Príklad 1. Voľbou vhodnej funkcie a metódou bisekcie odhadnite hodnotu $\sqrt[3]{17}$. Spočítajte prvé tri iterácie. Koľko krokov metódy by sme potrebovali, aby sme dosiahli presnosť aspoň 0,01?

Príklad 2. Uvažujme rovnicu $\sqrt[3]{x} = (x-3)^2$ a funkcie

$$g_1(x) = (x-3)^6, \qquad g_2(x) = 3 - \sqrt[6]{x}.$$

O obidvoch funkciách rozhodnite, či sú vhodnými iteračnými funkciami pre uvedenú rovnicu na intervale $[1, 3]$. Tú z nich, ktorá spĺňa všetky požiadavky, použite na konštrukciu prvých troch aproximácii riešenia danej rovnice.

Príklad 3. Nájdite všetky pevné body zobrazenia

$$g(x) = -\frac{3}{2}x^4 + \frac{11}{4}x^3 - \frac{x^2}{4}.$$

Pri každom z nich rozhodnite, či sa jedná o príťahujúci alebo odpudzujúci pevný bod.

Príklad 4. Pomocou Newtonovej metódy odhadnite najmenší kladný koreň rovnice $f(x) = \mathrm{e}^{-x} - \sin(x) = 0$. Overte splnenie Fourierových podmienok na vhodnom intervale. Spočítajte prvé tri aproximácie.

Príklad 5. Použitím metódy regula falsi odhadnite kladný koreň rovnice $f(x) = \cos(\frac{\pi}{2}x) - \frac{2}{\pi}\arcsin(x) = 0$. Nájdite interval, na ktorom sú splnené podmienky pre použitie tejto metódy a spočítajte prvé štyri iterácie (vrátane krajných bodov intervalu).

Príklad 6. Pevný bod funkcie $g(x) = x^2 + x - 2$ je $\sqrt{2}$. Overte, že Steffensenova metóda pre funkciu g a pevný bod $\sqrt{2}$ je aspoň druhého rádu. Spočítajte prvé tri iterácie tejto metódy. Za počiatočnú aproximáciu môžete zvoliť 2. *Pomôcka: predpis funkcie $\varphi(x)$ sa dá upraviť tak, že čitateľ je polynóm tretieho stupňa a menovateľ je polynóm druhého stupňa.*

Príklad 7. Pomocou Sturmovej vety a ohraničenia absolútnej hodnoty koreňov polynómu pomocou jeho koeficientov separujte korene (nájdite intervaly, v ktorých sa nachádza práve jeden koreň) polynómu $P(x) = 2x^3 + 6x^2 - 3x - 9$.

Príklad 8. Pomocou zdvojenej Newtonovej metódy odhadnite najväčší koreň polynómu $P(x) = x^3 - 3x^2 - 3x + 9$. Ako počiatočnú aproximáciu zvoľte horný odhad pre korene polynómu na základe jeho koeficientov. Spočítajte tri kroky metódy.

Príklad 9. Uvažujme nasledujúci systém lineárnych rovníc:

$$\begin{aligned} x_1 + 2x_2 + 2x_3 &= 1, \\ x_1 + 4x_2 + 2x_3 &= -1, \\ x_1 - 2x_2 + 3x_3 &= 6. \end{aligned}$$

Presvedčte sa o tom, že Gaussova–Seidelova metóda v tomto prípade konverguje pre akúkoľvek počiatočnú podmienku. Následne vypočítajte tri aproximácie riešenia.

Príklad 10. Pomocou Newtonovej metódy pre systém nelineárnych rovníc odhadnite riešenie nasledujúceho systému rovníc:

$$\begin{aligned} x^2 + y^2 &= 1, \\ x^2 - y &= 0. \end{aligned}$$

Situáciu znázornite graficky. Zvoliac $(x_0, y_0) = (1, \frac{1}{2})$ spočítajte ďalšie dve aproximácie.

Príklad 11. Uvažujme nasledujúci systém lineárnych rovníc:

$$\begin{aligned} x_1 + 2x_2 \quad + x_3 &= -1, \\ 2x_1 + 5x_2 \qquad\quad &= -3, \\ x_1 \qquad + 14x_3 &= 1. \end{aligned}$$

Overte, či sústava spĺňa podmienky pre použitie Choleského metódy. Ak áno, s jej použitím ju vyriešte.