Rovnice přímky v rovině

$x = a_1 + s_1 t$
$y = a_2 + s_2 t$ $\quad t \in R$

$[a_1, a_2]$ je libovolný bod přímky

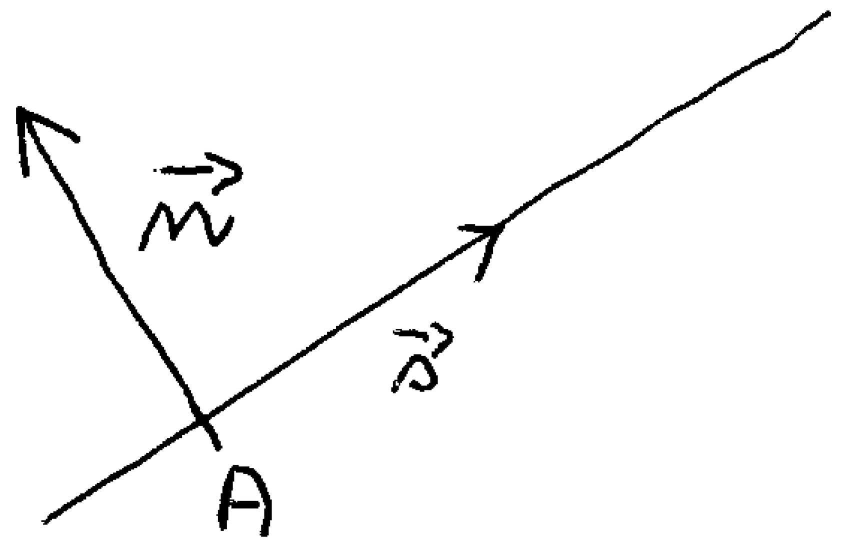
(s_1, s_2) ... směrový vektor

$ax + by + c = 0$

(a, b) ... normálový vektor

$y = kx + q$

směrnicový tvar



Př. Napište rovnice přímky AB, kde $A[1,2]$, $B[3,4]$

$\vec{s} = \overrightarrow{AB} = B - A = (3-1, 4-2) = (2, 2)$

$$\boxed{\begin{aligned} x &= 1 + 2t \\ y &= 2 + 2t \end{aligned} \quad t \in R}$$

parametrické rovnice

$\vec{s} = (2, 2) \longrightarrow \vec{n} = (2, -2)$

$2x - 2y + c = 0$

$2 \cdot 1 - 2 \cdot 2 + c = 0 \longrightarrow c = 2$

$\boxed{2x - 2y + 2 = 0} \rightarrow x - y + 1 = 0$

obecná rovnice

$\boxed{y = x + 1}$

směrnicový tvar

Př. Napište rovnici úsečky KL, kde $K[1,1]$, $L = [3,5]$

$\vec{s} = \overrightarrow{KL} = L - K = (2, 4)$

$\vec{n} = (4, -2)$

$x = 1 + 2t$
$y = 1 + 4t$ $\quad t \in \langle 0, 1 \rangle$!

$4x - 2y + c = 0$

$4 \cdot 1 - 2 \cdot 1 - 2 = 0$

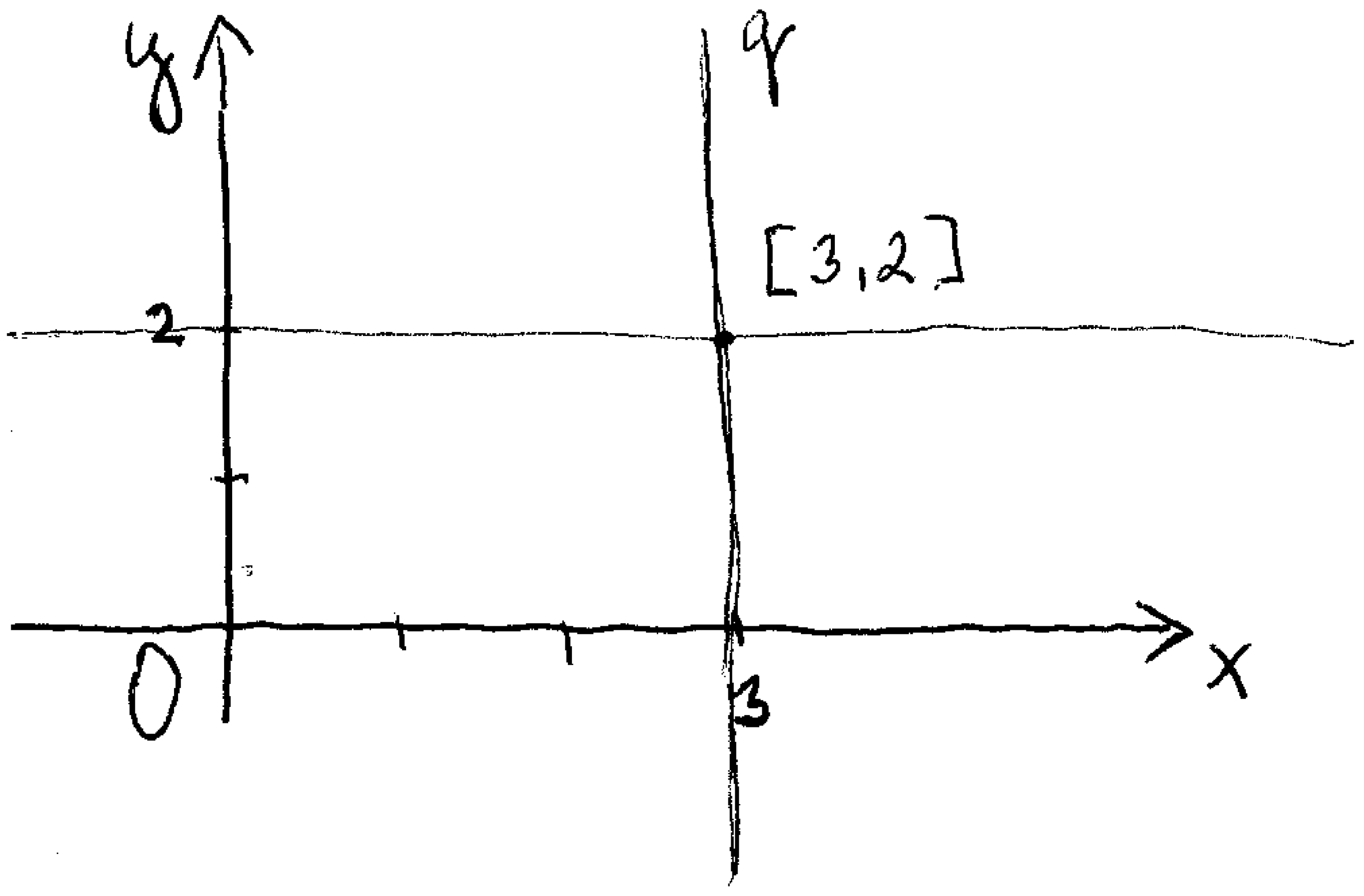
$4x - 2y - 2 = 0$

$2x - y - 1 = 0 \longrightarrow y = 2x - 1$

$x \in \langle 1, 3 \rangle$

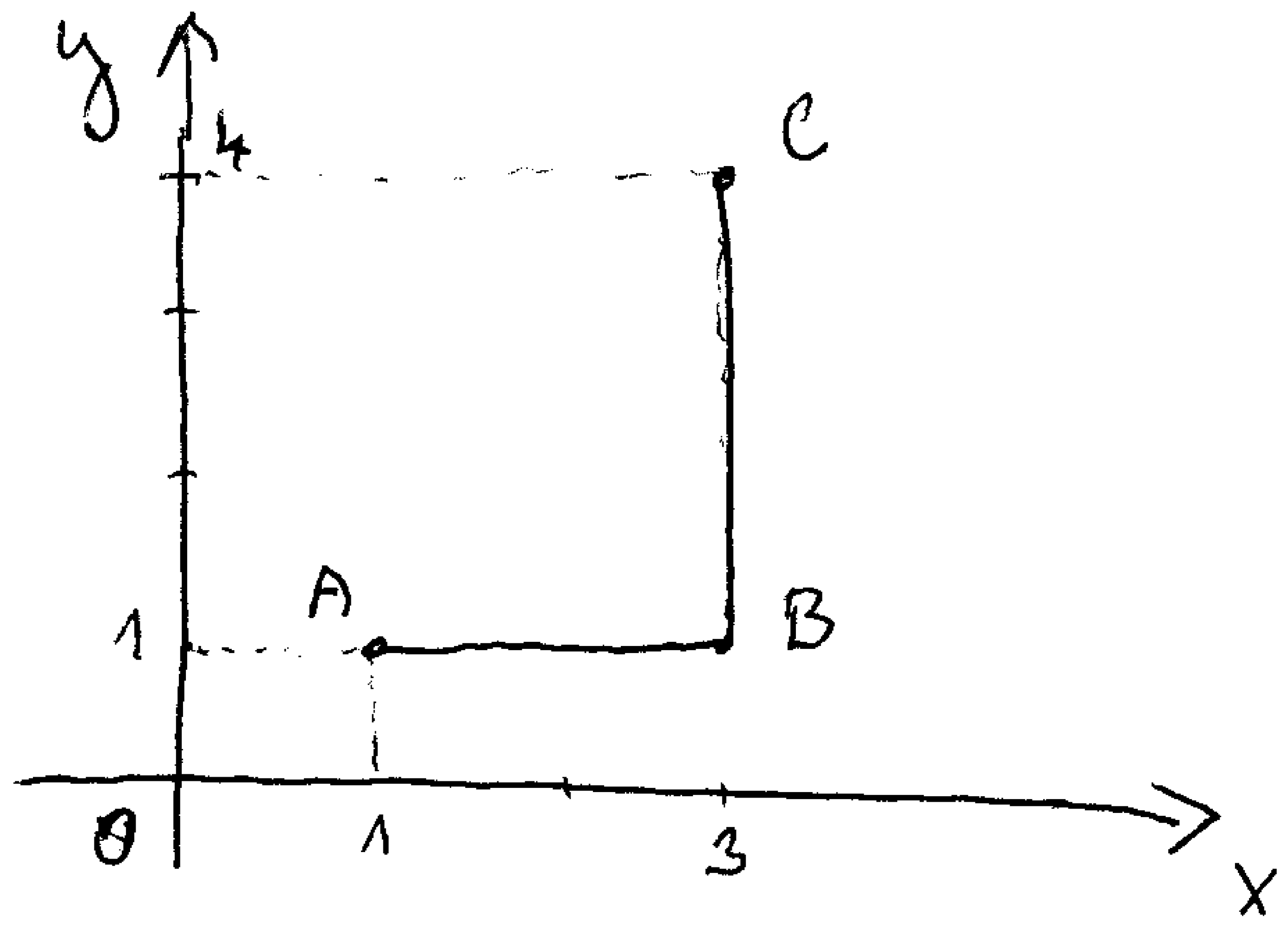
Speciální případy

- přímka (úsečka) rovnoběžná s osou x
- přímka (úsečka) rovnoběžná s osou y



$p: y = 2$

$q: x = 3$



A [1,1]

B [3,1]

C [3,4]

Rovnice úsečky AB

$x = t$

$y = 1$ $\quad t \in \langle 1, 3 \rangle$

Rovnice úsečky BC

$x = 3$

$y = t$ $\quad t \in \langle 1, 4 \rangle$

Středová rovnice kružnice

$S[m,n]$ … střed kružnice , r … poloměr kružnice

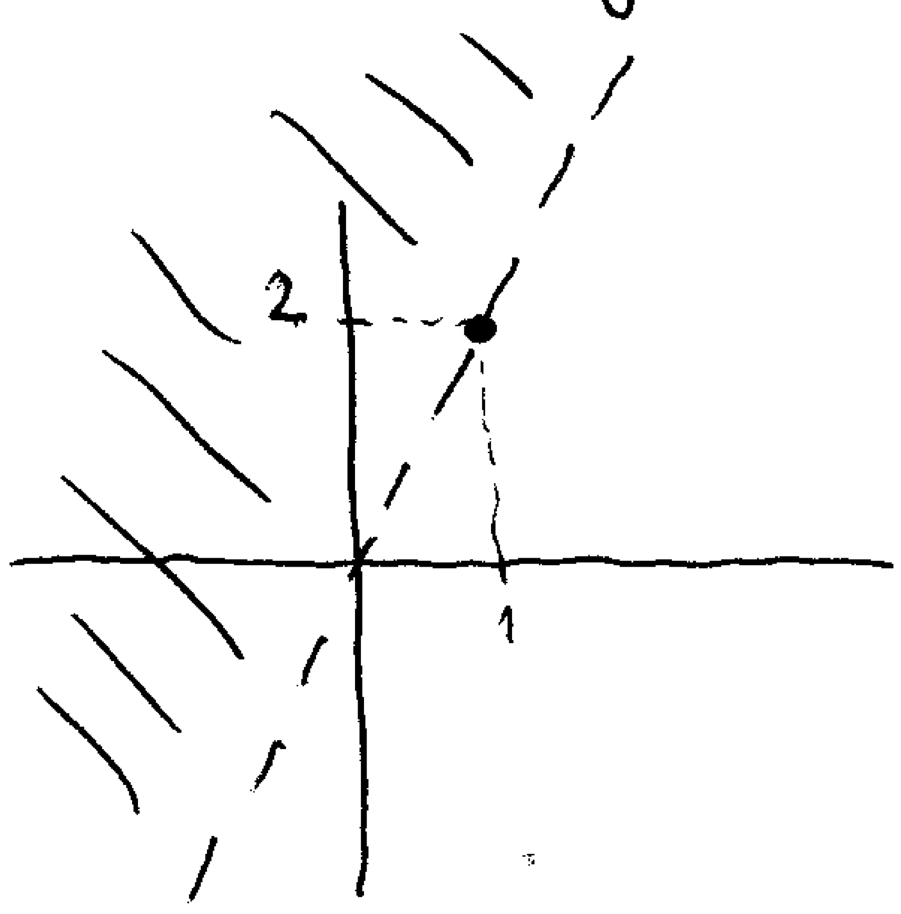
$$\boxed{(x-m)^2 + (y-n)^2 = r^2}$$

Zapište a znázorněte definiční obory fcí

1) $z = \ln(y-2x)$, podmínka $y-2x>0$

hraniční křivka $y-2x=0$

$y=2x$



Bod $[1,0]$ $0-2\cdot 1>0$

nesplňuje

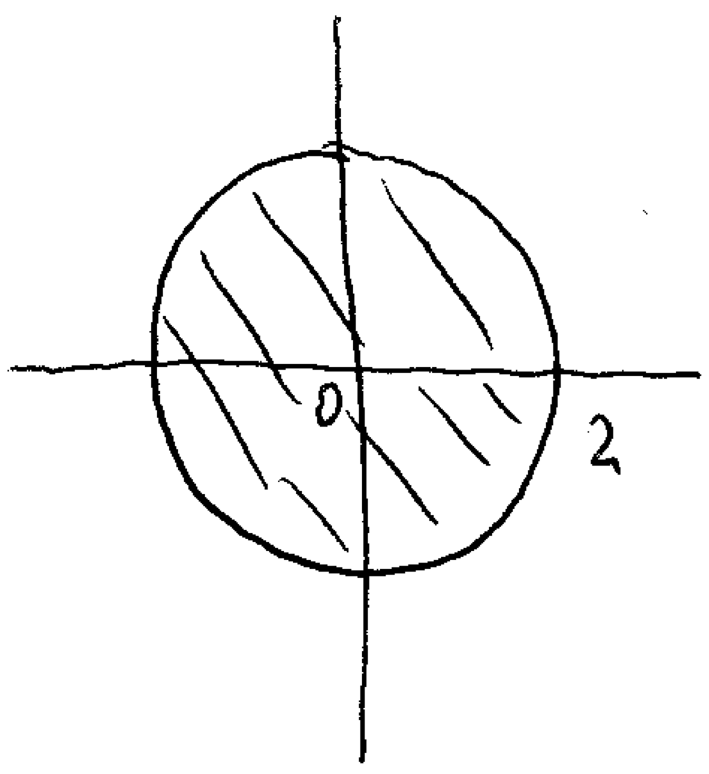
$D_f = \{(x,y);\ y-2x>0\}$

2) $z=\sqrt{4-x^2-y^2}$, $4-x^2-y^2 \geq 0$

kružnice

$4-x^2-y^2=0 \longrightarrow x^2+y^2=4$

$S[0,0]$, $r=2$



Bod $[0,0]$ $4-0^2-0^2 \geq 0$ splňuje

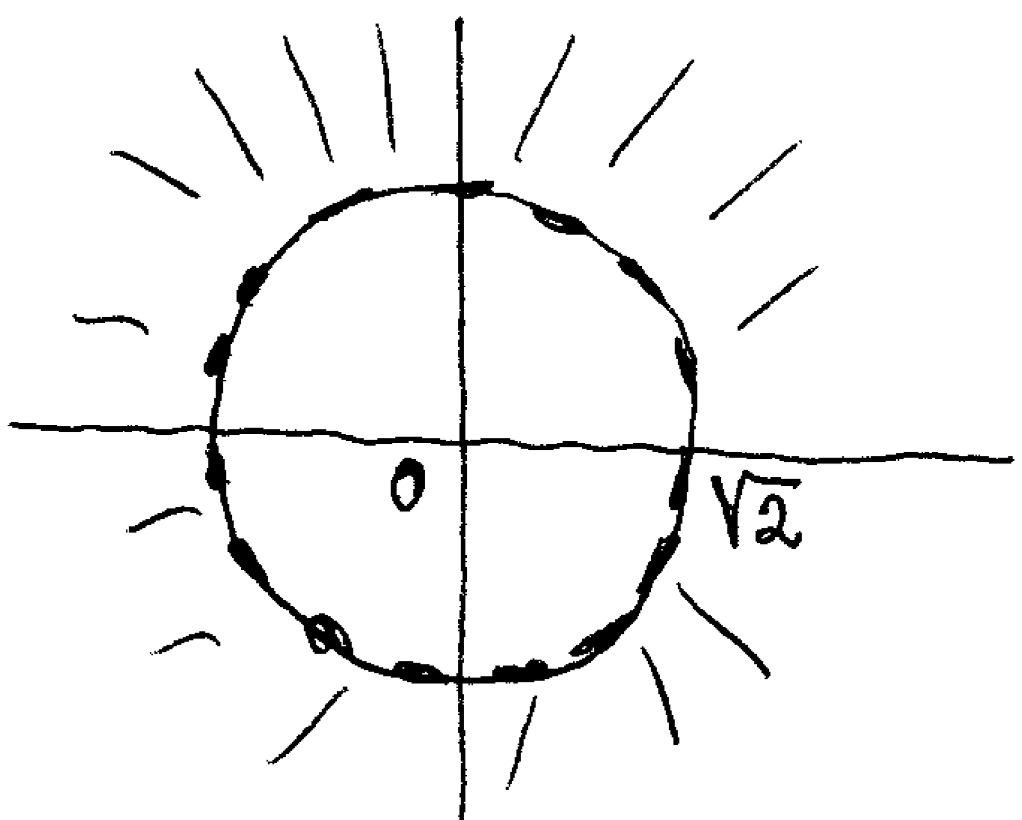
$D_f = \{(x,y),\ 4-x^2-y^2 \geq 0\}$ kruh, včetně kružnice

3) $z=\dfrac{2x-y}{\sqrt{x^2+y^2-2}}$

$x^2+y^2-2 \geq 0 \wedge \sqrt{x^2+y^2-2} \neq 0$, tedy

$x^2+y^2-2>0$ $x^2+y^2=2$

$S[0,0]$, $r=\sqrt{2}$



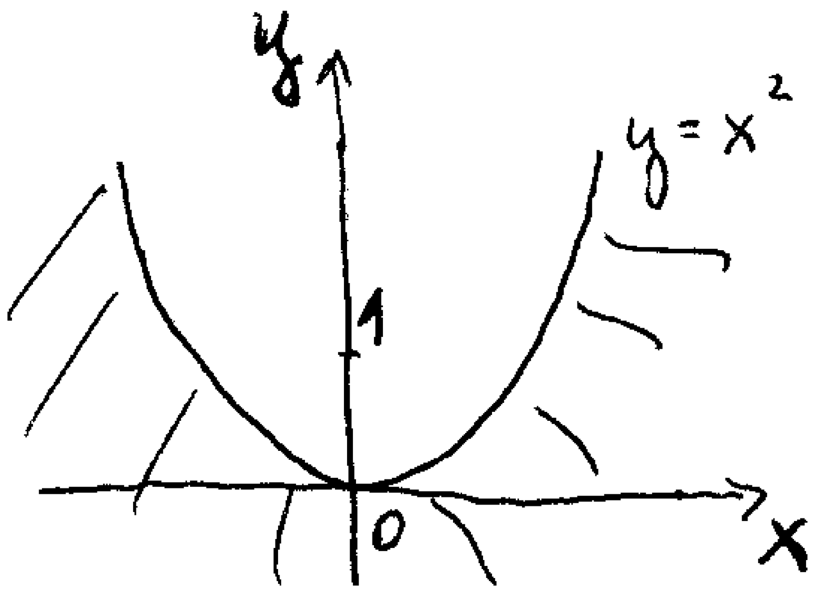
Bod $[0,0]$

$0^2+0^2-2>0$ nesplňuje

$D_f = \{(x,y),\ x^2+y^2-2>0\}$

vně kružnice, která nepatří do D_f

4) $z = \sqrt{x^2 - y}$, $x^2 - y \geq 0 \rightarrow y = x^2$ parabola



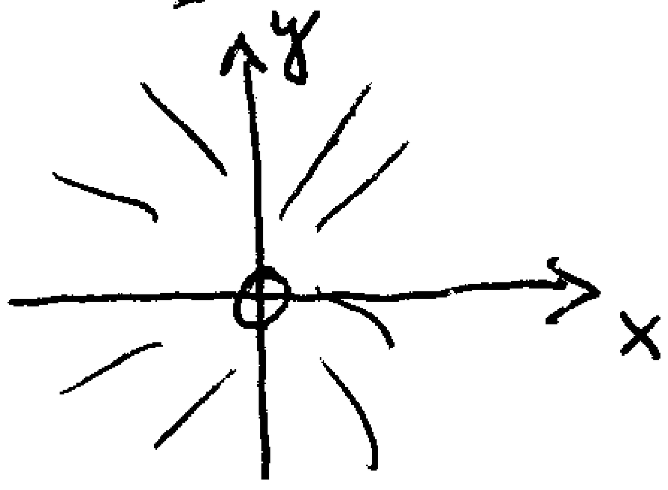
Bod $[0,1]$ $0^2 - 1^2 \geq 0$ nesplňuje

$D_f = \{(x,y),\ x^2 - y \geq 0\}$

parabola patří do D_f

5) $z = \dfrac{x+y}{x^2+y^2}$ $x^2 + y^2 \neq 0$ Vše kromě bodu $[0,0]$

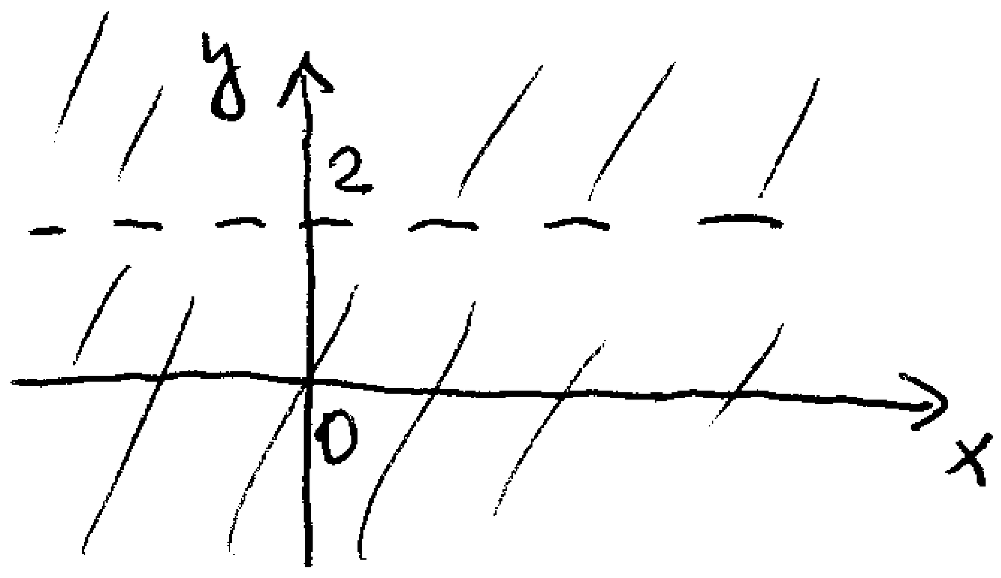
$D_f = \{(x,y),\ x^2+y^2 \neq 0\}$



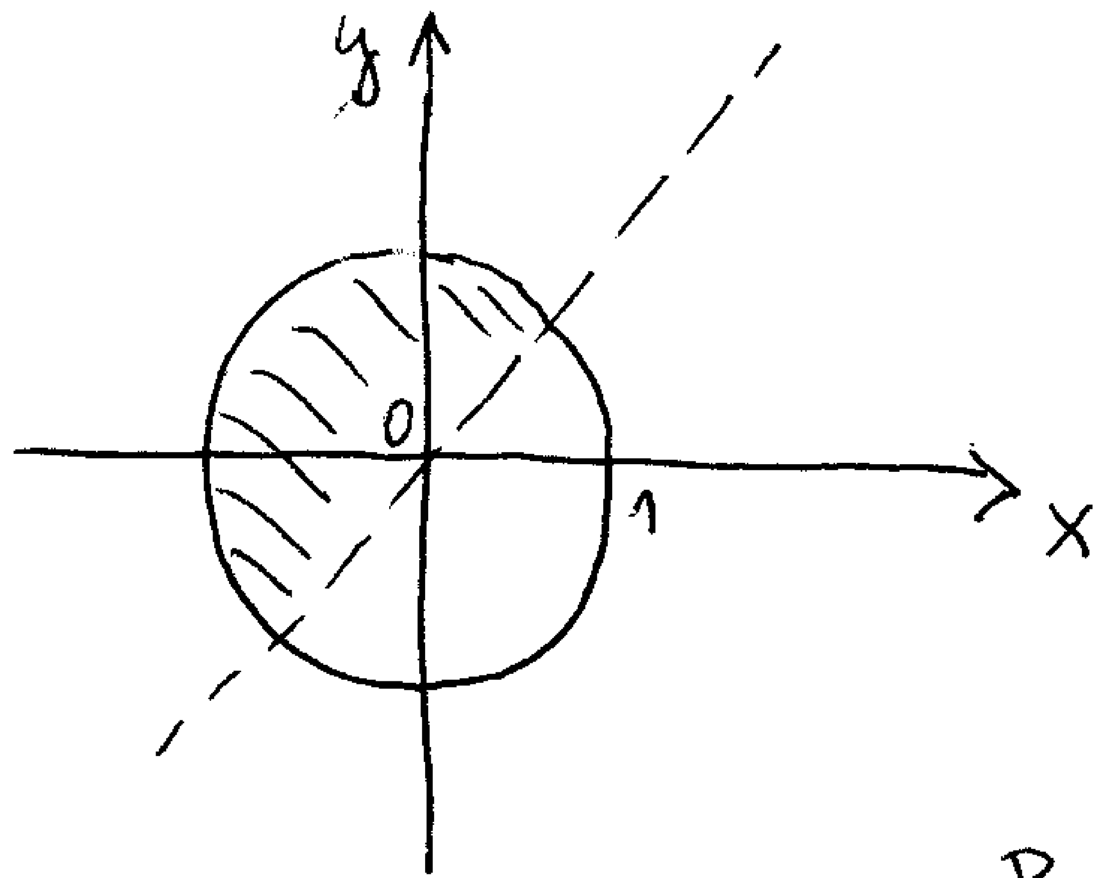
6) $z = \dfrac{1}{y-2}$ $y - 2 \neq 0 \rightarrow y = 2$

$D_f = \{(x,y),\ y-2 \neq 0\}$

vše, kromě přímky $y = 2$



7) $z = \ln(y-x) + \sqrt{1 - x^2 - y^2}$



podminky

$y - x > 0 \ \wedge \ 1 - x^2 - y^2 \geq 0$

$y = x$ $x^2 + y^2 = 1$

$S[0,0],\ r = 1$

Bod $[0,0]$ splňuje 2. podminku, tedy def. obor je ~~[illegible]~~ část kruhu.

První podmínce vyhovuje „horní" polorovina

Obě podminky splňuje vyšrafovaný půlkruh, bez bodů přímky $y = x$.

Parciální derivace

Budeme využívat vztahů

$$\left(\sqrt{V(x,y)}\right)' = \frac{1}{2\sqrt{V(x,y)}} \cdot V'(x,y)$$

$$\left(e^{V(x,y)}\right)' = e^{V(x,y)} \cdot V'(x,y)$$

$$\left(\ln V(x,y)\right)' = \frac{1}{V(x,y)} \cdot V'(x,y)$$

$$\left(\sin V(x,y)\right)' = \cos V(x,y) \cdot V'(x,y)$$

$$\left(\cos V(x,y)\right)' = -\sin V(x,y) \cdot V'(x,y)$$

$$\left(\operatorname{tg} V(x,y)\right)' = \frac{1}{\cos^2 V(x,y)} \cdot V'(x,y)$$

$$\left(\operatorname{cotg} V(x,y)\right)' = \frac{-1}{\sin^2 V(x,y)} \cdot V'(x,y)$$

$$\left(\operatorname{arctg} V(x,y)\right)' = \frac{1}{1+V^2(x,y)} \cdot V'(x,y)$$

$$\left(\arcsin V(x,y)\right)' = \frac{1}{\sqrt{1-V^2(x,y)}} \cdot V'(x,y)$$

$V'(x,y)$ bude derivace podle „x“, nebo „y“.

Př.

1) $f(x,y) = x^2 y^4$ $\quad f_x = 2x \cdot y^4$ (y^4 je tady konstanta)

$f_y = x^2 \cdot 4y^3$ (x^2 -‖-)

2) $f(x,y) = 6xy^2$ $\quad f_x = 6 \cdot 1 \cdot y^2 = 6y^2$

$f_y = 6x \cdot 2y = 12xy$

3) $f(x,y) = \dfrac{x+y}{x-y}$ $\quad f_x = \dfrac{1 \cdot (x-y) - (x+y) \cdot 1}{(x-y)^2} = \dfrac{-2y}{(x-y)^2}$

$f_y = \dfrac{1 \cdot (x-y) - (x+y) \cdot (-1)}{(x-y)^2} = \dfrac{2x}{(x-y)^2}$

4) $f(x,y) = \dfrac{x}{y}$ $\left[= x \cdot \dfrac{1}{y}\right]$ $\quad f_x = 1 \cdot \dfrac{1}{y}$ $\quad f_y = x \cdot \left(-\dfrac{1}{y^2}\right) = -\dfrac{x}{y^2}$

5) $f(x,y) = (2x+3y^2)^5$ $\quad f_x = 5(2x+3y^2)^4 \cdot 2$

$f_y = 5(2x+3y^2)^4 \cdot 6y$

6) $f(x,y) = \sqrt{y-x}$ $\quad f_x = \dfrac{1}{2\sqrt{y-x}} \cdot (-1)$ $\quad f_y = \dfrac{1}{2\sqrt{y-x}} \cdot 1$

7) $f(x,y) = \sqrt{x^2 y + yx}$ $\quad f_x = \dfrac{1}{2\sqrt{x^2 y + yx}} \cdot (2xy + y)$

$f_y = \dfrac{1}{2\sqrt{x^2 y + yx}} \cdot (x^2 \cdot 1 + 1 \cdot x)$

8) $f(x,y) = \ln(x^2 - y)$ $\quad f_x = \dfrac{1}{x^2 - y} \cdot 2x$ $\quad f_y = \dfrac{1}{x^2 - y} \cdot (-1)$

9) $f(x,y) = e^{xy^2}$ $\quad f_x = e^{xy^2} \cdot 1 \cdot y^2$ $\quad f_y = e^{xy^2} \cdot x \cdot 2y$

10) $f(x,y) = \cos(x-y)$ $\quad f_x = -\sin(x-y) \cdot 1$ $\quad f_y = -\sin(x-y) \cdot (-1)$

11) $f(x,y) = x \cdot e^{y^2}$ $\quad f_x = 1 \cdot e^{y^2}$ $\quad f_y = x \cdot e^{y^2} \cdot 2y$

12) $f(x,y) = \ln \frac{y}{x+y}$ $\quad f_x = \frac{1}{\frac{y}{x+y}} \cdot \frac{0\cdot(x+y) - y \cdot 1}{(x+y)^2} = \frac{-1}{x+y}$

$$f_y = \frac{1}{\frac{y}{x+y}} \cdot \frac{1(x+y) - y \cdot 1}{(x+y)^2} = \frac{x}{y(x+y)}$$

13) $f(x,y) = \operatorname{arctg} \frac{y}{x}$ $\quad f_x = \frac{1}{1+\left(\frac{y}{x}\right)^2} \cdot \left(-\frac{y}{x^2}\right) = \frac{1}{1+\frac{y^2}{x^2}} \cdot \left(-\frac{y}{x^2}\right) =$

zlomek derivujeme z tvaru $y \cdot \frac{1}{x}$

$$= \frac{x^2}{x^2+y^2} \cdot \left(-\frac{y}{x^2}\right) = \frac{-y}{x^2+y^2}$$

$$f_y = \frac{1}{1+\left(\frac{y}{x}\right)^2} \cdot \frac{1}{x} = \dots = \frac{x}{x^2+y^2}$$

Druhé derivace

1) $f(x,y) = x^3 y^2 - 2xy^3$ $\quad f_x = 3x^2y^2 - 2y^3$ $\quad f_y = x^3 \cdot 2y - 2x \cdot 3y^2$

$f_{xx} = 3 \cdot 2xy^2 - 0$ $\quad f_{xy} = 3x^2 \cdot 2y - 2 \cdot 3y^2$

$f_{yx} = 3x^2 \cdot 2y - 2 \cdot 3y^2$ $\quad f_{yy} = x^3 \cdot 2 - 2x \cdot 3 \cdot 2y$

2) $f(x,y) = e^{2x-y^2}$ $\quad f_x = e^{2x-y^2} \cdot 2$ $\quad f_y = e^{2x-y^2} \cdot (-2y)$

$f_{xx} = 2e^{2x-y^2} \cdot 2$ $\quad f_{xy} = 2e^{2x-y^2} \cdot (-2y)$

$f_{yx} = -2y \cdot e^{2x-y^2} \cdot 2$

$f_{yy} = \underbrace{e^{2x-y^2} \cdot (-2y) \cdot (-2y) + e^{2x-y^2} \cdot (-2)}$ Derivace součinu