M4502 Matematická analýza 4

Domácí úkoly

1. úkol
Termín: 2.4.2020

Příklad 1: Určete poloměr konvergence a součet řady

$$\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}nx^{3n-1}.$$

Pomocí tohoto výsledku určete

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}n}{3^{3n-1}}.$$

Příklad 2: Určete poloměr konvergence a součet řady

$$\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\frac{x^n}{n}.$$

Pomocí tohoto výsledku určete

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{n\cdot 2^n}.$$

2. úkol
Termín: 9.4.2020

Příklad 1: Odvoďte vztah pro tzv. *binomickou řadu*

$$(1+x)^a=\sum_{n=0}^{\infty}\binom{a}{n}x^n,\ \text{kde}\, a\in\mathbb{R},\ \binom{a}{n}=\frac{a(a-1)(a-2)\cdots(a-n+1)}{n!}.$$

Tento vztah platí pro $x\in(-1,1)$, což nemusíte dokazovat.

Tohoto vztahu využijte pro nalezení Maclaurinovy řady funkce

$$f(x)=\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}.$$

Pomocí předchozího pak nalezněte Maclaurinovu řadu funkce

$$g(x)=\arcsin x\,.$$

Příklad 2: Vypočtěte integrály

$$\int\frac{\mathrm{e}^x-1}{x}\,\mathrm{d}x\qquad\qquad\int\operatorname{arctg}x^2\,\mathrm{d}x$$

3. úkol
Termín: 16.4.2020

Příklad 1: Vypočtěte dané integrály

$$\iint_M x^2y\mathrm{e}^{xy}\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y,$$

kde M je obdélník $[0,1]\times[0,2]$.

$$\iint_M \sin y^2\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y,$$

kde M je trojúhelník s vrcholy $[0,0]$, $[9,3]$ a $[1,3]$.

Příklad 2: Vypočtěte obsah množiny, která je ohraničená hyperbolou $xy=1$ a přímkou $2x+2y=5$.

4. úkol
Termín: 23.4.2020

První příklad Vypočítejte

$$\iint_M y \,\mathrm{d}x \,\mathrm{d}y,$$

kde pro množinu M platí $x^2 + y^2 \le 4$, $-x \le y \le x$.

Druhý příklad Vypočítejte

$$\iint_M \sqrt{x^2 + y^2} \,\mathrm{d}x \,\mathrm{d}y,$$

kde pro množinu M platí $x^2 + y^2 - 2ax \le 0$, $a > 0$.

5. úkol
Termín: 30.4.2020

První příklad Vypočtěte

$$\iiint_V (xy + z) \,\mathrm{d}x \,\mathrm{d}y \,\mathrm{d}z,$$

kde množina V je ohraničena rovinami $x + y = 1$, $x + 2y + z = 2$ a souřadnými rovinami.

Druhý příklad Vypočtěte

$$\iiint_V z \,\mathrm{d}x \,\mathrm{d}y \,\mathrm{d}z,$$

kde pro množinu V platí $0 \le z \le 4 - 2\sqrt{x^2 + y^2}$.

6. úkol
Termín: 7.5.2020

První příklad Určete těžiště trojúhelníkové desky s vrcholy $[0, 0]$, $[1, 0]$ a $[0, 2]$, jestliže její hustota je dána funkcí $\rho(x, y) = 1 + 3x + y$.

Druhý příklad Určete těžiště tělesa, které je ohraničené paraboloidem $z = 4x^2 + 4y^2$ a rovinou $z = a$ $(a > 0)$, a má konstantní hustotu.