Dnes dokončíme trojný integrál tím, že se ho naučíme transformovat do válcových souřadnic. Podívejte na příklady 3) a 4) v mém textu priklady_chemici_5. Postupovali jsme v nich tak, že jsme těleso *V* promítli kolmo do roviny *xy*. Dostali jsme trojúhelník, resp. čtverec. V technické praxi je tělesem velmi často válec, koule, kužel nebo rotační paraboloid (resp. jejich části). Když je vhodně umístíme do souřadného systému a promítneme do roviny *xy*, průmětem je kruh, resp. část kruhu. V příkladech 3) a 4) jsme vždy postupovali tak, že jsme nejprve popsali tento průmět tělesa. Namalovali jsme si pro názornost dokonce samostatný obrázek. Pokud je to kruh, víme již z dvojného integrálu, že je výhodné tento kruh popsat v polárních souřadnicích. Nyní bude situace podobná.

Podívejte se na obrázek na straně 87. Tam jsou zavedeny válcové (cizím slovem cylindrické) souřadnice bodu v prostoru. Místo souřadnic $[x,y,z]$ zavedeme souřadnice $[\rho,\varphi,z]$. z je stále vzdálenost bodu od roviny *xy*. ρ *a* φ jsou polární souřadnice průmětu bodu do roviny *xy*. Obrázek je snad dostatečně názorný. Studentům vždy říkám: „Představte si v ose *z* jeřáb. Jeřábník musí nejprve otočit jeřáb o určitý úhel φ, pak do vzdálenosti ρ vysune hák a nakonec předmět zvedne do výšky *z*. Tím je poloha bodu jednoznačně určená.

Příklad 7. 7 je pouhý popis válce, resp. části koule do válcových souřadnic. Bohužel chybí obrázky, ale obě tělesa máme i v našich příkladech.

V části skripta 7. 3 je popsána transformace trojného integrálu do válcových souřadnic. Je to podobné, jako když jsme dvojný integrál transformovali do polárních souřadnic. Těleso popíšeme ve válcových souřadnicích, tím získáme meze trojnásobného integrálu. Do integrované funkce dosadíme za proměnné $x = \rho \cos \varphi$, $y = \rho \sin \varphi$. z zůstane stejné. Nesmíme zapomenout na jakobián. Místo dxdydz tedy píšeme ρ.dρdφdz .Vidíme, že transformační rovnice jsou stejné, jakobián je stejný. Nic nového si pamatovat nemusíme. Také víme, že v polárních a tedy i ve válcových souřadnicích platí $x^2 + y^2 = \rho^2$.

V příkladu 7. 9 je tělesem rotační paraboloid $x^2 + y^2 \leq 2z$. Dvojka způsobuje, že je širší než paraboloid $x^2 + y^2 \leq z$, který známe. Shora je seříznut rovinou $z=2$. Jeho povrch vidíme na obrázku 7. 2 c) , kde je špatně popsán, chybí tam ta dvojka. Znak nerovnosti ≤ v zadání tělesa říká, „že jde o body uvnitř“. Je nám asi jasné, že průmětem tohoto tělesa do roviny *xy* je kruh se středem v počátku. Jaký má ale poloměr? Stejný, jako má kružnice, ve které rovina $z=2$ seřízne povrch paraboloidu. Do rovnice $x^2 + y^2 = 2z$ dosadíme za *z* dvojku a dostáváme rovnici kružnice $x^2 + y^2 = 4$. Poloměr je tedy 2. Tato úvaha je v příkladu popsána. Dostáváme tedy kruh se středem v počátku a poloměrem 2. Ten popíšeme v polárních souřadnicích. To umíme. Ještě si musíme poradit s ohraničením proměnné *z*. Uvědomíme si, že těleso tvoří body uvnitř, tedy mezi parabolickou plochou, která je popsaná pomocí proměnných ρ a φ, a rovinou $z=2$. Získali jsme meze jednotlivých integrálů, dosadili jsme do funkce. Použili jakobián.

V příkladu 7. 10 nacházíme nerovnici $x^2 + y^2 \leq 1$. Na cvičeních se vždy ptám, „co to je?“ Někteří studenti řeknou kružnice, ti chytřejší řeknou kruh. Správná odpověď je otázka, „jsme v rovině nebo v prostoru?“ My jsme v prostoru, takže jde o body $[x,y,z]$, kde pro souřadnice *x, y* platí $x^2 + y^2 \leq 1$ a *z* je libovolné. Je to tedy „nekonečný“ válec s osou, kterou je souřadnicová osa *z*. V příkladu ale není „nekonečný“, stojí v rovině *xy* ($z=0$), protože v zadání je $z \geq 0$, a shora je seříznutý rovinou.

Kdo porozuměl příkladům 7. 9 a 7. 10, ten si snad poradí s tělesem v příkladu 7. 11. Podívejte se současně na „mé příklady“, pak zkuste spočítat cvičení 4ac , kde máme válec stojící v rovině *xy* a shora je seříznut rovinou. V příkladech 4bd je tělesem jakási trubka, s vnitřním průměrem 1 a vnějším 2. Průmětem je mezikruží $1 \leq x^2 + y^2 \leq 4$.

Víme, že základní aplikací trojného integrálu je výpočet objemu tělesa *V*. Počítáme integrál z „jedničky“. Ve cvičení 3a je tělesem válec o poloměru 1, který stojí v rovině *xy* a shora je přiklopen paraboloidem $z = 3 - x^2 - y^2$. Ve cvičení 3b máme válec o poloměru 2, který leží v kouli o poloměru 3.

Připravil jsem několik řešených příkladů.

Příklad 1: Zde nepočítáme integrály, jen popíšeme ve válcových souřadnicích daná tělesa. Je tam vždy válec a z něj vybraná část. Nejlépe si je rovnou překreslit obrázek v rovině *xy*. Tam už správné „kvadranty“ najdete

Příklad 2: Přesně takto bývá v písemkách. Meze jsou všechny konstantní, můžeme tedy v tomto případě počítat jako součin tří integrálů.

Příklad 3: Toto už je těžší, ale lepší z vás by to měli minimálně pochopit. Je zde důležité znát rovnici kulové plochy, umět popsat horní a dolní polokouli (dolní by měla před odmocninou mínus). I tady umět vyjádřit $r^2 - x^2 - y^2$ ve válcových souřadnicích.

Příklad 4: Nejprve máme část válce, takže meze jsou konstantní a výpočet se zjednoduší. Druhou část si dobře promyslete, to pro písemku celkem základní příklad.