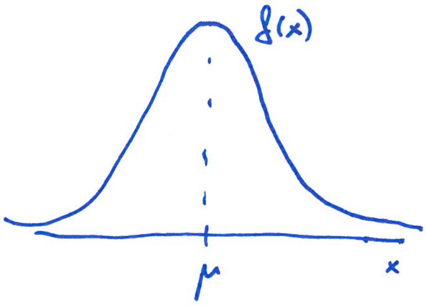
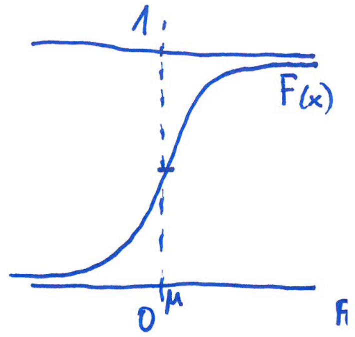
Normální rozdělení

Spojitá náh. veličina X má normální rozdělení s parametry μ a σ^2, píšeme $X \sim N(\mu, \sigma^2)$, jestliže X má hustotu $f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}}$, $x \in \mathbb{R}$.





$EX = \mu$

$DX = \sigma^2$

$F(x) = \int_{-\infty}^{x} f(t)\,dt$ .... nejde vyjádřit analyticky

speciálně $Y \sim N(0,1)$ standardizované (normované) normální rozdělení

$f_Y(y) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \cdot e^{-\frac{y^2}{2}}$, $y \in \mathbb{R}$ $\qquad F_Y(y) =: \Phi(y) = \int_{-\infty}^{y} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \cdot e^{-\frac{t^2}{2}}\,dt$ ... nejde vyjádřit analytic

hodnoty tabelovány

$EY = 0$

$DY = 1$

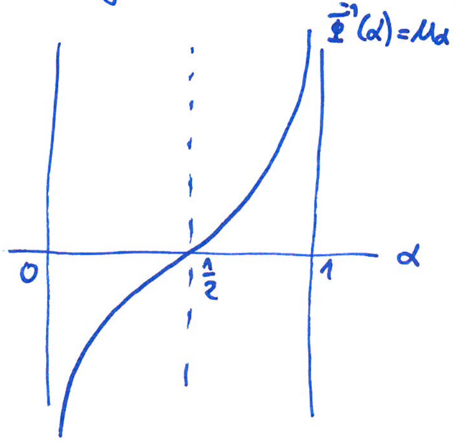
ze symetrie navíc platí, že $\Phi(x) + \Phi(-x) = 1$, $\forall x \in \mathbb{R}$ $\Rightarrow$ tabelovány jen pro kladné hodnoty $x > 0$.

Použití:

$X \sim N(\mu, \sigma^2) \Rightarrow \frac{X-\mu}{\sigma} \sim N(0,1)$ ... standardizace

$$\overset{F_X(x)}{\overset{\parallel}{P(X \le x)}} = P\Big(\overset{\sim N(0,1)}{\frac{X-\mu}{\sigma}} \le \frac{x-\mu}{\sigma}\Big) = \Phi\Big(\frac{x-\mu}{\sigma}\Big)$$

Kvantilová funkce normovaného normální rozdělení $N(0,1)$ je inverzní funkce k distr. fci $\Phi(x)$, značíme ji $\Phi^{-1}(\alpha)$, $\alpha \in (0,1)$. Její hodnoty jsou opět tabelovány.



α-kvantil $N(0,1)$ je $u_\alpha = \Phi^{-1}(\alpha)$ pro $\alpha \in (0,1)$

Platí: $u_\alpha = -u_{1-\alpha}$, $\alpha \in (0,1)$

$\Rightarrow$ tabelace jen pro $\alpha > \frac{1}{2}$.

1.) Počet bodů z testu inteligence považujme za náh. veličinu s normálním rozdělením se střední hodnotou 100 a směrodatnou odchylkou 15. Jaké procento lidí by z testu získalo více než 105 bodů?

X = získaný počet bodů

$X \sim N(100, 15^2)$

hodnotu najdeme v tabulce

$$P(X>105) = 1 - P(\overset{\sim N(100,225)}{X} \leq 105) = 1 - P\Big(\overset{\sim N(0,1)}{\frac{X-100}{15}} \leq \overset{\frac{1}{3}}{\frac{105-100}{15}}\Big) = 1 - \Phi(0{,}33) =$$

$$= 1 - 0{,}63 = 0{,}37. \Rightarrow 37\ \%$$

2.) Předpokládejme, že nosnost nákupní tašky má normální rozdělení se střední hodnotou 5 kg a rozptylem 1 kg^2. Jaká je pravděpodobnost, že při testování 16 tašek bude průměrná nosnost menší než 4,5 kg?

X_i = nosnost i-té tašky, pro $i = 1, 2, \dots, 16$

$X_i \sim N(5, 1)$ a $X_1, \dots, X_{16}$ jsou vzájemně nezávislé

$$\overline{X} = \frac{1}{16} \sum_{i=1}^{16} X_i \quad \dots \text{ průměrná nosnost}$$

$$\overline{X} \sim N\left(5, \frac{1}{16}\right)$$

normalita plyne z věty o transformaci

$$E\overline{X} = E\left(\frac{1}{16}\sum_{i=1}^{16} X_i\right) = \frac{1}{16}\sum_{i=1}^{16} EX_i = \frac{1}{16}\cdot(\underbrace{5+\dots+5}_{16\times}) = 5$$

$$D\overline{X} = D\left(\frac{1}{16}\sum X_i\right) \overset{\text{NEZ.}}{=} \frac{1}{16^2}\sum_{i=1}^{16} DX_i = \frac{1}{16^2}(\underbrace{1+\dots+1}_{16\times}) = \frac{1}{16}$$

není tabelována

$$P(\overline{X} < 4{,}5) = P(\overset{\sim N(5,\frac{1}{16})}{\overline{X}} \leq 4{,}5) = P\left(\overset{\sim N(0,1)}{\frac{\overline{X}-5}{\sqrt{\frac{1}{16}}}} \leq \overset{= -2}{\frac{4{,}5-5}{\sqrt{\frac{1}{16}}}}\right) = \Phi(-2) = 1 - \Phi(2) \doteq 0{,}0228.$$

3.) Hmotnost masa v jedné porci je náh. veličina s normálním rozd. $N(100, 50^2)$. Jaká je pravd., že na přípravu 10 obědů bude stačit 0,97 kg?

X_i = hmotnost masa v i-té porci pro $i=1,\dots,10$

$X_i \sim N(100, 2500)$ a $X_1, \dots, X_{10}$ jsou vzájemně nezávislé

$S = \sum_{i=1}^{10} X_i$ .... celková hmotnost masa

$$S \sim N(10 \cdot 100, 10 \cdot 2500)$$

normalita plyne z věty o transformaci

$$ES = E\left(\sum_{i=1}^{10} X_i\right) = \sum_{i=1}^{10} EX_i = 10 \cdot EX_i = 10 \cdot 100$$

$$DS = D\left(\sum_{i=1}^{10} X_i\right) \overset{NEZ}{=} \sum_{i=1}^{10} DX_i = 10 \cdot DX_i = 10 \cdot 2500$$

$$P(S \leq 970) = P\Bigg(\overset{\sim N(0,1)}{\frac{S - 1000}{\sqrt{25\,000}}} \leq \overset{-0{,}1897}{\frac{970 - 1000}{\sqrt{25\,000}}}\Bigg) \doteq \Phi(-0{,}19) = 1 - \Phi(0{,}19) = 0{,}421.$$

4.) Výška desetiletých chlapců je náh. veličina s normálním rozdělením se střední hodnotou 136,1 cm a rozptylem $40{,}96\ cm^2$.

a) Jaká je pravd., že výška náh. vybraného chlapce bude mezi 130 a 140 cm?

X = výška náh. vybraného chlapce

$$X \sim N(136{,}1;\ 40{,}96)$$

$$P(130 \leq X \leq 140) = P(130 < X \leq 140) = P\Bigg(\overset{\doteq -0{,}95}{\frac{130 - 136{,}1}{\sqrt{40{,}96}}} < \overset{\sim N(0,1)}{\frac{X - 136{,}1}{\sqrt{40{,}96}}} \leq \overset{\doteq 0{,}61}{\frac{140 - 136{,}1}{\sqrt{40{,}96}}}\Bigg)$$

$$= \Phi(0{,}61) - \overset{1 - \Phi(0{,}95)}{\overset{\parallel}{\Phi(-0{,}95)}} \doteq 0{,}554$$

b) V obchodě prodávají konfekční velikosti pro chlapce velikosti 120 - 150 cm. Jaká je pravděpodobnost, že mi chlapec neoblékne?

$$P(X<120)+P(X>150) = 1-P(120 \le X \le 150) = \ldots = 1-[\Phi(2{,}17)-\Phi(-2{,}52)] = 0{,}021.$$

c) Jakou výšku by musel mít váš desetiletý chlapec, aby patřil k 5% nejvyšších? ~~[illegible]~~

Hledáme x tak, aby $P(X>x)=0{,}05 \iff P(X \le x) = 0{,}95$

$$P\Big(\underbrace{\frac{X-136{,}1}{6{,}4}}_{\sim N(0,1)} \le \frac{x-136{,}1}{6{,}4}\Big) = 0{,}95$$

$$\Phi\Big(\frac{x-136{,}1}{6{,}4}\Big) = 0{,}95 \quad \Big| \ \Phi^{-1}$$

hodnotu najdeme v tabulce

$$\frac{x-136{,}1}{6{,}4} = \Phi^{-1}(0{,}95) = u_{0{,}95} = 1{,}645$$

$$\underline{x = 146{,}6 \text{ cm}}$$

Musel by mít výšku alespoň 146,6 cm.

d) . . . . . . , . . . k 10 % nejnižších?

$P(X<x)=0{,}1$ Postup je analogický . . . . $x = 127{,}9$ cm. Musel by mít výšku maximálně 127,9 kg.

e) Zakládáme basketbalový tým. Kolik chlapců budeme potřebovat, aby jejich průměrná výška byla s pravd. 0,99 alespoň 135 cm?

X_i = výška i-tého chlapce $\quad X_i \sim N(136{,}1;\, 40{,}96)$

$\overline{X}$ = průměrná výška, $\overline{X} \sim N\Big(136{,}1;\, \dfrac{40{,}96}{n}\Big)$

$$P(\overline{X} \ge 135) = 0{,}99$$

$$P(\overline{X} \le 135) = 0{,}01$$

$$P\Bigg(\underbrace{\frac{\overline{X}-136{,}1}{\sqrt{\frac{40{,}96}{n}}}}_{\sim N(0,1)} \le \overbrace{\frac{135-136{,}1}{\sqrt{\frac{40{,}96}{n}}}}^{-0{,}17\sqrt{n}}\Bigg) = 0{,}01$$

$$\Phi(-0{,}17\sqrt{n}) = 0{,}01 \quad \Big| \ \Phi^{-1}$$

$$-0{,}17 \cdot \sqrt{n} = \Phi^{-1}(0{,}01) = -\Phi^{-1}(0{,}99) = -2{,}326$$

$$n = 183{,}1$$

$\Downarrow$

Potřebujeme alespoň 184 chlapců.

Příklady k procvičení:

Při prodeji vánočních kaprů má hmotnost kapra v jedné z kádí normální rozdělení se střední hodnotou 2,3 kg a směrodatnou odchylkou 0,3 kg.

a) Jaký podíl kaprů přesáhne svou hmotností 2,6 kg?

b) Chci koupit 5 kaprů. Jaká je pravd., že jejich celková hmotnost bude vyšší než 10 kg, ale menší než 12 kg?

c) Koupím 5 kaprů. Jaká je pravd., že jejich průměrná hmotnost bude vyšší než 2,5 kg?

d) Jakou hmotnost má procento nejtěžších kaprů?

Výsledky:

a) 16 %

b) 0,76

c) 0,07

d) větší než 2,9979 kg