Matematická analýza 4
Ukázková zkoušková písemka

První část **Každý příklad je za jeden bod.**

Příklad 1: Určete obecné řešení rovnice

$$y'(x^2+1)+2xy=\frac{2x}{x^2+1}.$$

Příklad 2: Najděte homogenní lineární diferenciální rovnici 2. řádu s konstantními koeficenty, která má řešení $y=\sin 3x$.

Příklad 3: Mnoho živočichů roste tak, že mohou dorůstat jisté maximální délky a rychlost jejich růstu je úměrná délce, která jim do této maximální délky chybí (tj. kolik ještě musí do této maximální délky dorůst). Sestavte diferenciální rovnici popisující takovýto růst.

Příklad 4: Určete a graficky znázorněte definiční obor funkce

$$f(x,y)=\frac{\sqrt{(x^2+y^2-1)(4-x^2-y^2)}}{\operatorname{arctg}(x^2+1)}.$$

Příklad 5: Ukažte, že neexistuje limita

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)}\frac{x^2-y^2}{x^2+y^2}.$$

Příklad 6: Vypočtětě parciální derivace 2. řádu pro funkci

$$f(x,y)=\ln\sqrt{x^2+y^2}.$$

Příklad 7: Trojný integrál $\iiint_V f(x,y)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z$, kde

$$V=\left\{[x,y,z]\colon x^2+y^2\le 1,\ 0\le x^2+y^2\le z\right\},$$

převeďte na trojnásobný integrál ve válcových souřadnicích.

Příklad 8: Vypočtěte dvojný integrál

$$\iint_M \frac{x^2}{y^2}\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y,$$

kde množina M je ohraničena křivkammi $y=x$, $xy=1$ a $x=2$.

Příklad 9: Rozhodněte o konvergenci řady

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n^n}{3^n n!}.$$

Příklad 10: Určete poloměr a obor konvergence mocninné řady

$$\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\frac{x^n}{n}.$$

Druhá část **Každý příklad je za dva a půl bodu.**

PŘÍKLAD 1: Najděte řešení diferenciální rovnice

$$y'' + 3y' = x\mathrm{e}^{-3x}$$

vyhovující počátečním podmínkám

$$y(0) = 0, \qquad y'(0) = 1.$$

PŘÍKLAD 2: Určete absolutní extrémy funkce

$$f(x, y) = x^2 + y^2 - xy - 2$$

na množině

$$M = \left\{[x, y] \in \mathbb{R}^2 \mid |x| - 1 \le y \le 1\right\}.$$

PŘÍKLAD 3: Pomocí dvojného integrálu vypočtěte obsah roviného obrazce, který je ohraničen křivkami

$$x^2 + y^2 = 2x \qquad \text{a} \qquad x^2 + y^2 = 4x.$$

PŘÍKLAD 4: Pomocí transformace do sférických souřadnic vypočtěte

$$\iiint_V \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z,$$

kde pro množinu V platí

$$V = \left\{[x, y, z] \colon 1 \le x^2 + y^2 + z^2 \le 4,\ z \ge \sqrt{x^2 + y^2}\right\}.$$