Príklady na precvičovanie – elementárne komplexné funkcie

Riešené príklady

Príklad 1
Racionálnu lomenú funkciu

$$\frac{1}{z^3 - 2z^2 + z - 2}$$

rozložme nad $\mathbb{C}$ na parciálne zlomky.

Riešenie:
Postupujeme štandardným spôsobom ako v reálnej analýze, avšak s tým malým rozdielom, že v obore komplexných čísiel sa menovateľ daného zlomku dá úplne rozložiť na lineárne činitele :). Konkrétne, platí

$$z^3 - 2z^2 + z - 2 = (z-2)(z^2+1) = (z-2)(z-\mathrm{i})(z+\mathrm{i})$$

(samy overte :)). Máme teda rozklad

$$\frac{1}{z^3 - 2z^2 + z - 2} = \frac{A}{z-2} + \frac{B}{z-\mathrm{i}} + \frac{C}{z+\mathrm{i}},$$

pre neznáme koeficienty $A, B, C \in \mathbb{C}$. Klasickou metódou zistíme, že

$$\frac{1}{z^3 - 2z^2 + z - 2} = \frac{\frac{1}{5}}{z-2} + \frac{-\frac{1}{10} + \frac{\mathrm{i}}{5}}{z-\mathrm{i}} + \frac{-\frac{1}{10} - \frac{\mathrm{i}}{5}}{z+\mathrm{i}}$$

(samy overte detaily výpočtu ;)).

Príklad 2
Pre dané $a, b \in \mathbb{R}$ zistime, akú krivku v komplexnej rovine určuje komplexná funkcia reálnej premennej

$$z(t) = \mathrm{e}^{(a+\mathrm{i}b)t}, \qquad t \in (-\infty, \infty).$$

Riešenie:
V komplexnej funkcii $z(t)$ reálnej premennej t oddelíme jej reálnu a imaginárnu časť, t.j., $z(t) = x(t) + \mathrm{i}y(t)$. Získame tak parametrické vyjadrenie hľadanej krivky. Platí $z(t) = \mathrm{e}^{at}\cos bt + \mathrm{i}\mathrm{e}^{at}\sin bt$, takže

$$x(t) = \mathrm{e}^{at}\cos bt, \qquad y(t) = \mathrm{e}^{at}\sin bt, \qquad t \in (-\infty, \infty).$$

V prípade $b = 0$ a $a = 0$ sa jedná o jediný bod $[1, 0]$. Ak $b = 0$ a $a \neq 0$, máme $x(t) = \mathrm{e}^{at}$ a $y(t) \equiv 0$, čo je parametrické vyjadrenie otvorenej kladnej reálnej polosi $(0, \infty)$ (samy si to premyslite :)). Pre $b \neq 0$, $a = 0$ dostaneme kružnicu so stredom v bode $[0, 0]$ a polomerom 1 obehnutú nekonečne veľakrát v zápornom i kladnom smere (i toto si samy dobre premyslite ;)). Nakoniec, pre $ab \neq 0$ zavedením polárnych súradníc dostaneme

$$\rho(t) = \mathrm{e}^{at}, \qquad \varphi(t) = bt, \qquad t \in (-\infty, \infty).$$

Vylúčením parametra t získame vyjadrenie $\rho = \mathrm{e}^{\frac{a}{b}\varphi}$, pričom $\varphi \in (-\infty, \infty)$. Toto je rovnica tzv. *logaritmickej špirály* so stredom v bode $[0, 0]$. V závislosti na znamienkach čísiel a, b môžu nastať štyri možnosti:

- $a > 0$, $b > 0$ – špirála je kladne orientovaná a odvíja sa od stredu,
- $a > 0$, $b < 0$ – špirála je záporne orientovaná a odvíja sa od stredu,
- $a < 0$, $b > 0$ – špirála je kladne orientovaná a navíja sa na stred,
- $a < 0$, $b < 0$ – špirála je záporne orientovaná a navíja sa na stred.

Nechávame na čitateľa, aby si sám nakreslil a premyslel každý z uvedených prípadov ;).

Príklad 3
Stanovme definičné obory daných funkcií chápaných ako priradení $\mathbb{C} \to \mathbb{C}$.

$$\text{a) } w = \frac{1}{\mathrm{ch} z}, \qquad \text{b) } w = \log(-2z - \mathrm{i}).$$

Riešenie:

a) Problematické budú zrejme nulové body funkcie ch$z$. Pripomeňme, že komplexná funkcia hyperbolický kosínus je definovaná predpisom

$$\mathrm{ch}z = \frac{\mathrm{e}^z + \mathrm{e}^{-z}}{2}, \qquad z \in \mathbb{C},$$

kde e^z je komplexná exponenciálna funkcia (komplexné rozšírenie klasickej reálnej exponenciálnej funkcie e^x). Potrebujeme teda nájsť všetky body $z \in \mathbb{C}$, pre ktoré platí

$$\frac{\mathrm{e}^z + \mathrm{e}^{-z}}{2} = 0 \quad \Longleftrightarrow \quad \mathrm{e}^z + \mathrm{e}^{-z} = 0 \quad \Longleftrightarrow \quad \mathrm{e}^{2z} = -1.$$

Ďalej môžeme postupovať dvomi spôsobmi. Pri prvom spôsobe využijeme poznatok, že pre $z = x + \mathrm{i}y$ máme

$$\mathrm{e}^z = \mathrm{e}^{x+\mathrm{i}y} = \mathrm{e}^{\mathrm{i}y} = \mathrm{e}^x \cos y + \mathrm{i}\mathrm{e}^x \sin y.$$

Teda

$$\mathrm{e}^{2z} = -1 \quad \Longleftrightarrow \quad \mathrm{e}^{2x} \cos 2y + \mathrm{i}\mathrm{e}^{2x} \sin 2y = -1$$

$$\Updownarrow$$

$$\mathrm{e}^{2x} \cos 2y = -1, \quad \mathrm{e}^{2x} \sin 2y = 0.$$

Riešenia tejto sústavy dvoch rovníc s dvomi neznámymi x, y majú tvar $x = 0$ a $y = k\pi + \pi/2$, $k \in \mathbb{Z}$ (samy overte :)). To znamená, že definičný obor funkcie w v zadaní je

$$\mathcal{D}(w) = \left\{ z \in \mathbb{C},\ z \neq \mathrm{i}\left(k\pi + \frac{\pi}{2}\right),\ k \in \mathbb{Z} \right\}.$$

Pri druhom spôsobe môžeme priamo využiť vlastnosti komplexnej funkcie e^z. Keďže $\mathrm{e}^{\mathrm{i}\pi} = -1$ a funkcia e^z je periodická s periódami $2k\pi\mathrm{i}$, $k \in \mathbb{Z}$, máme

$$\mathrm{e}^{2z} = -1 \quad \Longleftrightarrow \quad 2z = \mathrm{i}\pi + 2k\pi\mathrm{i}, \quad k \in \mathbb{Z}.$$

Preto všetky nulové body funkcie ch$z$ majú tvar $z = \mathrm{i}(k\pi + \pi/2)$, $k \in \mathbb{Z}$.

b) Z definície hlavnej vetvy $\log z$ mnohoznačnej logaritmickej funkcie $\mathrm{Log}\, z$ vieme, že je definovaná pre každé nenulové komplexné číslo. Preto

$$\mathcal{D}(w) = \left\{ z \in \mathbb{C},\ z \neq -\frac{\mathrm{i}}{2} \right\} \quad :).$$

Príklad 4

Nájdime obrazy daných podmnožín v $\mathbb{C}$ v príslušných priradeniach.

$$\text{a) obraz imaginárnej osi } \mathrm{i}\cdot\mathbb{R} \text{ v priradení } w = \frac{1+z}{1-z},$$

$$\text{b) obraz kružnice } |z| = R,\ R \in \mathbb{R}^+,\ \text{v priradení } w = z + \frac{1}{z},$$

$$\text{c) obraz komplexnej roviny } \mathbb{C} \text{ bez bodu } 0 \text{ v priradení } w = \frac{1}{2\mathrm{i}}\left(\frac{z}{\bar{z}} - \frac{\bar{z}}{z}\right).$$

Riešenie:

a) Parametrické vyjadrenie imaginárnej osi má tvar $z = \mathrm{i}t$, kde $t \in \mathbb{R}$. Preto jej obrazom v priradení w je množina

$$w(\mathrm{i}\cdot\mathbb{R}) = \left\{\frac{1+\mathrm{i}t}{1-\mathrm{i}t},\quad t \in \mathbb{R}\right\}.$$

Ďalej pre každé reálne t platí

$$\frac{1+\mathrm{i}t}{1-\mathrm{i}t} = \frac{1+\mathrm{i}t}{1-\mathrm{i}t}\cdot\frac{1+\mathrm{i}t}{1+\mathrm{i}t} = \frac{1-t^2+2\mathrm{i}t}{1+t^2} = \frac{1-t^2}{1+t^2} + \mathrm{i}\cdot\frac{2t}{1+t^2}.$$

Získali sme teda parametrické vyjadrenie množiny $w(\mathrm{i}\cdot\mathbb{R})$. Konkrétne, pre $w = u + \mathrm{i}v$ máme

$$u = \frac{1-t^2}{1+t^2},\qquad v = \frac{2t}{1+t^2},\qquad t \in \mathbb{R}.$$

Nie je ťažké overiť, že hľadaná množina je kružnica $u^2 + v^2 = 1$ bez bodu $[-1, 0]$, nakoľko

$$\left(\frac{1-t^2}{1+t^2}\right)^2 + \left(\frac{2t}{1+t^2}\right)^2 = \frac{1+t^4+2t^2}{(1+t^2)^2} = 1$$

a bod $[-1, 0]$ nie je obrazom žiadneho $z \in \mathrm{i}\cdot\mathbb{R}$ v priradení w (samy si dobre premyslite; okrem toho zistite hodnotu $\lim_{t\to\pm\infty} w(\mathrm{i}t)$:)).

b) Parametrické vyjadrenie kružnice $|z| = R$ je napríklad

$$z = R\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}t},\qquad t \in [-\pi, \pi).$$

Pre každý bod z na tejto kružnici potom platí

$$w(z) = R\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}t} + \frac{1}{R}\,\mathrm{e}^{-\mathrm{i}t} = R\,(\cos t + \mathrm{i}\sin t) + \frac{1}{R}\,(\cos t - \mathrm{i}\sin t)$$

$$= \left(R + \frac{1}{R}\right)\cos t + \mathrm{i}\cdot\left(R - \frac{1}{R}\right)\sin t.$$

Hľadaná množina má teda parametrické vyjadrenie

$$u = \left(R + \frac{1}{R}\right)\cos t, \qquad v = \left(R - \frac{1}{R}\right)\sin t, \qquad t \in [-\pi, \pi).$$

V prípade $R = 1$ sa jedná o reálny interval $[-2, 2]$, presnejšie, o dve kópie intervalu $[-2, 2)$ zjednotené s bodom 2 (samy overte; obzvlášť si premyslite, že každý bod $w \in [-2, 2)$ je obrazom práve dvoch hodnôt $t \in [-\pi, \pi) \setminus \{0\}$, kým bod 2 je obrazom jediného vzoru $t = 0$:)). Pre $R \neq 1$ sa jedná o elipsu

$$\frac{u^2}{\left(R + \frac{1}{R}\right)^2} + \frac{v^2}{\left(R - \frac{1}{R}\right)^2} = 1 \quad :).$$

c) Všimnime, že pre každé komplexné číslo $z \neq 0$ predstavuje $w(z)$ imaginárnu časť čísla $z/\bar{z}$, keďže

$$w(z) = \frac{1}{2\mathrm{i}}\left(\frac{z}{\bar{z}} - \frac{\bar{z}}{z}\right) = \frac{\frac{z}{\bar{z}} - \overline{\left(\frac{z}{\bar{z}}\right)}}{2\mathrm{i}} = \mathrm{Im}\left(\frac{z}{\bar{z}}\right).$$

Okrem toho platí

$$\left|\frac{z}{\bar{z}}\right| = \frac{|z|}{|\bar{z}|} = \frac{|z|}{|z|} = 1.$$

To znamená, že hodnoty $z/\bar{z}$ ležia na kružnici so stredom v bode $[0, 0]$ a polomerom 1 (samy si premyslite :)). Nie je ťažké ukázať, že ak z prebieha množinu $\mathbb{C} \setminus \{0\}$, potom $z/\bar{z}$ vyčerpáva celú uvedenú jednotkovú kružnicu (samy overte; komplexné číslo z uvažujte v exponenciálnom tvare a pomocou neho vyjadrite $z/\bar{z}$:)). Teda $w(\mathbb{C} \setminus \{0\})$ predstavuje množinu imaginárnych častí bodov danej jednotkovej kružnice. Jedná sa teda o reálny interval $[-1, 1]$ (i toto si samy zdôvodnite pomocou vhodného obrázka ;)).

Príklad 5
Riešme v $\mathbb{C}$ rovnicu

$$2\,\mathrm{ch}z + \mathrm{sh}z = \mathrm{i}.$$

Riešenie:
Dosadením vyjadrení

$$\mathrm{ch}z = \frac{\mathrm{e}^z + \mathrm{e}^{-z}}{2}, \quad \mathrm{sh}z = \frac{\mathrm{e}^z - \mathrm{e}^{-z}}{2},$$

a po následnej úprave prevedieme rovnicu v zadaní príkladu na tvar

$$3\mathrm{e}^z + \mathrm{e}^{-z} = 2\mathrm{i}$$

(samy overte :)). Zavedením substitúcie $s = \mathrm{e}^z$ dostaneme kvadratickú rovnicu s neznámou s, konkrétne

$$3s^2 - 2\mathrm{i}s + 1 = 0.$$

Posledná rovnica má dve riešenia, a to $s_1 = \mathrm{i}$ a $s_2 = -\mathrm{i}/3$. Platí teda

$$\mathrm{e}^z = \begin{cases} \mathrm{i}, \\ -\frac{\mathrm{i}}{3}, \end{cases} \quad \Longleftrightarrow \quad z = \begin{cases} \mathrm{Log}\,(\mathrm{i}), \\ \mathrm{Log}\,(-\frac{\mathrm{i}}{3}). \end{cases}$$

Výpočtom jednotlivých logaritmov dostaneme

$$z = \begin{cases} \mathrm{i} \cdot \left(\frac{\pi}{2} + 2k\pi\right), \\ \\ -\ln 3 + \mathrm{i} \cdot \left(\frac{-\pi}{2} + 2k\pi\right), \end{cases} \qquad k \in \mathbb{Z}$$

(samy overte detaily :)).

Príklad 6
Dokážme, že pre každé $z \in \mathbb{C}$ platí identita

$$\mathrm{Argsh}z = \mathrm{Log}\,(z \pm \sqrt{z^2 + 1}).$$

Riešenie:
Nech $z \in \mathbb{C}$ je také, že výraz $\mathrm{Argsh} z$ je definovaný. Označme $w = \mathrm{Argsh} z$. Podľa definície argumentu hyperbolického sínusu potom platí $z = \mathrm{sh}\, w$, resp.

$$z = \frac{\mathrm{e}^w - \mathrm{e}^{-w}}{2},$$

podľa definície hyperbolického sínusu. Z poslednej rovnice vyjadríme w pomocou z. Zavedením substitúcie $s = \mathrm{e}^w$ dostaneme kvadratickú rovnicu pre neznámu s. Konkrétne,

$$z = \frac{s - \frac{1}{s}}{2} \qquad \Longleftrightarrow \qquad s^2 - 2zs - 1 = 0.$$

Jej riešením dostaneme (využijeme úpravu na štvorec :))

$$(s-z)^2 - z^2 - 1 = 0,$$

$$(s-z)^2 = z^2 + 1,$$

$$s - z = \pm\sqrt{z^2+1},$$

$$s = z \pm \sqrt{z^2+1}.$$

Poznamenajme, že symbolom $\pm\sqrt{}$ rozumieme dve hodnoty komplexnej druhej odmocniny. Po návrate k neznámej w dostávame

$$\mathrm{e}^w = z \pm \sqrt{z^2+1}.$$

Podľa definície komplexného logaritmu je posledná rovnosť ekvivalentná s

$$w = \mathrm{Log}\,(z \pm \sqrt{z^2+1}),$$

čo dokazuje identitu v zadaní príkladu :). Naviac, nakoľko výraz $z \pm \sqrt{z^2+1}$ je rôzny od nuly pre ľubovoľné $z \in \mathbb{C}$ (samy overte :)), uvedené úvahy platia pre každé komplexné číslo z.

Príklad 7
Nájdime všetky hodnoty daných funkcií.

a) $\mathrm{sh}\,(2-\mathrm{i})$, b) $\cos\,(2+\mathrm{i})$, c) $\mathrm{Argsh}\,(\mathrm{i})$.

Riešenie:

a) Pomocou definície komplexného hyperbolického sínusu postupne platí

$$\operatorname{sh}(2-\mathrm{i}) = \frac{\mathrm{e}^{2-\mathrm{i}} - \mathrm{e}^{-(2-\mathrm{i})}}{2} = \frac{\mathrm{e}^2(\cos 1 - \mathrm{i}\sin 1) - \mathrm{e}^{-2}(\cos 1 + \mathrm{i}\sin 1)}{2}$$
$$= \frac{\mathrm{e}^2 - \mathrm{e}^{-2}}{2}\cdot\cos 1 - \mathrm{i}\cdot\frac{\mathrm{e}^2 + \mathrm{e}^{-2}}{2}\cdot\sin 1.$$

b) Štandardným „rozkosínusovaním“ dostaneme

$$\cos(2+\mathrm{i}) = \cos 2\cos\mathrm{i} - \sin 2\sin\mathrm{i}.$$

Pomocou vyjadrení

$$\cos\mathrm{i} = \frac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}\cdot\mathrm{i}} + \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\cdot\mathrm{i}}}{2} = \frac{\mathrm{e}^{-1} + \mathrm{e}}{2},$$

$$\sin\mathrm{i} = \frac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}\cdot\mathrm{i}} - \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\cdot\mathrm{i}}}{2\mathrm{i}} = \frac{\mathrm{e}^{-1} - \mathrm{e}}{2\mathrm{i}} = \mathrm{i}\cdot\frac{\mathrm{e} - \mathrm{e}^{-1}}{2},$$

potom dostávame

$$\cos(2+\mathrm{i}) = \frac{\mathrm{e}^{-1} + \mathrm{e}}{2}\cdot\cos 2 - \mathrm{i}\cdot\frac{\mathrm{e} - \mathrm{e}^{-1}}{2}\cdot\sin 2.$$

c) Na základne identity v Príklade 6, platí

$$\operatorname{Argsh}(\mathrm{i}) = \operatorname{Log}(\mathrm{i} \pm \sqrt{\mathrm{i}^2+1}) = \operatorname{Log}(\mathrm{i}).$$

Podľa definície komplexného logaritmu ďalej máme

$$\operatorname{Log}(\mathrm{i}) = \ln|\mathrm{i}| + \mathrm{i}\cdot\operatorname{Arg}(\mathrm{i}) = \ln 1 + \mathrm{i}\cdot\operatorname{Arg}(\mathrm{i}) = \mathrm{i}\cdot\operatorname{Arg}(\mathrm{i})$$

(symbol ln označuje reálny prirodzený logaritmus). Základný argument čísla i je $\pi/2$. Preto množina všetkých argumentov čísla i má tvar

$$\operatorname{Arg}(\mathrm{i}) = \left\{\frac{\pi}{2} + 2k\pi,\ k\in\mathbb{Z}\right\}.$$

Platí teda

$$\operatorname{Argsh}(\mathrm{i}) = \operatorname{Log}(\mathrm{i}) = \mathrm{i}\cdot\left\{\frac{\pi}{2} + 2k\pi,\ k\in\mathbb{Z}\right\} = \left\{\mathrm{i}\cdot\left(\frac{\pi}{2} + 2k\pi\right),\ k\in\mathbb{Z}\right\}.$$

Množina hodnôt Argsh (i) je teda nekonečná (avšak spočítateľná ;)), pričom každá hodnota má tvar

$$\mathrm{i}\cdot\left(\frac{\pi}{2}+2k\pi\right), \quad k\in\mathbb{Z} \quad :).$$

Príklad 8

V daných komplexných funkciách oddeľme ich reálnu a imaginárnu časť.

$$\text{a) } w=\operatorname{tg} z, \qquad \text{b) } w=z^{\mathrm{i}}.$$

Riešenie:

a) Podľa definície komplexného tangensu pre $z=x+\mathrm{i}y$ platí

$$\operatorname{tg} z=\frac{\sin z}{\cos z}=\frac{\sin(x+\mathrm{i}y)}{\cos(x+\mathrm{i}y)}=\frac{\sin x\cos \mathrm{i}y+\cos x\sin \mathrm{i}y}{\cos x\cos \mathrm{i}y-\sin x\sin \mathrm{i}y}.$$

Využitím identít

$$\cos \mathrm{i}y=\frac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}\cdot\mathrm{i}y}+\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\cdot\mathrm{i}y}}{2}=\frac{\mathrm{e}^{-y}+\mathrm{e}^{y}}{2}=\operatorname{ch} y,$$

$$\sin \mathrm{i}y=\frac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}\cdot\mathrm{i}y}-\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\cdot\mathrm{i}y}}{2\mathrm{i}}=\frac{\mathrm{e}^{-y}-\mathrm{e}^{y}}{2\mathrm{i}}=\mathrm{i}\cdot\frac{\mathrm{e}^{y}-\mathrm{e}^{-y}}{2}=\mathrm{i}\cdot\operatorname{sh} y,$$

nadobudne získaný výraz pre $\operatorname{tg} z$ tvar

$$\operatorname{tg} z=\frac{\sin x\operatorname{ch} y+\mathrm{i}\cos x\operatorname{sh} y}{\cos x\operatorname{ch} y-\mathrm{i}\sin x\operatorname{sh} y}.$$

Následnými úpravami dostaneme

$$\operatorname{tg} z=\frac{\sin x\operatorname{ch} y+\mathrm{i}\cos x\operatorname{sh} y}{\cos x\operatorname{ch} y-\mathrm{i}\sin x\operatorname{sh} y}\cdot\frac{\cos x\operatorname{ch} y+\mathrm{i}\sin x\operatorname{sh} y}{\cos x\operatorname{ch} y+\mathrm{i}\sin x\operatorname{sh} y}$$

$$=\frac{\sin x\cos x\operatorname{ch}^2 y-\cos x\sin x\operatorname{sh}^2 y+\mathrm{i}\cdot\left[\sin^2 x\operatorname{ch} y\operatorname{sh} y+\cos^2 x\operatorname{sh} y\operatorname{ch} y\right]}{\cos^2 x\operatorname{ch}^2 y+\sin^2 x\operatorname{sh}^2 y}$$

$$= \frac{\sin x \cos x \cdot \overbrace{\left(\mathrm{ch}^2 y - \mathrm{sh}^2 y\right)}^{1} + \mathrm{i} \cdot \overbrace{\left[\sin^2 x + \cos^2 x\right]}^{1} \cdot \mathrm{sh}\, y\, \mathrm{ch}\, y}{\cos^2 x\, \mathrm{ch}^2\, y + \sin^2 x\, \mathrm{sh}^2\, y}$$

$$= \frac{\sin x \cos x + \mathrm{i} \cdot \mathrm{sh}\, y\, \mathrm{ch}\, y}{\cos^2 x\, \mathrm{ch}^2\, y + \sin^2 x\, \mathrm{sh}^2\, y}.$$

Menovateľ posledného zlomku sa dá takto zjednodušiť

$$\cos^2 x\, \mathrm{ch}^2 y + \sin^2 x\, \mathrm{sh}^2 y = \cos^2 x \cdot \left(1 + \mathrm{sh}^2 y\right) + \left(1 - \cos^2 x\right) \cdot \mathrm{sh}^2 y$$

$$= \cos^2 x + \mathrm{sh}^2 y.$$

Pre $\mathrm{tg}\, z$ teda získame vyjadrenie

$$\mathrm{tg}\, z = \frac{\sin x \cos x}{\cos^2 x + \mathrm{sh}^2 y} + \mathrm{i} \cdot \frac{\mathrm{sh}\, y\, \mathrm{ch}\, y}{\cos^2 x + \mathrm{sh}^2 y}$$

$$\Downarrow$$

$$\mathrm{Re}\, [\mathrm{tg}\, z] = \frac{\sin x \cos x}{\cos^2 x + \mathrm{sh}^2 y}, \qquad \mathrm{Im}\, [\mathrm{tg}\, z] = \frac{\mathrm{sh}\, y\, \mathrm{ch}\, y}{\cos^2 x + \mathrm{sh}^2 y}.$$

b) Podľa definície všeobecnej komplexnej mocniny, komplexného logaritmu a komplexnej exponenciály postupne platí

$$z^{\mathrm{i}} = \mathrm{e}^{\mathrm{i}\, \mathrm{Log}\, z} = \mathrm{e}^{\mathrm{i} \cdot (\ln |z| + \mathrm{i}\, \mathrm{Arg}\, z)} = \mathrm{e}^{-\mathrm{Arg}\, z + \mathrm{i} \ln |z|} = \mathrm{e}^{-\mathrm{Arg}\, z} \cdot \mathrm{e}^{\mathrm{i} \ln |z|}$$

$$= \mathrm{e}^{-\mathrm{Arg}\, z} \left(\cos \ln |z| + \mathrm{i} \sin \ln |z|\right) = \mathrm{e}^{-\mathrm{Arg}\, z} \cos \ln |z| + \mathrm{i} \cdot \mathrm{e}^{-\mathrm{Arg}\, z} \sin \ln |z|$$

(samy overte ;)). Teda

$$\mathrm{Re}\left[z^{\mathrm{i}}\right] = \mathrm{e}^{-\mathrm{Arg}\, z} \cos \ln |z|, \qquad \mathrm{Im}\left[z^{\mathrm{i}}\right] = \mathrm{e}^{-\mathrm{Arg}\, z} \sin \ln |z| \qquad :).$$

Príklad 9

Vypočítajme limitu

$$\lim_{z \to 0} \frac{\mathrm{ch} z - 1}{\sin z}.$$

Riešenie:
Dosadením $z = 0$ do danej limity zistíme, že sa jedná o neurčitosť typu $0/0$. Funkcie $\mathrm{ch}z - 1$ a $\sin z$ sú celé, t.j., holomorfné v celej komplexnej rovine, a teda holomorfné i na nejakom rýdzom okolí limitného bodu 0. Podľa *komplexnej verzie* L'Hospitalovho pravidla potom limita v zadaní príkladu *existuje* a platí (derivujeme komplexne podľa z)

$$\lim_{z\to 0} \frac{\mathrm{ch}z - 1}{\sin z} = \lim_{z\to 0} \frac{(\mathrm{ch}z - 1)'}{(\sin z)'}$$

(samy overte :)). Keďže $(\mathrm{ch}z - 1)' = (\mathrm{ch}z)' = \mathrm{sh}z$ a $(\sin z)' = \cos z$, máme

$$\lim_{z\to 0} \frac{\mathrm{ch}z - 1}{\sin z} = \lim_{z\to 0} \frac{\mathrm{sh}z}{\cos z} = \frac{\mathrm{sh}\,0}{\cos 0} = \frac{0}{1} = 0 \quad :).$$

Príklad 10
Overme platnosť Cauchyho–Riemannových rovností na celom $\mathbb{R}^2$ pre komplexnú funkciu $w = \mathrm{e}^{z^2}$.

Riešenie:
Potrebujeme najprv stanoviť reálnu a imaginárnu časť funkcie w. Pre $z = x + \mathrm{i}y$ postupne dostávame

$$w = \mathrm{e}^{z^2} = \mathrm{e}^{(x+\mathrm{i}y)^2} = \mathrm{e}^{x^2-y^2+2\mathrm{i}xy} = \mathrm{e}^{x^2-y^2}(\cos 2xy + \mathrm{i}\cdot\sin 2xy)$$

$$= \mathrm{e}^{x^2-y^2}\cos 2xy + \mathrm{i}\cdot\mathrm{e}^{x^2-y^2}\sin 2xy$$

$$\Downarrow$$

$$\mathrm{Re}\, w = u = \mathrm{e}^{x^2-y^2}\cos 2xy, \qquad \mathrm{Im}\, w = v = \mathrm{e}^{x^2-y^2}\sin 2xy.$$

Vypočítame prvé parciálne derivácie funkcií u, v podľa premenných x, y

$$u'_x = 2\mathrm{e}^{x^2-y^2}(x\cos 2xy - y\sin 2xy), \quad u'_y = -2\mathrm{e}^{x^2-y^2}(y\cos 2xy + x\sin 2xy),$$

$$v'_x = 2\mathrm{e}^{x^2-y^2}(x\sin 2xy + y\cos 2xy), \quad v'_y = 2\mathrm{e}^{x^2-y^2}(-y\sin 2xy + x\cos 2xy)$$

(samy overte detaily výpočtov :)). Funkcie u, v teda spĺňajú na celom $\mathbb{R}^2$ Cauchyho–Riemannove rovnosti $u'_x = v'_y$ a $u'_y = -v'_x$:).