Již jsme se naučili počítat dvojný integrál v kartézských souřadnicích a umíme množinu, přes kterou integrujeme, vyjádřit v polárních souřadnicích. Nyní si ukážeme, jak do polárních souřadnic transformovat celý integrál. Tomu je věnována část 6. 4 ve skriptu od str. 77.

Když jsme počítali integrály v prvním semestru, používali jsme substituční metodu při výpočtu určitého integrálu jedné proměnné. V podstatě můžeme říct, že se nám vždy změnily meze integrálu, za proměnnou „*x*“ jsme dosadili novou proměnnou, třeba „*t*“, a změnilo se nám i „dx“.

Na transformaci dvojného integrálu se může dívat podobně. Množinu *M* vyjádříme v polárních souřadnicích, což se nám projeví v mezích dvojnásobného integrálu. Dosadíme za proměnné *x* a *y* do integrované funkce a nahradíme „dxdy“. Přitom hraje roli jakobián transformace, který je pro polární souřadnice odvozen na konci části 6. 3. Studenti na jakobián ρ často zapomínají, musíme na to stále myslet.

Fubiniova věta pro transformaci do polárních souřadnic 6. 10 je na str. 77. V minulém textu s příklady jsme viděli, že v případě části kruhu a mezikruží se středem v počátku dostáváme pro nové proměnné ρ a φ konstantní meze. Pak si můžeme vybrat, podle které proměnné budeme integrovat jako první. Držme se však pořadí ve skriptu. Je to proto, že v případě, kdy meze nejsou konstantní, pak vzdálenost od počátku ρ závisí na úhlu φ. To vidíme v příkladu 6. 18. Potom musíme nejprve integrovat podle ρ. V případě, že navíc jednotlivé proměnné jsme schopni „separovat“ (včetně jakobiánu) do jednotlivých integrálů, pak dvojný integrál můžeme počítat jako součin dvou určitých integrálů jedné proměnné. Tak je ukázáno poprvé v případě příkladu 6. 12 na str. 78.

Začněte ovšem příkladem 6. 11 a pak třeba příklady v mém textu. Množina *M* je kruh se středem v počátku a poloměru 3. Vyjádření v polárních souřadnicích je tedy velmi snadné. Meze obou integrálů jsou konstantní. Dosazení za *x* a *y*, ale také za dxdy proběhlo ve skriptu bez rozepsání, ale snad je jasné, kde se vzalo ρ^2. Výpočet jednotlivých integrálů také problém není. Nejprve integrujeme ρ^2 v mezích od 0 do 3, výsledek 9 vytkneme před druhý integrál a integrujeme podle φ. I v tomto příkladě jsme mohli převést na součin dvou integrálů. Udělejte si to a možná řada z vás výsledek „nula“ odhadne brzy. Stačí se jen zamyslet na tím, co je integrálem funkcí sinus a kosinus na intervalu $<0,2\pi>$. To víme z prvního semestru.

Příklad 6. 12 je početně složitější, je tam substituce, ale množina *M* je opět jednoduchá pro popis. Vyskytuje je tam výraz $x^2 + y^2$, který je v polárních souřadnicích roven ρ^2. Musíte být schopni bezpečně odvodit a nejlépe si pamatovat výsledek. V písemkách je to často.

V příkladu 6. 13 si všimněte, jak je v kartézských souřadnicích vyjádřeno mezikruží s poloměry kružnic 1 a 2. Zamyslete se i nad nerovností $y \geq |x|$. Z obrázku je pak již vyjádření množiny *M* v polárních souřadnicích vcelku snadné. V textu je odvozen výpočet mezí pro proměnnou φ, nicméně víme, ramena úhlů půli kvadranty, je tam tedy 45 stupňů a tedy $\pi/4$ a tedy … . I tady je $x^2 + y^2$, nesmíme zapomenout na jakobián a výhodně rozdělíme na součin dvou integrálů.

Zbytek části 6. 4 je jen pro vážné zájemce o transformaci dvojného integrálu. Předcházející tři příklady jsou pro budoucí písemku základní. Doplňte si je o příklady z mého textu a počítejte příklady 2a,c,f,g na str. 83. 2c je nejtěžší, je tam třeba nezapomenout na jakobián a použít substituci za $-\rho^2$.

Posledním úkolem je naučit se využití dvojného integrálu. Již v úvodní části na konci str. 71 je řečeno, že dvojným integrálem je možno vypočítat objem tělesa *V*, které je definováno na posledním řádku této stránky. Vysvětlím na konzultaci. Objemy těles ovšem budeme počítat pomocí trojných integrálů, takže příklad 6. 19 na str. 81 si ukážeme až tam a uvidíme, že po dvou krocích se dostaneme k výpočtům zachyceným na posledních dvou řádcích str. 81. Dvojný integrál ovšem poslouží k určení obsahu (míry) množiny *M*. Stačí integrovat na množině *M* „jedničku“, tedy položit funkci $f(x,y) = 1$. Je-li např. množinou *M* kruh, pak vypočteme obsah kruhu. V příkladu 6. 17 je odvozen vzorec pro obsah kruhu o poloměru *R*. Pochopitelně v polárních souřadnicích. Příklad tedy ukazuje, „k čemu nám to je“. Zapamatujte si ho, přesně v takovém zadání bývá v písemkách. Opět nezapomeňte na jakobián.

Příklad 6. 18 je složitější v tom, že kružnice nemá střed v počátku. Ze střední školy víte, jak z její rovnice najít střed a poloměr doplněním na čtverec. V tomto případě pak meze pro ρ nejsou konstantní. Příklad je obtížný i ve vlastním výpočtu. Třebaže vše v něm máte znát, je určen jen zájemcům. Podobně jako 6. 20, který ukazuje fyzikální aplikaci pro výpočet hmotnosti velmi tenké, tedy vlastně dvojrozměrné, desky (třeba plechu), kde hustota není v každém bodě desky stejná, ale je vyjádřena funkcí dvou proměnných.

Příklad 3a si můžete zkusit spočítat dvojným integrálem, ale brzy zjistíte, že takové úlohy jsme dělali již v prvním semestru. Kdo zvládl příklad 6. 18, může zkusit příklad 3b.

V mém textu najdete čtyři příklady. Zmíním jen poslední, který se nepočítá, jen máme integrál transformovat z kartézských souřadnic do polárních. Takový úkol se může v písemce objevit. Ze zbývajících příkladů je zřejmé, co musíme umět. Nakreslit správný kruh, podle zadání vybrat požadovanou část, umět se orientovat v úhlech $\pi/4$, $\pi/2$, π, 2π. V těchto a z nich „odvozených“ úhlech musíme umět spočítat hodnoty funkcí sinus a kosinus.