Príklady na precvičovanie – Singulárne body autonómnych systémov

Pojmom *autonómny systém* sa označuje systém (vo všeobecnosti nelineárnych) diferenciálnych rovníc prvého rádu, v ktorom sa explicitne nevyskytuje nezávislá premenná, t.j., premenná, podľa ktorej sa v daných rovniciach derivuje. Konkrétne, jedná sa o systém n rovníc tvaru

$$\begin{aligned} x_1' &= f_1(x_1, \ldots, x_n), \\ x_2' &= f_2(x_1, \ldots, x_n), \\ &\vdots \\ x_{n-1}' &= f_{n-1}(x_1, \ldots, x_n), \\ x_n' &= f_n(x_1, \ldots, x_n), \end{aligned} \tag{1}$$

kde funkcie $f_i(x_1, \ldots, x_n)$, $i = 1, \ldots, n$, sú spojité na nejakej otvorenej množine $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$ a $x_i(t)$, $i = 1, \ldots, n$, sú neznáme (skalárne) funkcie nezávislej premennej t. Uvedený systém sa spravidla študuje za predpokladu existencie a jednoznačnosti každej jeho začiatočnej úlohy v množine Ω, t.j., každý začiatočný bod $[x_{01}, x_{02}, \ldots, x_{0n}] \in \Omega$ generuje práve jedno riešenie $x_1(t), \ldots, x_n(t)$ systému (1) spĺňajúce začiatočnú podmienku

$$x_1(0) = x_{01}, \quad x_2(0) = x_{02}, \quad \ldots, \quad x_n(0) = x_{0n}.$$

Naviac, toto jediné riešenie je definované pre každé $t \in \mathbb{R}$ (tzv. maximálne riešenie). V praktických aplikáciach sa premenná t často interpretuje ako *čas* a funkcie $x_1(t), \ldots, x_n(t)$ predstavujú nejaké *veličiny vyvíjajúce sa v* závislosti na *čase* podľa nejakého zákona, ktorý je reprezentovaný systémom (1). Postupným zakreslením bodov $[x_1(t), \ldots, x_n(t)]$ daného riešenia pre $t \in \mathbb{R}$ zrejme dostaneme nejakú krivku v množine Ω. V tomto kontexte sa množina Ω nazýva *fázový priestor* daného systému a daná vykreslená krivka *trajektóriou*, resp. *orbitou* daného riešenia $x_1(t), \ldots, x_n(t)$ v Ω. Vďaka predpokladu existencie a jednoznačnosti riešení systému (1) každým bodom fázového priestoru Ω prechádza práve jedna trajektória systému (1), a teda tajektórie odpovedajúce dvom rôznym riešeniam systému (1) sa nikde nepretínajú (samy si to premyslite :)). Ďalším dôsledkom uvedeného predpokladu je klasifikácia trajektórií systému (1). Každá trajektória je buď jednobodová (odpovedá konštantnému riešeniu systému (1)) alebo uzavretá krivka, tzv. cyklus (odpovedá nekonštantnému periodickému riešeniu systému (1)), alebo nikde nepretína samu seba (odpovedá neperiodickému riešeniu systému (1)). Z hľadiska kvalitatívnej teórie autonómnych systémov (1), t.j., skúmania vlastností riešení systému (1) bez znalosti ich explicitného tvaru, majú prvoradý význam práve jednobodové trajektórie a cykly. Bod $A = [a_1, \dots, a_n] \in \Omega$ sa nazýva *singulárny bod* (alebo aj *rovnovážny bod, stacionárny bod, kritický bod, ekvilibrium*) systému (1), ak je nulým bodom pravých strán rovníc (1), t.j., platia rovnosti $f_i(A) = 0$ pre každé $i = 1, \dots, n$. Nechávame na čitateľa, aby si sám premyslel, že bod $A = [a_1, \dots, a_n] \in \Omega$ je singulárnym bodom systému (1) práve vtedy, keď systém (1) má konštantné riešenie $x_i(t) \equiv a_i$, $i = 1, \dots, n$:). Rozlišujeme niekoľko základných typov singulárnych bodov systému (1) – *stred* (špeciálny prípad tzv. *bodu rotácie*), *ohnisko*, *uzol* (*vlastný* alebo *nevlastný*) a *sedlo*. Táto klasifikácia je podmienená správaním sa trajektórií systému (1) na istom okolí daného singulárneho bodu. Napríklad typickou vlastnosťou singulárneho bodu typu ohnisko je skutočnosť, že každá trajektória, ktorá je k nemu dostatočne blízko, má tvar špirály so stredom v tomto bode. V prípade, ak sa takéto trajektórie s rastúcim argumentom t navíjajú na daný singulárny bod, hovoríme o *stabilnom ohnisku*, kým v prípade, že trajektórie sa s rastúcim t odvíjajú od singulárneho bodu, sa jedná o *nestabilné ohnisko*. V prípade singulárneho bodu typu uzol každá dostatočne blízka trajektória buď vchádza do tohto bodu alebo každá blízka trajektória vychádza z tohto bodu pod nejakým konečným uhlom (resp. s nejakou polodotyčnicou). Potom hovoríme buď o *stabilnom* alebo *nestabilnom uzle*.

V prípade, ak systém (1) je rádu $n = 2$ s konštantnými koeficientami, t.j.,

$$x' = ax + by, \quad y' = cx + dy, \quad a, b, c, d \in \mathbb{R}, \tag{2}$$

pričom matica systému

$$M = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \tag{3}$$

je *regulárna*, je klasifikácia singulárnych bodov pomerne jednoduchá. Systém (2) má iba jeden singulárny bod $[0, 0]$ (samy overte :)), pričom jeho druh závisí na vlastných číslach λ_1, λ_2 matice M. Konkrétne, platí:

$$\lambda_1, \lambda_2 \text{ sú reálne rôzne } \Rightarrow \begin{cases} \text{nevlastný nestabilný uzol, ak } \lambda_1, \lambda_2 > 0, \\ \\ \text{nevlastný stabilný uzol, ak } \lambda_1, \lambda_2 < 0, \\ \\ \text{sedlo, ak } \lambda_1, \lambda_2 \text{ majú opačné znamienka.} \end{cases}$$

$$\lambda_1, \lambda_2 \text{ sú nereálne komplexne združené } \Rightarrow \begin{cases} \text{stred, ak } \operatorname{Re} \lambda_1 = \operatorname{Re} \lambda_2 = 0, \\ \\ \text{nestabilné ohnisko, ak } \operatorname{Re} \lambda_1 = \operatorname{Re} \lambda_2 > 0, \\ \\ \text{stabilné ohnisko, ak } \operatorname{Re} \lambda_1 = \operatorname{Re} \lambda_2 < 0. \end{cases}$$

$$\lambda_1 = \lambda_2 \Rightarrow \begin{cases} \text{nevlastný nestabilný uzol, ak } M \text{ nie je diagonálna a } \lambda_1 = \lambda_2 > 0, \\ \\ \text{nevlastný stabilný uzol, ak } M \text{ nie je diagonálna a } \lambda_1 = \lambda_2 < 0, \\ \\ \text{vlastný nestabilný uzol, ak } M \text{ je diagonálna a } \lambda_1 = \lambda_2 > 0 \\ \\ \text{vlastný stabilný uzol, ak } M \text{ je diagonálna a } \lambda_1 = \lambda_2 < 0. \end{cases}$$

Samy nad tým kriticky porozmýšľajte, hlavne nad klasifikáciou vlastných čísiel matice M ;). Uvedené výsledky týkajúce sa lineárneho systému (3) sa dajú za istých predpokladov využiť i pri skúmaní singulárnych bodov všeobecného nelineárneho rovinného autonómneho systému

$$x' = f(x, y), \quad y' = g(x, y). \tag{4}$$

Nech $A = [a_1, a_2]$ je *izolovaný* singulárny bod systému (4), t.j., platí $f(A) = 0 = g(A)$, a nech funkcie $f(x, y)$ a $g(x, y)$ sú *analytické* v bode A, t.j., na nejakom okolí bodu A sú rozvinuteľné do mocninového radu (so stredom v bode A). Ďalej predpokladajme, že matica

$$J(A) = \begin{pmatrix} f'_x(A) & f'_y(A) \\ g'_x(A) & g'_y(A) \end{pmatrix}$$

je *regulárna*. Poznamenajme, že $J(A)$ je zrejme Jacobiho matica zobrazenia $[x, y] \to [f(x, y), g(x, y)]$ (samy si premyslite :)). Uvažujme lineárny autonómny systém s maticou $J(A)$, t.j.,

$$\begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix}' = J(A) \cdot \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} \tag{5}$$

Vďaka regulárnosti matice $J(A)$ má systém (5) jediný singulárny bod $[0, 0]$. Potom typ singulárneho bodu A systému (4) je rovnaký ako typ singulárneho bodu $[0, 0]$ systému (5), konkrétne platí:

bod $[0, 0]$ je nevlastný (vlastný) uzol, resp. ohnisko, resp. sedlo vzhľadom na (5)

$$\Downarrow$$

bod A je nevlastný (vlastný) uzol, resp. ohnisko, resp. sedlo vzhľadom na (4)

bod $[0, 0]$ je stred vzhľadom na (5)

$$\Downarrow$$

bod A je stred alebo ohnisko vzhľadom na (4)

Pri vyšetrovaní charakteru stacionárneho bodu A systému (5) nám teda stačí preskúmať singulárny bod $[0, 0]$ lineárneho systému (4) pomocou vlastných čísiel matice $J(A)$. Systém (4) sa nazýva *linearizáciou* systému (5) na okolí bodu A. Je to vlastne *lineárna aproximácia* vo všeobecnosti nelineárneho systému (5) na istom okolí bodu A. Skutočne, vďaka predpokladu sú funkcie $f(x, y)$ a $g(x, y)$ spojito diferencovateľné, a teda na dostatočne malom okolí bodu A ich môžeme aproximovať ich prvými diferenciálmi v bode A, t.j.,

$$f(x, y) \approx f(A) + \mathrm{d}f(A, x, y) = f(A) + f'_x(A) \cdot (x - a_1) + f'_y(A) \cdot (y - a_2),$$

$$g(x, y) \approx g(A) + \mathrm{d}g(A, x, y) = g(A) + g'_x(A) \cdot (x - a_1) + g'_y(A) \cdot (y - a_2)$$

(samy si premyslite :)). Avšak $f(A) = 0 = g(A)$, keďže A je singulárny bod systému (4). Preto máme

$$\begin{pmatrix} f(x, y) \\ g(x, y) \end{pmatrix} \approx \begin{pmatrix} f'_x(A) \cdot (x - a_1) + f'_y(A) \cdot (y - a_2) \\ g'_x(A) \cdot (x - a_1) + g'_y(A) \cdot (y - a_2) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} f'_x(A) & f'_y(A) \\ g'_x(A) & g'_y(A) \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x - a_1 \\ y - a_2 \end{pmatrix}$$

Pre systém (4) dostávame na dostatočne malom okolí A aproximáciu

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} \approx \underbrace{\begin{pmatrix} f'_x(A) & f'_y(A) \\ g'_x(A) & g'_y(A) \end{pmatrix}}_{J(A)} \cdot \begin{pmatrix} x - a_1 \\ y - a_2 \end{pmatrix}.$$

Zavedením nových premenných $u = x - a_1$ a $v = y - a_2$ napokon máme

$$\begin{pmatrix} u' \\ v' \end{pmatrix} \approx J(A) \cdot \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} \quad \text{pre } u, v \text{ z malého okolia bodu } [0,0]$$

(pozorne si premyslite :)). Posledná formula tak ukazuje, že systém (5) je skutočne lineárnou aproximáciou pôvodného systému (4) na dostatočne malom okolí bodu A. Je teda možné očakávať, že charakter singulárneho bodu $[0,0]$ vzhľadom na systém (5) bude vhodnou „aproximáciou" charakteru vyšetrovaného singulárneho bodu A systému (4), čo vyjadrujú hrubo zvýraznené implikácie vyššie.

Poznamenajme ešte, že vyššie uvedené skúmanie a klasifikácia singulárnych bodov autonómneho systému (4) platia za predpokladu regulárnosti Jacobiho matice $J(x, y)$ v danom singulárnom bode. V prípade, ak pre nejaký singulárny bod A systému (4) je matica $J(A)$ *singulárna*, hovoríme o tzv. *neelementárnom type* singulárneho bodu A. Správanie trajektórií v okolí bodu A je v tomto prípade podstatne zložitejšie.

Riešené príklady

Príklad 1

Určme typ singulárneho bodu $[0,0]$ pre lineárny autonómny systém

$$x' = 2x + y, \quad y' = 3x + 4y.$$

Riešenie:

Matica daného lineárneho systému

$$M = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$$

je zrejme regulárna, preto stačí vyšetriť jej vlastné čísla (samy overte :)). Charakteristický polynóm matice M má tvar

$$\begin{vmatrix} 2-\lambda & 1 \\ 3 & 4-\lambda \end{vmatrix} = \lambda^2 - 6\lambda + 5 = (\lambda - 1)(\lambda - 5),$$

a preto vlastné čísla sú $\lambda_1 = 1$ a $\lambda_2 = 5$. Sú rôzne, obidve reálne a kladné, preto singulárny bod $[0, 0]$ je nevlastný nestabilný uzol.

Príklad 2

Charakterizujme všetky singulárneho body lineárneho autonómneho systému

$$x' = 3x + 5y, \quad y' = -2x - 3y.$$

Riešenie:

Matica systému v zadaní príkladu

$$M = \begin{pmatrix} 3 & 5 \\ -2 & -3 \end{pmatrix}$$

je regulárna (samy overte ;)), a teda má jediný singulárny bod $[0, 0]$. Pre vlastné čísla matice M máme

$$0 = \begin{vmatrix} 3-\lambda & 5 \\ -2 & -3-\lambda \end{vmatrix} = \lambda^2 + 1 \quad \Longrightarrow \quad \lambda_1 = \mathrm{i}, \quad \lambda_2 = -\mathrm{i}$$

(i toto samy overte :)). Vlastné čísla sú rýdzo imaginárne, preto singulárny bod $[0, 0]$ je typu stred.

Príklad 3

Stanovme všetky singulárneho body a ich typ pre lineárny autonómny systém

$$x' = -3x + 2y, \quad y' = -2x + y.$$

Riešenie:

Predložený systém má jediný singulárny bod $[0, 0]$, nakoľko matica systému

$$M = \begin{pmatrix} -3 & 2 \\ -2 & 1 \end{pmatrix}$$

je regulárna (samy overte :)). Pre jej vlastné čísla platí

$$0 = \begin{vmatrix} -3-\lambda & 2 \\ -2 & 1-\lambda \end{vmatrix} = \lambda^2 + 2\lambda + 1 = (\lambda+1)^2 \quad \Longrightarrow \quad \lambda_1 = \lambda_2 = -1$$

(samy skontrolujte výpočty :)). Matica M má teda jedno dvojnásobné záporné vlastné číslo. Očividne M nie je diagonálna, a preto singulárny bod $[0,0]$ je nevlastný stabilný uzol.

Príklad 4

Zistime typ singulárneho bodu $[0,0]$ pre lineárny autonómny systém

$$x' = 6x - 4y, \quad y' = -2x - y.$$

Riešenie:

V tomto prípade pre vlastné čísla príslušnej matice systému dostávame

$$0 = \begin{vmatrix} 6-\lambda & -4 \\ -2 & -1-\lambda \end{vmatrix} = \lambda^2 - 5\lambda - 14 = (\lambda+2)(\lambda-7) \quad \Longrightarrow \quad \lambda_1 = -2, \quad \lambda_2 = 7$$

(samy overte ;)). Matica M je preto regulárna (prečo? :)). A nakoľko získané vlastné čísla sú rôzne reálne s navzájom opačnými znamienkami, singulárny bod $[0,0]$ má charakter sedla.

Príklad 5

Overme, že singulárneho bodu $[0,0]$ je typu nestabilné ohnisko pre lineárny autonómny systém

$$x' = -3x + 2y, \quad y' = -2x - 3y.$$

Riešenie:

Vlastné čísla matice systému sú nereálne s nenulovou reálnou časťou, nakoľko

$$0 = \begin{vmatrix} -3-\lambda & 2 \\ -2 & -3-\lambda \end{vmatrix} = \lambda^2 + 6\lambda + 13 = (\lambda+3-2\mathrm{i})(\lambda+3+2\mathrm{i}) \Longrightarrow \lambda_{1,2} = -3 \pm 2\mathrm{i}$$

(samy overte :)). Singulárny bod $[0,0]$ je teda skutočne ohniskom, a to stabilným, pretože $\operatorname{Re}\lambda_{1,2} = -3 < 0$.

Príklad 6

Vyšetrime singulárne body lineárneho autonómneho systému

$$x' = x, \quad y' = y.$$

Riešenie:

Ihneď vidíme, že matica M predloženého systému je identická matica rádu 2, a teda má dvojnásobné vlastné číslo $\lambda_{1,2} = 1$. Existuje teda jediný singulárny bod $[0,0]$ daného systému typu vlastný nestabilný uzol, keďže $\lambda_{1,2} > 0$.

Príklad 7

Vyšetrime typ singulárnych bodov lineárneho autonómneho systému

$$x' = 5x + 5y - 3, \quad y' = 3x - 3y - 5.$$

Riešenie:

Predložený systém je lineárny autonómny, avšak *nehomogénny*. Jeho singulárne body stanovíme riešením dvojice lineánych rovníc

$$5x + 5y - 3 = 0, \quad 3x - 3y - 5 = 0.$$

Nechávame na čitateľa, aby sa presvedčil, že táto sústava má jediné riešenie $x = \frac{17}{15}$ a $y = -\frac{8}{15}$. Systém v zadaní príkladu má teda jediný singulárny bod $A = \left[\frac{17}{15}, -\frac{8}{15}\right]$. V pôvodnom systéme teraz vykonáme zámenu premenných

$$u := x - \frac{17}{15}, \quad v := y + \frac{8}{15}.$$

Získame tak nový, transformovaný systém s premennými u a v tvaru

$$u' = 5u + 5v, \quad v' = 3u - 3v$$

(samy overte detaily výpočtov ;)). Tento lineárny systém je už homogénny s regulárnou maticou

$$M = \begin{pmatrix} 5 & 5 \\ 3 & -3 \end{pmatrix}$$

(i toto samy overte :)). Má teda jediný singulárny bod $[0,0]$. A keďže vykonaná transformácia geometricky znamená len *posun* premenných, jedná sa vlastne o vyjadrenie singulárneho bodu A v nových premenných. Preto stačí vyšetriť charakter bodu $[0,0]$ vzhľadom na nový homogénny systém (samy si to dobre premyslite :)). Vlastné čísla matice M spĺňajú

$$0 = \begin{vmatrix} 5-\lambda & 5 \\ 3 & -3-\lambda \end{vmatrix} = \lambda^2 - 2\lambda - 30 \quad \Longrightarrow \quad \lambda_{1,2} = 1 \pm \sqrt{31}$$

(samy overte ;)). Sú rôzne, obidve reálne, s navzájom opačnými znamienkami. Preto singulárny bod $[0,0]$, a teda i singulárny bod A, je typu sedlo.

Príklad 8

Vyšetrime typ singulárnych bodov autonómneho systému

$$x' = y(1 + x - y^2), \quad y' = x(1 + y - x^2).$$

Riešenie:

Skúmaný autonómny systém je nelineárny a v súlade s označením v (4) máme

$$f(x,y) = y(1 + x - y^2), \quad g(x,y) = x(1 + y - x^2).$$

Nájdeme všetky jeho singulárne body, t.j., riešenia sústavy

$$y(1 + x - y^2) = 0, \quad x(1 + y - x^2) = 0.$$

Samy ukážte, že tento algebraický systém má celkovo 7 riešení, a teda systém v zadaní príkladu má sedem singulárnych bodov, konkrétne

$$A_1 = [0,0], \quad A_2 = [0,1], \quad A_3 = [0,-1], \quad A_4 = [1,0], \quad A_5 = [-1,0],$$

$$A_6 = \left[\frac{1+\sqrt{5}}{2}, \frac{1+\sqrt{5}}{2}\right], \quad A_7 = \left[\frac{1-\sqrt{5}}{2}, \frac{1-\sqrt{5}}{2}\right] \quad :).$$

Každý z týchto bodov vyšetríme pomocou odpovedajúcej linearizácie pôvodného systému. Príslušná Jacobiho matica funkcií $f(x,y)$ a $g(x,y)$ má tvar

$$J(x,y) = \begin{pmatrix} f'_x(x,y) & f'_y(x,y) \\ g'_x(x,y) & g'_y(x,y) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y & 1+x-3y^2 \\ 1+y-3x^2 & x \end{pmatrix}$$

(samy overte :)). Pre body A_1, A_2, A_3, A_4, A_5 postupne dostávame

$$J(A_1) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \quad \Longrightarrow \quad \text{vlastné čísla } \lambda_{1,2} = \pm 1,$$

$$J(A_2) = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 2 & 0 \end{pmatrix} \quad \Longrightarrow \quad \text{vlastné čísla } \lambda_{1,2} = \frac{1 \pm \mathrm{i}\sqrt{15}}{2},$$

$$J(A_3) = \begin{pmatrix} -1 & -2 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \quad \Longrightarrow \quad \text{vlastné čísla } \lambda_1 = 0, \quad \lambda_2 = -1,$$

$$J(A_4) = \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ -2 & 1 \end{pmatrix} \quad \Longrightarrow \quad \text{vlastné čísla } \lambda_{1,2} = \frac{1 \pm \mathrm{i}\sqrt{15}}{2},$$

$$J(A_5) = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ -1 & -2 \end{pmatrix} \quad \Longrightarrow \quad \text{vlastné čísla } \lambda_1 = 0, \quad \lambda_2 = -1$$

(samy overte :)). Bod A_1 je teda sedlo, body A_2 a A_4 sú nestabilné ohniská a body A_3 a A_5 sú neelementárne typy singulárnych bodov (i toto samy overte ;)). Preskúmame teraz body A_6 a A_7. Platí

$$J(A_6) = \begin{pmatrix} \frac{1+\sqrt{5}}{2} & -3-\sqrt{5} \\ -3-\sqrt{5} & \frac{1+\sqrt{5}}{2} \end{pmatrix}$$

$$\Downarrow \text{ vlastné čísla } \Downarrow$$

$$\lambda_1 = \frac{7+3\sqrt{5}}{2}, \quad \lambda_2 = -\frac{5+\sqrt{5}}{2}$$

(samy overte :)). Bod A_6 je teda typu sedlo. Podobne máme

$$J(A_7) = \begin{pmatrix} \frac{1-\sqrt{5}}{2} & -3+\sqrt{5} \\ -3+\sqrt{5} & \frac{1-\sqrt{5}}{2} \end{pmatrix}$$

$$\Downarrow \text{ vlastné čísla } \Downarrow$$

$$\lambda_1 = \frac{7-3\sqrt{5}}{2}, \quad \lambda_2 = -\frac{5-\sqrt{5}}{2}$$

(samy overte ;)). Bod A_7 je teda tiež typu sedlo.

Príklad 9

Vyšetrime typ singulárnych bodov autonómneho systému

$$x' = x - y + 1, \quad y' = -\sin y.$$

Riešenie:

Jedná sa opäť o nelineárny autonómny systém s pravými stranami

$$f(x,y) = x - y + 1, \quad g(x,y) = -\sin y.$$

Singulárne body tohto systému stanovíme riešením sústavy rovníc

$$x - y + 1 = 0, \quad -\sin y = 0.$$

Zrejme $y = k\pi$, a následne $x = k\pi - 1$, kde $k \in \mathbb{Z}$ (samy overte :)). Predložený autonómny systém má teda nekonečne veľa singulárnych bodov tvaru

$$A_k = [k\pi - 1,\, k\pi], \quad k \in \mathbb{Z}.$$

Príslušná Jacobiho matica $J(x,y)$ zobrazenia $[x,y] \to [f(x,y), g(x,y)]$ je

$$J(x,y) = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & -\cos y \end{pmatrix}$$

(samy overte ;)). Pre jednotlivé singulárne body A_k potom máme

$$J(A_k) = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & -\cos k\pi \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & (-1)^{k+1} \end{pmatrix}, \quad k \in \mathbb{Z}$$

(i toto samy overte :)). Všimnime si, že pre každú celočíselnú hodnotu k je matica $J(A_k)$ regulárna. Charakteristický polynóm matice $J(A_k)$ má tvar

$$\begin{vmatrix} 1-\lambda & -1 \\ 0 & (-1)^{k+1} - \lambda \end{vmatrix} = (\lambda - 1)\left(\lambda - (-1)^{k+1}\right),$$

a preto hľadané vlastné čísla sú $\lambda_1 = 1$ a $\lambda_2 = (-1)^{k+1}$ (samy si premyslite :)). V prípade párneho k je zrejme $\lambda_2 = -1$, a teda singulárny bod A_k je typu sedlo. Na druhej strane, pre nepárne k je $\lambda_2 = 1 = \lambda_1$. Nakoľko matica $J(A_k)$ nie je pre žiadne $k \in \mathbb{Z}$ diagonálna, v tomto prípade je singulárny bod A_k nevlastný nestabilný uzol (samy overte všetky tieto závery ;)).

Príklad 10 (ťažší)
Ukážme, že autonómny systém ekvivalentný s tzv. *van der Polovou rovnicou*

$$x'' + \varepsilon(1 - x^2)x' + x = 0$$

má jediný singulárny bod $[0, 0]$ a vyšetrime jeho typ v závislosti na reálnom parametri ε.

Riešenie:
Predložená diferenciálna rovnica je nelineárna druhého rádu a bohužiaľ ju nevieme explicitne vyriešiť :(. Vieme ju však prepísať na systém dvoch rovníc prvého rádu. Štandardne zavedieme novú premennú $y := x'$, a následne po dosadení do rovnice v zadaní príkladu dostaneme

$$y' + \varepsilon(1 - x^2)y + x = 0 \qquad \Longleftrightarrow \qquad y' = -\varepsilon(1 - x^2)y - x.$$

Získali sme tak nelineárny autonómny systém

$$x' = y, \quad y' = -\varepsilon(1 - x^2)y - x \tag{6}$$

s pravými stranami $f(x, y) = y$ a $g(x, y) = -\varepsilon(1 - x^2)y - x$ (samy si pozorne premyslite jednotlivé argumenty :)). Tento systém má jediný singulárny bod $A = [0, 0]$, keďže sústava rovníc

$$y = 0, \quad -\varepsilon(1 - x^2)y - x = 0$$

má jediné riešenie $x = 0 = y$ (samy overte ;)). Pomocou lineárnej aproximácie daného autonómneho systému preskúmame charakter bodu A. Odpovedajúca Jacobiho matica $J(x, y)$ funkcií $f(x, y)$ a $g(x, y)$ má tvar

$$J(x,y) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 2\varepsilon xy - 1 & -\varepsilon(1 - x^2) \end{pmatrix}$$

$$\Downarrow$$

$$J(A) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & -\varepsilon \end{pmatrix}$$

(samy overte výpočty :)). Charakteristická rovnica matice $J(A)$ potom je

$$0 = \begin{vmatrix} -\lambda & 1 \\ -1 & -\varepsilon - \lambda \end{vmatrix} = \lambda^2 + \varepsilon\lambda + 1 \quad \Longrightarrow \quad \lambda_{1,2} = \frac{-\varepsilon \pm \sqrt{\varepsilon^2 - 4}}{2}$$

Poznamenajme, že matica $J(A)$ je pre každé $\varepsilon \in \mathbb{R}$ regulárna. Budeme teraz diskutovať závislosť vlastných čísiel λ_1 a λ_2 na parametri ε. Pre $\varepsilon^2 - 4 > 0$, t.j, pre $\varepsilon \in (-\infty, -2) \cup (2, +\infty)$, sú vlastné čísla λ_1, λ_2 tvaru

$$\lambda_1 = \frac{\sqrt{\varepsilon^2 - 4} - \varepsilon}{2}, \qquad \lambda_2 = -\frac{\sqrt{\varepsilon^2 - 4} + \varepsilon}{2}.$$

Sú rôzne, obidve sú reálne, pričom pre $\varepsilon \in (-\infty, -2)$ platí $\lambda_1 > 0$, $\lambda_2 > 0$, a pre $\varepsilon \in (2, +\infty)$ platí $\lambda_1 < 0$, $\lambda_2 < 0$ (samy overte; uvedené nerovnosti vyplývajú z reálnosti λ_1, λ_2 a z Viètových vzťahov pre korene kvadratickej rovnice, konkrétne v našom prípade $\lambda_1 + \lambda_2 = -\varepsilon$ a $\lambda_1 \cdot \lambda_2 = 1$:)). Teda v tomto prípade je bod A nevlastný uzol, nestabilný pre $\varepsilon \in (-\infty, -2)$ a stabilný pre $\varepsilon \in (2, +\infty)$. Ak $\varepsilon^2 - 4 = 0$, t.j., $\varepsilon = \pm 2$, potom $\lambda_1 = -\frac{\varepsilon}{2} = \lambda_2$, konkrétne

$$\lambda_1 = \lambda_2 = 1 \quad \text{pre } \varepsilon = -2, \qquad \text{resp.} \qquad \lambda_1 = \lambda_2 = -1 \quad \text{pre } \varepsilon = 2.$$

A keďže matica $J(A)$ nie je diagonálna, singulárny bod A je i v tom prípade nevlastný uzol, nestabilný pre $\varepsilon = -2$ a stabilný pre $\varepsilon = 2$. Napokon, ak $\varepsilon^2 - 4 < 0$, t.j., $\varepsilon \in (-2, 2)$, vlastné čísla λ_1, λ_2 sú nereálne, vzájomne komplexne združené, konkrétne

$$\lambda_1 = -\frac{\varepsilon}{2} + \mathrm{i} \cdot \frac{\sqrt{4 - \varepsilon^2}}{2}, \qquad \lambda_2 = -\frac{\varepsilon}{2} - \mathrm{i} \cdot \frac{\sqrt{4 - \varepsilon^2}}{2}.$$

V prípade $\varepsilon \in (-2,2) \setminus \{0\}$ sa zrejme jedná o ohnisko, nestabilné pre $\varepsilon < 0$ a stabilné pre $\varepsilon > 0$. Pre $\varepsilon = 0$ má lineárna aproximácia systému v zadaní príkladu, t.j., systém (5), v singulárnom bode $[0,0]$ stred. Pôvodný systém (6) má teda v singulárnom bode A buď stred alebo ohnisko. Avšak pre $\varepsilon = 0$ je samotný systém (6) *lineárny*, a teda splýva so svojou linearizáciou (5) :). Preto nutne bod A je stredom i pre systém (6) (samy si pozorne premyslite tieto argumenty ;)). Získané výsledky môžeme teda zhrnúť takto:

$$\text{Singulárny bod } A = [0,0] \text{ je } \begin{cases} \text{nevlastný nestabilný uzol,} & \varepsilon \in (-\infty, -2], \\ \text{nevlastný stabilný uzol,} & \varepsilon \in [2, +\infty), \\ \text{nestabilné ohnisko,} & \varepsilon \in (-2, 0), \\ \text{stabilné ohnisko,} & \varepsilon \in (0, 2), \\ \text{stred,} & \varepsilon = 0. \end{cases}$$

Neriešené príklady

1. Vyšetrite singulárne body nasledujúcich lineárnych systémov.

   a) $x' = 3x + 4y, \quad y' = 2x + y$ b) $x' = 6x + 2y, \quad y' = -3x + 3y$

   c) $x' = 5x + 8y - 36, \quad y' = 2x + 5y - 18$ d) $x' = x - 2y - 1, \quad y' = 5x - y - 23$

2. Stanovte singulárne body a ich typ pre nasledujúce autonómne systémy.

   a) $x' = -y + x^2, \quad y' = x - y^2 + 2x^4$
   b) $x' = x^3 + y^3, \quad y' = 3x + y^3 + 2y$
   c) $x' = (2 + x)(y - x), \quad y' = (4 - x)(y + x)$
   d) $x' = 1 - y, \quad y' = x^2 - y^2$
   e) $x' = x(1 - x^2 - 6y^2), \quad y' = y(1 - 3x^2 - 3y^2)$
   f) $x' = x + x^2 + y^2, \quad y' = y - xy$

3. Ukážte, že bod $[0,0]$ je pre autonómny systém

$$x' = \mathrm{e}^{x+y} - \sin x - 1, \quad y' = \ln(1+x^2) + y^2 + x,$$

singulárnym bodom a určte jeho typ.

4*. Nech a, b, c sú reálne čísla spĺňajúce podmienky $c \geq 0$ a $b > 0$. Ukážte, že autonómny systém ekvivalentný s tzv. *Duffingovou rovnicou*

$$x'' + ax' + b^2 x + cx^3 = 0$$

má jediný singulárny bod $[0,0]$ a vyšetrite ho v závislosti na parametroch a, b, c.