEZNE

LICHOBEZNIK-JE-PLECHOVY-HLODAVEC

Vydání Hyperwebsteru

Vydání Hyperwebsteru

Vydavatel se rozhodne vydat slovník ve 26 dílech:

Vydání Hyperwebsteru

Vydavatel se rozhodne vydat slovník ve 26 dílech:

Díl A: A, AA, AAA, . . . , AB, ABA, . . . , ABB,
Díl B: B, BA, BAA, . . . , BB, BBA, . . . , BBB,
Díl C: C, CA, CAA, . . . , CB, CBA, . . . , CBB,
⋮
Díl Z: Z, ZA, ZAA, . . . , ZB, ZBA, . . . , ZBB,

Vydání Hyperwebsteru

Vydavatel se rozhodne vydat slovník ve 26 dílech:

Díl A: A, AA, AAA, . . . , AB, ABA, . . . , ABB,
Díl B: B, BA, BAA, . . . , BB, BBA, . . . , BBB,
Díl C: C, CA, CAA, . . . , CB, CBA, . . . , CBB,
⋮
Díl Z: Z, ZA, ZAA, . . . , ZB, ZBA, . . . , ZBB,

Pak škrtne zbytečné první písmenko.

Vydání Hyperwebsteru

Vydavatel se rozhodne vydat slovník ve 26 dílech:

Díl A: A, AA, AAA, . . . , AB, ABA, . . . , ABB,
Díl B: B, BA, BAA, . . . , BB, BBA, . . . , BBB,
Díl C: C, CA, CAA, . . . , CB, CBA, . . . , CBB,
⋮
Díl Z: Z, ZA, ZAA, . . . , ZB, ZBA, . . . , ZBB,

Pak škrtne zbytečné první písmenko.

Pak zjistí, že jsou všechny díly stejné, takže vydá jen díl A.

Vydání Hyperwebsteru

Vydavatel se rozhodne vydat slovník ve 26 dílech:

Díl A: A, AA, AAA, . . . , AB, ABA, . . . , ABB,
Díl B: B, BA, BAA, . . . , BB, BBA, . . . , BBB,
Díl C: C, CA, CAA, . . . , CB, CBA, . . . , CBB,
⋮
Díl Z: Z, ZA, ZAA, . . . , ZB, ZBA, . . . , ZBB,

Pak škrtne zbytečné první písmenko.

Pak zjistí, že jsou všechny díly stejné, takže vydá jen díl A.

A změní jeho název na **Hyperwebster**.

Vztah superslovníku k hrášku a sluníčku

Vztah superslovníku k hrášku a sluníčku

Superslovník Hyperwebster je přímým předchůdcem BT paradoxu o hrášku a sluníčku v následujícím smyslu.

Vztah superslovníku k hrášku a sluníčku

Superslovník Hyperwebster je přímým předchůdcem BT paradoxu o hrášku a sluníčku v následujícím smyslu.

Hyperwebster totiž obsahuje 26 zcela identických kopií sebe sama!

Vztah superslovníku k hrášku a sluníčku

Superslovník Hyperwebster je přímým předchůdcem BT paradoxu o hrášku a sluníčku v následujícím smyslu.

Hyperwebster totiž obsahuje 26 zcela identických kopií sebe sama!

Kdežto BT věta vyžaduje jen (ušmudlané) dvě kopie.

Jak chápat Banachovu-Tarského větu?

Možnost 1: *exemplárně ji zavrhnout jakožto zjevný naprostý nesmysl*.

Jak chápat Banachovu-Tarského větu?

Možnost 1: *exemplárně ji zavrhnout jakožto zjevný naprostý nesmysl*.

Dobře, ale pak musíme *zavrhnout axiom výběru*.

Možnost 1: *exemplárně ji zavrhnout jakožto zjevný naprostý nesmysl*.

Dobře, ale pak musíme *zavrhnout axiom výběru*.

A rozloučit se s rozsáhlými partiemi nádherné matematiky.

Jak chápat Banachovu-Tarského větu?

Možnost 1: *exemplárně ji zavrhnout jakožto zjevný naprostý nesmysl*.

Dobře, ale pak musíme *zavrhnout axiom výběru*.

A rozloučit se s rozsáhlými partiemi nádherné matematiky.

Možnost 2: *přijmout ji bez výhrad a bez další interpretace.*

Jak chápat Banachovu-Tarského větu?

Možnost 1: *exemplárně ji zavrhnout jakožto zjevný naprostý nesmysl*.

Dobře, ale pak musíme *zavrhnout axiom výběru*.

A rozloučit se s rozsáhlými partiemi nádherné matematiky.

Možnost 2: *přijmout ji bez výhrad a bez další interpretace.*

Pak zase ale musíme začít *zdvojovat hmotu*.

Naštěstí je tu ještě jedna možnost

Naštěstí je tu ještě jedna možnost

Možnost 3: *uvědomit si, že jde (pouze) o matematickou větu.*

Naštěstí je tu ještě jedna možnost

Možnost 3: *uvědomit si, že jde (pouze) o matematickou větu.*

V Zermelo-Fränkelově axiomatickém systému tvrzení platí, přijmeme-li axiom výběru.

Naštěstí je tu ještě jedna možnost

Možnost 3: *uvědomit si, že jde (pouze) o matematickou větu.*

V Zermelo-Fränkelově axomatickém systému tvrzení platí, přijmeme-li axiom výběru.

Pracujeme s množinami, které **nemají objem**.

Naštěstí je tu ještě jedna možnost

Možnost 3: *uvědomit si, že jde (pouze) o matematickou větu.*

V Zermelo-Fränkelově axomatickém systému tvrzení platí, přijmeme-li axiom výběru.

Pracujeme s množinami, které **nemají objem**.

Prakticky se to provádět nedá.

BT a reálný svět

Leonard Wapner (2005):

BT a reálný svět

Leonard Wapner (2005):

Má BT věta uplatnění v reálném světě?

Leonard Wapner (2005):

Má BT věta uplatnění v reálném světě? Počkejme a uvidíme!

BT a reálný svět

Leonard Wapner (2005):

Má BT věta uplatnění v reálném světě? Počkejme a uvidíme! Není ještě stará ani sto let!

Leonard Wapner (2005):

Má BT věta uplatnění v reálném světě? Počkejme a uvidíme! Není ještě stará ani sto let! Ostatně, k čemu se hodí kojenec?

Že by přece?

Že by přece?

Bruno Augenstein (1923–2005):

Že by přece?

Bruno Augenstein (1923–2005):

V článku

Bruno Augenstein (1923–2005):

V článku

Hadron Physics and Transfinite Set Theory, International Journal of Theoretical Physics, 23(12)(1984), 1197–1205

Že by přece?

Bruno Augenstein (1923–2005):

V článku

Hadron Physics and Transfinite Set Theory, International Journal of Theoretical Physics, 23(12)(1984), 1197–1205

dává BT větu do souvislosti s tzv. *Yukawovou reakcí*, během níž se proton (3 kvarky) mění na kladně nabitý π meson (2 kvarky) a neutron (3 kvarky).

Že by přece?

Bruno Augenstein (1923–2005):

V článku

Hadron Physics and Transfinite Set Theory, International Journal of Theoretical Physics, 23(12)(1984), 1197–1205

dává BT větu do souvislosti s tzv. *Yukawovou reakcí*, během níž se proton (3 kvarky) mění na kladně nabitý π meson (2 kvarky) a neutron (3 kvarky).

No, dejme tomu.

The last slide

The last slide

PES

Techniky využívané v důkazu BT

Kongruence

Kongruence

Dva objekty se nazývají **kongruentní**, jestliže lze jeden převést na druhý pomocí **isometrie**.

Kongruence

Dva objekty se nazývají **kongruentní**, jestliže lze jeden převést na druhý pomocí **isometrie**.

Isometrie je rigidní pohyb tělesa zachovávající vzdálenosti mezi body.

Kongruence

Dva objekty se nazývají **kongruentní**, jestliže lze jeden převést na druhý pomocí **isometrie**.

Isometrie je rigidní pohyb tělesa zachovávající vzdálenosti mezi body.

Příklady isometrií:

Kongruence

Dva objekty se nazývají **kongruentní**, jestliže lze jeden převést na druhý pomocí **isometrie**.

Isometrie je rigidní pohyb tělesa zachovávající vzdálenosti mezi body.

Příklady isometrií:

- posun,

Kongruence

Dva objekty se nazývají **kongruentní**, jestliže lze jeden převést na druhý pomocí **isometrie**.

Isometrie je rigidní pohyb tělesa zachovávající vzdálenosti mezi body.

Příklady isometrií:

- posun,
- rotace,

Kongruence

Dva objekty se nazývají **kongruentní**, jestliže lze jeden převést na druhý pomocí **isometrie**.

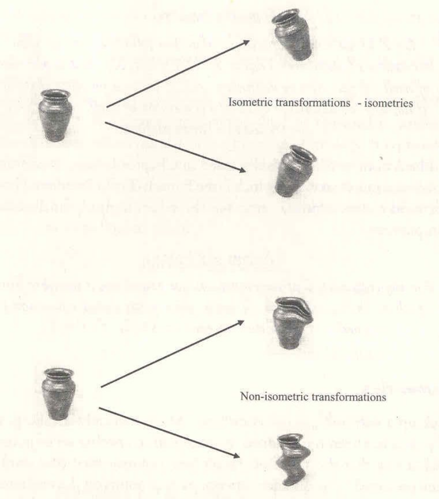
Isometrie je rigidní pohyb tělesa zachovávající vzdálenosti mezi body.

Příklady isometrií:

- posun,
- rotace,
- zrcadlení.

Kongruence – ilustrace

Kongruence – ilustrace



Kongruence po částech

Kongruence po částech

Dva objekty jsou **kongruentní po částech**, lze-li jeden rozložit na sjednocení konečně mnoha částí a z množin jim kongruentních sestavit druhý.

Kongruence po částech – příklady

- $\{1, 2, 3, \dots\}$ a $\{4, 5, 6, \dots\}$ *jsou* kongruentní

Kongruence po částech – příklady

- $\{1, 2, 3, \dots\}$ a $\{4, 5, 6, \dots\}$ *jsou* kongruentní
- $\{1, 2, 3, \dots\}$ a $\{2, 4, 6, \dots\}$ *nejsou* kongruentní

Kongruence po částech – příklady

- $\{1, 2, 3, \dots\}$ a $\{4, 5, 6, \dots\}$ *jsou* kongruentní
- $\{1, 2, 3, \dots\}$ a $\{2, 4, 6, \dots\}$ *nejsou* kongruentní
- $\{1, 2, 3, \dots\}$ a $\{1, 2, 3\} \cup \{5, 6, 7 \dots\}$

nejsou kongruentní, ale jsou kongruentní po částech,

Kongruence po částech – příklady

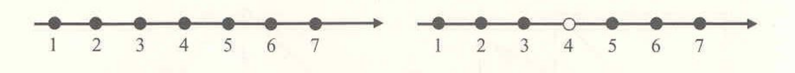
- $\{1, 2, 3, \dots\}$ a $\{4, 5, 6, \dots\}$ *jsou* kongruentní
- $\{1, 2, 3, \dots\}$ a $\{2, 4, 6, \dots\}$ *nejsou* kongruentní
- $\{1, 2, 3, \dots\}$ a $\{1, 2, 3\} \cup \{5, 6, 7 \dots\}$
nejsou kongruentní, ale jsou kongruentní po částech,

protože množina $\{5, 6, 7 \dots\}$ je kongruentní množině $\{4, 5, 6, 7 \dots\}$.

Kongruence po částech – příklady

- $\{1, 2, 3, \dots\}$ a $\{4, 5, 6, \dots\}$ *jsou* kongruentní
- $\{1, 2, 3, \dots\}$ a $\{2, 4, 6, \dots\}$ *nejsou* kongruentní
- $\{1, 2, 3, \dots\}$ a $\{1, 2, 3\} \cup \{5, 6, 7 \dots\}$
nejsou kongruentní, ale jsou kongruentní po částech,

protože množina $\{5, 6, 7 \dots\}$ je kongruentní množině $\{4, 5, 6, 7 \dots\}$.



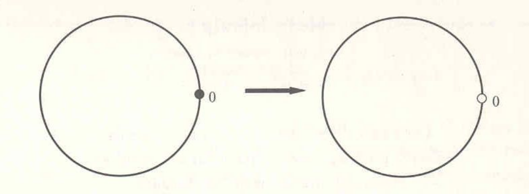
Paradox kongruence (mizející bod)

Paradox kongruence (mizející bod)

Kružnice je po částech kongruentní kružnici bez bodu.

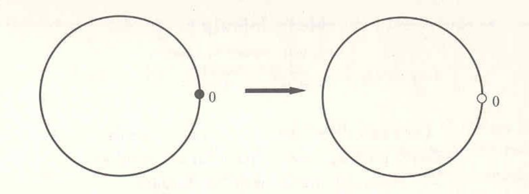
Paradox kongruence (mizející bod)

Kružnice je po částech kongruentní kružnici bez bodu.



Paradox kongruence (mizející bod)

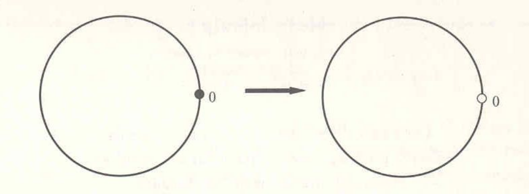
Kružnice je po částech kongruentní kružnici bez bodu.



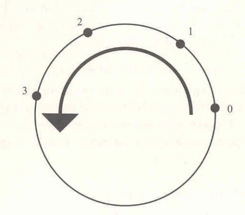
Konstrukce:

Paradox kongruence (mizející bod)

Kružnice je po částech kongruentní kružnici bez bodu.



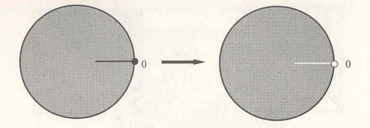
Konstrukce:



Obdoba pro kruh bez poloměru

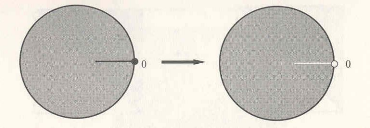
Obdoba pro kruh bez poloměru

Kruh je po částech kongruentní kruhu bez ploměru.



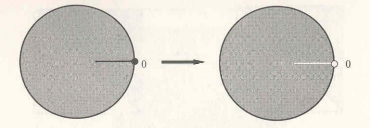
Obdoba pro kruh bez poloměru

Kruh je po částech kongruentní kruhu bez ploměru.

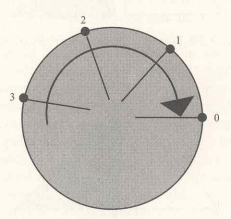


Myšlenka:

Kruh je po částech kongruentní kruhu bez ploměru.



Myšlenka:



Hilbertův hotel

Hilbertův hotel má *nekonečně* mnoho pokojů

Hilbertův hotel

Hilbertův hotel má *nekonečně* mnoho pokojů

a všechny jsou obsazené.

Hilbertův hotel má *nekonečně* mnoho pokojů

a všechny jsou obsazené.

Přijíždí nový turista.

Hilbertův hotel má *nekonečně* mnoho pokojů

a všechny jsou obsazené.

Přijíždí nový turista.

Hilbert posune všechny hosty do pokoje *s číslem o jedničku vyšším*.

Hilbertův hotel

Hilbertův hotel má *nekonečně* mnoho pokojů

a všechny jsou obsazené.

Přijíždí nový turista.

Hilbert posune všechny hosty do pokoje *s číslem o jedničku vyšším*.

Přijíždí autobus s *nekonečně mnoha turisty*.

Hilbertův hotel má *nekonečně* mnoho pokojů

a všechny jsou obsazené.

Přijíždí nový turista.

Hilbert posune všechny hosty do pokoje *s číslem o jedničku vyšším*.

Přijíždí autobus s *nekonečně mnoha turisty*.

Hilbert posune každého hosta do pokoje s *dvojnásobným číslem*.

Hotel Infinity

Hotel Infinity

On a dark desert highway – not much scenery
Except this long hotel stretchin' far as I could see.
Neon sign in front read "No Vacancy,"
But it was late and I was tired, so I went inside to plea.

The clerk said, "No problem. Here's what can be done—
We'll move those in a room to the next higher one.
That will free up the first room and that's where you can stay."
I tried understanding that as I heard him say:

CHORUS: "Welcome to the HOTEL INFINITY—
Where every room is full (every room is full)
Yet there's room for more.
Yeah, plenty of room at the HOTEL INFINITY—
Move 'em down the floor (move 'em down the floor)
To make room for more."

I'd just gotten settled, I'd finally unpacked
When I saw 8 more cars pull into the back.
I had to move to room 9; others moved up 8 rooms as well.
Never more will I confuse a Hilton with a Hilbert Hotel!

My mind got more twisted when I saw a bus without end
With an infinite number of riders coming up to check in.
"Relax," said the nightman. "Here's what we'll do:
Move to the double of your room number: that frees the odd-numbered rooms."

(Repeat Chorus)

Last thing I remember at the end of my stay—
It was time to pay the bill but I had no means to pay.
The man in 19 smiled, "Your bill is on me.
20 pays mine, and so on, so you get yours for free!"

Všechny výrazy, které lze formulovat z 26 písmen anglické abecedy.

Všechny výrazy, které lze formulovat z 26 písmen anglické abecedy.

Začíná: $A, AA, AAA, AAAA, \ldots$

Superslovník Hyperwebster

Všechny výrazy, které lze formulovat z 26 písmen anglické abecedy.

Začíná: $A, AA, AAA, AAAA, \dots$

Po nekonečně mnoha výrazech: $AB, ABA, ABAA, \dots$

Všechny výrazy, které lze formulovat z 26 písmen anglické abecedy.

Začíná: *A, AA, AAA, AAAA, . . .*

Po nekonečně mnoha výrazech: *AB, ABA, ABAA, . . .*

Není to sice **výkladový** slovník, ale definice a poučky v něm budou (bohužel platné i neplatné):

Superslovník Hyperwebster

Všechny výrazy, které lze formulovat z 26 písmen anglické abecedy.

Začíná: *A, AA, AAA, AAAA, ...*

Po nekonečně mnoha výrazech: *AB, ABA, ABAA, ...*

Není to sice **výkladový** slovník, ale definice a poučky v něm budou (bohužel platné i neplatné):

LICHOBEZNIK-JE-CTYRUHELNIK-KTERY-MA-PRAVE-DVE-STRANY-ROVNOBEZNE

Superslovník Hyperwebster

Všechny výrazy, které lze formulovat z 26 písmen anglické abecedy.

Začíná: *A, AA, AAA, AAAA, ...*

Po nekonečně mnoha výrazech: *AB, ABA, ABAA, ...*

Není to sice **výkladový** slovník, ale definice a poučky v něm budou (bohužel platné i neplatné):

LICHOBEZNIK-JE-CTYRUHELNIK-KTERY-MA-PRAVE-DVE-STRANY-ROVNOBEZNE

LICHOBEZNIK-JE-PLECHOVY-HLODAVEC

Vydání Hyperwebsteru

Vydavatel se rozhodne vydat slovník ve 26 dílech:

Vydání Hyperwebsteru

Vydavatel se rozhodne vydat slovník ve 26 dílech:

Díl A: A, AA, AAA, . . . , AB, ABA, . . . , ABB,
Díl B: B, BA, BAA, . . . , BB, BBA, . . . , BBB,
Díl C: C, CA, CAA, . . . , CB, CBA, . . . , CBB,
⋮
Díl Z: Z, ZA, ZAA, . . . , ZB, ZBA, . . . , ZBB,

Vydání Hyperwebsteru

Vydavatel se rozhodne vydat slovník ve 26 dílech:

Díl A: A, AA, AAA, . . . , AB, ABA, . . . , ABB,
Díl B: B, BA, BAA, . . . , BB, BBA, . . . , BBB,
Díl C: C, CA, CAA, . . . , CB, CBA, . . . , CBB,
⋮
Díl Z: Z, ZA, ZAA, . . . , ZB, ZBA, . . . , ZBB,

Pak škrtne zbytečné první písmenko.

Vydání Hyperwebsteru

Vydavatel se rozhodne vydat slovník ve 26 dílech:

Díl A: A, AA, AAA, . . . , AB, ABA, . . . , ABB,
Díl B: B, BA, BAA, . . . , BB, BBA, . . . , BBB,
Díl C: C, CA, CAA, . . . , CB, CBA, . . . , CBB,
⋮
Díl Z: Z, ZA, ZAA, . . . , ZB, ZBA, . . . , ZBB,

Pak škrtne zbytečné první písmenko.

Pak zjistí, že jsou všechny díly stejné, takže vydá jen díl A.

Vydání Hyperwebsteru

Vydavatel se rozhodne vydat slovník ve 26 dílech:

Díl A: A, AA, AAA, . . . , AB, ABA, . . . , ABB,
Díl B: B, BA, BAA, . . . , BB, BBA, . . . , BBB,
Díl C: C, CA, CAA, . . . , CB, CBA, . . . , CBB,
⋮
Díl Z: Z, ZA, ZAA, . . . , ZB, ZBA, . . . , ZBB,

Pak škrtne zbytečné první písmenko.

Pak zjistí, že jsou všechny díly stejné, takže vydá jen díl A.

A změní jeho název na **Hyperwebster**.

Vztah superslovníku k hrášku a sluníčku

Superslovník Hyperwebster je přímým předchůdcem BT paradoxu o hrášku a sluníčku v následujícím smyslu.

Vztah superslovníku k hrášku a sluníčku

Superslovník Hyperwebster je přímým předchůdcem BT paradoxu o hrášku a sluníčku v následujícím smyslu.

Hyperwebster totiž obsahuje 26 zcela identických kopií sebe sama!

Vztah superslovníku k hrášku a sluníčku

Superslovník Hyperwebster je přímým předchůdcem BT paradoxu o hrášku a sluníčku v následujícím smyslu.

Hyperwebster totiž obsahuje 26 zcela identických kopií sebe sama!

Kdežto BT věta vyžaduje jen (ušmudlané) dvě kopie.

Závěr: jak z toho ven?

Jak chápat Banachovu-Tarského větu?

Jak chápat Banachovu-Tarského větu?

Možnost 1: *exemplárně ji zavrhnout jakožto zjevný naprostý nesmysl*.

Možnost 1: *exemplárně ji zavrhnout jakožto zjevný naprostý nesmysl*.

Dobře, ale pak musíme *zavrhnout axiom výběru*.

Možnost 1: *exemplárně ji zavrhnout jakožto zjevný naprostý nesmysl*.

Dobře, ale pak musíme *zavrhnout axiom výběru*.

A rozloučit se s rozsáhlými partiemi nádherné matematiky.

Jak chápat Banachovu-Tarského větu?

Možnost 1: *exemplárně ji zavrhnout jakožto zjevný naprostý nesmysl*.

Dobře, ale pak musíme *zavrhnout axiom výběru*.

A rozloučit se s rozsáhlými partiemi nádherné matematiky.

Možnost 2: *přijmout ji bez výhrad a bez další interpretace.*

Jak chápat Banachovu-Tarského větu?

Možnost 1: *exemplárně ji zavrhnout jakožto zjevný naprostý nesmysl*.

Dobře, ale pak musíme *zavrhnout axiom výběru*.

A rozloučit se s rozsáhlými partiemi nádherné matematiky.

Možnost 2: *přijmout ji bez výhrad a bez další interpretace.*

Pak zase ale musíme začít *zdvojovat hmotu*.

Naštěstí je tu ještě jedna možnost

Naštěstí je tu ještě jedna možnost

Možnost 3: *uvědomit si, že jde (pouze) o matematickou větu.*

Naštěstí je tu ještě jedna možnost

Možnost 3: *uvědomit si, že jde (pouze) o matematickou větu.*

V Zermelo-Fränkelově axomatickém systému tvrzení platí, přijmeme-li axiom výběru.

Naštěstí je tu ještě jedna možnost

Možnost 3: *uvědomit si, že jde (pouze) o matematickou větu.*

V Zermelo-Fränkelově axomatickém systému tvrzení platí, přijmeme-li axiom výběru.

Pracujeme s množinami, které **nemají objem**.

Naštěstí je tu ještě jedna možnost

Možnost 3: *uvědomit si, že jde (pouze) o matematickou větu.*

V Zermelo-Fränkelově axomatickém systému tvrzení platí, přijmeme-li axiom výběru.

Pracujeme s množinami, které **nemají objem**.

Prakticky se to provádět nedá.

BT a reálný svět

BT a reálný svět

Leonard Wapner (2005):

Leonard Wapner (2005):

Má BT věta uplatnění v reálném světě?

Leonard Wapner (2005):

Má BT věta uplatnění v reálném světě? Počkejme a uvidíme!

BT a reálný svět

Leonard Wapner (2005):

Má BT věta uplatnění v reálném světě? Počkejme a uvidíme! Není ještě stará ani sto let!

BT a reálný svět

Leonard Wapner (2005):

Má BT věta uplatnění v reálném světě? Počkejme a uvidíme! Není ještě stará ani sto let! Ostatně, k čemu se hodí kojenec?

Že by přece?

Že by přece?

Bruno Augenstein (1923–2005):

Bruno Augenstein (1923–2005):

V článku

Že by přece?

Bruno Augenstein (1923–2005):

V článku

Hadron Physics and Transfinite Set Theory, International Journal of Theoretical Physics, 23(12)(1984), 1197–1205

Že by přece?

Bruno Augenstein (1923–2005):

V článku

Hadron Physics and Transfinite Set Theory, International Journal of Theoretical Physics, 23(12)(1984), 1197–1205

dává BT větu do souvislosti s tzv. *Yukawovou reakcí*, během níž se proton (3 kvarky) mění na kladně nabitý π meson (2 kvarky) a neutron (3 kvarky).

Že by přece?

Bruno Augenstein (1923–2005):

V článku

Hadron Physics and Transfinite Set Theory, International Journal of Theoretical Physics, 23(12)(1984), 1197–1205

dává BT větu do souvislosti s tzv. *Yukawovou reakcí*, během níž se proton (3 kvarky) mění na kladně nabitý π meson (2 kvarky) a neutron (3 kvarky).

No, dejme tomu.

The last slide

The last slide

Důkaz Banachovy–Tarského věty

Důkaz Banachovy–Tarského věty

Osnova důkazu:

Osnova důkazu:

- **1. krok:** *grupa rotací na sféře*

Důkaz Banachovy–Tarského věty

Osnova důkazu:

- **1. krok:** *grupa rotací na sféře*
- **2. krok:** *rozklad sféry na množiny, Hausdorffův paradox*

Osnova důkazu:

- **1. krok:** *grupa rotací na sféře*
- **2. krok:** *rozklad sféry na množiny, Hausdorffův paradox*
- **3. krok:** *povinné ztloustnutí (tzv. antianorexie)*

Rotace

Rotace

rotací kolem osy v 3D nazýváme *rigidní pohyb všech bodů tělesa po kruhové dráze v rovině kolmé na společnou osu*

rotací kolem osy v 3D nazýváme *rigidní pohyb všech bodů tělesa po kruhové dráze v rovině kolmé na společnou osu*

veškeré **distorze** jsou zakázány

Dvě základní rotace

Dvě základní rotace

τ … *rotace o* 120° *kolem osy* z

Dvě základní rotace

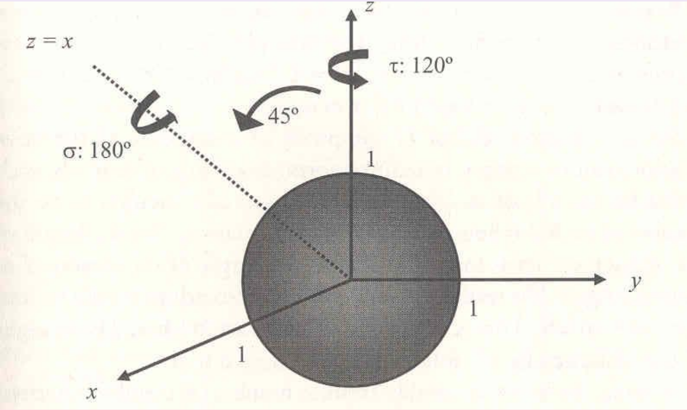
τ ... *rotace o* 120° *kolem osy* z

σ ... *rotace o* 180° *kolem osy* $z = x$

Dvě základní rotace

τ ... *rotace o* 120° *kolem osy* z

σ ... *rotace o* 180° *kolem osy* $z = x$



Skládání rotací

Skládání rotací

Uvažujeme všechna možná **složení** základních rotací.

Uvažujeme všechna možná **složení** základních rotací.

Příklady:

Skládání rotací

Uvažujeme všechna možná **složení** základních rotací.

Příklady:

- $\tau\tau = \tau^2$ ... *rotace o* 240° *kolem osy* z,

Uvažujeme všechna možná **složení** základních rotací.

Příklady:

- $\tau\tau = \tau^2$ ... *rotace o* 240° *kolem osy* z,
- $\sigma\sigma = \sigma^2$ ... *rotace o* 360° *kolem osy* $z = x$ (tj. **nestane se nic**).

Skládání rotací

Uvažujeme všechna možná **složení** základních rotací.

Příklady:

- $\tau\tau = \tau^2$ ... *rotace o* 240° *kolem osy* z,
- $\sigma\sigma = \sigma^2$ ... *rotace o* 360° *kolem osy* $z = x$ (tj. **nestane se nic**).
- Celkem máme tři základní rotace: τ, τ^2, σ.

Vztahy mezi rotacemi

Vztahy mezi rotacemi

Identickou rotací I nazýváme rotaci, při níž se poloha bodů nemění.

Vztahy mezi rotacemi

Identickou rotací I nazýváme rotaci, při níž se poloha bodů nemění.

Vždy uvádíme *nejjednodušší* možný zápis rotace:

Identickou rotací I nazýváme rotaci, při níž se poloha bodů nemění.

Vždy uvádíme *nejjednodušší* možný zápis rotace:

- $I\sigma = \sigma I = \sigma, \quad I\tau = \tau I = \tau,$

Identickou rotací I nazýváme rotaci, při níž se poloha bodů nemění.

Vždy uvádíme *nejjednodušší* možný zápis rotace:

- $I\sigma = \sigma I = \sigma, \quad I\tau = \tau I = \tau,$
- $\sigma^2 = \tau^3 = I,$

Vztahy mezi rotacemi

Identickou rotací I nazýváme rotaci, při níž se poloha bodů nemění.

Vždy uvádíme *nejjednodušší* možný zápis rotace:

- $I\sigma = \sigma I = \sigma, \quad I\tau = \tau I = \tau,$
- $\sigma^2 = \tau^3 = I,$
- $\tau^7 = \tau^3\tau^3\tau = II\tau = \tau,$

Vztahy mezi rotacemi

Identickou rotací I nazýváme rotaci, při níž se poloha bodů nemění.

Vždy uvádíme *nejjednodušší* možný zápis rotace:

- $I\sigma = \sigma I = \sigma, \quad I\tau = \tau I = \tau,$
- $\sigma^2 = \tau^3 = I,$
- $\tau^7 = \tau^3\tau^3\tau = II\tau = \tau,$
- $\tau^4\sigma^3\tau^2 = \tau^3\tau\sigma^2\sigma\tau^2 = I\tau I\sigma\tau = \tau\sigma\tau^2.$

Vztahy mezi rotacemi

Identickou rotací I nazýváme rotaci, při níž se poloha bodů nemění.

Vždy uvádíme *nejjednodušší* možný zápis rotace:

- $I\sigma = \sigma I = \sigma, \quad I\tau = \tau I = \tau,$
- $\sigma^2 = \tau^3 = I,$
- $\tau^7 = \tau^3\tau^3\tau = II\tau = \tau,$
- $\tau^4\sigma^3\tau^2 = \tau^3\tau\sigma^2\sigma\tau^2 = I\tau I\sigma\tau = \tau\sigma\tau^2.$

Pozorování: *Každá rotace je složením konečné posloupnosti základních rotací τ, τ^2, σ.*

Délka rotace

Délka rotace

Délkou rotace nazýváme počet symbolů v jejím zápisu.

Délka rotace

Délkou rotace nazýváme počet symbolů v jejím zápisu.

Příklady:

Délka rotace

Délkou rotace nazýváme počet symbolů v jejím zápisu.

Příklady:

- I má délku 0,

Délka rotace

Délkou rotace nazýváme počet symbolů v jejím zápisu.

Příklady:

- I má délku 0,
- σ, τ, τ^2 mají délku 1,

Délka rotace

Délkou rotace nazýváme počet symbolů v jejím zápisu.

Příklady:

- I má délku 0,
- σ, τ, τ^2 mají délku 1,
- $\sigma\tau^2\sigma\tau$ má délku 4.

Délka rotace

Délkou rotace nazýváme počet symbolů v jejím zápisu.

Příklady:

- I má délku 0,
- σ, τ, τ^2 mají délku 1,
- $\sigma\tau^2\sigma\tau$ má délku 4.

Poznámka:

Délka rotace

Délkou rotace nazýváme počet symbolů v jejím zápisu.

Příklady:

- I má délku 0,
- σ, τ, τ^2 mají délku 1,
- $\sigma\tau^2\sigma\tau$ má délku 4.

Poznámka: zápis rotace čteme zprava doleva.

Grupa rotací

Grupa rotací

Množinu všech rotací na sféře označíme G.

Grupa rotací

Množinu všech rotací na sféře označíme G.

Potom platí:

Grupa rotací

Množinu všech rotací na sféře označíme G.

Potom platí:

- G tvoří *grupu*,

Grupa rotací

Množinu všech rotací na sféře označíme G.

Potom platí:

- G tvoří *grupu*,
- všech rotací je *spočetně nekonečně* mnoho,

Množinu všech rotací na sféře označíme G.

Potom platí:

• G tvoří *grupu*,

• všech rotací je *spočetně nekonečně* mnoho,

• každá rotace z G má *jednoznačný zápis* (tj. různé zápisy odpovídají fyzicky různým rotacím).

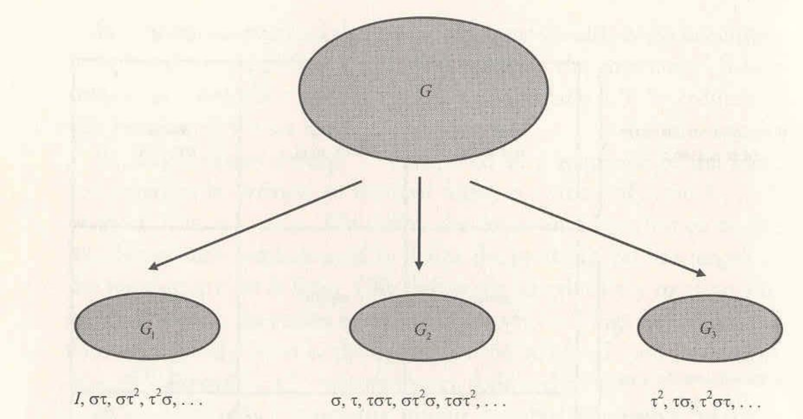
Další krok: rozklad G na tři koše

Další krok: rozklad G na tři koše

Platí $G = G_1 \cup G_2 \cup G_3$ na základě *výběrového řízení*.

Další krok: rozklad G na tři koše

Platí $G = G_1 \cup G_2 \cup G_3$ na základě *výběrového řízení*.



Pravidla rošťárny

Pravidla rošťárny

Určíme pravidla rozkladu.

Pravidla rošťárny

Určíme pravidla rozkladu.

Pracujeme *induktivně* podle délky rotace.

Určíme pravidla rozkladu.

Pracujeme *induktivně* podle délky rotace.

- *1. krok:*

Pravidla rošťárny

Určíme pravidla rozkladu.

Pracujeme *induktivně* podle délky rotace.

- *1. krok:* $I \mapsto G_1$,

Pravidla rošťárny

Určíme pravidla rozkladu.

Pracujeme *induktivně* podle délky rotace.

- *1. krok:* $I \mapsto G_1$,
- *2. krok:*

Pravidla rošťárny

Určíme pravidla rozkladu.

Pracujeme *induktivně* podle délky rotace.

- *1. krok:* $I \mapsto G_1$,
- *2. krok:* $\tau, \sigma \mapsto G_2$, $\tau^2 \mapsto G_3$,

Pravidla rošťárny

Určíme pravidla rozkladu.

Pracujeme *induktivně* podle délky rotace.

- *1. krok:* $I \mapsto G_1$,
- *2. krok:* $\tau, \sigma \mapsto G_2$, $\tau^2 \mapsto G_3$,
- *3. krok:*

Pravidla rošťárny

Určíme pravidla rozkladu.

Pracujeme *induktivně* podle délky rotace.

- *1. krok:* $I \mapsto G_1$,
- *2. krok:* $\tau, \sigma \mapsto G_2$, $\tau^2 \mapsto G_3$,
- *3. krok:* $\sigma\tau, \tau^2\sigma, \sigma\tau^2 \mapsto G_1$, $\tau\sigma \mapsto G_3$,

Pravidla rošťárny

Určíme pravidla rozkladu.

Pracujeme *induktivně* podle délky rotace.

- *1. krok:* $I \mapsto G_1$,
- *2. krok:* $\tau, \sigma \mapsto G_2$, $\tau^2 \mapsto G_3$,
- *3. krok:* $\sigma\tau, \tau^2\sigma, \sigma\tau^2 \mapsto G_1$, $\tau\sigma \mapsto G_3$,
- *atd.*

Algoritmus rozkladu

	If $\alpha \in G_1$	If $\alpha \in G_2$	If $\alpha \in G_3$
If the leftmost character of α is τ or τ^2	assign $\sigma\alpha$ to G_2	assign $\sigma\alpha$ to G_1	assign $\sigma\alpha$ to G_1
If the leftmost character of α is σ	assign $\tau\alpha$ to G_2	assign $\tau\alpha$ to G_3	assign $\tau\alpha$ to G_1
	assign $\tau^2\alpha$ to G_3	assign $\tau^2\alpha$ to G_1	assign $\tau^2\alpha$ to G_2

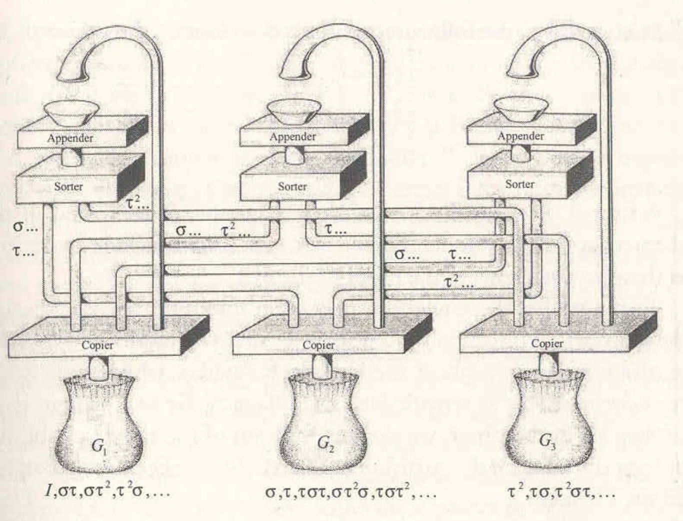
Ilustrace rozkladu

Ilustrace rozkladu

Stroj Roberta Frenche:

Ilustrace rozkladu

Stroj Roberta Frenche:



Vztahy mezi třídami

Pozorování: provedeme-li τ na rotaci z G_1, dostaneme rotaci z G_2.

Vztahy mezi třídami

Pozorování: provedeme-li τ na rotaci z G_1, dostaneme rotaci z G_2.

Platí to ale i naopak: každá rotace v G_2 je tohoto tvaru.

Pozorování: provedeme-li τ na rotaci z G_1, dostaneme rotaci z G_2.

Platí to ale i naopak: každá rotace v G_2 je tohoto tvaru.

Matematický zápis:

Vztahy mezi třídami

Pozorování: provedeme-li τ na rotaci z G_1, dostaneme rotaci z G_2.

Platí to ale i naopak: každá rotace v G_2 je tohoto tvaru.

Matematický zápis:

$$\tau G_1 = G_2.$$

Vztahy mezi třídami – souhrn

Vztahy mezi třídami – souhrn

Obdobně platí:

Obdobně platí:

- $\tau G_1 = G_2$,

Obdobně platí:

- $\tau G_1 = G_2$,
- $\tau^2 G_1 = G_3$,

Vztahy mezi třídami – souhrn

Obdobně platí:

- $\tau G_1 = G_2$,
- $\tau^2 G_1 = G_3$,
- $\sigma G_1 = G_2 \cup G_3$.

Druhý krok – rozklad sféry

Druhý krok – rozklad sféry

Každá rotace má dva **póly**.

Druhý krok – rozklad sféry

Každá rotace má dva **póly**.

Pól je bod, který se při dané rotaci nemění.

Druhý krok – rozklad sféry

Každá rotace má dva **póly**.

Pól je bod, který se při dané rotaci nemění.

Rotací je spočetně mnoho, tedy také pólů je spočetně mnoho.

Druhý krok – rozklad sféry

Každá rotace má dva **póly**.

Pól je bod, který se při dané rotaci nemění.

Rotací je spočetně mnoho, tedy také pólů je spočetně mnoho.

Označíme P množinu všech pólů všech rotací.

Druhý krok – rozklad sféry

Každá rotace má dva **póly**.

Pól je bod, který se při dané rotaci nemění.

Rotací je spočetně mnoho, tedy také pólů je spočetně mnoho.

Označíme P množinu všech pólů všech rotací.

Pak P je spočetná.

Druhý krok – rozklad sféry

Každá rotace má dva **póly**.

Pól je bod, který se při dané rotaci nemění.

Rotací je spočetně mnoho, tedy také pólů je spočetně mnoho.

Označíme P množinu všech pólů všech rotací.

Pak P je spočetná.

Množinu P ponechme stranou a věnujme se $S \setminus P$.

Rozklad množiny $S \setminus P$ na orbity

Rozklad množiny $S \setminus P$ na orbity

Každý bod množiny $S \setminus P$ lze propojit rotacemi se spočetně mnoha body $S \setminus P$.

Rozklad množiny $S \setminus P$ na orbity

Každý bod množiny $S \setminus P$ lze propojit rotacemi se spočetně mnoha body $S \setminus P$.

Množinu bodů, které lze vzájemně propojit rotací, nazýváme *orbitou*.

Rozklad množiny $S \setminus P$ na orbity

Každý bod množiny $S \setminus P$ lze propojit rotacemi se spočetně mnoha body $S \setminus P$.

Množinu bodů, které lze vzájemně propojit rotací, nazýváme *orbitou*.

Každý bod z $S \setminus P$ patří právě do jedné orbity.

Rozklad množiny $S \setminus P$ na orbity

Každý bod množiny $S \setminus P$ lze propojit rotacemi se spočetně mnoha body $S \setminus P$.

Množinu bodů, které lze vzájemně propojit rotací, nazýváme *orbitou*.

Každý bod z $S \setminus P$ patří právě do jedné orbity.

Každá orbita je *spočetná*.

Rozklad množiny $S \setminus P$ na orbity

Každý bod množiny $S \setminus P$ lze propojit rotacemi se spočetně mnoha body $S \setminus P$.

Množinu bodů, které lze vzájemně propojit rotací, nazýváme *orbitou*.

Každý bod z $S \setminus P$ patří právě do jedné orbity.

Každá orbita je *spočetná*.

A pochopitelně máme *nespočetně mnoho* orbit.

Nadešla chvíle pro axiom výběru!

Nadešla chvíle pro axiom výběru!

Stvoříme *výběrovou množinu* C, která obsahuje *právě jeden bod z každé orbity*.

Stvoříme *výběrovou množinu* C, která obsahuje *právě jeden bod z každé orbity*.

Pak

Nadešla chvíle pro axiom výběru!

Stvoříme *výběrovou množinu* C, která obsahuje *právě jeden bod z každé orbity*.

Pak

- C je nespočetná,

Nadešla chvíle pro axiom výběru!

Stvoříme *výběrovou množinu* C, která obsahuje *právě jeden bod z každé orbity*.

Pak

- C je nespočetná,
- $C \cap P = \emptyset$,

Nadešla chvíle pro axiom výběru!

Stvoříme *výběrovou množinu* C, která obsahuje *právě jeden bod z každé orbity*.

Pak

- C je nespočetná,
- $C \cap P = \emptyset$,
- žádné dva body C nelze spojit rotací,

Nadešla chvíle pro axiom výběru!

Stvoříme *výběrovou množinu* C, která obsahuje *právě jeden bod z každé orbity*.

Pak

- C je nespočetná,
- $C \cap P = \emptyset$,
- žádné dva body C nelze spojit rotací,
- každý bod $S \setminus P$ lze spojit rotací s nějakým bodem C.

Rozklad sféry

Rozklad sféry

Aplikujeme-li každou rotaci z G_1 na body C, dostaneme část sféry, kterou označíme $G_1 C$.

Rozklad sféry

Aplikujeme-li každou rotaci z G_1 na body C, dostaneme část sféry, kterou označíme $G_1 C$.

Podobně vyrobíme množiny $G_2 C$ a $G_3 C$.

Rozklad sféry

Aplikujeme-li každou rotaci z G_1 na body C, dostaneme část sféry, kterou označíme $G_1 C$.

Podobně vyrobíme množiny $G_2 C$ a $G_3 C$.

Pak platí

$$S \setminus P = G_1 C \cup G_2 C \cup G_3 C.$$

Rozklad sféry

Aplikujeme-li každou rotaci z G_1 na body C, dostaneme část sféry, kterou označíme $G_1 C$.

Podobně vyrobíme množiny $G_2 C$ a $G_3 C$.

Pak platí

$$S \setminus P = G_1 C \cup G_2 C \cup G_3 C.$$

Označme

$$K_1 = G_1 C, \quad K_2 = G_2 C, \quad K_3 = G_3 C.$$

Rozklad sféry

Aplikujeme-li každou rotaci z G_1 na body C, dostaneme část sféry, kterou označíme $G_1 C$.

Podobně vyrobíme množiny $G_2 C$ a $G_3 C$.

Pak platí

$$S \setminus P = G_1 C \cup G_2 C \cup G_3 C.$$

Označme

$$K_1 = G_1 C, \quad K_2 = G_2 C, \quad K_3 = G_3 C.$$

Tedy celkem

$$S = P \cup K_1 \cup K_2 \cup K_3.$$

Vztahy mezi K_1, K_2, K_3

Vztahy mezi K_1, K_2, K_3

Pozorování: Rotací τ lze propojit každý bod K_1 s nějakým bodem z K_2, přičemž takto vyčerpáme všechny body z K_2.

Vztahy mezi K_1, K_2, K_3

Pozorování: Rotací τ lze propojit každý bod K_1 s nějakým bodem z K_2, přičemž takto vyčerpáme všechny body z K_2.

Matematický zápis: $\tau K_1 = K_2$, obdodně $\tau^2 K_1 = K_3$ a $\sigma K_1 = K_2 \cup K_3$.

Vztahy mezi K_1, K_2, K_3

Pozorování: Rotací τ lze propojit každý bod K_1 s nějakým bodem z K_2, přičemž takto vyčerpáme všechny body z K_2.

Matematický zápis: $\tau K_1 = K_2$, obdodně $\tau^2 K_1 = K_3$ a $\sigma K_1 = K_2 \cup K_3$.

To ale znamená, že *K_1 a K_2 jsou kongruentní* tj. $K_1 \approx K_2$, a podobně $K_1 \approx K_3$ a $K_1 \approx K_2 \cup K_3$.

Pozorování: Rotací τ lze propojit každý bod K_1 s nějakým bodem z K_2, přičemž takto vyčerpáme všechny body z K_2.

Matematický zápis: $\tau K_1 = K_2$, obdodně $\tau^2 K_1 = K_3$ a $\sigma K_1 = K_2 \cup K_3$.

To ale znamená, že *K_1 a K_2 jsou kongruentní* tj. $K_1 \approx K_2$, a podobně $K_1 \approx K_3$ a $K_1 \approx K_2 \cup K_3$.

Celkem:

$$K_1 \approx K_2 \approx K_3 \approx K_2 \cup K_3.$$

Tento vztah se nazývá *Hausdorffův paradox třetiny a poloviny*.

Hausdorffův paradox

Hausdorffův paradox

Platí

$$S \setminus P = K_1 \cup K_2 \cup K_3$$

Platí

$$S \setminus P = K_1 \cup K_2 \cup K_3$$

Protože $K_1 \approx K_2 \approx K_3$, tvoří každá z nich *skorotřetinu* sféry.

Hausdorffův paradox

Platí

$$S \setminus P = K_1 \cup K_2 \cup K_3$$

Protože $K_1 \approx K_2 \approx K_3$, tvoří každá z nich *skorotřetinu* sféry.

Ale protože $K_1 \approx K_2 \cup K_3$, tvoří zároveň *skoropolovinu* sféry.

Odbočka (Hausdorffův paradox v praxi)

Odbočka (Hausdorffův paradox v praxi)

Z té třetiny, co přišla k volbám, mě volila polovina, takže mám podporu většiny obyvatelstva.

(nejmenovaný vysoký český politik)

Rozklad na šest dílů

Rozklad na šest dílů

Množinu $K_2 \cup K_3$ použijeme jako *rozkladovou šablonu*.

Rozklad na šest dílů

Množinu $K_2 \cup K_3$ použijeme jako *rozkladovou šablonu*.

S její pomocí rozložíme každou z K_1, K_2 a K_3 na dvě části.

Rozklad na šest dílů

Množinu $K_2 \cup K_3$ použijeme jako *rozkladovou šablonu*.

S její pomocí rozložíme každou z K_1, K_2 a K_3 na dvě části.

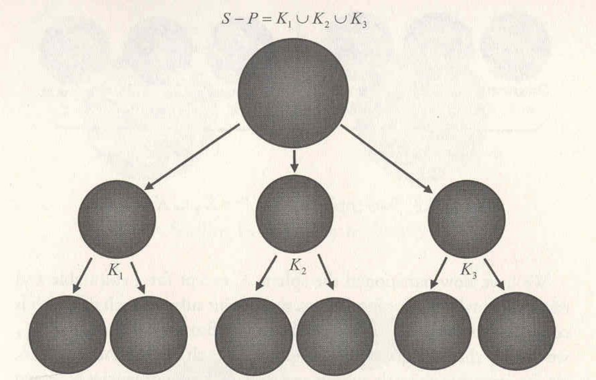
Jedna bude kongruentní K_2 a druhá K_3.

Rozklad na šest dílů

Množinu $K_2 \cup K_3$ použijeme jako *rozkladovou šablonu*.

S její pomocí rozložíme každou z K_1, K_2 a K_3 na dvě části.

Jedna bude kongruentní K_2 a druhá K_3.



Výroba dvou identických kopií sféry

Výroba dvou identických kopií sféry

Tím jsme rozložili množinu $S \setminus P$ na šest částí, z nichž každá je kongruentní buď K_2 nebo K_3.

Výroba dvou identických kopií sféry

Tím jsme rozložili množinu $S \setminus P$ na šest částí, z nichž každá je kongruentní buď K_2 nebo K_3.

Vezmeme vždy tři a tři a deklarujeme kongruenci množinám K_1, K_2 a K_3.

Výroba dvou identických kopií sféry

Tím jsme rozložili množinu $S \setminus P$ na šest částí, z nichž každá je kongruentní buď K_2 nebo K_3.

Vezmeme vždy tři a tři a deklarujeme kongruenci množinám K_1, K_2 a K_3.

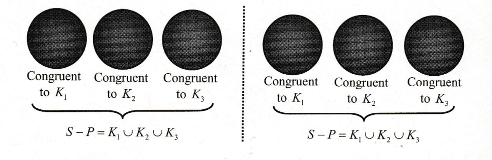
Tím získáme dvě identické kongruentní kopie $S \setminus P$, jejichž sjednocením je ale opět $S \setminus P$.

Výroba dvou identických kopií sféry

Tím jsme rozložili množinu $S \setminus P$ na šest částí, z nichž každá je kongruentní buď K_2 nebo K_3.

Vezmeme vždy tři a tři a deklarujeme kongruenci množinám K_1, K_2 a K_3.

Tím získáme dvě identické kongruentní kopie $S \setminus P$, jejichž sjednocením je ale opět $S \setminus P$.



Co zbývá?

Co zbývá?

Zbývá zbavit se pólů.

Co zbývá?

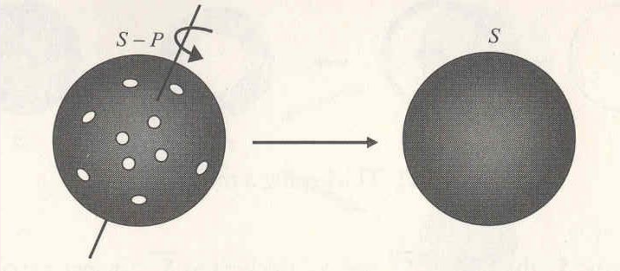
Zbývá zbavit se pólů.

Na to ale stačí posun z nekonečna.

Co zbývá?

Zbývá zbavit se pólů.

Na to ale stačí posun z nekonečna.



Třetí krok – mentální antianorexie

Třetí krok – mentální antianorexie

Odbydeme to obrázkem!

Třetí krok – mentální antianorexie

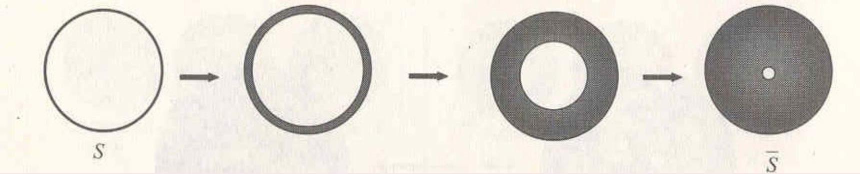
Odbydeme to obrázkem!

(Těžké matiky už bylo dost.)

Třetí krok – mentální antianorexie

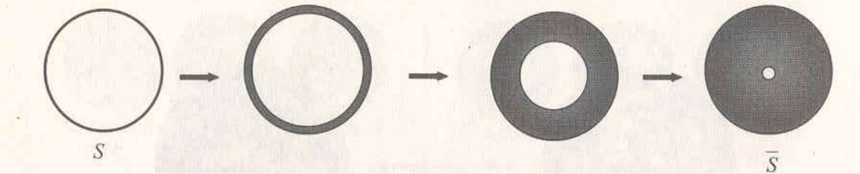
Odbydeme to obrázkem!

(Těžké matiky už bylo dost.)



Odbydeme to obrázkem!

(Těžké matiky už bylo dost.)



Díru v počátku zaplníme posunem z nekonečna.

Je čas na oslavy!

Je čas na oslavy!

No vidíte, dokázali jsme to!

Je čas na oslavy!

No vidíte, dokázali jsme to!

Dokázali jsme duplikační verzi Banachovy–Tarského věty.

Je čas na oslavy!

No vidíte, dokázali jsme to!

Dokázali jsme duplikační verzi Banachovy–Tarského věty.

Dokázali jsme něco, co odporuje zdravému rozumu!

Je čas na oslavy!

No vidíte, dokázali jsme to!

Dokázali jsme duplikační verzi Banachovy–Tarského věty.

Dokázali jsme něco, co odporuje zdravému rozumu!

K tomu musíme zaujmout nějaké stanovisko.