SEDMÉ CVIČENÍ

a) ~~homotetie~~ homotetie v $\mathcal{A}_3$, která není stejnolehlostí

- homotetie jsou stejnolehlosti a posunutí, hledáme tedy posunutí (o nenulový vektor, protože posunutí o $(0,0,0)$ je identita, která se dá ~~také~~ interpretovat jako stejnolehlost o $k=1$)
- např. tedy posunutí o $(1,1,1)$

$$x' = x+1$$
$$y' = y+1$$
$$z' = z+1$$

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

~~b) elace v $\mathcal{A}_3$~~
~~- je-li samodružná (nad)rovina tvaru $\rho \equiv a_1x + a_2y + a_3z + a_0$, pak elace~~

b) elace v $\mathcal{A}_3$:

- elace má (nad)rovinu samodružných bodů ρ a pro všechny $X \in \mathcal{A}_3$ je $\overrightarrow{XX'} \in Z(\rho)$
- zvolme si co nejjednodušeji, např. $\rho \equiv z = 0$ a body $B, B' \notin \rho$ tak, aby $BB' \in Z(\rho)$, např. $B[0,0,1]$, $B'[1,0,1]$
- podle věty 2.6.8 bude mít naše elace vyjádření

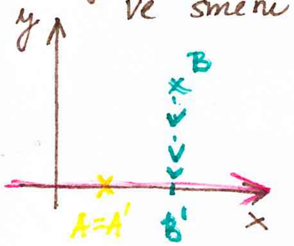
$$x' = x + \lambda_x \cdot (z), \quad \lambda_x = \frac{1-0}{1} = 1$$
$$y' = y + \lambda_y \cdot (z), \quad \lambda_y = \frac{0-0}{1} = 0$$
$$z' = z + \lambda_z \cdot (z), \quad \lambda_z = \frac{1-1}{1} = 0$$

$$x' = x + z$$
$$y' = y$$
$$z' = z$$

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$$

c) afinní ~~zo~~ zobrazení $f: \mathcal{A}_2 \to \mathcal{A}_2$, ke kterému neexistuje inverzní zobrazení

- pokud bude mít f nižší hodnost než 2, nebude mít inverzi.
- takové zobrazení je např. projekce na nadrovinu
- nejjednodušší je celé $\mathcal{A}_2$ promítnout na osu ve směru druhé osy



x = mna SB, vektoru $(1,0)$ přísluší $\lambda = 1$, tj. promítne se sám na sebe
vektory $(0,1)$ se zobrazí na $(0,0)$, tj. $\lambda = 0$

- počátek je SB

$$x' = x$$
$$y' = 0$$

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

d) základní afinity v $\mathcal{A}_3$

- základní afinita je afinita, která má právě nadrovinu samodružných bodů, tj. dvěma vektorům bude odpovídat vl. číslo 1 a třetímu nějaké jiné číslo
- bude-li samodružná rovina obsahovat $[0,0,0]$, nebude ve vyjádření matice B
- nejjednodušší $\Rightarrow \rho \equiv z = 0$ je mna SB
  $(1,0,0) \to (1,0,0)$, $(0,1,0) \to (0,1,0)$
  $(0,0,1)$ na libovolný násobek, třeba $(0,0,2)$, $\lambda = 2$

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$$

$$x' = x$$
$$y' = y$$
$$z' = 2z$$

e) podgrupy v grupě všech homotetií $\mathcal{A}_2$
- mna všech posunutí a symetrií podle všech možných středů

f) afinní transformace v $\mathcal{A}_3$, která nemá žádná reálná vlastní čísla
- nemá-li mít reálná čísla za vlastní, musí mít vl. čísla komplexní, vlastní čísla se získají jako kořeny charakteristické rovnice
- v $\mathcal{A}_3$ má zobrazení char. rovnice 3. řád, tedy tři kořeny, jeden z nich musí být z $\mathbb{R}$, tj. transformace daných vlastností neexistuje

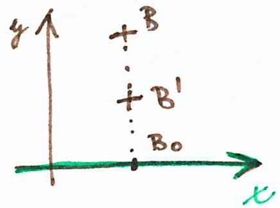
g) afinita v $\mathcal{A}_3$ s právě jednou silně samodružnou přímkou
- zvolme si zase tu nejjednodušší přímku, tedy nějakou osu, třeba osu $x = [0,0,0] + t.(1,0,0)$, jejímu směrovému vektoru bude příslušet $\lambda = 1$, ostatním 2 vektorům, které do vyjádření potřebujeme, můžou příslušet jiná vl. čísla (budou-li to vl. vektory) nebo se mohou zobrazit na úplně jiné vektory
- pozor na to, že máme mít afinitu, takže výsledné zobrazení musí mít hodnost 3, čili vektory se nesmí zobrazovat na nulový vektor (nebo mít vl. číslo 0)
- takové zobrazení bude mít vyjádření

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & a & d \\ 0 & b & e \\ 0 & c & f \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix},$$

kde ~~a,b,c~~ a, b, c, d, e, f jsou libovolné, aby byla matice regulární

h) AZ v $\mathcal{A}_3$ ~~s~~ vl. čísly $3, 1+i, 3-i$
- takové AZ by mělo i vl. čísla $1-i$, $3+i$, čili by muselo mít 5 vl. čísel, což v $\mathcal{A}_3$ nelze

i) zákl. af. v $\mathcal{A}_2$ s charakteristikou 2
- charakteristika je číslo $(B_0; B, B')$, zákl. af. v $\mathcal{A}_2$ má přímku SB (zvolme třeba osu x)



$$\frac{\overrightarrow{B_0B}}{\overrightarrow{B_0B'}} = 2 \rightarrow$$ vektor se zkrátí na polovic

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$ (zvolíme si chytře druhý vl. směr směr osy y)

j) zákl. afinity v $\mathcal{A}_2$ bez charakteristiky (tj. elace)
- elace má v $\mathcal{A}_2$ vyjádření ve vhodném repéru

$$x' = x + ay$$
$$y' = y$$

(podle tabulky na konci kapitoly ve skriptech)
- lze postupovat podobnou úvahou jako v b)

k) afinity v $\mathcal{A}_3$ s právě jednou slabě samodr. přímkou
- směrovému vektoru této přímky musí odpovídat reálné vl. číslo různé od 1 (to by byla silně samodružná)
- aby neexistovaly jiné samodružné přímky, musí být zbývající dvojice vl. čísel čísla komplexní
- zvolíme-li zase samodružnou osu x, může být vyjádření např.

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$$

→ odpovídá to otočení kolem osy x a ~~2x~~ 2× roztažení od roviny $\beta: x = 0$ ve směru osy x