Príklady na precvičovanie – komplexná derivácia, holomorfné funkcie, mocninové rady

Riešené príklady

Príklad 1

Dokážme, že funkcia
$$f(z) = \mathrm{i}z^4 + 2z$$
je komplexne diferencovateľná v celej komplexnej rovine a určme $f'(z)$. Úlohu vyriešme jednak pomocou definície komplexnej derivácie, a jednak overením Cauchyho–Riemannových rovností pre reálnu a imaginárnu časť funkcie $f(z)$.

Riešenie:

Nech z_0 je ľubovoľné komplexné číslo. Podľa definície komplexnej derivácie funkcie $f(z)$ platí
$$f'(z_0) = \lim_{z \to z_0} \frac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0}.$$
Postupne dostávame
$$f'(z_0) = \lim_{z \to z_0} \frac{(\mathrm{i}z^4 + 2z) - (\mathrm{i}z_0^4 + 2z_0)}{z - z_0} = \lim_{z \to z_0} \left[\mathrm{i} \cdot \frac{z^4 - z_0^4}{z - z_0} + 2 \cdot \frac{z - z_0}{z - z_0}\right]$$
$$= \lim_{z \to z_0} \left[\mathrm{i} \cdot (z^3 + z^2 z_0 + z z_0^2 + z_0^3) + 2\right] = 4\mathrm{i}z_0^3 + 2.$$
Teda $f'(z)$ existuje na celom $\mathbb{C}$ a platí $f'(z) = 4\mathrm{i}z^3 + 2$. Túto skutočnosť teraz overíme pomocou vlastností reálnej a imaginárnej časti funkcie $f(z)$. Máme
$$f(z) = f(x + \mathrm{i}y) = \mathrm{i} \cdot (x + \mathrm{i}y)^4 + 2(x + \mathrm{i}y)$$
$$= -4x^3 y + 4xy^3 + 2x + \mathrm{i} \cdot (x^4 - 6x^2 y^2 + y^4 + 2y)$$
$$\Downarrow$$
$$u(x, y) = \mathrm{Re} f(z) = -4x^3 y + 4xy^3 + 2x,$$
$$v(x, y) = \mathrm{Im} f(z) = x^4 - 6x^2 y^2 + y^4 + 2y.$$
Funkcie $u(x, y)$ a $v(x, y)$ sú iste (reálne) diferencovateľné na celom $\mathbb{R}^2$, pričom pre ich prvé parciálne derivácie podľa premenných x, y dostaneme
$$u'_x = -12x^2 y + 4y^3 + 2, \quad u'_y = -4x^3 + 12xy^2,$$

$$v'_x = 4x^3 - 12xy^2, \quad v'_y = -12x^2y + 4y^3 + 2.$$

Vidíme, že platí

$$u'_x(x, y) = v'_y(x, y), \quad \text{a} \quad u'_y(x, y) = -v'_x(x, y)$$

pre každé $x, y \in \mathbb{R}^2$. Teda sú splnené Cauchyho–Riemannove rovnosti na celom $\mathbb{R}^2$. Preto funkcia $f(z)$ je komplexne diferencovateľná v celej komplexnej rovine $\mathbb{C}$ s komplexnou deriváciou

$$f'(z) = u'_x(x, y) + \mathrm{i}v'_x(x, y) = -12x^2y + 4y^3 + 2 + \mathrm{i}(4x^3 - 12xy^2).$$

Spätným prechodom ku komplexnej premennej $z = x + \mathrm{i}y$ dostaneme vyjadrenie $f'(z) = 4\mathrm{i}z^3 + 2$:).

Poznámka:

Na konci Príkladu 1 sme sa potrebovali vrátiť od vyjadrenia komplexnej funkcie pomocou dvoch reálnych premenných x, y ku jej vyjadreniu pomocou jednej komplexnej premennej $z = x + \mathrm{i}y$. Všeobecne sa to robí tak, že do daného predpisu funkcie sa za x, y dosadia výrazy

$$x = \frac{z + \bar{z}}{2}, \quad y = \frac{z - \bar{z}}{2\mathrm{i}},$$

a následne sa vzniknutý výraz vhodne upraví. Je to však niekedy fuška :(.

Príklad 2

Zistime, na akých podmnožinách v $\mathbb{C}$ je funkcia $w = z\,(\bar{z})^2$ komplexne diferencovateľná.

Riešenie:

V danej funkcii oddelíme jej reálnu a imaginárnu časť. Pre $z = x + \mathrm{i}y$ platí

$$w = (x + \mathrm{i}y)(x - \mathrm{i}y)^2 = x^3 + xy^2 - \mathrm{i} \cdot (y^3 + x^2y),$$

teda $u(x, y) = \operatorname{Re} w = x^3 + xy^2$ a $v(x, y) = \operatorname{Im} w = -y^3 - x^2y$ (samy overte :)). Funkcia w má v bode $z_0 = x_0 + \mathrm{i}y_0$ komplexnú deriváciu práve vtedy, keď reálne funkcie $u(x, y), v(x, y)$ sú (reálne) diferencovateľné v bode $[x_0, y_0]$ a spĺňajú Cauchyho–Riemannove podmienky

$$u'_x(x_0, y_0) = v'_y(x_0, y_0), \quad u'_y(x_0, y_0) = -v'_x(x_0, y_0).$$

Ľahko vidíme, že funkcie $u(x, y), v(x, y)$ sú diferencovateľné v celom $\mathbb{R}^2$. Poďme preveriť, kde platia Cauchyho-Riemannove rovnosti. Postupne dostaneme

$$u'_x(x, y) = 3x^2 + y^2, \quad u'_y(x, y) = 2xy, \quad v'_x(x, y) = -2xy, \quad v'_y(x, y) = -3y^2 - x^2.$$

Druhá z Cauchyho-Riemannových podmienok platí pre každé $x, y \in \mathbb{R}^2$, kým prvá rovnosť dáva

$$3x^2 + y^2 = -3y^2 - x^2 \quad \Longrightarrow \quad 4x^2 + 4y^2 = 0 \quad \Longrightarrow \quad x = 0 = y.$$

Preto je funkcia w komplexne diferencovateľná iba v bode $z = 0 + \mathrm{i}0 = 0$ a pre jej deriváciu $w'(0)$ platí

$$w'(0) = u'_x(0, 0) + \mathrm{i}v'_x(0, 0) = 0.$$

Príklad 3

Preverme platnosť Cauchyho-Riemannových rovností a existenciu komplexnej derivácie pre funkciu $w = \sqrt{|\operatorname{Re} z \cdot \operatorname{Im} z|}$ v bode $z = 0$.

Riešenie:

Oddelením reálnej a imaginárnej časti vo funkcii w zistíme, že

$$u(x, y) = \operatorname{Re} w = \sqrt{|xy|}, \qquad v(x, y) = \operatorname{Im} w = 0, \qquad [x, y] \in \mathbb{R}^2$$

(samy overte ;)). Funkcie $u(x, y), v(x, y)$ spĺňajú v bode $z = 0$, t.j., v bode $[x, y] = [0, 0]$, Cauchyho-Riemannove rovnosti, nakoľko platí

$$u'_x(0, 0) = \lim_{x \to 0} \frac{u(x, 0) - u(0, 0)}{x - 0} = \lim_{x \to 0} \frac{0}{x - 0} = 0,$$
$$u'_y(0, 0) = \lim_{y \to 0} \frac{u(0, y) - u(0, 0)}{y - 0} = \lim_{y \to 0} \frac{0}{y - 0} = 0,$$
$$v'_x(0, 0) = 0 = v'_y(0, 0).$$

Poznamenajme, že parciálne derivácie $u'_x(0, 0)$, $u'_y(0, 0)$ nemôžeme teraz kvôli absolútnej hodnote počítať klasickým derivovaním, iba priamo z definície. Avšak funkcia w nemá v bode $z = 0$ komplexnú deriváciu, pretože limita

$$\lim_{z \to 0} \frac{w(z) - w(0)}{z - 0} = \lim_{z \to 0} \frac{\sqrt{|\operatorname{Re} z \cdot \operatorname{Im} z|}}{z}$$

neexistuje. Presvedčte sa samy ;). Prepíšte túto limitu pomocou jej reálnej a imaginárnej časti, t.j.,

$$\lim_{z\to 0} \frac{\sqrt{|\operatorname{Re} z \cdot \operatorname{Im} z|}}{z} = \lim_{(x,y)\to(0,0)} \left(\frac{x\sqrt{|xy|}}{x^2+y^2} - \mathrm{i} \cdot \frac{y\sqrt{|xy|}}{x^2+y^2} \right),$$

a ukážte, že ani jedna zo vzniknutých reálnych limít neexistuje :). Kde je teda zrada? Háčik je v tom, že funkcia $u(x,y)$ *nie je diferencovateľná* v bode $[0,0]$, napriek tomu, že má v tomto bode obidve prvé parciálne derivácie. Ak by totiž $u(x,y)$ bola diferencovateľná v bode $[0,0]$, potom by limita

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{u(x,y) - u(0,0) - u'_x(0,0)\cdot(x-0) - u'_y(0,0)\cdot(y-0)}{\sqrt{(x-0)^2+(y-0)^2}} = \lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{\sqrt{|xy|}}{\sqrt{x^2+y^2}}$$

musela existovať a byť rovná 0. Posledná limita však *neexistuje* (samy si všetko dobre premyslite :)).

Príklad 4

Určme holomorfnú funkciu $f(z) = u(x,y) + \mathrm{i}v(x,y)$ spĺňajúcu

$$v(x,y) = \operatorname{Im} f(z) = -3x^2y + y^3 - 3x + y, \qquad f(-1) = 3\mathrm{i}.$$

Riešenie:

Toto je typická úloha na holomorfné funkcie. Máme nájsť komplexnú funkciu, ktorá je holomorfná na nejakej oblasti a má dopredu predpísanú svoju imaginárnu (resp. reálnu) časť a hodnotu v nejakom bode tejto oblasti. Z teórie holomorfných funkcií vyplýva, že komplexná funkcia $f(z)$, ktorá je holomorfná na nejakej otvorenej podmnožine v $\mathbb{C}$, má v tejto množine nielen svoju prvú komplexnú deriváciu, ale automaticky aj komplexné derivácie *všetkých rádov* :). Funkcie $u(x,y), v(x,y)$ musia byť preto triedy C^∞ na danej oblasti, t.j., majú spojité parciálne derivácie všetkých rádov podľa obidvoch premenných x, y. Z tohto faktu a z Cauchyho-Riemannových podmienok potom vyplýva, že funkcie $u(x,y), v(x,y)$ musia byť *harmonické* na danej otvorenej množine, t.j., musia byť riešením tzv. *Laplaceovej rovnice*

$$u''_{xx}(x,y) + u''_{yy}(x,y) = 0, \qquad v''_{xx}(x,y) + v''_{yy}(x,y) = 0.$$

Všeobecný postup pri tomto type úloh je nasledujúci. Najprv overíme, či predpísaná funkcia $v(x,y)$ v zadaní je harmonická. Platí

$$v''_{xx}(x,y) = -6y, \quad v''_{yy}(x,y) = 6y \quad \Longrightarrow \quad v''_{xx}(x,y) + v''_{yy}(x,y) = 0$$

na celom $\mathbb{R}^2$ (samy overte :)). Funkcia $v(x,y)$ je teda harmonickou na *jednoducho súvislej* oblasti $\mathbb{R}^2$, a preto existuje *jediná* komplexná funkcia $f(z)$, ktorá je holomorfná na celom $\mathbb{C}$, a ktorá spĺňa $v(x,y) = \mathrm{Im} f(z)$ a $f(-1) = 3\mathrm{i}$. Potrebujeme nájsť jej reálnu časť, t.j., funkciu $u(x,y)$. Využijeme platnosť Cauchyho-Riemannových rovností

$$u'_x(x,y) = v'_y(x,y) = -3x^2 + 3y^2 + 1,$$

$$u'_y(x,y) = -v'_x(x,y) = 6xy + 3.$$

Neznáma funkcia $u(x,y)$ je teda *kmeňová funkcia* pre dvojicu funkcií $-3x^2 + 3y^2 + 1$ a $6xy + 3$:). Vďaka Matematickej analýze II sme už doma ;). Nasadiac štandardný aparát samy ukážte, že pre $u(x,y)$ vo všeobecnosti platí

$$u(x,y) = -x^3 + 3xy^2 + x + 3y + K,$$

kde K je *reálna* konštanta :). Všetky holomorfné funkcie $f(z)$, ktoré majú za imaginárnu časť funkciu $v(x,y)$, majú teda tvar

$$f(z) = -x^3 + 3xy^2 + x + 3y + K + \mathrm{i}(-3x^2y + y^3 - 3x + y).$$

Neznámu konštantu K stanovíme pomocou podmienky $f(-1) = 3\mathrm{i}$. Konkrétne, z práve získaného vyjadrenia s $x = -1$ a $y = 0$ dostaneme hodnotu $K = 0$ (samy overte :)). Hľadaná funkcia $f(z)$ teda je

$$f(z) = -x^3 + 3xy^2 + x + 3y + \mathrm{i}(-3x^2y + y^3 - 3x + y),$$

resp. $f(z) = -z^3 + (1-3\mathrm{i})z$, po prechode ku komplexnej premennej $z = x + \mathrm{i}y$ (i toto samy overte ;)).

Príklad 5

Dokážme, že ak $f(z)$ je funkcia holomorfná a nenulová v oblasti $G \subseteq \mathbb{C}$, potom platí identita

$$\Delta|f(z)| = \frac{|f'(z)|^2}{|f(z)|}, \qquad z \in G,$$

kde $\Delta := \partial^2/\partial x^2 + \partial^2/\partial y^2$ je tzv. *delta operátor.*

Riešenie:
Nech $u(x,y)$ a $v(x,y)$ označujú reálnu a imaginárnu časť funkcie $f(z)$, t.j.,

$$f(z) = f(x+\mathrm{i}y) = u(x,y) + \mathrm{i}v(x,y).$$

Zo zadania príkladu vyplýva, že funkcie $u(x,y), v(x,y)$ sú harmonické na oblasti G a spĺňajú Cauchyho-Riemannove rovnosti. Konkrétne, na G platí

$$u''_{xx}(x,y) + u''_{yy}(x,y) = 0 = v''_{xx}(x,y) + v''_{yy}(x,y),$$

$$u'_x(x,y) = v'_y(x,y), \quad u'_y(x,y) = -v'_x(x,y),$$

$$f'(z) = u'_x(x,y) + \mathrm{i}v'_x(x,y) = v'_y(x,y) - \mathrm{i}u'_y(x,y).$$

Okrem toho máme (argumenty x, y, z budeme pre jednoduchosť vynechávať)

$$|f| = \sqrt{u^2+v^2} \neq 0, \qquad |f'| = \sqrt{(u'_x)^2 + (v'_x)^2} = \sqrt{(v'_y)^2 + (u'_y)^2}.$$

Potom platí

$$\Delta|f| = \left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2}\right)|f| = \frac{\partial^2|f|}{\partial x^2} + \frac{\partial^2|f|}{\partial y^2}.$$

Potrebujeme teda vypočítať druhé parciálne derivácie zo zloženej funkcie $|f(z)| = \sqrt{[u(x,y)]^2 + [v(x,y)]^2}$. Postupne dostávame (overenie detailov nechávame na čitateľa ;))

$$|f|'_x = \left(\sqrt{u^2+v^2}\right)'_x = \frac{uu'_x + vv'_x}{\sqrt{u^2+v^2}}, \qquad |f|'_y = \left(\sqrt{u^2+v^2}\right)'_y = \frac{uu'_y + vv'_y}{\sqrt{u^2+v^2}},$$

$$|f|''_{xx} = \left(\sqrt{u^2+v^2}\right)''_{xx} = \frac{(u'_x)^2 + (v'_x)^2 + uu''_{xx} + vv''_{xx}}{\sqrt{u^2+v^2}} - \frac{(uu'_x + vv'_x)^2}{(u^2+v^2)^{3/2}},$$

$$|f|''_{yy} = \left(\sqrt{u^2+v^2}\right)''_{yy} = \frac{(u'_y)^2 + (v'_y)^2 + uu''_{yy} + vv''_{yy}}{\sqrt{u^2+v^2}} - \frac{\left(uu'_y + vv'_y\right)^2}{(u^2+v^2)^{3/2}}.$$

Po dosadení a úpravách máme

$$\Delta|f| = \frac{\overbrace{(u'_x)^2+(v'_x)^2}^{|f'|^2}+\overbrace{(u'_y)^2+(v'_y)^2}^{|f'|^2}+u\cdot\overbrace{(u''_{xx}+u''_{yy})}^{0}+v\cdot\overbrace{(v''_{xx}+v''_{yy})}^{0}}{\sqrt{u^2+v^2}}$$

$$-\frac{(uu'_x+vv'_x)^2+\left(uu'_y+vv'_y\right)^2}{(u^2+v^2)^{3/2}} = \frac{2|f'|^2}{\sqrt{u^2+v^2}} - \frac{(uu'_x+vv'_x)^2+\left(uu'_y+vv'_y\right)^2}{(u^2+v^2)^{3/2}}.$$

Ďalej z Cauchyho-Riemannových podmienok vyplýva

$$(uu'_x+vv'_x)^2+\left(uu'_y+vv'_y\right)^2 = (uu'_x+vv'_x)^2+(-uv'_x+vu'_x)^2$$

$$= u^2\underbrace{\left[(u'_x)^2+(v'_x)^2\right]}_{|f'|^2}+v^2\underbrace{\left[(v'_x)^2+(u'_x)^2\right]}_{|f'|^2} = (u^2+v^2)|f'|^2.$$

Napokon získame identitu v zadaní príkladu

$$\Delta|f| = \frac{2|f'|^2}{\sqrt{u^2+v^2}} - \frac{(u^2+v^2)|f'|^2}{(u^2+v^2)^{3/2}} = \frac{|f'|^2}{\underbrace{\sqrt{u^2+v^2}}_{|f|}} = \frac{|f'|^2}{|f|} \qquad :).$$

Príklad 6

Nájdime obor konvergencie funkcionálneho radu

$$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{(n+1)^2}\left(\frac{z+1}{z-1}\right)^n.$$

Riešenie:

Postupujeme analogicky ako pri reálnych funkcionálnych radoch. Použijeme napríklad limitné D'Alembertovo kritérium. Platí

$$\left|\frac{\frac{1}{(n+2)^2}\left(\frac{z+1}{z-1}\right)^{n+1}}{\frac{1}{(n+1)^2}\left(\frac{z+1}{z-1}\right)^{n}}\right| = \left(\frac{n+1}{n+2}\right)^2\left|\frac{z+1}{z-1}\right| \quad \overset{n\to\infty}{\longrightarrow} \quad \left|\frac{z+1}{z-1}\right|.$$

Takže pre $\left|\frac{z+1}{z-1}\right| < 1$ rad v zadaní príkladu absolútne konverguje a pre $\left|\frac{z+1}{z-1}\right| > 1$ tento rad diverguje. Pre z spĺňajúce $\left|\frac{z+1}{z-1}\right| = 1$ rad v zadaní konverguje absolútne, pretože v tomto prípade máme

$$\sum_{n=0}^{\infty} \left| \frac{1}{(n+1)^2} \left(\frac{z+1}{z-1} \right)^n \right| = \underbrace{\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(n+1)^2}}_{\text{toto konverguje}} .$$

Obor konvergencie vyšetrovaného funkcionálneho radu je teda podmnožina komplexných čísiel daná reláciou

$$\left| \frac{z+1}{z-1} \right| \le 1.$$

Nie je ťažké overiť, že sa jedná práve o tie komplexné čísla z, pre ktoré $\mathrm{Re} z \le 0$ (samy si premyslite :)). Oborom konvergencie je teda druhý a tretí kvadrant spolu s imaginárnou osou.

Príklad 7

Určme polomer a obor konvergencie mocninového radu

$$\sum_{n=0}^{\infty} [3 + (-1)^n]^n z^n.$$

Riešenie:

Podľa definície pre polomer konvergencie R radu v zadaní príkladu platí

$$R = \frac{1}{\limsup\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{|[3 + (-1)^n]^n|}} = \frac{1}{\limsup\limits_{n\to\infty} |3 + (-1)^n|}.$$

Nakoľko máme

$$|3 + (-1)^n| = \begin{cases} 4, & 2 \mid n, \\ 2, & 2 \nmid n, \end{cases}$$

postupnosť $|3 + (-1)^n|$ má dva hromadné body 2 a 4. Preto

$$\limsup_{n\to\infty} |3 + (-1)^n| = 4 \quad \Longrightarrow \quad R = \frac{1}{4}.$$

Daný mocninový rad preto absolútne konveguje pre $|z| < \frac{1}{4}$, kým diverguje pre $|z| > \frac{1}{4}$. Naviac, všade na konvergenčnej kružnici $|z| = \frac{1}{4}$ rad diverguje (samy overte:)). Jeho oborom konvergencie je preto otvorený kruh $|z| < \frac{1}{4}$.

Príklad 8

Vyšetrime konvergenciu mocninového radu

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{z^n}{n}$$

na jeho konvergenčnej kružnici.

Riešenie:

Stanovíme najprv polomer konvergencie daného radu. Platí

$$R = \frac{1}{\lim\limits_{n\to\infty} \left| \frac{\frac{1}{n+1}}{\frac{1}{n}} \right|} = \frac{1}{\lim\limits_{n\to\infty} \frac{n}{n+1}} = 1.$$

Príslušná konvergenčná kružnica radu je preto $|z| = 1$. Každý jej bod môžeme vyjadriť v tvare $z = \mathrm{e}^{\mathrm{i}\alpha}$, kde $\alpha \in [-\pi, \pi)$. Skúmame teda konvergenciu komplexného číselného radu

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}n\alpha}}{n}$$

v závislosti na reálnom parametri $\alpha \in [-\pi, \pi)$. V tomto rade, využijúc Eulerov vzorec

$$\mathrm{e}^{\mathrm{i}n\alpha} = \cos n\alpha + \mathrm{i} \sin n\alpha,$$

oddelíme jeho reálnu a imaginárnu časť

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}n\alpha}}{n} = \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{\cos n\alpha}{n} + \mathrm{i} \cdot \frac{\sin n\alpha}{n} \right).$$

Pri vyšetrovaní týchto dvoch reálnych radov si však, bohužiaľ, nevystačíme s tradičným aparátom :(. Ani porovnávanie, ani D'Alembert, ani Cauchy, ani Raabe, ba ani integrálne kritérium v tomto prípade nefungujú :-/. Účinné je až Dirichletovo kritérium :). Jeho aplikáciu si však musíme trochu odpracovať. Na konci ukážeme, že reálne rady

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos n\alpha}{n}, \qquad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin n\alpha}{n}$$

súčasne konvergujú pre každé $\alpha \neq 2m\pi$, kde m je nejaké celé číslo.

Príprava:

- *Dirichletovo kritérium* – nech $\{a_n\}$, $\{b_n\}$ sú dve postupnosti reálnych čísiel také, že $\{b_n\}$ je monotónna s $\lim_{n\to\infty} b_n = 0$ a rad $\sum a_n$ má ohraničené čiastočné súčty, t.j., postupnosť

  $$\left\{ \sum_{k=1}^{n} a_k \right\}$$

  je ohraničená (členy tejto postupnosti sa indexujú podľa n). Potom rad $\sum a_n b_n$ konverguje (nie však nutne absolútne).

- Pre každé $\alpha \in \mathbb{R}$, $\alpha \neq 2m\pi$ pre celé m, platia identity

  $$\sum_{k=1}^{n} \cos k\alpha = \frac{\cos \frac{(n+1)\alpha}{2} \sin \frac{n\alpha}{2}}{\sin \frac{\alpha}{2}},$$

  $$\sum_{k=1}^{n} \sin k\alpha = \frac{\sin \frac{(n+1)\alpha}{2} \sin \frac{n\alpha}{2}}{\sin \frac{\alpha}{2}}.$$

  Pokúste sa dokázať tieto dve identity :). Inšpirujte sa riešením Príkladu 5 z úvodného materiálu o komplexných číslach ;).

Tak a teraz sme už pripravení korektne dokončiť Príklad 8 :). Uvažujme napríklad rad

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos n\alpha}{n}$$

pre $\alpha \neq 2m\pi$, kde m je celé číslo. V Dirichletovom kritériu položíme

$$a_n := \cos n\alpha, \qquad b_n := 1/n.$$

Postupnosť $\{b_n\}$ je zrejme monotónna a $\lim_{n\to\infty} b_n = 0$. Ďalej platí

$$\left|\sum_{k=1}^{n} a_k\right| = \left|\sum_{k=1}^{n} \cos k\alpha\right| = \left|\frac{\cos\frac{(n+1)\alpha}{2}\sin\frac{n\alpha}{2}}{\sin\frac{\alpha}{2}}\right| = \frac{\left|\cos\frac{(n+1)\alpha}{2}\sin\frac{n\alpha}{2}\right|}{\left|\sin\frac{\alpha}{2}\right|} \leq \frac{1}{\left|\sin\frac{\alpha}{2}\right|}$$

(samy overte :)). To znamená, že postupnosť $\{\sum_{k=1}^{n} a_k\}$ je ohraničená (nezávisle na n). Sú teda splnené všetky požadavky Dirichletovho kritéria. Rad

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos n\alpha}{n}$$

preto pre $\alpha \neq 2m\pi$, kde m je celé číslo, konverguje. V prípade, ak $\alpha = 2m\pi$ pre nejaké celé číslo m, platí $\cos n\alpha = 1$ pre každé $n \in \mathbb{N}$, a teda

$$\text{rad} \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos n\alpha}{n} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} \quad \text{diverguje.}$$

Analogickým spôsobom samy ukážte, že

$$\text{rad} \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin n\alpha}{n} \quad \text{konverguje pre každé } \alpha \in \mathbb{R} \quad :).$$

Vieme, že komplexný číselný rad

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}n\alpha}}{n} = \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{\cos n\alpha}{n} + \mathrm{i}\cdot\frac{\sin n\alpha}{n}\right), \qquad \alpha \in [-\pi, \pi),$$

konverguje práve vtedy, keď súčasne konverguje jeho reálna i imaginárna časť. Vo svetle práve získaných výsledkov to nastane práve vtedy, keď parameter $\alpha \neq 0$ (samy si to dobre premyslite :)). Takže komplexný mocninový rad v zadaní príkladu konverguje všade na svojej konvergenčnej kružnici, s výnimkou bodu $z = 1$ (i toto si samy dobre premyslite ;)).