Konstrukce bodových odhadů

MODEL: $X_1, \dots, X_n$ je náhodný výběr z rozdělení s distribuční funkcí $F(x, \theta)$, kde $\theta \in \Theta \subset \mathbb{R}^p$ je neznámý p-rozměrný parametr. Chceme získat jeho bodový odhad.

• Metoda momentů

Nechť existují obecné momenty $\mu'_k = \mu'_k(\theta) = EX_i^k$ pro $k = 1, \dots, p$.

označme jejich přirozené (empirické) odhady $M'_k = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i^k$ pro $k = 1, \dots, p$.

Řekneme, že $\tilde{\theta}$ je odhad parametru θ metodou momentů, jestliže řeší soustavu p-rovnic:

$$\mu'_k(\tilde{\theta}) = M'_k \quad \text{pro } k = 1, \dots, p.$$

1.) Nechť $X_1, \dots, X_n$ je náhodný výběr z $\Gamma(\alpha, \beta)$, kde $\alpha > 0$ a $\beta > 0$ jsou neznámé parametry. Najděte jejich odhady metodou momentů.

$p = 2$ … potřebujeme první dva momenty

hustota $\Gamma(\alpha, \beta)$ je
$$f(x, \alpha, \beta) = \frac{x^{\alpha-1} e^{-\frac{x}{\beta}}}{\beta^{\alpha}\, \Gamma(\alpha)}, \quad x > 0,$$
$$= 0, \quad \text{jinak.}$$

dopočítejte si sami

$$EX_i = \int_0^{\infty} x \cdot \frac{x^{\alpha-1} \cdot e^{-\frac{x}{\beta}}}{\beta^{\alpha} \cdot \Gamma(\alpha)}\, dx = \dots = \boxed{\alpha \cdot \beta \overset{!}{=} M'_1}$$

řešíme tuhle soustavu

takhle taky

$$EX_i^2 = \int_0^{\infty} x^2 \frac{x^{\alpha-1}\, e^{-\frac{x}{\beta}}}{\beta^{\alpha}\, \Gamma(\alpha)}\, dx = \dots = \boxed{\alpha(\alpha+1)\beta^2 \overset{!}{=} M'_2}$$

$$\beta = \frac{M_1'}{\alpha}$$

$$M_2' = \frac{(M_1')^2 \cdot (\alpha+1)}{\alpha} \Rightarrow \alpha M_2' = \alpha \cdot M_1'^2 + M_1'^2$$

$$\tilde{\alpha} = \frac{M_1'^2}{M_2' - M_1'^2}, \quad \tilde{\beta} = \frac{M_2' - M_1'^2}{M_1'}.$$

2) Nechť $X_1, \dots, X_n$ je náhodný výběr z rozdělením s distribuční funkcí

$$F(x, \alpha_1, \alpha_2) = \begin{cases} 1 - e^{-\alpha_2 (x - \alpha_1)}, & x > \alpha_1, \\ 0, & x \le \alpha_1, \end{cases}$$

kde $\alpha_1 \in \mathbb{R}$ a $\alpha_2 > 0$ jsou neznámé parametry.

Odhadněte je metodou momentů.

Řešení: $\tilde{\alpha}_1 = M_1' - \sqrt{M_2' - M_1'^2}$,

$$\tilde{\alpha}_2 = \frac{1}{\sqrt{M_2' - M_1'^2}}.$$

- Metoda maximální věrohodnosti

nechť existuje hustota n.v. X_i, označme ji $f(x, \theta)$

$\mathbb{X} = (X_1, \dots, X_n)'$ má hustotu $\prod_{i=1}^{n} f(x_i, \theta) = f(x_1, \theta) \cdot \ldots \cdot f(x_n, \theta) = L(\theta)$ funkce θ … věrohodnostní funkce (věrohodnost)

$\hat{\theta}$ je odhad parametru θ metodou maximální věrohodnosti, jestliže $\hat{\theta} = \underset{\theta \in \Theta}{\operatorname{argmax}}\, L(\theta)$.

$$l(\theta) = \log L(\theta) = \log \prod_{i=1}^{n} f(x_i, \theta) = \sum_{i=1}^{n} \log f(x_i, \theta)$$ … logaritmická věrohodnostní funkce

$$\hat{\theta} = \underset{\theta \in \Theta}{\operatorname{argmax}}\, L(\theta) = \underset{\theta \in \Theta}{\operatorname{argmax}}\, l(\theta).$$

3) Nechť $X_1, \ldots, X_n$ je náhodný výběr z $A(\theta)$, kde $\theta \in (0,1)$ je neznámý parametr. Odhadněte jej pomocí metody maximální věrohodnosti.

$$\left.\begin{array}{l} P(X_i = 1) = \theta \\ P(X_i = 0) = 1-\theta \end{array}\right\} \overset{P(x_i)}{\overset{\parallel}{f}}(x_i, \theta) = \theta^{x_i}(1-\theta)^{1-x_i}, \quad x_i = 0, 1$$

$P(X_i = x) = 0$ jinak

$$\log f(x_i, \theta) = \log \theta^{x_i}(1-\theta)^{1-x_i} = x_i \log \theta + (1-x_i)\log(1-\theta)$$

$$l(\theta) = \sum_{i=1}^{n} \log f(x_i, \theta) = \sum_{i=1}^{n} \{x_i \log \theta + (1-x_i)\log(1-\theta)\} = \log \theta \sum_{i=1}^{n} x_i + \log(1-\theta) \sum_{i=1}^{n} (1-x_i) =$$

$$\log \theta \sum_{i=1}^{n} x_i + \log(1-\theta) \cdot \left(n - \sum_{i=1}^{n} x_i\right) \ldots$$ maximalizujeme přes θ.

$$l'(\theta) = \frac{\sum_{i=1}^{n} x_i}{\theta} - \frac{n - \sum_{i=1}^{n} x_i}{1-\theta} \overset{!}{=} 0$$

$$\sum_{i=1}^{n} x_i \, (1-\theta) = \theta \left(n - \sum_{i=1}^{n} x_i\right)$$

$$\sum_{i=1}^{n} x_i = n\theta$$

$$\theta = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} x_i$$ ... je to maximum? $l''(\theta) < 0$.

$$\hat{\theta} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} X_i = \overline{X}$$

4) Nechť $X_1, \ldots, X_n$ je náhodný výběr z $Po(\lambda)$, kde $\lambda > 0$ je neznámý parametr. Odhadněte jej metodou max. věrohodnosti.

Řešení: $\hat{\lambda} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} X_i = \overline{X}$.

5) Nechť $X_1, \ldots, X_n$ je náhodný výběr z $Ex(\lambda)$, kde $\lambda > 0$ je neznámý parametr. Odhadněte jej metodou max. věrohodnosti.

$$f(x_i; \lambda) = \lambda \cdot e^{-\lambda x_i}, \; x_i > 0.$$

$$\log f(x_i, \lambda) = \log \lambda - \lambda x_i$$

$$\ell(\lambda) = \sum_{i=1}^{n} \log f(x_i, \lambda) = \sum_{i=1}^{n} \{\log \lambda - \lambda x_i\} = n \log \lambda - \lambda \sum_{i=1}^{n} x_i$$ … maximalizujeme přes λ.

$$\ell'(\lambda) = \frac{n}{\lambda} - \sum_{i=1}^{n} x_i \overset{!}{=} 0$$

$$\lambda = \frac{n}{\sum_{i=1}^{n} x_i} = \frac{1}{\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i}$$ … je to maximum? $\ell''(\lambda) < 0$.

$$\hat{\lambda} = \frac{1}{\overline{X}}$$

6.) Nechť $X_1, \dots, X_n$ je náh. výběr s hustotou

$$f(x, b) = \frac{1}{\sqrt{\pi b}} \cdot e^{-\frac{x^2}{b}}$$, $x \in \mathbb{R}$, kde $b > 0$ je neznámý parametr. Odhadněte jej metodou max. věrohodnosti.

Řešení: $\hat{b} = \frac{2}{n} \sum_{i=1}^{n} X_i^2$.

7.) Nechť $X_1, \dots, X_n$ je náh. výběr z $Rs(0, \theta)$, kde $\theta > 0$ je neznámý parametr. Odhadněte jej metodou max. věrohodnosti.

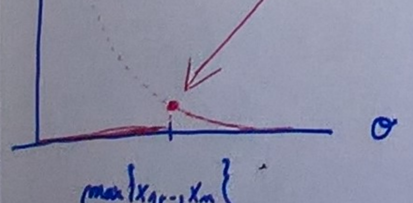
$$f(x_i, \theta) = \frac{1}{\theta}, \quad 0 \le x_i \le \underline{\theta}$$
$$= 0, \quad \text{jinak}$$
závisí na θ

$$\mathbb{1}\{x > 0\} = \begin{cases} 1 \dots x > 0 \\ 0 \dots x \le 0 \end{cases}$$ indikátorová funkce

$$f(x_i, \theta) = \frac{1}{\theta} \cdot \mathbb{1}\{0 \le x_i \le \theta\}$$

není spojitá funkce v θ!

$$L(\theta) = \prod_{i=1}^{n} \frac{1}{\theta} \cdot \mathbb{1}\{0 \le x_i \le \theta\} = \frac{1}{\theta^n} \cdot \underbrace{\prod_{i=1}^{n} \mathbb{1}\{0 \le x_i \le \theta\}}_{\substack{= 1 \dots \text{pokud jsou splněny všechny nerovnosti} \\ = 0 \dots \text{jinak}}} = \frac{1}{\theta^n} \cdot \mathbb{1}\{0 \le \min\{x_1, \dots, x_n\}, \max\{x_1, \dots, x_n\} \le \theta\}$$



$$\left.\begin{matrix} 0 \le x_1 \\ 0 \le x_2 \\ \vdots \\ 0 \le x_n \end{matrix}\right\} 0 \le \min\{x_1, \dots, x_n\}$$

$$\left.\begin{matrix} x_1 \le \theta \\ x_2 \le \theta \\ \vdots \\ x_n \le \theta \end{matrix}\right\} \max\{x_1, \dots, x_n\} \le \theta$$

$$\hat{\theta} = \operatorname{argmax} L(\theta) = \max\{X_1, \dots, X_n\}.$$