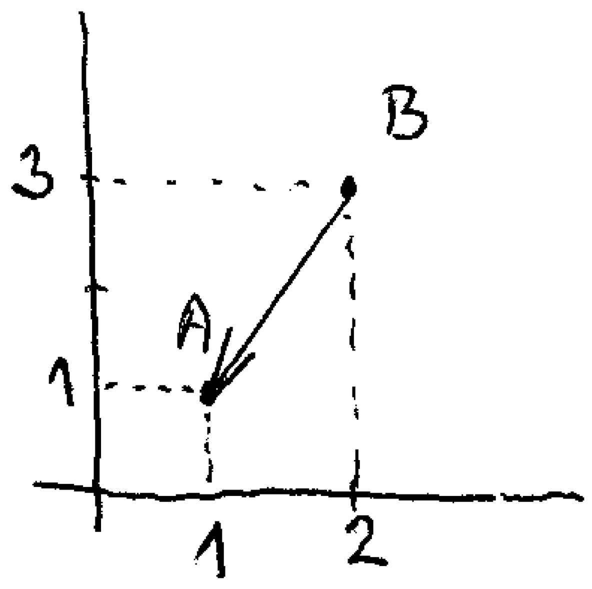
1) Vypočtěte integrál $\int_C y\,dx + xy\,dy$, kde C je úsečka A, B, kde počáteční bod je $B\,[2,3]$ a koncový bod je $A\,[1,1]$



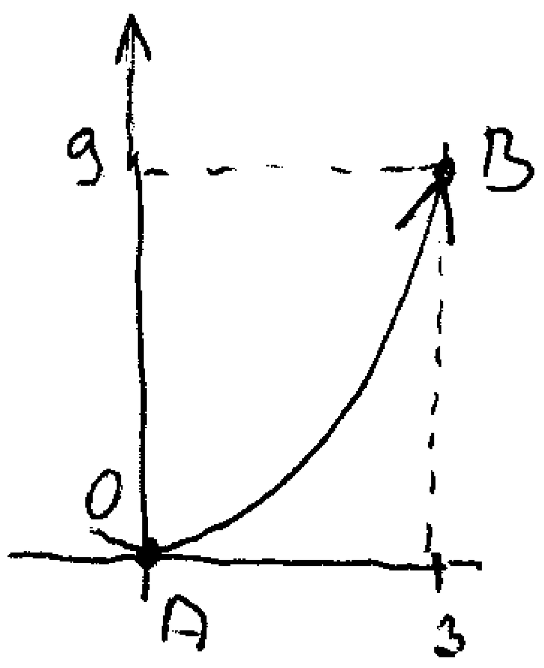
$\vec{s} = \vec{AB} = B - A = (1,2)$

$$x = 1 + t \qquad t \in \langle 0,1 \rangle \qquad x' = 1$$
$$y = 1 + 2t \qquad\qquad\qquad\qquad y' = 2$$

$$\int_C y\,dx + xy\,dy = \int_0^1 (1+2t)\cdot 1\,dt + \int_0^1 (1+t)(1+2t)\,2\,dt =$$
$$= \int_0^1 (1+2t)\,dt + \int_0^1 (1+3t+2t^2)\cdot 2\,dt = \int_0^1 (1+2t+2+6t+4t^2)\,dt =$$
$$= \left[3t + 8\frac{t^2}{2} + \frac{4}{3}t^3\right]_0^1 = 3 + 4 + \frac{4}{3} = 7 + \frac{4}{3} = \frac{25}{3}$$

Křivka není orientována souhlasně s ~~orient~~ parametrizací, tedy výsledek je $-\frac{25}{3}$.

2) Vypočtěte $\int_C (x-y)\,dx + y\,dy$, kde C je část paraboly $y = x^2$ mezi body $A\,[0,0]$, $B\,[3,9]$. A je počáteční bod.



$$x = t \qquad t \in \langle 0,3 \rangle \qquad x' = 1$$
$$y = t^2 \qquad\qquad\qquad\qquad y' = 2t$$

$$\int_C (x-y)\,dx + y\,dy = \int_0^3 (t-t^2)\,1\,dt + \int_0^3 t^2\cdot 2t\,dt = \int_0^3 (t - t^2 + 2t^3)\,dt =$$
$$= \left[\frac{t^2}{2} - \frac{t^3}{3} + \frac{2t^4}{4}\right]_0^3 = \frac{9}{2} - 9 + \frac{2\cdot 81}{4} = 36$$

„parametrizace odpovídá šipce"

3) Vypočtěte $\int_C y\,dx + z\,dy + (z-y)\,dz$, kde C je orientovaná úsečka $\vec{AB}$, $A[1,0,0]$, $B[2,1,-3]$

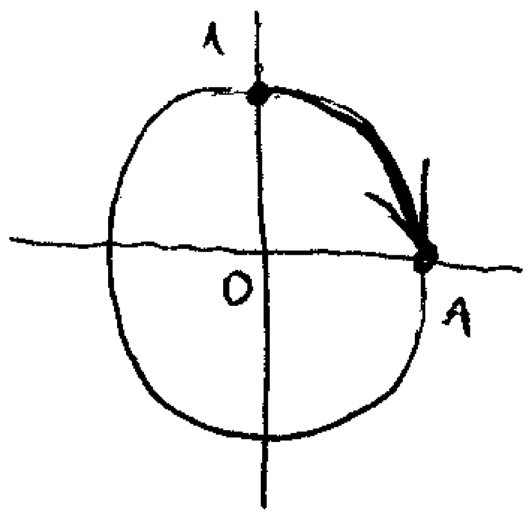
$\vec{s} = \vec{AB} = B - A = (1,1,-3)$

Úsečka je orientovaná souhlasně s parametrizací.

$$x = 1 + t \qquad x' = 1$$
$$y = 0 + t \qquad t \in \langle 0,1 \rangle \qquad y' = 1$$
$$z = 0 - 3t \qquad z' = -3$$

$$\int_C y\,dx + z\,dy + (z-y)\,dz = \int_0^1 t\,dt + \int_0^1 -3t\,dt + \int_0^1 (-3t - t)(-3)\,dt =$$
$$= \int_0^1 10t\,dt = \left[5t^2\right]_0^1 = 5$$

4) Vypočtěte $\int_C y\,dx - x\,dy$, kde C je část kružnice $x^2 + y^2 = 1$ mezi body $[1,0]$ a $[0,1]$, která je orientována záporně.



$$x = \cos t \qquad x' = -\sin t$$
$$y = \sin t \qquad t \in \langle 0, \tfrac{\pi}{2} \rangle \qquad y' = \cos t$$

$$\int_C y\,dx - x\,dy = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin t(-\sin t)\,dt - \int_0^{\pi/2} \cos t \cos t\,dt = -\int_0^{\pi/2} (\sin^2 t + \cos^2 t)\,dt =$$
$$= -\int_0^{\pi/2} dt = -\left[t\right]_0^{\pi/2} = -\frac{\pi}{2}$$

parametrizace neodpovídá směru šipky

výsledek je $\frac{\pi}{2}$

5) Vypočtěte práci silového pole $\vec{F} = (xy, x+y)$ při přemisťování hmotného bodu po přímce mezi body $K[1,1]$ a $L[3,2]$. K je počáteční, L koncový bod.

$$\vec{s} = \overrightarrow{KL} = L - K = (2,1)$$

$$x = 1 + 2t \qquad t \in \langle 0,1 \rangle \qquad x' = 2$$
$$y = 1 + t \qquad\qquad\qquad\qquad y' = 1$$

$$W = \int_C xy\,dx + (x+y)\,dy = \int_0^1 (1+2t)(1+t)\,2\,dt + \int_0^1 (1+2t+1+t)\cdot 1\,dt =$$
$$= \int_0^1 (1+3t+2t^2)\cdot 2\,dt + \int_0^1 (2+3t)\,dt = \int_0^1 (4 + 9t + 4t^2)\,dt =$$
$$= \left[4t + 9\frac{t^2}{2} + 4\frac{t^3}{3}\right]_0^1 = 4 + \frac{9}{2} + \frac{4}{3} = \frac{59}{6}$$

6) Rozhodněte, zda integrály závisí na integrační cestě.

a) $\int_C 2xy\,dx + x^2\,dy$, $\quad P = 2xy \quad P_y = 2x$
$\quad Q = x^2 \quad Q_x = 2x$

$P_y = Q_x$

nezávisí

b) $\int_C \cos y \cos x\,dx - \sin x \sin y\,dy$

$P = \cos y \cos x$, $\quad Q = -\sin x \sin y$
$P_y = -\sin y \cos x$, $\quad Q_x = -\cos x \sin y$

$P_y = Q_x$

nezávisí

c) $\int_C (3x^2y+1)\,dx + (1-x^3)\,dy$

$P = 3x^2y + 1 \quad P_y = 3x^2$
$Q = 1 - x^3 \quad Q_x = -3x^2$

$P_y \neq Q_x$ závisí