Príklady na precvičovanie – Cauchyho teória rezíduí a jej aplikácie

Riešené príklady

V nasledujúcich príkladoch aplikujeme Cauchyho teóriu *komplexných* krivkových integrálov na výpočet *reálnych* určitých a nevlastných integrálov. Tieto aplikácie predstavujú jeden z vrcholov komplexnej analýzy :). Najprv ilustrujeme použitie niekoľkých už „hotových“ formúl.

(i) **Integrál typu $\int_0^{2\pi} R(\cos t,\, \sin t)\,\mathrm{d}t$**

Predpoklady:

- Reálna funkcia $R(u, v)$ je racionálna lomená funkcia svojich premenných u, v.

Zavedením komplexnej premennej $z = \mathrm{e}^{\mathrm{i}t}$ prevedieme daný reálny integrál na komplexný krivkový integrál pozdĺž kladne orientovanej kružnice $|z| = 1$. Využívame pri tom identity

$$\cos t = \frac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}t} + \mathrm{e}^{-\mathrm{i}t}}{2} = \frac{z + z^{-1}}{2}, \qquad \sin t = \frac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}t} - \mathrm{e}^{-\mathrm{i}t}}{2\mathrm{i}} = \frac{z - z^{-1}}{2\mathrm{i}}.$$

Potom platí

$$\int_0^{2\pi} R(\cos t,\, \sin t)\,\mathrm{d}t = \left| \begin{array}{c} z = \mathrm{e}^{\mathrm{i}t} \\ \mathrm{d}z = \mathrm{i}\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}t}\,\mathrm{d}t \implies \mathrm{d}t = -\mathrm{i}z^{-1}\mathrm{d}z \\ t \in [0, 2\pi] \rightsquigarrow \varphi : |z| = 1 \end{array} \right|$$

$$= \int_\varphi R\left(\frac{z + z^{-1}}{2}, \frac{z - z^{-1}}{2\mathrm{i}}\right) \cdot (-\mathrm{i})z^{-1}\mathrm{d}z.$$

(ii) **Integrály typu $\int_{-\infty}^{\infty} f(t)\cos mt\,\mathrm{d}t$ a $\int_{-\infty}^{\infty} f(t)\sin mt\,\mathrm{d}t$ pre $m > 0$**

Predpoklady:

- Dané nevlastné integrály konvergujú.
- Komplexná funkcia $f(z)$ má v $\mathbb{C}$ iba konečne veľa izolovaných singularít, pričom na reálnej osi má najviac jednoduché póly.
- Platí $\lim_{z\to\infty} f(z) = 0$.

Potom platí

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(t)\cos mt\,\mathrm{d}t = \operatorname{Re}\left[2\pi\mathrm{i}\cdot\sum_{\operatorname{Im} w>0}\operatorname{res}_w f(z)\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}mz} + \pi\mathrm{i}\cdot\sum_{\operatorname{Im} w=0}\operatorname{res}_w f(z)\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}mz}\right],$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(t)\sin mt\,\mathrm{d}t = \operatorname{Im}\left[2\pi\mathrm{i}\cdot\sum_{\operatorname{Im} w>0}\operatorname{res}_w f(z)\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}mz} + \pi\mathrm{i}\cdot\sum_{\operatorname{Im} w=0}\operatorname{res}_w f(z)\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}mz}\right].$$

(iii) **Integrál typu $\int_{-\infty}^{\infty} f(t)\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}mt}\,\mathrm{d}t$ pre $m \neq 0$**

Predpoklady sú rovnaké ako pre typ (ii). V prípade ich splnenia platí

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(t)\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}mt}\,\mathrm{d}t = 2\pi\mathrm{i}\cdot\sum_{\operatorname{Im} w>0}\operatorname{res}_w f(z)\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}mz} + \pi\mathrm{i}\cdot\sum_{\operatorname{Im} w=0}\operatorname{res}_w f(z)\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}mz} \quad \text{pre } m>0,$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(t)\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}mt}\,\mathrm{d}t = \overline{2\pi\mathrm{i}\cdot\sum_{\operatorname{Im} w>0}\operatorname{res}_w f(z)\,\mathrm{e}^{-\mathrm{i}mz} + \pi\mathrm{i}\cdot\sum_{\operatorname{Im} w=0}\operatorname{res}_w f(z)\,\mathrm{e}^{-\mathrm{i}mz}} \quad \text{pre } m<0$$

(vodorovná čiara v druhej rovnosti značí komplexné združenie :)). Nechávame na čitateľa, aby si premyslel úzku súvislosť týchto formúl s identitami v prípade (ii), obzvlášť vo svetle Eulerovej rovnosti

$$\mathrm{e}^{\mathrm{i}mt} = \cos mt + \mathrm{i}\sin mt \quad ;).$$

(iv) **Integrál typu $\int_{-\infty}^{\infty} f(t)\,\mathrm{d}t$**

Predpoklady:

- Daný nevlastný integrál konverguje.
- Komplexná funkcia $f(z)$ má v hornej komplexnej polrovine (obsahujúcej nezápornú imaginárnu polos) iba konečne veľa izolovaných singularít, pričom žiadna z nich neleží na reálnej osi.

- Je splnená podmienka

$$\lim_{\substack{z\to\infty \\ \operatorname{Im} z\geq 0}} z f(z) = 0.$$

Potom platí

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(t)\,\mathrm{d}t = 2\pi\mathrm{i}\cdot \sum_{\operatorname{Im} w>0} \operatorname{res}_w f(z).$$

(v) **Integrál typu $\int_0^\infty f(t)\, t^{a-1}\,\mathrm{d}t$ pre $a\in\mathbb{R}\setminus\mathbb{Z}$**

Predpoklady:

- Daný nevlastný integrál konverguje.
- Komplexná funkcia $f(z)$ má v $\mathbb{C}$ iba konečne veľa izolovaných singularít, ktoré neležia v reálnom intervale $(0,\infty)$.
- Sú splnené podmienky

$$\lim_{z\to\infty} |z|^a f(z) = 0 = \lim_{z\to 0} |z|^a f(z).$$

Potom platí

$$\int_0^\infty f(t)\, t^{a-1}\,\mathrm{d}t = \frac{\pi}{\sin\pi a}\cdot \sum_{w\in\mathbb{C}\setminus[0,\infty)} \operatorname{res}_w\, (-z)^{a-1} f(z),$$

kde mocnina z^{a-1} je chápaná v zmysle svojej hlavnej hodnoty, t.j.,

$$z^{a-1} := \mathrm{e}^{(a-1)\cdot[\ln|z| + \mathrm{i}\cdot\arg z]}.$$

(vi) **Integrály typu $\int_0^\infty f(t)\ln t\,\mathrm{d}t$ a $\int_0^\infty f(t)\,\mathrm{d}t$**

Predpoklady:

- Dané nevlastné integrály konvergujú.

- Komplexná funkcia $f(z)$ má v $\mathbb{C}$ iba konečne veľa izolovaných singularít, ktoré neležia v reálnom intervale $(0,\infty)$.
- Sú splnené podmienky

$$\lim_{z\to\infty} zf(z)\ln^2|z| = 0 = \lim_{z\to 0} zf(z)\ln^2|z|.$$

Potom platí

$$\int_0^\infty f(t)\ln t\,\mathrm{d}t = -\frac{1}{2}\cdot \mathrm{Re}\left[\sum_{w\in\mathbb{C}\setminus[0,\infty)} \mathrm{res}_w\, f(z)\log_{2\pi}^2 z\right],$$

$$\int_0^\infty f(t)\,\mathrm{d}t = -\frac{1}{2\pi}\cdot \mathrm{Im}\left[\sum_{w\in\mathbb{C}\setminus[0,\infty)} \mathrm{res}_w\, f(z)\log_{2\pi}^2 z\right],$$

kde logaritmická funkcia $\log_{2\pi} z$ je definovaná predpisom

$$\log_{2\pi} z := \ln|z| + \mathrm{i}\cdot\varphi \quad \text{pre } \varphi\in[0,2\pi).$$

V tomto prípade platí $(\log_{2\pi} z)' = 1/z$ vo všetkých bodoch z, v ktorých je funkcia $\log_{2\pi} z$ holomorfná.

Príklad 1

Pomocou Cauchyho teórie zistime hodnotu určitého integrálu

$$I = \int_0^\pi \frac{a}{a^2+\sin^2 t}\,\mathrm{d}t, \qquad a>0.$$

Riešenie:

Zavedením jednoduchej substitúcie $t = s/2$ prevedieme I na integrál typu (i). Konkrétne, máme

$$I = \int_0^{2\pi} \frac{a}{a^2+\underbrace{\sin^2\left(\frac{s}{2}\right)}_{\frac{1-\cos s}{2}}}\cdot\frac{1}{2}\,\mathrm{d}s = \int_0^{2\pi} \overbrace{\frac{a}{2a^2+1-\cos s}}^{\text{toto je racionálna funkcia v } \cos s}\,\mathrm{d}s$$

(samy overte detaily ;)). Teraz už môžeme integrál I previesť na komplexný krivkový v súlade s návodom v (i). Pre $z = \mathrm{e}^{\mathrm{i}s}$ postupne dostávame

$$I = \int_\varphi \frac{a}{2a^2+1-\frac{z+z^{-1}}{2}} \cdot (-\mathrm{i})z^{-1}\,\mathrm{d}z = \int_\varphi \frac{\mathrm{i}2a}{z^2-2z(2a^2+1)+1}\,\mathrm{d}z,$$

kde φ je kladne orientovaná kružnica $|z| = 1$ (samy overte výpočty :)). Na vypočet posledného komplexného integrálu aplikujeme Cauchyho vetu o rezíduách :). Komplexná funkcia

$$f(z) = \frac{\mathrm{i}2a}{z^2-2z(2a^2+1)+1}$$

má izolované singularity v koreňoch svojho menovateľa, t.j., v bodoch

$$z_1 = 2a^2+1+2a\sqrt{a^2+1}, \qquad z_2 = 2a^2+1-2a\sqrt{a^2+1}$$

(samy overte :)). Obidva body z_1, z_2 sú jednoduchými pólmi funkcie $f(z)$, pričom vo vnútri kružnice φ leží iba bod z_2. Vyplýva to jednak z faktu, že čísla z_1, z_2 sú reálne, a jednak z nasledujúcich odhadov

$$z_1 - 1 = 2a^2 + 2a\sqrt{a^2+1} > 0 \implies z_1 > 1,$$

$$z_2 - 1 = 2a^2 - 2a\sqrt{a^2+1} = 2a \cdot \underbrace{\left(a - \sqrt{a^2+1}\right)}_{<0} < 0 \implies z_2 < 1,$$

$$z_2 + 1 = 2a^2 + 2 - 2a\sqrt{a^2+1} = 2\sqrt{a^2+1} \cdot \underbrace{\left(\sqrt{a^2+1} - a\right)}_{>0} > 0 \implies z_2 > -1$$

(samy si dobre premyslite ;)). Podľa vety o rezíduách potom pre hodnotu integrálu I platí

$$I = 2\pi\mathrm{i} \cdot \operatorname{res}_{z_2} f(z).$$

Potrebujeme teda stanoviť rezíduum funkcie $f(z)$ v bode z_2. Keďže z_2 je jednoduchý pól funkcie $f(z)$, máme

$$\operatorname{res}_{z_2} f(z) = \lim_{z\to z_2}(z-z_2)\cdot f(z) = \lim_{z\to z_2}(z-z_2)\cdot \frac{\mathrm{i}2a}{z^2-2z(2a^2+1)+1}.$$

Body z_1, z_2 sú korene nemovateľa $z^2 - 2z(2a^2+1)+1$, preto platí rozklad

$$z^2 - 2z(2a^2+1)+1 = (z-z_1)(z-z_2)$$

(samy si dobre premyslite :)). Po dosadení do poslednej limity dostávame

$$\operatorname{res}_{z_2} f(z) = \lim_{z\to z_2} (z-z_2)\cdot \frac{\mathrm{i}2a}{(z-z_1)(z-z_2)} = \lim_{z\to z_2} \frac{\mathrm{i}2a}{z-z_1} = \frac{\mathrm{i}2a}{z_2-z_1}$$

$$= \frac{\mathrm{i}2a}{\left(2a^2+1-2a\sqrt{a^2+1}\right)-\left(2a^2+1+2a\sqrt{a^2+1}\right)} = -\frac{\mathrm{i}}{2\sqrt{a^2+1}}$$

(samy overte :)). Nakoniec pre integrál I v zadaní príkladu máme

$$I = \int_0^\pi \frac{a}{a^2+\sin^2 t}\,\mathrm{d}t = 2\pi\mathrm{i}\cdot\left(-\frac{\mathrm{i}}{2\sqrt{a^2+1}}\right) = \frac{\pi}{\sqrt{a^2+1}} \qquad :).$$

Poznamenajme, že uvedený určitý integrál sa dá vypočítať aj tradičným spôsobom pomocou Newtonovej–Leibnizovej formuly, nakoľko funkcia

$$g(t) = \frac{a}{a^2+\sin^2 t}$$

má primitívnu funkciu na intervale $[0,\pi]$ vyjadriteľnú pomocou elementárnych funkcií. Nechávame na čitateľa, aby sám overil nasledujúce výpočty :).

$$I = \int_0^\pi \frac{a}{a^2+\sin^2 t}\,\mathrm{d}t = \left| \begin{array}{c} u = t-\frac{\pi}{2} \\ \mathrm{d}u = \mathrm{d}t \\ 0 \rightsquigarrow -\frac{\pi}{2}, \quad \pi \rightsquigarrow \frac{\pi}{2} \end{array} \right| = \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \frac{a}{a^2+\sin^2\left(u+\frac{\pi}{2}\right)}\,\mathrm{d}u$$

$$= \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \frac{a}{a^2+\cos^2 u}\,\mathrm{d}u = \left| \begin{array}{c} p = \operatorname{tg} u \implies u = \operatorname{arctg} p \\ \cos^2 u = \frac{1}{1+p^2} \\ \mathrm{d}u = \frac{1}{1+p^2}\,\mathrm{d}p \\ -\frac{\pi}{2} \rightsquigarrow -\infty, \quad \frac{\pi}{2} \rightsquigarrow \infty \end{array} \right| = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{a}{a^2+\frac{1}{1+p^2}}\cdot\frac{1}{1+p^2}\,\mathrm{d}p$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} \frac{a}{a^2p^2+a^2+1}\,\mathrm{d}p = \frac{1}{a}\cdot\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\mathrm{d}p}{p^2+\frac{a^2+1}{a^2}} = \frac{1}{a}\cdot\left[\frac{a}{\sqrt{a^2+1}}\cdot\operatorname{arctg}\frac{ap}{\sqrt{a^2+1}}\right]_{-\infty}^{\infty}$$

$$= \left[\frac{1}{\sqrt{a^2+1}} \cdot \operatorname{arctg} \frac{ap}{\sqrt{a^2+1}} \right]_{-\infty}^{\infty} = \frac{1}{\sqrt{a^2+1}} \cdot \frac{\pi}{2} + \frac{1}{\sqrt{a^2+1}} \cdot \frac{\pi}{2} = \frac{\pi}{\sqrt{a^2+1}} \qquad :).$$

Príklad 2

Vypočítajme nevlastný integrál

$$I = \int_0^{\infty} \frac{\sin at}{t\,(t^2+b^2)}\,\mathrm{d}t, \qquad a, b \in \mathbb{R}^+.$$

Riešenie:

Jedná sa o integrál typu (ii). Je absolútne konvergentný, pretože

$$\lim_{t\to 0^+} \frac{\sin at}{t\,(t^2+b^2)} = \frac{a}{b^2}, \qquad \left| \frac{\sin at}{t\,(t^2+b^2)} \right| \le \frac{a}{t^2+b^2}, \quad t \in (0,\infty), \qquad \int_0^{\infty} \frac{1}{t^2+b^2}\,\mathrm{d}t = \frac{\pi}{2b}$$

(samy si premyslite, ako z týchto pozorovaní vyplýva absolútna konvergencia nevlastného integrálu v zadaní príkladu :)). Komplexná funkcia $f(z)$ je

$$f(z) = \frac{1}{z(z^2+b^2)}.$$

Platí $\lim_{z\to\infty} f(z) = 0$, ako sa možno ľahko presvedčiť :). Funkcia $f(z)$ je racionálna lomená funkcia, svoje izolované singularity má práve v koreňoch svojho menovateľa, t.j. v číslach 0, $\pm \mathrm{i}b$. Všetky tri singularity sú jednoduché póly (samy overte :)). Z nich nás zaujímajú iba tie, ktoré majú nezápornú imaginárnu časť, teda 0 a $\mathrm{i}b$, v súlade s predpokladom $b > 0$. Potrebujeme v nich zistiť rezíduá funkcie $f(z)\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}az}$. Postupne dostaneme

$$\operatorname{res}_0 f(z)\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}az} = \lim_{z\to 0} z \cdot \frac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}az}}{z(z^2+b^2)} = \lim_{z\to 0} \frac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}az}}{z^2+b^2} = \frac{1}{b^2},$$

$$\operatorname{res}_{\mathrm{i}b} f(z)\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}az} = \lim_{z\to \mathrm{i}b} (z-\mathrm{i}b) \cdot \frac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}az}}{z(z^2+b^2)} = \lim_{z\to \mathrm{i}b} \frac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}az}}{z(z+\mathrm{i}b)} = \frac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}a\cdot\mathrm{i}b}}{\mathrm{i}b\cdot(\mathrm{i}b+\mathrm{i}b)} = -\frac{\mathrm{e}^{-ab}}{2b^2}$$

(samy overte ;)). Dosadením do vhodnej formuly v (ii) dostaneme

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\sin at}{t\,(t^2+b^2)}\,\mathrm{d}t = \operatorname{Im}\left[2\pi\mathrm{i}\cdot \operatorname{res}_{\mathrm{i}b} f(z)\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}az} + \pi\mathrm{i}\cdot \operatorname{res}_0 f(z)\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}az}\right]$$

$$= \operatorname{Im}\left[2\pi\mathrm{i}\cdot\left(-\frac{\mathrm{e}^{-ab}}{2b^2}\right)+\pi\mathrm{i}\cdot\frac{1}{b^2}\right] = \frac{\pi\cdot(1-\mathrm{e}^{-ab})}{b^2}.$$

Nakoľko funkcia pod integrálom v zadaní príkladu je párna, platí

$$I = \int_0^\infty \frac{\sin at}{t\,(t^2+b^2)}\,\mathrm{d}t = \frac{1}{2}\cdot\int_{-\infty}^\infty \frac{\sin at}{t\,(t^2+b^2)}\,\mathrm{d}t = \frac{\pi\cdot(1-\mathrm{e}^{-ab})}{2b^2} \qquad :).$$

Príklad 3

Určme hodnotu nevlastného integrálu

$$I = \int_{-\infty}^\infty \frac{\mathrm{e}^{-5\mathrm{i}t}}{t^2+4}\,\mathrm{d}t.$$

Riešenie:

Predložený integrál konverguje, a to absolútne. Vyplýva to z nerovnosti

$$\left|\frac{\mathrm{e}^{-5\mathrm{i}t}}{t^2+4}\right| = \frac{\overbrace{\left|\mathrm{e}^{-5\mathrm{i}t}\right|}^{\text{toto je 1}}}{t^2+4} = \frac{1}{t^2+4}, \qquad t\in(-\infty,\infty),$$

a z identity $\int_{-\infty}^\infty \frac{1}{t^2+4} = \frac{\pi}{2}$ (samy si dobre premyslite :)). Jedná sa zrejme o integrál typu (iii) s $m=-5$ a s komplexnou funkciou

$$f(z) = \frac{1}{z^2+4}.$$

Funkcia $f(z)$ má jednoduché póly v bodoch $w_1 = -2\mathrm{i}$ a $w_2 = 2\mathrm{i}$ (samy overte :)). Podľa formúl v (iii) nás zaujímajú iba singularity s nezápornou imaginárnou častou, t.j., iba w_2. Nakoľko $m<0$, dostávame

$$I = \int_{-\infty}^\infty \frac{\mathrm{e}^{-5\mathrm{i}t}}{t^2+4}\,\mathrm{d}t = \overline{2\pi\mathrm{i}\cdot\operatorname{res}_{w_2} f(z)\,\mathrm{e}^{-5\mathrm{i}z}} = \overline{2\pi\mathrm{i}\cdot\lim_{z\to2\mathrm{i}}(z-2\mathrm{i})\cdot\frac{\mathrm{e}^{-5\mathrm{i}z}}{z^2+4}}$$

$$= \overline{2\pi\mathrm{i}\cdot\lim_{z\to2\mathrm{i}}(z-2\mathrm{i})\cdot\frac{\mathrm{e}^{-5\mathrm{i}z}}{(z+2\mathrm{i})(z-2\mathrm{i})}} = \overline{2\pi\mathrm{i}\cdot\lim_{z\to2\mathrm{i}}\frac{\mathrm{e}^{-5\mathrm{i}z}}{z+2\mathrm{i}}}$$

$$= \overline{2\pi\mathrm{i} \cdot \frac{\mathrm{e}^{-5\mathrm{i}\cdot 2\mathrm{i}}}{2\mathrm{i}+2\mathrm{i}}} = \overline{\frac{\pi}{2} \cdot \mathrm{e}^{10}} = \frac{\pi}{2} \cdot \mathrm{e}^{10} \qquad :)$$

(samy overte detaily výpočtov ;)).

Príklad 4

Stanovme nevlastný integrál

$$I = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{3t+1}{(t^2+1)^2}\,\mathrm{d}t.$$

Riešenie:

Jedná sa o integrál typu (iv). Príslušná komplexná funkcia $f(z)$ má tvar

$$f(z) = \frac{3z+1}{(z^2+1)^2}.$$

Platí $\lim_{z\to\infty} zf(z) = 0$. Je to racionálna lomená funkcia s izolovanými singularitami v bodoch $\pm\mathrm{i}$, ktoré neležia na reálnej osi. Podstatná je pre nás singularita $w = \mathrm{i}$, nakoľko $\operatorname{Im} w > 0$. V tomto bode má funkcia $f(z)$ dvojnásobný pól (samy overte všetky pozorovania ;)). Pre rezíduum $\operatorname{res}_{\mathrm{i}} f(z)$ platí

$$\operatorname{res}_{\mathrm{i}} f(z) = \lim_{z\to\mathrm{i}} \left[(z-\mathrm{i})^2 \cdot \frac{3z+1}{(z^2+1)^2}\right]' = \lim_{z\to\mathrm{i}} \left[\frac{3z+1}{(z+\mathrm{i})^2}\right]' = \lim_{z\to\mathrm{i}} \frac{3(\mathrm{i}-z)-2}{(z+\mathrm{i})^3} = -\frac{\mathrm{i}}{4}.$$

Dosadením do formuly v (iv) dostaneme pre integrál I v zadaní vyjadrenie

$$I = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{3t+1}{(t^2+1)^2}\,\mathrm{d}t = 2\pi\mathrm{i} \cdot \left(-\frac{\mathrm{i}}{4}\right) = \frac{\pi}{2} \qquad :).$$

Poznamenajme, že predložený nevlastný integrál sa dá vypočítať aj klasickým spôsobom. Samy overte nasledujúce výpočty ;).

$$I = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{3t+1}{(t^2+1)^2}\,\mathrm{d}t = \frac{3}{2} \cdot \int_{-\infty}^{\infty} \frac{2t\,\mathrm{d}t}{(t^2+1)^2} + \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\mathrm{d}t}{(t^2+1)^2}$$

$$= \frac{3}{2} \cdot \left[-\frac{1}{t^2+1}\right]_{-\infty}^{\infty} + \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\mathrm{d}t}{(t^2+1)^2} = \frac{3}{2} \cdot 0 + \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\mathrm{d}t}{(t^2+1)^2} = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{(t^2+1)-t^2}{(t^2+1)^2}\,\mathrm{d}t$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\mathrm{d}t}{t^2+1} - \int_{-\infty}^{\infty} \frac{t^2\,\mathrm{d}t}{(t^2+1)^2} = [\operatorname{arctg} t]_{-\infty}^{\infty} - \int_{-\infty}^{\infty} \frac{t^2\,\mathrm{d}t}{(t^2+1)^2} = \pi - \int_{-\infty}^{\infty} \frac{t^2\,\mathrm{d}t}{(t^2+1)^2}$$

$$= \left| \begin{array}{cc} u' = \frac{t}{(t^2+1)^2}, & u = -\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{t^2+1}, \\ v = t, & v' = 1 \end{array} \right| = \pi - \left[-\frac{1}{2}\cdot\frac{t}{t^2+1} \right]_{-\infty}^{\infty} - \frac{1}{2}\cdot\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\mathrm{d}t}{t^2+1}$$

$$= \pi - \frac{1}{2}\cdot\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\mathrm{d}t}{t^2+1} = \pi - 0 - \frac{1}{2}\cdot[\operatorname{arctg} t]_{-\infty}^{\infty} = \pi - \frac{1}{2}\cdot\pi = \frac{\pi}{2} \qquad :).$$

Príklad 5

Nájdime hodnotu nevlastného integrálu

$$I = \int_0^{\infty} \frac{t^{a-1}}{t^2+1}\,\mathrm{d}t, \qquad a \in (0,1).$$

Riešenie:

Jedná sa o konvergentný integrál typu (v) (pozri dodatok za príkladom :)). Odpovedajúca komplexná funkcia $f(z)$ má tvar

$$f(z) = \frac{1}{z^2+1}.$$

Nie je ťažké overiť, že v súlade s predpokladom v zadaní príkladu platí

$$\lim_{z\to\infty} |z|^a f(z) = \lim_{z\to\infty} \frac{|z|^a}{z^2+1} = 0 \quad \text{a} \quad \lim_{z\to 0} |z|^a f(z) = \lim_{z\to 0} \frac{|z|^a}{z^2+1} = 0.$$

Funkcia $f(z)$ má jednoduché póly v bodoch $\pm\mathrm{i}$, ktoré iste neležia na kladnej reálnej osi. Potrebujeme stanoviť rezíduá funkcie $(-z)^{a-1}f(z)$ v týchto bodoch. Keďže mocninová funkcia $(-z)^{a-1}$ je holomorfná na ľubovoľných okoliach bodov $\pm\mathrm{i}$, ktoré neobsahujú bod 0, platí

$$\operatorname{res}_{\mathrm{i}} (-z)^{a-1} f(z) = \lim_{z\to\mathrm{i}} (z-\mathrm{i}) \cdot \frac{(-z)^{a-1}}{z^2+1} = \lim_{z\to\mathrm{i}} \frac{(-z)^{a-1}}{z+\mathrm{i}}$$

$$= \frac{(-\mathrm{i})^{a-1}}{2\mathrm{i}} = \frac{\mathrm{e}^{(a-1)\cdot[\ln|-\mathrm{i}|+\mathrm{i}\cdot\arg(-\mathrm{i})]}}{2\mathrm{i}} = \frac{\mathrm{e}^{(a-1)\cdot\mathrm{i}\cdot(-\pi/2)}}{2\mathrm{i}} = \frac{\mathrm{e}^{-\mathrm{i}(a-1)\pi/2}}{2\mathrm{i}}$$

(samy overte :)). Analogicky zistíme rezíduum v bode $-\mathrm{i}$, konkrétne

$$\operatorname{res}_{-\mathrm{i}}(-z)^{a-1}f(z) = -\frac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}(a-1)\pi/2}}{2\mathrm{i}}$$

(i toto si samy premyslite ;)). Pripomeňme, že pri výpočte uvedených rezíduí sme využili fakt, že mocninu $(-z)^{a-1}$ počítame v zmysle jej hlavnej hodnoty podľa predpisu v (v). Následným dosadením do formuly v (v) dostaneme pre integrál I v zadaní príkladu vyjadrenie

$$I = \int_0^\infty \frac{t^{a-1}}{t^2+1}\,\mathrm{d}t = \frac{\pi}{\sin\pi a}\cdot\left[\operatorname{res}_{\mathrm{i}}(-z)^{a-1}f(z) + \operatorname{res}_{-\mathrm{i}}(-z)^{a-1}f(z)\right]$$

$$= \frac{\pi}{\sin\pi a}\cdot\underbrace{\left[\frac{\mathrm{e}^{-\mathrm{i}(a-1)\pi/2}}{2\mathrm{i}} - \frac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}(a-1)\pi/2}}{2\mathrm{i}}\right]}_{\text{toto je } -\sin\left(\frac{\pi(a-1)}{2}\right)} = -\frac{\pi}{\sin\pi a}\cdot\sin\left(\frac{\pi(a-1)}{2}\right)$$

$$= \frac{-\pi}{\sin\pi a}\cdot\sin\left(\frac{\pi a}{2}-\frac{\pi}{2}\right) = \frac{\pi}{\underbrace{\sin\pi a}_{2\sin\frac{\pi a}{2}\cos\frac{\pi a}{2}}}\cdot\cos\frac{\pi a}{2} = \frac{\pi\cos\frac{\pi a}{2}}{2\sin\frac{\pi a}{2}\cos\frac{\pi a}{2}} = \frac{\pi}{2\sin\frac{\pi a}{2}} \quad :)$$

(samy overte detaily výpočtov ;)).

Dodatok k Príkladu 5

Poznamenajme najprv, že výraz $\frac{t^{a-1}}{t^2+1}$ je pre každé $a \in (0,1)$ spojitý na intervale $(0,\infty)$. V bode $t = 0$ má zrejme singularitu, nakoľko

$$\lim_{t\to 0^+}\frac{t^{a-1}}{t^2+1} = \infty$$

(samy overte :)). Naviac, pre každé $t \in (0,\infty)$ platia nerovnosti

$$0 < \left|\frac{t^{a-1}}{t^2+1}\right| < t^{a-1} \qquad \text{a} \qquad 0 < \left|\frac{t^{a-1}}{t^2+1}\right| < t^{a-3}$$

(samy si premyslite; prvá nerovnosť využíva pozorovanie $t^2+1 > 1$, kým druhá nerovnosť vyplýva z $t^2+1 > t^2$;)). Z prvej rovnosti na základe porovnávacieho kritéria máme absolútnu existenciu nevlastného integrálu $\int_0^1 \frac{t^{a-1}}{t^2+1}\,\mathrm{d}t$, pretože určitý integrál

$$\int_0^1 t^{a-1}\,\mathrm{d}t = \left[\frac{t^a}{a}\right]_0^1 = \frac{1}{a} \quad \text{pre } a \in (0,1) \text{ konverguje}$$

(samy overte :)). Druhá vyššie uvedená nerovnosť zase implikuje (pomocou porovnávacieho kritéria) absolútnu konvergenciu nevlastného integrálu $\int_1^\infty \frac{t^{a-1}}{t^2+1}\,\mathrm{d}t$, lebo nevlastný integrál

$$\int_1^\infty t^{a-3}\,\mathrm{d}t = \left[\frac{t^{a-2}}{a-2}\right]_1^\infty = \frac{1}{2-a} \quad \text{pre } a \in (0,1) \text{ konverguje}$$

(i toto samy overte ;)). To potom znamená, že absolútne konverguje i nevlastný integrál

$$\int_0^1 \frac{t^{a-1}}{t^2+1}\,\mathrm{d}t + \int_1^\infty \frac{t^{a-1}}{t^2+1}\,\mathrm{d}t = \int_0^\infty \frac{t^{a-1}}{t^2+1}\,\mathrm{d}t \quad :).$$

Príklad 6

Určme nevlastné integrály

$$I = \int_0^\infty \frac{\ln t}{(t^2+1)^2}\,\mathrm{d}t, \qquad J = \int_0^\infty \frac{1}{(t^2+1)^2}\,\mathrm{d}t.$$

Riešenie:

Ide o konvergentné integrály typu (vi) (pozri dodatok za príkladom :)). Komplexná funkcia $f(z)$ má v tomto prípade tvar

$$f(z) = \frac{1}{(z^2+1)^2}.$$

Nechávame na čitateľa, aby ukázal platnosť podmienok

$$\lim_{z\to\infty} zf(z)\ln^2|z| = \lim_{z\to\infty} \frac{z\ln^2|z|}{(z^2+1)^2} = 0 \quad \text{a} \quad \lim_{z\to 0} zf(z)\ln^2|z| = \lim_{z\to 0} \frac{z\ln^2|z|}{(z^2+1)^2} = 0 \quad :).$$

Funkcia $f(z)$ má dvojnásobné póly v bodoch $\pm$i. Zaujímajú nás rezíduá funkcie $f(z)\log_{2\pi}^2 z$ v týchto bodoch. Podľa rovnosti v (vi) je funkcia $\log_{2\pi}^2 z$ holomorfná na okoliach bodov $\pm$i, ktoré neobsahujú bod 0. Preto máme

$$\operatorname{res}_{\mathrm{i}} f(z)\log_{2\pi}^2 z = \lim_{z\to\mathrm{i}}\left[(z-\mathrm{i})^2\cdot\frac{\log_{2\pi}^2 z}{(z^2+1)^2}\right]' = \lim_{z\to\mathrm{i}}\left[\frac{\log_{2\pi}^2 z}{(z+\mathrm{i})^2}\right]'$$

$$= \lim_{z\to\mathrm{i}}\frac{2\log_{2\pi} z\left[(z+\mathrm{i})\cdot\frac{1}{z}-\log_{2\pi} z\right]}{(z+\mathrm{i})^3} = \frac{2\log_{2\pi}\mathrm{i}\,[2-\log_{2\pi}\mathrm{i}]}{(2\mathrm{i})^3}.$$

Keďže podľa formuly v (vi) platí

$$\log_{2\pi}\mathrm{i} = \ln|\mathrm{i}| + \mathrm{i}\cdot\frac{\pi}{2} = \frac{\pi\mathrm{i}}{2},$$

pre hodnotu $\operatorname{res}_{\mathrm{i}} f(z)\log_{2\pi}^2 z$ dostávame

$$\operatorname{res}_{\mathrm{i}} f(z)\log_{2\pi}^2 z = \frac{2\cdot\frac{\pi\mathrm{i}}{2}\cdot\left[2-\frac{\pi\mathrm{i}}{2}\right]}{-8\mathrm{i}} = -\frac{\pi}{4}+\mathrm{i}\cdot\frac{\pi^2}{16}.$$

Podobnou procedúrou získame hodnotu $\operatorname{res}_{-\mathrm{i}} f(z)\log_{2\pi}^2 z$ (samy overte :))

$$\operatorname{res}_{-\mathrm{i}} f(z)\log_{2\pi}^2 z = \frac{3\pi}{4}-\mathrm{i}\cdot\frac{9\pi^2}{16}.$$

Pre hodnotu integrálu I v zadaní príkladu potom platí

$$\int_0^\infty\frac{\ln t}{(t^2+1)^2}\,\mathrm{d}t = -\frac{1}{2}\cdot\operatorname{Re}\left[\operatorname{res}_{\mathrm{i}} f(z)\log_{2\pi}^2 z + \operatorname{res}_{-\mathrm{i}} f(z)\log_{2\pi}^2 z\right]$$

$$= -\frac{1}{2}\cdot\operatorname{Re}\left[-\frac{\pi}{4}+\mathrm{i}\cdot\frac{\pi^2}{16}+\frac{3\pi}{4}-\mathrm{i}\cdot\frac{9\pi^2}{16}\right] = -\frac{1}{2}\cdot\operatorname{Re}\left[\frac{\pi}{2}-\mathrm{i}\cdot\frac{\pi^2}{2}\right] = -\frac{\pi}{4} \quad :).$$

Hodnota druhého integrálu J v zadaní príkladu má tvar

$$\int_0^\infty\frac{1}{(t^2+1)^2}\,\mathrm{d}t = -\frac{1}{2\pi}\cdot\operatorname{Im}\left[\operatorname{res}_{\mathrm{i}} f(z)\log_{2\pi}^2 z + \operatorname{res}_{-\mathrm{i}} f(z)\log_{2\pi}^2 z\right]$$

$$= -\frac{1}{2\pi}\cdot\operatorname{Im}\left[\frac{\pi}{2}-\mathrm{i}\cdot\frac{\pi^2}{2}\right] = \frac{\pi}{4}.$$

Dodatok k Príkladu 6

Výraz $\frac{\ln t}{(t^2+1)^2}$ je spojitý na intervale $(0,\infty)$, pričom v bode $t=0$ platí

$$\lim_{t\to 0^+} \frac{\ln t}{(t^2+1)^2} = -\infty$$

(samy overte :)). Existenciu nevlastného integrálu I v zadaní Príkladu 6 dokážeme podobne ako v Príklade 5. Z pozorovaní

$$\left| \frac{\ln t}{(t^2+1)^2} \right| \le |\ln t| = -\ln t, \qquad t \in (0,1],$$

$$\int_0^1 |\ln t| \, \mathrm{d}t = -\int_0^1 \ln t \, \mathrm{d}t = -\left[t \ln t - t\right]_0^1 = 1 + \lim_{t\to 0^+} t \ln t = 1,$$

$$\lim_{t\to\infty} \frac{\frac{\ln t}{(t^2+1)^2}}{\frac{1}{t^2+1}} = \lim_{t\to\infty} \frac{\ln t}{t^2+1} = 0, \qquad \int_1^\infty \frac{1}{t^2+1} \, \mathrm{d}t = [\operatorname{arctg} t]_1^\infty = \frac{\pi}{4}$$

vyplýva konvergencia nevlastných integrálov

$$\int_0^1 \frac{\ln t}{(t^2+1)^2} \, \mathrm{d}t \qquad \text{a} \qquad \int_1^\infty \frac{\ln t}{(t^2+1)^2} \, \mathrm{d}t$$

(samy si dobre premyslite na základe nelimitného a limitného porovnávacieho kritéria ;)). Potom konverguje i nevlastný integrál I, keďže

$$I = \int_0^\infty \frac{\ln t}{(t^2+1)^2} \, \mathrm{d}t = \int_0^1 \frac{\ln t}{(t^2+1)^2} \, \mathrm{d}t + \int_1^\infty \frac{\ln t}{(t^2+1)^2} \, \mathrm{d}t \quad :).$$

Nechávame na čitateľa, aby konvergenciu nevlastného integrálu J v zadaní Príkladu 5 overil jeho priamym výpočtom (využite výpočty v Príklade 4 ;)).

V ďalších príkladoch si ukážeme, čo sa pri výpočtoch určitých, resp. nevlastných reálnych integrálov pomocou komplexnej Cauchyho teórie deje „v skutočnosti“ :). Poznamenajme, že niektoré z nasledujúcich integrálov nie sú z typov (i), (ii), (iii), (iv), (v) a (vi).

Príklad 7
Nájdime hodnoty tzv. *Fresnelových* integrálov

$$\int_0^\infty \cos t^2\,\mathrm{d}t, \qquad \int_0^\infty \sin t^2\,\mathrm{d}t.$$

Riešenie:
Obidva nevlastné integrály konvergujú (pozri dodatok za príkladom :)). Uvažujme komplexnú funkciu $f(z)$ tvaru

$$f(z)=\mathrm{e}^{\mathrm{i}z^2}, \quad z\in\mathbb{C}.$$

Funkcia $f(z)$ je celá, t.j., je holomorfná v celej komplexnej rovine. Podľa Cauchyho integrálnej vety potom pre každú uzavretú, kladne orientovanú a po častiach hladkú krivku φ platí

$$\int_\varphi \mathrm{e}^{\mathrm{i}z^2}\mathrm{d}z=0.$$

Uvažujme kladne orientovanú krivku φ v tvare $\varphi=\varphi_1\oplus\varphi_2\oplus\varphi_3$, pričom

$$\varphi_1\,:\,z=t,\ t\in[0,R],\qquad \varphi_2\,:\,z=R\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}t},\ t\in\left[0,\frac{\pi}{4}\right],\qquad \varphi_3\,:\,z=(R-t)\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}\pi/4},\ t\in[0,R],$$

kde R je dané kladné reálne číslo (samy znázornite v komplexnej rovine; mali by ste dostať jednu osminku kruhovej „tortičky“ so stredom v bode 0 :)). Pre každé $R>0$ potom platí

$$0=\int_\varphi \mathrm{e}^{\mathrm{i}z^2}\mathrm{d}z=\underbrace{\int_{\varphi_1}\mathrm{e}^{\mathrm{i}z^2}\mathrm{d}z}_{I_1}+\underbrace{\int_{\varphi_2}\mathrm{e}^{\mathrm{i}z^2}\mathrm{d}z}_{I_2}+\underbrace{\int_{\varphi_3}\mathrm{e}^{\mathrm{i}z^2}\mathrm{d}z}_{I_3}. \tag{1}$$

Jednotlivé krivkové integrály I_1, I_2 a I_3 prepíšeme pomocou daných parametrizácií. Všimnime si, že krivky φ_1, φ_2 a φ_3 sú parametrizované súhlasne s kladnou orientáciou celej krivky φ :). Postupne dostávame

$$I_1=\int_{\varphi_1}\mathrm{e}^{\mathrm{i}z^2}\mathrm{d}z=\left|\begin{array}{c} z=t\\ \mathrm{d}z=\mathrm{d}t\\ t\in[0,R]\end{array}\right|=\int_0^R \mathrm{e}^{\mathrm{i}t^2}\mathrm{d}t=\int_0^R\big(\cos t^2+\mathrm{i}\sin t^2\big)\,\mathrm{d}t$$

$$= \int_0^R \cos t^2 \,\mathrm{d}t + \mathrm{i} \cdot \int_0^R \sin t^2 \,\mathrm{d}t,$$

$$I_2 = \int_{\varphi_2} \mathrm{e}^{\mathrm{i}z^2} \mathrm{d}z = \left| \begin{array}{c} z = R\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}t} \\ \mathrm{d}z = \mathrm{i}R\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}t}\,\mathrm{d}t \\ t \in \left[0, \frac{\pi}{4}\right] \end{array} \right| = \int_0^{\pi/4} \mathrm{e}^{\mathrm{i}\cdot(R\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}t})^2} \cdot \mathrm{i}R\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}t}\,\mathrm{d}t$$

$$= \mathrm{i}R \cdot \int_0^{\pi/4} \mathrm{e}^{\mathrm{i}R^2\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}\cdot 2t}} \cdot \mathrm{e}^{\mathrm{i}t}\,\mathrm{d}t = \mathrm{i}R \cdot \int_0^{\pi/4} \mathrm{e}^{-R^2 \sin 2t + \mathrm{i}R^2 \cos 2t} \cdot \mathrm{e}^{\mathrm{i}t}\,\mathrm{d}t$$

$$= \mathrm{i}R \cdot \int_0^{\pi/4} \mathrm{e}^{-R^2 \sin 2t} \cdot \mathrm{e}^{\mathrm{i}R^2 \cos 2t} \cdot \mathrm{e}^{\mathrm{i}t}\,\mathrm{d}t,$$

$$I_3 = \int_{\varphi_3} \mathrm{e}^{\mathrm{i}z^2} \mathrm{d}z = \left| \begin{array}{c} z = (R-t)\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}\pi/4} \\ \mathrm{d}z = -\mathrm{e}^{\mathrm{i}\pi/4}\,\mathrm{d}t \\ t \in [0, R] \end{array} \right| = \int_0^R \mathrm{e}^{\mathrm{i}\cdot\left[(R-t)\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}\pi/4}\right]^2} \cdot \left(-\mathrm{e}^{\mathrm{i}\pi/4}\right)\mathrm{d}t$$

$$= -\mathrm{e}^{\mathrm{i}\pi/4} \cdot \int_0^R \mathrm{e}^{\mathrm{i}\cdot(R-t)^2 \cdot \overbrace{\mathrm{e}^{\mathrm{i}\pi/2}}^{\text{toto je i}}}\,\mathrm{d}t = -\mathrm{e}^{\mathrm{i}\pi/4} \cdot \int_0^R \mathrm{e}^{-(R-t)^2} \mathrm{d}t.$$

Zavedením substitúcie $s = R - t$ v poslednom integrále máme

$$I_3 = -\mathrm{e}^{\mathrm{i}\pi/4} \cdot \int_0^R \mathrm{e}^{-s^2} \mathrm{d}s$$

(samy overte :)). Dosadením vyššie uvedených vyjadrení integrálov I_1 a I_3 do rovnosti (1) získame

$$0 = \int_0^R \cos t^2 \,\mathrm{d}t + \mathrm{i} \cdot \int_0^R \sin t^2 \,\mathrm{d}t + I_2 - \mathrm{e}^{\mathrm{i}\pi/4} \cdot \int_0^R \mathrm{e}^{-s^2} \mathrm{d}s. \tag{2}$$

Integrál I_2 odhadneme v absolútnej hodnote zhora

$$|I_2| = \left| \mathrm{i}R \cdot \int_0^{\pi/4} \mathrm{e}^{-R^2 \sin 2t} \cdot \mathrm{e}^{\mathrm{i}R^2 \cos 2t} \cdot \mathrm{e}^{\mathrm{i}t} \, \mathrm{d}t \right|$$

$$\leq |\mathrm{i}| \cdot |R| \cdot \int_0^{\pi/4} \left| \mathrm{e}^{-R^2 \sin 2t} \right| \cdot \overbrace{\left| \mathrm{e}^{\mathrm{i}R^2 \cos 2t} \right|}^{\text{toto je 1}} \cdot \overbrace{\left| \mathrm{e}^{\mathrm{i}t} \right|}^{\text{toto je 1}} \, \mathrm{d}t = R \cdot \int_0^{\pi/4} \mathrm{e}^{-R^2 \sin 2t} \, \mathrm{d}t$$

(samy si dobre premyslite jednotlivé kroky ;)). V poslednom integrále sa funkcia $\sin 2t$ dá nahradiť funkciou $4t/\pi$ s tým, že tento integrál sa zväčší (nakreslením grafov oboch funkcií na intervale $[0, \pi/4]$ sa samy presvedčte, že platí $4t/\pi \leq \sin 2t$ pre $t \in [0, \pi/4]$:)). Preto máme

$$|I_2| \leq R \cdot \int_0^{\pi/4} \mathrm{e}^{-4R^2 t/\pi} \, \mathrm{d}t = \frac{\pi}{4R} \left(1 - \mathrm{e}^{-R^2} \right) \tag{3}$$

(poslednú rovnosť samy overte priamou integráciou podľa premennej t :)). Dôvod, prečo robíme takéto hrozné výpočty a odhady je nasledujúci. V rovnosti (2) budeme *limitovať* $R \to \infty$. Môžeme to urobiť, pretože rovnosti (1), (2) a odhad (3) platia pre *akúkoľvek* tortičku φ, a teda aj pre obrovské tortisko φ :). Celý fígeľ spočíva v tom, že pri takomto limitovaní prvý a druhý integrál v (2) prejdu na Fresnelove integrály v zadaní príkladu, kým integrál I_2 bude konvergovať do nuly (z odhadu (3) vyplýva $|I_2| \to 0$ pre $R \to \infty$, samy overte ;)). Napokon posledný integrál v (2) sa zmení na Poissonov integrál $\int_0^\infty \mathrm{e}^{-s^2} \mathrm{d}s$:). Platí teda

$$0 = \int_0^R \cos t^2 \, \mathrm{d}t + \mathrm{i} \cdot \int_0^R \sin t^2 \, \mathrm{d}t + I_2 - \mathrm{e}^{\mathrm{i}\pi/4} \cdot \int_0^R \mathrm{e}^{-s^2} \mathrm{d}s$$

$$\Downarrow \text{ pre } R \to \infty \Downarrow$$

$$0 = \int_0^\infty \cos t^2 \, \mathrm{d}t + \mathrm{i} \cdot \int_0^\infty \sin t^2 \, \mathrm{d}t - \mathrm{e}^{\mathrm{i}\pi/4} \cdot \int_0^\infty \mathrm{e}^{-s^2} \mathrm{d}s.$$

Z Matematickej analýzy III však vieme, že

$$\int_0^\infty \mathrm{e}^{-s^2} \mathrm{d}s = \frac{\sqrt{\pi}}{2}$$

(samy vhodným spôsobom overte ;)). Okrem toho $\mathrm{e}^{\mathrm{i}\pi/4} = \frac{1+\mathrm{i}}{\sqrt{2}}$. Dostávame

$$0 = \int_0^\infty \cos t^2 \,\mathrm{d}t + \mathrm{i} \cdot \int_0^\infty \sin t^2 \,\mathrm{d}t - \frac{1+\mathrm{i}}{\sqrt{2}} \cdot \frac{\sqrt{\pi}}{2}.$$

Z poslednej rovnosti porovnaním reálnych a imaginárnych častí daných výrazov vyplýva finálny výsledok

$$\int_0^\infty \cos t^2 \,\mathrm{d}t = \sqrt{\frac{\pi}{8}}, \qquad \int_0^\infty \sin t^2 \,\mathrm{d}t = \sqrt{\frac{\pi}{8}} \quad :).$$

Dodatok k Príkladu 7

Dokážeme konvergenciu nevlastného integrálu $\int_0^\infty \cos t^2 \,\mathrm{d}t$ v zadaní Príkladu 6 (analogicky sa postupuje i v prípade nevlastného integrálu $\int_0^\infty \sin t^2 \,\mathrm{d}t$). Daný integrál môžeme *intuitívne* vyjadriť ako súčet

$$\int_0^\infty \cos t^2 \,\mathrm{d}t \overset{???}{=} \int_0^1 \cos t^2 \,\mathrm{d}t + \int_1^\infty \cos t^2 \,\mathrm{d}t.$$

Troch otáznikov nad symbolom $=$ sa môžeme zbaviť jedine vtedy, keď ukážeme existenciu oboch integrálov na pravej strane uvedenej rovnosti :). Nakoľko funkcia $\cos t^2$ je spojitá na intervale $[0, 1]$, určitý Riemannov integrál $\int_0^1 \cos t^2 \,\mathrm{d}t$ bez problémov existuje a má konečnú hodnotu. V druhom, nevlastnom integrále $\int_1^\infty \cos t^2 \,\mathrm{d}t$ vykonáme substitúciu $t = \sqrt{u}$, t.j.,

$$\int_1^\infty \cos t^2 \,\mathrm{d}t = \left| \begin{array}{c} t = \sqrt{u} \\ \mathrm{d}t = \frac{1}{2\sqrt{u}} \,\mathrm{d}u \\ 1 \rightsquigarrow 1, \quad \infty \rightsquigarrow \infty \end{array} \right| = \int_1^\infty \frac{\cos u}{2\sqrt{u}} \,\mathrm{d}u.$$

Všimnime si účelnosť rozdelenia pôvodného nevlastného integrálu na dva integrály. Uvedená substitúcia totiž nie je použiteľná na celom intervale $[0, \infty)$ (samy si premyslite :)). Vzniknutý nevlastný integrál teraz vyšetríme pomocou *Dirichletovho kritéria* :). Položme

$$f(u) := \cos u, \qquad g(u) := \frac{1}{2\sqrt{u}}.$$

Funkcia $f(u)$ je spojitá na intervale $[1,\infty)$, pričom určitý integrál $\int_1^p f(u)\,\mathrm{d}u$ ako funkcia hornej hranice p existuje pre každé $p \in [1,\infty)$ a je rovnomerne ohraničený vzhľadom na p na $[1,\infty)$. V ľudskej reči to znamená asi toto

$$\int_1^p f(u)\,\mathrm{d}u = \int_1^p \cos u\,\mathrm{d}u = [\sin p]_1^p = \sin p - \sin 1 \quad \text{pre každé } p \in [1,\infty),$$

$$\left|\int_1^p f(u)\,\mathrm{d}u\right| = |\sin p - \sin 1| \leq |\sin p| + |\sin 1| \leq 2 \quad \text{pre každé } p \in [1,\infty) \qquad :)$$

(samy si premyslite clivou spomienkou na dávne a krásne časy Matematickej analýzy I ;)). Naviac, funkcia $g(u)$ je spojito diferencovateľná a klesajúca na intervale $[1,\infty)$ a $\lim_{u\to\infty} g(u) = \lim_{u\to\infty} \frac{1}{2\sqrt{u}} = 0$ (i toto je nostalgia minulých čias :)). Podľa Dirichletovho kritéria je potom zaručená konvergencia nevlastného integrálu

$$\int_1^\infty f(u)\,g(u)\,\mathrm{d}u = \int_1^\infty \frac{\cos u}{2\sqrt{u}}\,\mathrm{d}u = \int_1^\infty \cos t^2\,\mathrm{d}t \qquad :).$$

To následne dokazuje i konvergenciu nevlastného integrálu

$$\int_0^1 \cos t^2\,\mathrm{d}t + \int_1^\infty \cos t^2\,\mathrm{d}t = \int_0^\infty \cos t^2\,\mathrm{d}t \qquad ;).$$

Príklad 8

Nech n je dané prirodzené číslo. Pomocou výpočtu komplexného integrálu

$$I = \int_\varphi \left(z + \frac{1}{z}\right)^{2n} \frac{\mathrm{d}z}{z}, \qquad \varphi \,:\, |z| = 1,\ \circlearrowleft,$$

nájdime hodnotu určitého integrálu

$$\int_0^{2\pi} \cos^{2n} t\,\mathrm{d}t.$$

Riešenie:

Integrál I budeme počítať dvomi spôsobmi – jednak tradične, zavedením parametrizácie, a jednak pomocou Cauchyho teórie :). Riešenie úlohy v príklade bude spočívať v porovnaní výsledkov získaných týmito spôsobmi. Krivka φ je kladne orientované kružnica so stredom v bode 0 a polomerom 1. Má teda parametrické vyjadrenie $z = \mathrm{e}^{\mathrm{i}t}$, kde $t \in [0, 2\pi]$. Táto parametrizácia je zrejme súhlasná s orientáciou krivky φ v zadaní príkladu. Ďalej platí $\mathrm{d}z = \mathrm{i}\mathrm{e}^{\mathrm{i}t}\mathrm{d}t$. Zavedením danej parametrizácie do integrálu I dostaneme

$$I = \int_0^{2\pi} \left(\mathrm{e}^{\mathrm{i}t} + \mathrm{e}^{-\mathrm{i}t}\right)^{2n} \cdot \mathrm{e}^{-\mathrm{i}t} \cdot \mathrm{i} \cdot \mathrm{e}^{\mathrm{i}t}\,\mathrm{d}t = \int_0^{2\pi} (2\cos t)^{2n} \cdot \mathrm{i}\,\mathrm{d}t = \mathrm{i} \cdot \int_0^{2\pi} 2^{2n} \cos^{2n} t\,\mathrm{d}t.$$

Pri úprave sme využili identitu $\cos t = \frac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}t} + \mathrm{e}^{-\mathrm{i}t}}{2}$. Na druhej strane, integrál I sa dá upraviť na tvar

$$I = \int_\varphi \left(\frac{z^2+1}{z}\right)^{2n} \frac{\mathrm{d}z}{z} = \int_\varphi \frac{(z^2+1)^{2n}}{z^{2n+1}}\,\mathrm{d}z.$$

Čitateľ integrandu je funkcia holomorfná vo vnútri φ a konečná a spojitá na φ. Naviac, bod 0 (nulový bod menovateľa) leží vo vnútri krivky φ. Podľa Cauchyho integrálnej formuly teda platí

$$I = \frac{2\pi\mathrm{i}}{(2n)!} \cdot \left[(z^2+1)^{2n}\right]_{z=0}^{(2n)}$$

(samy si dobre premyslite :)). Potrebujeme nájsť hodnotu $2n$-tej derivácie funkcie $(z^2+1)^{2n}$ v bode $z = 0$. Jedná sa o polynóm stupňa $4n$, pričom podľa binomickej vety máme

$$(z^2+1)^{2n} = \sum_{k=0}^{2n} z^{2k} \binom{2n}{k}. \tag{4}$$

Po $2n$-tom derivovaní tohto polynómu dostaneme zrejme polynóm $2n$-tého stupňa, ktorého absolútny člen (člen s mocninou z^0) bude to, čo vznikne $2n$-tým derivovaním člena v pôvodnom polynóme (4) s $k = n$, t.j., člena $z^{2n}\binom{2n}{n}$ (samy si dobre premyslite; derivujeme prirodzené mocniny, ich stupne sa každou deriváciou znižujú o jednotku ;)). Načo nám je však tento absolútny člen? Po dosadení $z = 0$ do hľadanej $2n$-tej derivácie polynómu (4) nám ostane iba absolútny člen (i toto si samy dobre premyslite ;)). Platí teda

$$\left[(z^2+1)^{2n}\right]_{z=0}^{(2n)} = \left[z^{2n}\binom{2n}{n}\right]^{(2n)} = 2n \cdot (2n-1) \cdot (2n-2) \cdots 2 \cdot 1 \cdot \binom{2n}{n} = (2n)! \cdot \binom{2n}{n}$$

(samy overte :)). To znamená, že pre integrál I v zadaní príkladu máme

$$I = \frac{2\pi\mathrm{i}}{(2n)!} \cdot (2n)! \cdot \binom{2n}{n} = 2\pi\mathrm{i} \cdot \binom{2n}{n}.$$

Nakoniec porovnaním oboch získaných hodnôt pre I dostaneme

$$\mathrm{i} \cdot \int_0^{2\pi} 2^{2n} \cos^{2n} t \, \mathrm{d}t = 2\pi \mathrm{i} \cdot \binom{2n}{n}$$

$$\Downarrow$$

$$\int_0^{2\pi} \cos^{2n} t \, \mathrm{d}t = \frac{\pi}{2^{2n-1}} \cdot \binom{2n}{n} \qquad :).$$

Príklad 9

Pomocou výpočtu komplexného integrálu

$$I = \int_\varphi \frac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}mz}}{\mathrm{e}^z + \mathrm{e}^{-z}} \, \mathrm{d}z$$

pozdĺž vhodnej uzavretej krivky φ nájdime hodnoty nevlastných integrálov

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\sin mt}{\mathrm{e}^t + \mathrm{e}^{-t}} \, \mathrm{d}t, \qquad \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\cos mt}{\mathrm{e}^t + \mathrm{e}^{-t}} \, \mathrm{d}t, \qquad m \in \mathbb{R}.$$

Riešenie:

Preskúmame najprv existenciu uvedených nevlastných integrálov. Keďže výraz $\frac{\sin mt}{\mathrm{e}^t + \mathrm{e}^{-t}}$ je nepárnou funkciou premennej t a integrujeme cez interval symetrický vzhľadom na bod 0, platí

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\sin mt}{\mathrm{e}^t + \mathrm{e}^{-t}} \, \mathrm{d}t = 0 \qquad :))$$

(samy si dobre premyslite ;)). Pre váhajúcich čitateľov pripájame i korektnejšie argumenty

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\sin mt}{\mathrm{e}^t + \mathrm{e}^{-t}} \, \mathrm{d}t = \lim_{R\to\infty} \underbrace{\int_{-R}^{R} \frac{\sin mt}{\mathrm{e}^t + \mathrm{e}^{-t}} \, \mathrm{d}t}_{\text{toto je 0}} = \lim_{R\to\infty} 0 = 0 \qquad :).$$

Skvelé, takže polovicu príkladu máme hotovú ;)). Na druhej strane, výraz $\frac{\cos mt}{\mathrm{e}^t+\mathrm{e}^{-t}}$ je párnou funkciou premennej t, a preto

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\cos mt}{\mathrm{e}^t + \mathrm{e}^{-t}}\,\mathrm{d}t = 2 \cdot \int_0^{\infty} \frac{\cos mt}{\mathrm{e}^t + \mathrm{e}^{-t}}\,\mathrm{d}t.$$

Stačí teda overiť konvergenciu nevlastného integrálu $\int_0^\infty \frac{\cos mt}{\mathrm{e}^t+\mathrm{e}^{-t}}\,\mathrm{d}t$. Platí

$$\left|\frac{\cos mt}{\mathrm{e}^t + \mathrm{e}^{-t}}\right| = \frac{\overbrace{|\cos mt|}^{\leq 1}}{\underbrace{\mathrm{e}^t + \mathrm{e}^{-t}}_{>\mathrm{e}^t}} < \frac{1}{\mathrm{e}^t} = \mathrm{e}^{-t}, \qquad t \in [0, \infty),$$

$$\int_0^{\infty} \mathrm{e}^{-t}\,\mathrm{d}t = \left[-\mathrm{e}^{-t}\right]_0^{\infty} = 1$$

(samy si dobre premyslite :)). Z porovnávacieho kritéria potom vyplýva konvergencia nevlastného integrálu $\int_0^\infty \left|\frac{\cos mt}{\mathrm{e}^t+\mathrm{e}^{-t}}\right| \mathrm{d}t$, a teda absolútna konvergencia nevlastného integrálu $\int_0^\infty \frac{\cos mt}{\mathrm{e}^t+\mathrm{e}^{-t}}\,\mathrm{d}t$. Uvažujme teraz komplexnú funkciu

$$f(z) = \frac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}mz}}{\mathrm{e}^z + \mathrm{e}^{-z}}.$$

Funkcia $f(z)$ je zrejme holomorfná v celom $\mathbb{C}$ okrem bodov z spĺňajúcich

$$\mathrm{e}^z + \mathrm{e}^{-z} = 0 \quad \Longleftrightarrow \quad \mathrm{e}^{2z} = -1.$$

Množina všetkých koreňov poslednej rovnice má tvar

$$\left\{\frac{\pi \mathrm{i}}{2} + k\pi, \quad k \in \mathbb{Z}\right\}$$

(samy overte ;)). Funkcia $f(z)$ má teda nekonečne veľa izolovaných singularít, ekvidištantne rozložených na imaginárnej osi (samy ich znázornite v komplexnej rovine :)). Každá z nich je jednoduchý pól funkcie $f(z)$ (pokúste sa samy zdôvodniť ;)). Uvažujme ďalej uzavretú, kladne orientovanú krivku φ tvaru $\varphi = \varphi_1 \oplus \varphi_2 \oplus \varphi_3 \oplus \varphi_4$, kde

$$\varphi_1 : z = t, \quad t \in [-R, R], \qquad \qquad \varphi_3 : z = -t + \mathrm{i}\pi, \quad t \in [-R, R],$$

$$\varphi_2 \,:\, z = R + \mathrm{i}t, \quad t \in [0,\pi], \qquad\qquad \varphi_4 \,:\, z = -R + \mathrm{i}(\pi - t), \quad t \in [0,\pi]$$

pre dané $R > 0$. Jedná sa teda o kladne orientovaný obvod obdĺžnika s vrcholmi v bodoch $[-R,0]$, $[R,0]$, $[R,\pi]$ a $[-R,\pi]$ (samy zakreslite v komplexnej rovine :)). Keďže vo vnútri φ leží pre každé $R > 0$ iba jediná singularita $z = \frac{\pi \mathrm{i}}{2}$ funkcie $f(z)$, podľa Cauchyho vety o rezíduách platí

$$I = \int_\varphi f(z)\,\mathrm{d}z = \int_\varphi \frac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}mz}}{\mathrm{e}^z + \mathrm{e}^{-z}}\,\mathrm{d}z = 2\pi\mathrm{i} \cdot \operatorname{res}_{\frac{\pi\mathrm{i}}{2}} f(z)$$

(samy si premyslite ;)). Bod $\frac{\pi\mathrm{i}}{2}$ je jednoduchý pól funkcie $f(z)$, takže

$$\operatorname{res}_{\frac{\pi\mathrm{i}}{2}} f(z) = \lim_{z \to \frac{\pi\mathrm{i}}{2}} \left(z - \frac{\pi\mathrm{i}}{2}\right) \cdot \frac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}mz}}{\mathrm{e}^z + \mathrm{e}^{-z}} = \lim_{z \to \frac{\pi\mathrm{i}}{2}} \frac{\left(z - \frac{\pi\mathrm{i}}{2}\right) \cdot \mathrm{e}^{\mathrm{i}mz}}{\mathrm{e}^z + \mathrm{e}^{-z}}.$$

V poslednej limite nastáva neurčitosť typu $0/0$, pričom čitateľ i menovateľ daného zlomku sú funkcie holomorfné na prstencovom okolí limitného bodu $\frac{\pi\mathrm{i}}{2}$ (samy overte :)). Podľa komplexného l'Hospitalovho pravidla potom máme

$$\begin{aligned}
\operatorname{res}_{\frac{\pi\mathrm{i}}{2}} f(z) &= \lim_{z \to \frac{\pi\mathrm{i}}{2}} \frac{\left[\left(z - \frac{\pi\mathrm{i}}{2}\right) \cdot \mathrm{e}^{\mathrm{i}mz}\right]'}{\left[\mathrm{e}^z + \mathrm{e}^{-z}\right]'} = \lim_{z \to \frac{\pi\mathrm{i}}{2}} \frac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}mz} + \left(z - \frac{\pi\mathrm{i}}{2}\right) \cdot \mathrm{i}m \cdot \mathrm{e}^{\mathrm{i}mz}}{\mathrm{e}^z - \mathrm{e}^{-z}} \\
&= \frac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}m \cdot \frac{\pi\mathrm{i}}{2}}}{\mathrm{e}^{\frac{\pi\mathrm{i}}{2}} - \mathrm{e}^{-\frac{\pi\mathrm{i}}{2}}} = \frac{\mathrm{e}^{-\frac{m\pi}{2}}}{2\mathrm{i}}.
\end{aligned}$$

Pre hodnotu komplexného integrálu I teda dostávame

$$I = \int_\varphi \frac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}mz}}{\mathrm{e}^z + \mathrm{e}^{-z}}\,\mathrm{d}z = 2\pi\mathrm{i} \cdot \frac{\mathrm{e}^{-\frac{m\pi}{2}}}{2\mathrm{i}} = \pi \mathrm{e}^{-\frac{m\pi}{2}}.$$

Všimnime si, že táto hodnota *nezávisí* na voľbe parametra $R > 0$. Môžeme preto daný obdĺžnik ľubovoľne *rozťahovať* pre $R \to \infty$:). Krivkový integrál I teraz vyjadríme pomocou parametrizácie krivky φ, t.j.,

$$I = \underbrace{\int_{\varphi_1} f(z)\,\mathrm{d}z}_{I_1} + \underbrace{\int_{\varphi_2} f(z)\,\mathrm{d}z}_{I_2} + \underbrace{\int_{\varphi_3} f(z)\,\mathrm{d}z}_{I_3} + \underbrace{\int_{\varphi_4} f(z)\,\mathrm{d}z}_{I_4}, \tag{5}$$

pričom pre čiastkové integrály I_1, I_2, I_3 a I_4 postupne máme

$$I_1 = \int_{\varphi_1} f(z)\,\mathrm{d}z = \left| \begin{array}{c} z = t \\ \mathrm{d}z = \mathrm{d}t \\ t \in [-R,R] \end{array} \right| = \int_{-R}^{R} \frac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}mt}}{\mathrm{e}^t + \mathrm{e}^{-t}}\,\mathrm{d}t,$$

$$I_2 = \int_{\varphi_1} f(z)\,\mathrm{d}z = \left| \begin{array}{c} z = R + \mathrm{i}t \\ \mathrm{d}z = \mathrm{i}\mathrm{d}t \\ t \in [0, \pi] \end{array} \right| = \int_0^{\pi} \frac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}m\cdot(R+\mathrm{i}t)}}{\mathrm{e}^{R+\mathrm{i}t} + \mathrm{e}^{-(R+\mathrm{i}t)}} \cdot \mathrm{i}\mathrm{d}t,$$

$$I_3 = \int_{\varphi_1} f(z)\,\mathrm{d}z = \left| \begin{array}{c} z = -t + \mathrm{i}\pi \\ \mathrm{d}z = -\mathrm{d}t \\ t \in [-R, R] \end{array} \right| = -\int_{-R}^{R} \frac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}m\cdot(-t+\mathrm{i}\pi)}}{\mathrm{e}^{-t+\mathrm{i}\pi} + \mathrm{e}^{t-\mathrm{i}\pi}}\,\mathrm{d}t,$$

$$I_4 = \int_{\varphi_1} f(z)\,\mathrm{d}z = \left| \begin{array}{c} z = -R + \mathrm{i}(\pi - t) \\ \mathrm{d}z = -\mathrm{i}\mathrm{d}t \\ t \in [0, \pi] \end{array} \right| = -\int_0^{\pi} \frac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}m\cdot[-R+\mathrm{i}(\pi-t)]}}{\mathrm{e}^{-R+\mathrm{i}(\pi-t)} + \mathrm{e}^{R-\mathrm{i}(\pi-t)}} \cdot \mathrm{i}\mathrm{d}t.$$

Integrál I_3 sa pomocou substitúcie $t = -u$ a identity $\mathrm{e}^{\mathrm{i}\pi} = \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\pi} = -1$ upraví

$$I_3 = \left| \begin{array}{c} t = -u \\ \mathrm{d}t = -\mathrm{d}u \\ -R \rightsquigarrow R, \quad R \rightsquigarrow -R \end{array} \right| = \int_R^{-R} \frac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}m\cdot(u+\mathrm{i}\pi)}}{\mathrm{e}^{u+\mathrm{i}\pi} + \mathrm{e}^{-u-\mathrm{i}\pi}}\,\mathrm{d}u$$

$$= \int_R^{-R} \frac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}mu} \cdot \mathrm{e}^{-m\pi}}{\mathrm{e}^{u} \cdot \mathrm{e}^{\mathrm{i}\pi} + \mathrm{e}^{-u} \cdot \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\pi}}\,\mathrm{d}u = -\mathrm{e}^{-m\pi} \cdot \int_R^{-R} \frac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}mu}}{\mathrm{e}^{u} + \mathrm{e}^{-u}}\,\mathrm{d}u$$

$$= \mathrm{e}^{-m\pi} \cdot \int_{-R}^{R} \frac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}mu}}{\mathrm{e}^{u} + \mathrm{e}^{-u}}\,\mathrm{d}u = \mathrm{e}^{-m\pi} \cdot I_1$$

(samy overte detaily výpočtu :)). Na druhej strane, hodnoty integrálov I_2 a I_4 sa budú s rastúcim R zmenšovať do nuly. Ukážeme to pomocou trojuholníkových nerovností platiacich pre každé $a \in \mathbb{R}^+$ a $b \in \mathbb{R}$

$$\left| |\mathrm{e}^{a+\mathrm{i}b}| - |\mathrm{e}^{-a-\mathrm{i}b}| \right| \leq \left| \mathrm{e}^{a+\mathrm{i}b} + \mathrm{e}^{-a-\mathrm{i}b} \right|$$

$$\Updownarrow$$

$$\left| \mathrm{e}^a \cdot \underbrace{\left|\mathrm{e}^{\mathrm{i}b}\right|}_{1} - \mathrm{e}^{-a} \cdot \underbrace{\left|\mathrm{e}^{-\mathrm{i}b}\right|}_{1} \right| \leq \left|\mathrm{e}^{a+\mathrm{i}b} + \mathrm{e}^{-a-\mathrm{i}b}\right|$$

$$\Updownarrow$$

$$\left|\mathrm{e}^a - \mathrm{e}^{-a}\right| \leq \left|\mathrm{e}^{a+\mathrm{i}b} + \mathrm{e}^{-a-\mathrm{i}b}\right|$$

$$\Updownarrow$$

$$\frac{1}{\left|\mathrm{e}^{a+\mathrm{i}b} + \mathrm{e}^{-a-\mathrm{i}b}\right|} \leq \frac{1}{\left|\mathrm{e}^a - \mathrm{e}^{-a}\right|}$$

(samy pozorne overte jednotlivé kroky výpočtov ;)). Aplikáciou poslednej odvodenej nerovnosti na integrál I_2 potom dostaneme odhad

$$|I_2| = \left| \int_0^\pi \frac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}m\cdot(R+\mathrm{i}t)}}{\mathrm{e}^{R+\mathrm{i}t} + \mathrm{e}^{-(R+\mathrm{i}t)}} \cdot \mathrm{i}\mathrm{d}t \right| \leq \int_0^\pi \left| \frac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}m\cdot(R+\mathrm{i}t)}}{\mathrm{e}^{R+\mathrm{i}t} + \mathrm{e}^{-(R+\mathrm{i}t)}} \cdot \mathrm{i} \right| \mathrm{d}t$$

$$= \int_0^\pi \frac{\left|\mathrm{e}^{\mathrm{i}m\cdot(R+\mathrm{i}t)}\right|}{\left|\mathrm{e}^{R+\mathrm{i}t} + \mathrm{e}^{-(R+\mathrm{i}t)}\right|} \cdot \underbrace{|\mathrm{i}|}_{1} \,\mathrm{d}t = \int_0^\pi \frac{\overbrace{\left|\mathrm{e}^{\mathrm{i}mR}\right|}^{1} \cdot \overbrace{\left|\mathrm{e}^{-mt}\right|}^{\mathrm{e}^{-mt}}}{\left|\mathrm{e}^{R+\mathrm{i}t} + \mathrm{e}^{-(R+\mathrm{i}t)}\right|} \,\mathrm{d}t$$

$$= \int_0^\pi \mathrm{e}^{-mt} \cdot \frac{1}{\left|\mathrm{e}^{R+\mathrm{i}t} + \mathrm{e}^{-R-\mathrm{i}t}\right|} \,\mathrm{d}t \leq \int_0^\pi \mathrm{e}^{-mt} \cdot \underbrace{\frac{1}{\left|\mathrm{e}^R - \mathrm{e}^{-R}\right|}}_{\text{konštanta}} \,\mathrm{d}t = \frac{1}{\left|\mathrm{e}^R - \mathrm{e}^{-R}\right|} \cdot \int_0^\pi \mathrm{e}^{-mt} \,\mathrm{d}t$$

$$= \frac{1}{\left|\mathrm{e}^R - \mathrm{e}^{-R}\right|} \cdot \left[-\frac{\mathrm{e}^{-mt}}{m} \right]_0^\pi = \frac{1}{\left|\mathrm{e}^R - \mathrm{e}^{-R}\right|} \cdot \left(\frac{1 - \mathrm{e}^{-m\pi}}{m} \right)$$

(samy si premyslite detaily :)). V treťom riadku týchto výpočtov sme použili vyššie odvodenú nerovnosť s $a + \mathrm{i}b = R + \mathrm{i}t$. Analogickou procedúrou dostaneme i pre integrál I_4 odhad

$$|I_4| = \left| -\int_0^\pi \frac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}m\cdot[-R+\mathrm{i}(\pi-t)]}}{\mathrm{e}^{-R+\mathrm{i}(\pi-t)} + \mathrm{e}^{R-\mathrm{i}(\pi-t)}} \cdot \mathrm{i}\mathrm{d}t \right| \leq \int_0^\pi \left| \frac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}m\cdot[-R+\mathrm{i}(\pi-t)]}}{\mathrm{e}^{-R+\mathrm{i}(\pi-t)} + \mathrm{e}^{R-\mathrm{i}(\pi-t)}} \cdot \mathrm{i} \right| \mathrm{d}t$$

$$= \int_0^\pi \frac{\left|\mathrm{e}^{\mathrm{i}m\cdot[-R+\mathrm{i}(\pi-t)]}\right|}{\left|\mathrm{e}^{-R+\mathrm{i}(\pi-t)} + \mathrm{e}^{R-\mathrm{i}(\pi-t)}\right|} \cdot \underbrace{|\mathrm{i}|}_{1} \,\mathrm{d}t = \int_0^\pi \frac{\overbrace{\left|\mathrm{e}^{-\mathrm{i}mR}\right|}^{1} \cdot \overbrace{\left|\mathrm{e}^{-m(\pi-t)}\right|}^{\mathrm{e}^{-m(\pi-t)}}}{\left|\mathrm{e}^{-R+\mathrm{i}(\pi-t)} + \mathrm{e}^{R-\mathrm{i}(\pi-t)}\right|} \,\mathrm{d}t$$

$$= \int_0^\pi \mathrm{e}^{m(t-\pi)} \cdot \frac{1}{\left|\mathrm{e}^{-R+\mathrm{i}(\pi-t)} + \mathrm{e}^{R-\mathrm{i}(\pi-t)}\right|}\,\mathrm{d}t \le \int_0^\pi \mathrm{e}^{m(t-\pi)} \cdot \underbrace{\frac{1}{|\mathrm{e}^{-R} - \mathrm{e}^{R}|}}_{\text{konštanta}}\,\mathrm{d}t$$

$$= \frac{1}{|\mathrm{e}^{-R} - \mathrm{e}^{R}|} \cdot \int_0^\pi \mathrm{e}^{m(t-\pi)}\,\mathrm{d}t = \frac{1}{|\mathrm{e}^{-R} - \mathrm{e}^{R}|} \cdot \left[\frac{\mathrm{e}^{m(t-\pi)}}{m}\right]_0^\pi = \frac{1}{|\mathrm{e}^{R} - \mathrm{e}^{-R}|} \cdot \left(\frac{1-\mathrm{e}^{-m\pi}}{m}\right).$$

Podobne, v treťom riadku týchto výpočtov sme aplikovali vyššie odvodenú nerovnosť s $a+\mathrm{i}b = -R+\mathrm{i}(\pi-t)$:). Integrály I_2 a I_4 teda spĺňajú nerovnosti

$$|I_2| \le \frac{1}{|\mathrm{e}^{R} - \mathrm{e}^{-R}|} \cdot \left(\frac{1-\mathrm{e}^{-m\pi}}{m}\right), \qquad |I_4| \le \frac{1}{|\mathrm{e}^{R} - \mathrm{e}^{-R}|} \cdot \left(\frac{1-\mathrm{e}^{-m\pi}}{m}\right).$$

Pre $R \to \infty$ potom máme rovnosti

$$\lim_{R\to\infty} |I_2| = 0 = \lim_{R\to\infty} |I_4| \qquad \Longleftrightarrow \qquad \lim_{R\to\infty} I_2 = 0 = \lim_{R\to\infty} I_4$$

(samy overte ;)). Okrem toho pre integrál I_1 platí

$$\lim_{R\to\infty} I_1 = \lim_{R\to\infty} \int_{-R}^{R} \frac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}mt}}{\mathrm{e}^t + \mathrm{e}^{-t}}\,\mathrm{d}t = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}mt}}{\mathrm{e}^t + \mathrm{e}^{-t}}\,\mathrm{d}t.$$

Zhrnieme teraz všetky získané výsledky. Nakoľko

$$I = \pi \mathrm{e}^{-\frac{m\pi}{2}}, \qquad I_3 = \mathrm{e}^{-m\pi} \cdot I_1,$$

podľa rovnice (5) dostávame

$$\pi \mathrm{e}^{-\frac{m\pi}{2}} = I_1 + I_2 + \mathrm{e}^{-m\pi} \cdot I_1 + I_4 = (1 + \mathrm{e}^{-m\pi}) \cdot I_1 + I_2 + I_4.$$

Limitovaním tejto rovnosti pre $R \to \infty$ a využitím predchádzajúcich pozorovaní odvodíme

$$\pi \mathrm{e}^{-\frac{m\pi}{2}} = (1 + \mathrm{e}^{-m\pi}) \cdot \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}mt}}{\mathrm{e}^t + \mathrm{e}^{-t}}\,\mathrm{d}t$$

$$\Downarrow$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}mt}}{\mathrm{e}^t + \mathrm{e}^{-t}}\,\mathrm{d}t = \frac{\pi \mathrm{e}^{-\frac{m\pi}{2}}}{1 + \mathrm{e}^{-m\pi}} = \frac{\pi \mathrm{e}^{\frac{m\pi}{2}}}{\mathrm{e}^{m\pi} + 1} \qquad :)$$

(samy si pozorne premyslite ;)). Avšak posledný nevlastný integrál spĺňa

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\overbrace{\mathrm{e}^{\mathrm{i}mt}}^{\cos mt + \mathrm{i}\sin mt}}{\mathrm{e}^t + \mathrm{e}^{-t}}\,\mathrm{d}t = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\cos mt}{\mathrm{e}^t + \mathrm{e}^{-t}}\,\mathrm{d}t + \mathrm{i}\cdot \underbrace{\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\sin mt}{\mathrm{e}^t + \mathrm{e}^{-t}}\,\mathrm{d}t}_{0} = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\cos mt}{\mathrm{e}^t + \mathrm{e}^{-t}}\,\mathrm{d}t$$

(nulovú hodnotu integrálu so sínusom sme ukázali na začiatku príkladu :)). Takže pre hodnotu druhého nevlastného integrálu v zadaní príkladu máme

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\cos mt}{\mathrm{e}^t + \mathrm{e}^{-t}}\,\mathrm{d}t = \frac{\pi \mathrm{e}^{\frac{m\pi}{2}}}{\mathrm{e}^{m\pi} + 1} \qquad :).$$

V použitom postupe riešenia úlohy sme mlčky predpokladali, že číslo $m \neq 0$ (samy zistite, kde :)). Nechávame na čitateľa, aby priamym výpočtom ukázal, že odvodený výsledok zostáva v platnosti aj pre $m = 0$;).

Neriešené príklady

1. Pomocou teórie rezíduí vypočítajte dané určité integrály. Vo všetkých úlohách uvažujte koeficienty $p, q \in \mathbb{R}$.

$$\text{a) } \int_0^{2\pi} \frac{\mathrm{d}t}{p + \cos t}, \quad p > 0, \qquad \text{b) } \int_0^{2\pi} \frac{\mathrm{d}t}{1 - 2p\cos t + p^2}, \quad 0 < |p| < 1,$$

$$\text{c) } \int_0^{2\pi} \frac{\cos 2t\,\mathrm{d}t}{p^2 + q^2 - 2pq\cos t}, \quad p > q > 0, \qquad \text{d) } \int_0^{2\pi} \frac{\mathrm{d}t}{(p + q\cos t)^2}, \quad p \neq 0.$$

2. Nájdite hodnoty nasledujúcich nevlastných integrálov.

$$\text{a) } \int_{-\infty}^{\infty} \frac{t\sin t}{t^2 + t + 1}\,\mathrm{d}t, \qquad \text{b) } \int_0^{\infty} \frac{\sin t}{t}\,\mathrm{d}t,$$

$$\text{c) } \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\cos 5t}{(t^2+1)^2(t^2+4)}\,\mathrm{d}t, \qquad \text{d) } \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\cos pt}{t^4 + 1}\,\mathrm{d}t, \quad p > 0.$$

3. Pomocou komplexnej analýzy vypočítajte dané nevlastné integrály.

$$\text{a) } \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\mathrm{d}t}{t^6 + 1}, \qquad \text{b) } \int_{-\infty}^{\infty} \frac{2t + 1}{t^4 + 1}\,\mathrm{d}t,$$

$$\text{c) } \int_{-\infty}^{\infty} \frac{t}{(t^2 + 4t + 13)^2}\,\mathrm{d}t, \qquad \text{d) } \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\mathrm{d}t}{(t^2 + p^2)^3}, \quad p > 0.$$

4. Stanovte nasledujúce nevlastné integrály.

$$\text{a)} \int_0^\infty \frac{t^p}{t^2+q^2}\,\mathrm{d}t, \quad |p|<1, \quad q>0, \qquad \text{b)} \int_{-\infty}^\infty \frac{\mathrm{e}^{pt}}{\mathrm{e}^{2t}+1}\,\mathrm{d}t, \quad p\in(0,1),$$

$$\text{c)} \int_0^\infty \frac{t^p}{(t+q)(t+2q)}\,\mathrm{d}t, \quad |p|<1, \quad p\neq 0, \quad q>0.$$

Návod: V úlohe b) použite substitúciu $u = \mathrm{e}^t$;).

5. Určte hodnoty daných nevlastných integrálov.

$$\text{a)} \int_0^\infty \frac{\ln t}{t^2+p^2}\,\mathrm{d}t, \quad p>0, \qquad \text{b)} \int_0^\infty \frac{1}{t^4+1}\,\mathrm{d}t,$$

$$\text{c)} \int_0^\infty \frac{t^2\ln t}{(t^2+1)^2}\,\mathrm{d}t.$$

6. Nech n je dané nezáporné celé číslo. Pomocou výpočtu komplexného krivkového integrálu

$$I = \int_\varphi \left(z-\frac{1}{z}\right)^{2n+1}\frac{\mathrm{d}z}{z}, \qquad \varphi : |z|=1, \circlearrowleft,$$

nájdite hodnotu určitého integrálu

$$\int_0^{2\pi} \sin^{2n+1} t\,\mathrm{d}t.$$

7*. Nech n je dané prirodzené číslo. Pomocou výpočtu komplexného krivkového integrálu

$$I = \int_\varphi \frac{\mathrm{e}^z}{z^{n+1}}\,\mathrm{d}z, \qquad \varphi : |z|=1, \circlearrowleft,$$

dokážte identity

$$\int_0^{2\pi} \mathrm{e}^{\cos t}\cos(nt-\sin t)\,\mathrm{d}t = \frac{2\pi}{n!}, \qquad \int_0^{2\pi} \mathrm{e}^{\cos t}\sin(nt-\sin t)\,\mathrm{d}t = 0.$$

8**. Využitím Cauchyho integrálnej vety a identity $\int_{-\infty}^{\infty} \mathrm{e}^{-t^2}\,\mathrm{d}t = \sqrt{\pi}$ dokážte rovnosť

$$\int_{-\infty}^{\infty} \mathrm{e}^{-at^2} \cos bt \,\mathrm{d}t = \sqrt{\frac{\pi}{a}} \cdot \mathrm{e}^{-\frac{b^2}{4a}}, \qquad a > 0, \quad b \geq 0.$$

Návod: Uvažujte komplexný integrál

$$\int_{\varphi} \mathrm{e}^{-az^2} \mathrm{d}z$$

pozdĺž kladne orientovaného obvodu obdĺžnika s vrcholmi v bodoch

$$R, \quad R + \mathrm{i} \cdot \frac{b}{2a}, \quad -R + \mathrm{i} \cdot \frac{b}{2a}, \quad -R,$$

kde $R > 0$. Tento integrál vyjadrite dvomi spôsobmi, jednak pomocou Cauchyho integrálnej vety, a jednak parametrizáciou integračnej cesty φ. Následne získané výsledky limitujte pre $R \to \infty$:).