Dnes začínáme devátou kapitolu skripta, která se zabývá křivkovými integrály. Ty jsou dvou druhů, pochopitelně začneme křivkovým integrálem prvního druhu v části 9.2 od strany 105.

Předchází tomu stručný úvod 9. 1 s názvem Parametrické rovnice křivek. S parametrickými rovnicemi jste se setkali na střední škole, ale už i v tomto semestru, kde jsme si zopakovali parametrizaci přímky a úsečky.

Můžete se znovu podívat do souboru cviceni1.pdf. Tam jsme parametrizovali úsečku KL. Doporučuji na cvičeních postupovat vždy tak, že za směrový vektor volím „celý“ vektor KL. I když je zřejmé, že bych mohl zvolit i poloviční, tedy (1,2). Když totiž vždy použiji vektor určený oběma koncovými body, pak parametr t je vždy z intervalu <0,1> a nemusím přemýšlet o tom, co by způsobilo to krácení dvěma. Podívejte se také na parametrizaci úseček, které jsou rovnoběžné s některou osou, viz lomená čára ABC.

Ve skriptu v části 9. 1 jsou příklady křivek a jejich parametrizace, takovými se zabývat nebudeme, jen si uvědomíme, že ani mnohem jednodušší křivku – kružnici – nemůžeme popsat jako graf jediné funkce $y = f(x)$.

Pokud jsme v rovině, pak pro každý bod $[x,y]$ nějaké křivky musíme najít parametrické rovnice pro jednotlivé proměnné, $x = x(t), y = y(t)$. To je stejné jako u přímky, jen tvar funkcí $x(t)$ a $y(t)$ může být mnohem složitější, jak vidíme u jednotlivých obrázků. Naše křivky budou úsečka, lomená čára, kružnice (nebo jen její část) a pak graf nějaké nám většinou známé funkce. Třeba parabola nebo hyperbola. Na str. 104 vidíme, že v případě grafu funkce $y = f(x)$ na nějakém intervalu $<a,b>$ provedeme parametrizaci snadno. Položíme $x = t, y = f(x)$ a připíšeme, že t je z intervalu $<a,b>$. Vidíme to v příkladu 9. 1, kde bereme celou parabolu, tedy předpokládáme, že t je libovolné reálné číslo. To nebude náš případ, my musíme mít jen část paraboly. Také vidíme, že možností parametrizací je víc. My ale budeme používat vždy $x = t, y = f(x)$.

V příkladu 9. 2 je připomenuta parametrizace úsečky a ukázána parametrizace kružnice se středem $[a,b]$ a poloměrem r . Orientací křivky se budeme zabývat až u křivkového integrálu druhého druhu, to zatím můžete přeskočit.

Část 9. 1 končí vzorcem, který ukazuje, jak můžeme pomocí určitého integrálu jedné proměnné vypočítat délku křivky, když známe její parametrizaci na intervalu $<a,b>$.

Část 9. 2 je tedy věnována křivkovému integrálu prvního druhu. Ten je definován v rámečku 9. 3 na str. 105. Integrujeme podél křivky C, která musí mít jisté vlastnosti, ale to v našich příkladech berte automaticky. Vidíme, že křivkový integrál převádíme na určitý integrál na intervalu $<a,b>$. Za x a y dosadíme z parametrických rovnic křivky C, které musíme nejprve sestavit. Vidíme, že pokud funkce $f(x,y)$ bude rovna 1, pak dostaneme vzorec pro délku křivky. Je to pořád stejné. Dvojný integrál „z jedničky“ vyjadřoval obsah plochy, trojný integrál objem tělesa, nyní křivkový „z jedničky“ udává délku křivky. To je geometrický význam tohoto integrálu. Fyzikální je v textu zmíněn, pokud by funkce $f(x,y)$ vyjadřovala hustotu látky, ze které je vyroben tenký drát, vypočítáme křivkovým integrálem prvního druhu jeho hmotnost. Drát nikdy není křivka, ale jistě je lepší tenký drát považovat za křivku, než za tenký „nějak zakřivený“ válec.

Podobný příklad, jako 9. 5 bychom dělali na cvičení. Na úsečku se díváme jako na část lineární funkce a parametrizujeme ji jako bylo zmíněno výše. Vypočítáme derivace funkcí $x = x(t), y = y(t)$ a dosadíme do určitého integrálu. V případě úsečky jsou derivace konstanty a odmocninu můžeme vytknout před určitý integrál. Výpočet je jasný.

V příkladu 9. 6 jsou křivkou strany trojúhelníka. Každou z nich parametrizuje, počítáme tři integrály. V tomto případě říkáme, že je křivka uzavřená.

V příkladu 9. 7 je křivkou celá kružnice. Asi i my budeme vždy mít v našich příkladech kružnici se středem v počátku. Když se podíváte na parametrické rovnice, jistě vám to připomene polární souřadnice. Kružnice jsou v tomto případě všechny body, které mají vzdálenost od počátku 3. Tedy žádné proměnné ρ. Místo φ máme nyní t, ale plní stejnou roli. Protože jde o celou kružnici, pak t je z intervalu $<0,2\pi>$. Parametrické vyjádření zderivujeme, derivace umocníme (takže, když popleteme znaménka, chyba nevznikne) a dosadíme pod odmocninu. I tady nakonec pod odmocninou zůstane jen konstanta, kterou můžeme vytknout před integrál.

Podobným způsobem jako v rovině můžeme počítat i křivkový integrál prvního druhu přes prostorovou křivku. Už ze střední školy víte, že parametrické rovnice přímky jsou nyní tři. Nic jiného než úsečku v prostoru neděláme. Příklad 9. 8 ukazuje, že je vše opravdu stejné.

Podívejte se na mé příklady a můžete si vypočítat všechny příklady ze cvičení 1 na straně 113.