1) Vypočtěte diferenciál funkce $f(x,y) = 3xy^2 - xy$ v bodě $[2,1]$ pro $dx = 0{,}1$, $dy = -0{,}2$.

$f_x = 3y^2 - y$ $\qquad f_x(2,1) = 3 \cdot 1^2 - 1 = 2$

$f_y = 6xy - x$ $\qquad f_y(2,1) = 6 \cdot 2 \cdot 1 - 2 = 10$

$df(2,1) = 2 \cdot 0{,}1 + 10 \cdot (-0{,}2) =$
$= 0{,}2 - 2 = -1{,}8$

2) Vypočtěte diferenciál funkce $f(x,y) = \dfrac{y}{x^2+y^2}$

$$f_x = \frac{-y \cdot 2x}{(x^2+y^2)^2} = \frac{-2xy}{(x^2+y^2)^2}$$

$$f_y = \frac{1 \cdot (x^2+y^2) - y \cdot 2y}{(x^2+y^2)^2} = \frac{x^2-y^2}{(x^2+y^2)^2}$$

$$df(x,y) = \frac{-2xy}{(x^2+y^2)^2}\,dx + \frac{x^2-y^2}{(x^2+y^2)^2}\,dy$$

3) Vypočtěte přibližnou hodnotu výrazu $1{,}02^5 \cdot 0{,}99^{20}$

$f(x,y) = x^5 \cdot y^{20}$, $[1,1]$, $dx = 0{,}02$, $dy = -0{,}01$

$f(1,1) = 1^5 \cdot 1^{20} = 1$ $\qquad f_x = 5x^4 \cdot y^{20}$ $\qquad f_x(1,1) = 5$

$f_y = 20x^5 y^{19}$ $\qquad f_y(1,1) = 20$

$$1{,}02^5 \cdot 0{,}99^{20} = f(1{,}02;\, 0{,}99) \approx f(1,1) + df(1,1)$$

$$1{,}02^5 \cdot 0{,}99^{20} \doteq 1 + 5 \cdot 0{,}02 + 20 \cdot (-0{,}01) = 0{,}9.$$

4) Určete tečnou rovinu ke grafu fce $f(x,y) = x^2 + xy + 2y^2$ v bodě $[1,1,?]$

$f(1,1) = 1^2 + 1 \cdot 1 + 2 \cdot 1 = 4$

$f_x = 2x + y$ $\qquad f_x(1,1) = 3$

$f_y = x + 4y$ $\qquad f_y(1,1) = 5$

$$z = 4 + 3(x-1) + 5(y-1)$$

$$\boxed{3x + 5y - z - 4 = 0}$$

5) Vypočtěte lokální extrémy funkcí

a) $f(x,y) = 2x^3 - 3x^2 + y^2 - 2$

$f_x = 6x^2 - 6x$ $\qquad 6x^2 - 6x = 0 \to 6(x^2 - x) = 6x(x-1) \begin{cases} x_1 = 0 \\ x_2 = 1 \end{cases}$

$f_y = 2y$ $\qquad 2y = 0 \to y = 0$

Stacionární body $[0,0]$, $[1,0]$

$f_{xx} = 12x - 6$, $f_{xy} = 0 = f_{yx}$, $f_{yy} = 2$

$D(x,y) = (12x - 6) \cdot 2 - 0 \cdot 0 = 24x - 12$

$D(0,0) = 24 \cdot 0 - 12 = -12 < 0$ $\quad [0,0]$ není extrém

$D(1,0) = 24 \cdot 1 - 12 = 12 > 0$ $\quad [1,0]$ je extrém

$f_{xx}(1,0) = 12 - 6 = 6 > 0$ $\quad [1,0]$ lok. minimum

b) $f(x,y) = 2x^3 + 3xy + 3y^2 - 3x - 6y + 9$

$f_x = 6x^2 + 3y - 3$ $\qquad 6x^2 + 3y - 3 = 0 \to 2x^2 + y - 1 = 0$

$f_y = 3x + 6y - 6$ $\qquad 3x + 6y - 6 = 0 \quad\; x + 2y - 2 = 0$

$y = \frac{1}{2}(2 - x)$

$2x^2 + \frac{1}{2}(2-x) - 1 = 0$

$4x^2 - x = 0$ $\qquad x_1 = 0$ $\qquad y_1 = \frac{1}{2}(2-0) = 1$

$x(4x - 1) = 0$ $\qquad x_2 = \frac{1}{4}$ $\qquad y_2 = \frac{1}{2}\left(2 - \frac{1}{4}\right) = \frac{7}{8}$

Stacionární body $[0,1]$, $\left[\frac{1}{4}, \frac{7}{8}\right]$

$f_{xx} = 12x$ $\qquad f_{xy} = 3 = f_{yx}$ $\qquad f_{yy} = 6$

$D(x,y) = 12x \cdot 6 - 3 \cdot 3 = 72x - 9$

$D(0,1) = -9 < 0$ $\quad [0,1]$ není extrém

$D\left(\frac{1}{4}, \frac{7}{8}\right) = 72 \cdot \frac{1}{4} - 9 = 9 > 0$ $\quad \left[\frac{1}{4}, \frac{7}{8}\right]$ je extrém

$f_{xx}\left(\frac{1}{4}, \frac{7}{8}\right) = 12 \cdot \frac{1}{4} = 3 > 0$

$\left[\frac{1}{4}, \frac{7}{8}\right]$ lokální minimum

6) Určete lokální extrémy funkce $f(x,y) = -x^2 - y^4$

$f(x,y) = -x^2 - y^4$ $\qquad f_x = -2x \qquad -2x = 0 \qquad$ Stacionární

$\qquad f_y = -4y^3 \qquad -4y^3 = 0 \qquad$ bod

$[0,0]$

$f_{xx} = -2, \; f_{xy} = 0 = f_{yx} \qquad f_{yy} = -12y^2$

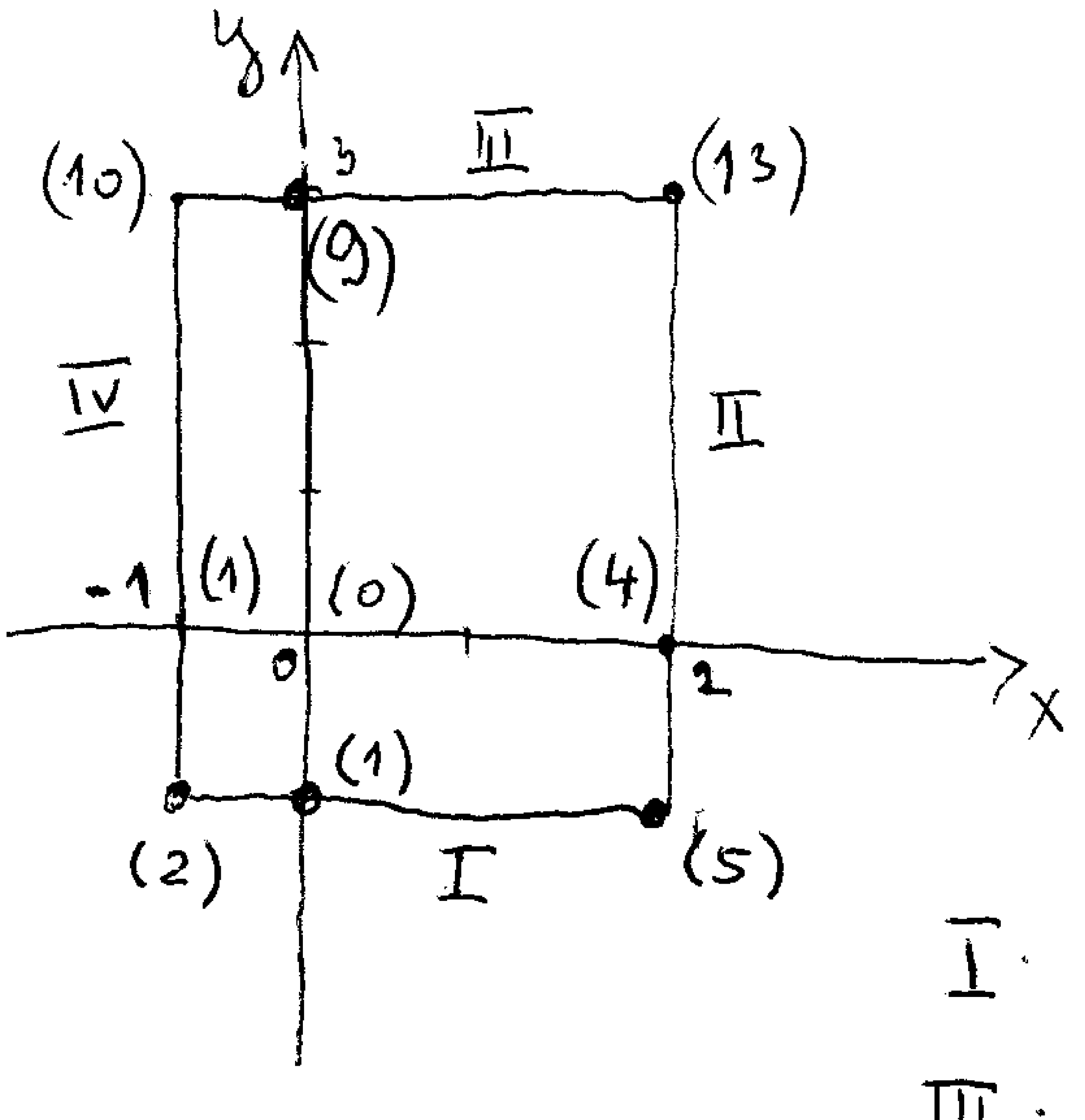
$D(x,y) = -2 \cdot (-12y^2) - 0 \cdot 0 = 24y^2$

$D(0,0) = 0$ Nelze rozhodnout

$f(0,0) = 0 \qquad f(x,y) = -(x^2 + y^4)$ s výjimkou $[0,0]$ jsou funkční hodnoty záporné.

Z definice lokálního maxima plyne, že v bodě $[0,0]$ je lokální maximum.

7) Určete absolutní extrémy funkce $f(x,y) = x^2 + y^2$ na obdélníku s vrcholy $[-1,-1]$, $[2,-1]$, $[2,3]$, $[-1,3]$.



$z = f(x,y) = x^2 + y^2 \qquad f_x = 2x, \; f_y = 2y$

Stacionární bod $[0,0]$ leží v oblasti

$f(0,0) = 0, \; f(-1,-1) = 2, \; f(2,-1) = 5$

$f(2,3) = 13, \; f(-1,3) = 10$

I: $y = -1, \; x \in \langle -1, 2 \rangle$, II: $x = 2, \; y \in \langle -1, 3 \rangle$

III: $y = 3, \; x \in \langle -1, 2 \rangle$, IV: $x = -1, \; y \in \langle -1, 3 \rangle$

ad I: $z = x^2 + 1, \; x \in \langle -1, 2 \rangle$

$z_x = 2x \Rightarrow x = 0$ st. bod $[0,-1]$ $\quad f(0,-1) = 1$

ad II: $z = 4 + y^2, \; y \in \langle -1, 3 \rangle$

$z_y = 2y \Rightarrow y = 0$ st. bod $[2,0]$ $\quad f(2,0) = 4$

ad III: $z = x^2 + 9, \; x \in \langle -1, 2 \rangle$

$z_x = 2x, \; x = 0$, st. bod $[0,3]$ $\quad f(0,3) = 9$

ad IV: $z = 1 + y^2, \; y \in \langle -1, 3 \rangle$

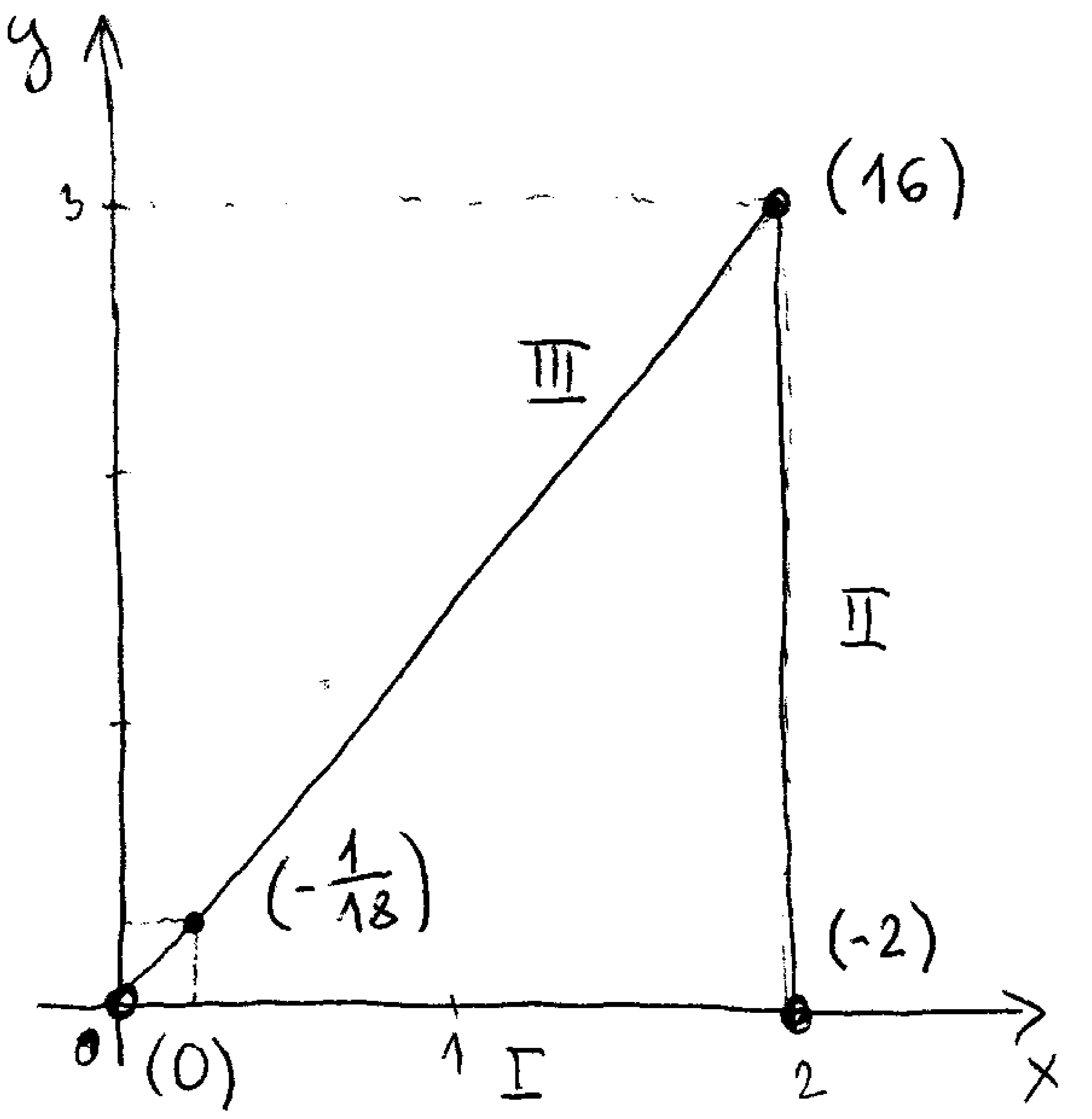
$z_y = 2y \Rightarrow$ st. bod $[-1,0]$

$f(-1,0) = 1$

Největší hodnota 13 v bodě $[2,3]$, nejmenší hodnota 0 v bodě $[0,0]$.

8) Určete absolutní extrémy funkce $f(x,y) = 3xy - x$

na trojúhelníku s vrcholy $[0,0]$, $[2,0]$, $[2,3]$



I : $y=0$, $x \in \langle 0,2 \rangle$

II : $x=2$, $y \in \langle 0,3 \rangle$

III : $\vec{s} = (2,3) \Rightarrow \vec{n} = (3,-2)$

$3x - 2y + c = 0$ $\quad 3\cdot 0 - 2\cdot 0 + c = 0$

$c = 0$

$3x - 2y = 0$

$y = \frac{3}{2}x$, $x \in \langle 0,2 \rangle$

$z = f(x,y) = 3xy - x$

$f_x = 3y - 1$ $\quad \left.\begin{array}{l} 3y-1=0 \\ 3x=0 \end{array}\right\}$ stacionární bod $[0, \frac{1}{3}]$ neleží v oblasti

$f_y = 3x$

$f(0,0) = 0$, $f(2,0) = -2$, $f(2,3) = 16$

ad I : $z = -x$, $x \in \langle 0,2 \rangle$ není st. bod, hodnota fce na úsečce I stále klesá

$z_x = -1$

ad II : $z = 6y - 2$, $y \in \langle 0,3 \rangle$ není stac. bod, na úsečce II hodnota fce stále roste

$z_y = 6$

ad III : $z = 3x \cdot \frac{3}{2}x - x = \frac{9}{2}x^2 - x$, $x \in \langle 0,2 \rangle$ $\quad [\frac{1}{9}, \frac{1}{6}]$

$z_x = 9x - 1$ $\quad 9x - 1 = 0$

$x = \frac{1}{9}$, $y = \frac{3}{2} \cdot \frac{1}{9} = \frac{1}{6}$

$f(\frac{1}{9}, \frac{1}{6}) = -\frac{1}{18}$

Největší hodnota 16 v bodě $[2,3]$, absolutní maximum

Nejmenší hodnota -2 v bodě $[2,0]$, absolutní minimum.