## 8. Cvičení

1. Určete singulární body a jejich typ.

1. $\frac{dy}{dx} = \frac{2x+y}{3x+4y}$. $\{[0,0],\ \text{sedlo}\}$

2. $\frac{dy}{dx} = \frac{x-4y}{2y-3x}$. $\{[0,0],\ \text{uzel}\}$

3. $x' = 6x - 5y,$
   $y' = x + 3y.$ $\{[0,0],\ \text{ohnisko}\}$

4. $x' = 3x + y,$
   $y' = y - x.$ $\{[0,0],\ \text{uzel}\}$

5. $x' = x - y,$
   $y' = 2x - y.$ $\{[0,0],\ \text{střed}\}$

6. $x' = 3x,$
   $y' = 3y.$ $\{[0,0],\ \text{uzel}\}$

7. $x' = 3x + 4y - 5,$
   $y' = 2x + y.$ $\{[-1,2],\ \text{sedlo}\}$

8. $x' = x - 2y - 1,$
   $y' = 5x - y - 23.$ $\{[5,2],\ \text{střed}\}$

9. $x' = -2x + y - 6x^3 + 9y^5,$
   $y' = -x - 2y + 2x^3 - 3y^5.$ $\{[0,0],\ \text{ohnisko}\}$

10. $x' = 5x + 8y - 36,$
    $y' = 2x + 5y - 18.$ $\{[4,2],\ \text{uzel}\}$

2. Ukažte, že $[0,0]$ je singulárním bodem systému

$$x' = e^{x+y} - \sin x - 1,$$
$$y' = \ln(1+x^2) + y^2 + x$$

a určete jeho typ. {sedlo}

3. Nakreslete průběh trajektorií systému

$$x' = x^2 - y^2, \quad y' = 2xy.$$

{Trajektorie různé od singulárního bodu tvoří dvě otevřené polopřímky vycházející z počátku a ležící v přímce $y = 0$ a svazek kružnic $C(x^2+y^2) = y$.}



4. Určete všechny singulární body a jejich typ.

1. $x' = x^2 + y^2 - 6x - 8y,$
   $y' = x(2y - x + 5).$

   $\{[0,0]$ ohnisko, $[0,8], [3,-1]$ sedla, $[7,1]$ uzel$\}$

2. $x' = x - y + 1,$
   $y' = -\sin x.$

   $\{[k\pi, 1+k\pi],\ k$ celé; pro $k$ sudé sedlo, pro $k$ liché ohnisko$\}$

5. V závislosti na parametru $\varepsilon$ určete typ singulárního bodu autonomního systému ekvivalentního s van der Polovou rovnicí

$$x'' - \varepsilon(1-x^2)x' + x = 0.$$

{Střed pro $\varepsilon = 0$, ohnisko pro $0 < |\varepsilon| < 2$, uzel pro $|\varepsilon| \geq 2$.}

6. Dokažte, že v případě $|a| = |b| \neq 0$ vyplňují singulární body rovnice (4.1) přímku procházející počátkem. Je-li navíc $\Re(a) \neq 0$, jsou ostatní trajektorie rovnice (4.1) otevřené, navzájem rovnoběžné polopřímky vycházející z bodů této přímky a svírající s ní stejný nenulový úhel. Je-li $\Re(a) = 0$, jsou ostatní trajektorie rovnice (4.1) přímky rovnoběžné s přímkou tvořenou singulárními body. V případě $a = b = 0$ je celá rovina $\mathbb{C}$ vyplněna singulárními body rovnice (4.1).

### Doporučená literatura

Cesari L. [1], Coddington E. A. - Levinson N. [1], Hartman P. [1], Ráb M. - Kalas J. [1].