M6150 Funkcionálna analýza I

Lineárne priestory

Peter Šepitka

leto 2017

Obsah

Obsah

Lineárna závislosť a algebraická báza

V nasledujúcom výklade budeme pracovať s lineárnymi (alebo tiež vektorovými) priestormi nad telesom reálnych čísiel $\mathbb{R}$. Prvky daného lineárneho priestoru budeme často nazývať vektormi a reálne čísla skalármi.

Definícia 1 (Lineárna závislosť vektorov)

Nech X je lineárny priestor a $x_1, \dots, x_m \in X$, $m \in \mathbb{N}$, sú nejaké jeho prvky. Hovoríme, že vektory $x_1, \dots, x_m$ sú lineárne závislé, ak existujú nenulová m-tica skalárov $(\lambda_1, \dots, \lambda_m) \in \mathbb{R}^m$ s vlastnosťou

$$\lambda_1 x_1 + \cdots + \lambda_m x_m = 0.$$

V opačom prípade sa vektory $x_1, \dots, x_m$ nazývajú lineárne nezávislé. Všeobecne, množina $A \subseteq X$ sa označuje ako lineárne nezávislá, ak každý konečný systém vektorov z A je lineárne nezávislý.

Definícia 2 (Algebraická báza lineárneho priestoru)

Nech X je lineárny priestor. Množina $A \subseteq X$ sa nazýva algebraická alebo tiež Hamelova báza priestoru X, ak A je lineárne nezávislá a jej lineárny obal splýva s X, t.j., platí $\mathrm{Lin}\, A :=$ {konečné lineárne kombinácie prvkov z A} $= X$.

Poznámka 1

V každom lineárnom priestore existuje algebraická báza. Obzvlášť, ak A je nejaká Hamelova báza lineárneho priestoru X, potom každý vektor $x \in X$ sa dá jediným spôsobom vyjadriť v tvare konečnej lineárnej kombinácie niektorých prvkov množiny A. Každé dve Hamelove bázy priestoru X majú rovnakú mohutnosť, ktorá sa nazýva (algebraická) dimenzia (rozmer) priestoru X a označuje sa $\dim X$. Platí, že dva lineárne priestory sú (algebraicky) izomorfné, ak majú rovnakú (algebraickú) dimenziu. Špeciálne, každý konečnorozmerný priestor s $\dim X = n \in \mathbb{N}$ je izomorfný s lineárnym priestorom $\mathbb{R}^n$.

Definícia 3 (Faktorový priestor a kodimenzia lineárneho podpriestoru)

Nech X je lineárny priestor a $A \subseteq X$ jeho lineárny podpriestor. Definujme, že dva prvky $x, y \in X$ sú v relácii, ak $x - y \in A$. Je zrejmé, že sa jedná o reláciu ekvivalencie na množine X, pričom skutočnosť, že prvky $x, y \in X$ sú v danej relácii, budeme zapisovať výrazom $x \equiv y \pmod A$. Príslušnú množinu tried rozkladu budeme označovať X/A a nazývať faktorový priestor priestoru X podľa modulu A. Nie je ťažké overiť, že množina X/A vytvára lineárny priestor nad $\mathbb{R}$. Jeho algebraická dimenzia sa štandardne označuje ako kodimenzia podpriestoru A v priestore X. Obzvlášť, ak $\dim X = n$ a $\dim A = m$, potom zrejme kodimenzia podpriestoru A je rovná $n - m$.

Veta 1

Nech X je lineárny priestor a $A \subseteq X$ jeho lineárny podpriestor konečnej kodimenzie $m \in \mathbb{N}$. Potom existujú prvky $x_1, \ldots, x_m \in X$ s vlastnosťou, že každý vektor $x \in X$ sa dá jednoznačne vyjadriť v tvare

$$x = \lambda_1 x_1 + \cdots + \lambda_m x_m + y, \tag{1}$$

kde $\lambda_1, \ldots, \lambda_m$ sú skaláry a vektor $y \in A$.

Dôkaz Vety 1.

Nech $\{A_1, \ldots, A_m\} \subseteq X/A$ je algebraická báza faktorového priestoru X/A. Zvoľme nejaké reprezentanty tried A_i, $i \in \{1, \ldots, m\}$, t.j.,

$$\text{nech } x_i \in X \text{ sú také, že } A_i = [x_i], \text{ pre každé } i \in \{1, \ldots, m\}. \tag{2}$$

Nech $x \in X$ je ľubovoľný prvok a $[x] \in X/A$ je trieda rozkadu X/A, ktorá ho obsahuje. Potom zrejme existuje jediná m-tica skalárov $(\lambda_1, \ldots, \lambda_m)$ taká, že

$$[x] = \lambda_1 A_1 + \cdots + \lambda_m A_m \overset{(2)}{=} \lambda_1 [x_1] + \cdots + \lambda_m [x_m] = [\lambda_1 x_1 + \cdots + \lambda_m x_m].$$

To znamená, že vektory x a $\lambda_1 x_1 + \cdots + \lambda_m x_m$ patria do rovnakej triedy rozkladu X/A. Podľa Definície 3 preto existuje (jediný) vektor $y \in A$ tak, že platí rovnosť v (1). Dôkaz je hotový. ∎

Obsah

Norma na lineárnom priestore

Definícia 4 (Normovaný lineárny priestor)

Nech X je lineárny priestor nad $\mathbb{R}$ a $\|\cdot\| : X \to [0,\infty)$ zobrazenie, ktoré pre každú dvojicu prvkov $x, y \in X$ a každý skalár $\lambda \in \mathbb{R}$ spĺňa podmienky

N1 $\|x\| = 0$ práve vtedy, keď $x = 0$,

N2 $\|\lambda\, x\| = |\lambda| \|x\|$,

N3 $\|x + y\| \leq \|x\| + \|y\|$.

Zobrazenie $\|\cdot\|$ sa nazýva norma na priestore X a dvojicu $(X, \|\cdot\|)$ označujeme ako normovaný lineárny priestor nad $\mathbb{R}$.

Poznámka 2

Ľahko sa overí, že pre každý normovaný priestor X s normou $\|\cdot\|$ je zobrazenie

$$\rho(x,y) := \|x - y\|, \quad x, y \in X, \tag{3}$$

metrikou na množine X, a tak dvojica (X, ρ) je metrický priestor. Toto pozorovanie preto umožňuje preniesť a aplikovať na normovaný lineárny priestor X všetky pojmy a výsledky z teórie metrických priestorov.

Poznámka 3 (Ohraničenosť podmnožín normovaného lineárneho priestoru)

Nech X je normovaný lineárny priestor s normou $\|\cdot\|$. Podmnožinu $A \subseteq X$ budeme považovať za ohraničenú v normovanom priestore X, ak existuje taká nezáporná reálna konštanta K, že $\|x\| \leq K$ pre každé $x \in A$. Je nutné zdôrazniť, že takto chápaný pojem ohraničenosti korešponduje s pojmom ohraničenosti zavedeným v kontexte metrických priestorov. Konkrétne, množina $A \subseteq X$ je ohraničená v normovanom priestore X práve vtedy, keď je ohraničená v metrickom priestore (X, ρ) s metrikou ρ predstavenou v Poznámke 2. Skutočne, ak existuje $K \geq 0$ také, že $\|x\| \leq K$ pre každý vektor $x \in A$, potom

$$\rho(x, y) = \|x - y\| \leq \|x\| + \|y\| \leq 2K \quad \text{pre každé } x, y \in A,$$

a tak priemer $d(A) \leq 2K$. Naopak, ak množina A má (v metrickom priestore (X, ρ)) konečný priemer $d(A)$ a zvolíme nejaký prvok $x_0 \in A$, potom

$$\|x\| = \|x - x_0 + x_0\| \leq \|x - x_0\| + \|x_0\| = \rho(x, x_0) + \|x_0\| \leq d(A) + \|x_0\|$$

pre každý vektor $x \in A$. Množina A je teda ohraničená i v normovanom priestore X, kde napríklad môžeme položiť $K := d(A) + \|x_0\|$.

Definícia 5 (Banachov priestor)

Normovaný lineárny priestor X nad $\mathbb{R}$, ktorý je úplný vzhľadom na metriku v (3) indukovanú danou normou na X, sa označuje ako (reálny) Banachov priestor.

Príklad 1

Pre dané $n \in \mathbb{N}$ položme $X := \mathbb{R}^n$ a nech $p \in [1, \infty)$. Potom zobrazenia

$$\|x\|_p := \left(\sum_{k=1}^{n} |x_k|^p \right)^{1/p}, \qquad \|x\|_\infty := \max_{1 \le k \le n} |x_k|, \tag{4}$$

kde $x := (x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n$, sú normy na lineárnom priestore X, ktoré v kontexte Poznámky 2 indukujú metriky ρ_p a ρ_∞. Naviac, v súlade s Definíciou 5 z teórie metrických priestorov vyplýva, že každý z normovaných priestorov $(X, \|\cdot\|_p)$, $(X, \|\cdot\|_\infty)$ je n-rozmerným Banachovým priestorom.

Príklad 2

Pre pevne zvolené $p \in [1, \infty)$ je priestor postupností l^p predstavený v teórii metrických priestorov zároveň normovaným lineárnym priestorom s normou

$$\|x\| := \left(\sum_{k=1}^{\infty} |x_k|^p \right)^{1/p}, \quad x := \{x_k\} \in l^p. \tag{5}$$

Podobne i priestory l^∞, c a c_0 sú normované lineárne priestory s normou

Príklad 2

$$\|x\| := \sup_{k\in\mathbb{N}} |x_k|, \quad x := \{x_k\} \text{ ohraničená postupnosť.} \tag{6}$$

Každý z priestorov l^p, l^∞, c a c_0 je nekonečnorozmerný Banachov priestor.

Príklad 3

Nech a, b, $a < b$, sú dané reálne čísla. Množina $\mathcal{B}[a,b]$ všetkých reálnych funkcií ohraničených na $[a,b]$ zrejme tvorí lineárny priestor nad $\mathbb{R}$. Obzvlášť, zobrazenie

$$\|f\|_B := \sup_{x\in[a,b]} |f(x)|, \quad f \in \mathcal{B}[a,b], \tag{7}$$

je normou na priestore $\mathcal{B}[a,b]$, ako možno ľahko overiť. Špeciálne, množina $\mathcal{C}[a,b]$ všetkých funkcií spojitých na $[a,b]$ predstavuje (algebraický) lineárny podpriestor priestoru $\mathcal{B}[a,b]$. Naviac, každé zo zobrazení

$$\|f\|_C := \max_{x\in[a,b]} |f(x)|, \qquad \|f\|_I := \int_a^b |f(x)|\,\mathrm{d}x, \quad f \in \mathcal{C}[a,b], \tag{8}$$

je normou na priestore $\mathcal{C}[a,b]$. Z prednášok o metrických priestorov vyplýva, že normovaný priestor $(\mathcal{C}[a,b], \|\cdot\|_C)$ je nekonečnorozmerný Banachov priestor, kým $(\mathcal{C}[a,b], \|\cdot\|_I)$ nie je Banachov priestor. Dá sa ďalej ukázať, že i samotný priestor $(\mathcal{B}[a,b], \|\cdot\|_B)$ je Banachov, t.j., je úplný vzhľadom na metriku ρ_B.

Definícia 6 (Podpriestor normovaného lineárneho priestoru)

Nech X je normovaný lineárny priestor s normou $\|\cdot\|$ a $A \subseteq X$ je podmnožina. Budeme hovoriť, že A je podpriestor normovaného priestoru X, ak A je algebraický lineárny podpriestor v X, ktorý je uzavretý v X vzhľadom na metriku indukovanú normou $\|\cdot\|$ v Poznámke 2.

Príklad 4

V Príklade 3 sme poznamenali, že množina $\mathcal{C}[a,b]$ je algebraický lineárny podpriestor priestoru $\mathcal{B}[a,b]$. Vďaka úplnosti metrického priestoru $(\mathcal{C}[a,b], \rho_C)$ je množina $\mathcal{C}[a,b]$ uzavretá v metrickom priestore $(\mathcal{B}[a,b], \rho_B)$, a tak $\mathcal{C}[a,b]$ je i podpriestor normovaného priestoru $(\mathcal{B}[a,b], \|\cdot\|_B)$ v zmysle Definície 6.

Príklad 5

Je potrebné zdôrazniť, že algebraický lineárny podpriestor všeobecného normovaného priestoru X nemusí byť uzavretý v X. Napríklad pre $X := l^1$ je množina $A := \{x \in l^1,\ x$ má len konečne veľa nenulových členov$\}$ evidentným vlastným algebraickým lineárnym podpriestorom v X, ktorý však nie je uzavretý v X, nakoľko $\overline{A} = l^1$. Obzvlášť, A nie je podpriestor normovaného priestoru X.

Lema 1 (Rieszova)

Nech X je normovaný lineárny priestor s normou $\|\cdot\|$ a $A \subseteq X$ jeho vlastný (uzavretý) podpriestor. Potom pre každé $\eta \in [0,1)$ existuje vektor $x_\eta \in X$ s $\|x_\eta\| = 1$ taký, že $\rho(x_\eta, A) \geq \eta$, kde ρ metrika na X indukovaná normou $\|\cdot\|$.

Dôkaz Lemy 1.

Uvažovaný podpriestor A je rôzny jednak od nulového priestoru, a jednak od celého priestoru X. Množina $X \setminus A$ je preto neprázdna. Zvoľme ľubovoľné $z \in X \setminus A$. Z uzavretosti množiny A v X vyplýva, že vzdialenosť bodu z od A je kladná, t.j., $d := \rho(z, A) > 0$. Obzvlášť, platí

$$d = \inf\{\rho(z,y),\ y \in A\}, \quad \text{a tak } \rho(z,y) \geq d \text{ pre každé } y \in A. \tag{9}$$

Zafixujem teraz nejaké $\eta \in (0,1)$. Keďže $\frac{d}{\eta} > d$, podľa (9) z vlastností infima

$$\text{existuje } \tilde{y} \in A \text{ také, že } 0 < d \leq \rho(z, \tilde{y}) < \frac{d}{\eta}. \tag{10}$$

Položme $x_\eta := \frac{z-\tilde{y}}{\|z-\tilde{y}\|}$. Potom zrejme $\|x_\eta\| = 1$ a pre každé $y \in A$ platí

$$\rho(x_\eta, y) = \|x_\eta - y\| = \left\| \frac{z-\tilde{y}}{\|z-\tilde{y}\|} - y \right\| = \left\| \frac{z - \tilde{y} - \|z-\tilde{y}\|\, y}{\|z-\tilde{y}\|} \right\|$$

Dôkaze Lemy 1.

$$= \frac{\| z - \overbrace{(\tilde{y} + \| z - \tilde{y} \| \, y)}^{\in A} \|}{\| z - \tilde{y} \|} \overset{(9),(10)}{>} \frac{d}{\frac{d}{\eta}} = \eta,$$

z čoho následne vyplýva, že $\rho(x_\eta, A) \geq \eta$. Napokon prípad $\eta = 0$ je triviálny, nakoľko metrika ρ je nezáporná. Dôkaz je teda kompletný. ∎

Poznámka 4

Poznamenajme, že pre každý vektor $x \in X$ s normou $\|x\| = 1$ platí nerovnosť $\rho(x, A) \leq 1$. Vyplýva to z odhadu

$$\rho(x, A) = \inf\{\rho(x, y), \; y \in A\} \leq \rho(x, 0) = \|x\| = 1 \quad \text{pre každé } x \in S(0, 1),$$

kde symbol $S(0, 1)$ označuje jednotkovú sféru v normovanom priestore X, t.j.,

$$S(0, 1) = \{x \in X, \; \|x\| = 1\}. \tag{11}$$

Ďalej je nutné zdôrazniť, že v Rieszovej leme 1 vo všeobecnosti (t.j., v prípade všeobecného normovaného lineárneho priestoru X a jeho všeobecného podpriestoru A) nemožno uvažovať hodnotu $\eta = 1$. Túto skutočnosť ilustrujeme v nasledujúcom príklade.

Príklad 6

Uvažujme normovaný lineárny priestor $(X, \|\cdot\|)$ tvaru

$$X := \{f \in \mathcal{C}[0,1], \quad f(0) = 0\}, \quad \|f\| := \max_{x\in[0,1]} |f(x)| \tag{12}$$

(jedná sa teda o podpriestor normovaného priestoru $(\mathcal{C}[0,1], \rho_C)$ predstaveného v Príklade 4). Uvažujme jeho podmnožinu

$$A := \left\{ f \in X, \quad \int_0^1 f(x)\,\mathrm{d}x = 0 \right\}.$$

Nie je ťažké ukázať, že A je vlastný podpriestor X v zmysle Definície 6, t.j., A je lineárny priestor, ktorý je uzavretý v X vzhľadom na metriku ρ indukovanú normou v (12). Nech funkcia $g \in X$ je ľubovoľný prvok uzavretej jednotkovej gule $B[0,1]$ v X, t.j., $\|g\| \le 1$. Dokážeme, že $\rho(g, A) < 1$. Označme

$$c_g := \int_0^1 g(x)\,\mathrm{d}x. \tag{13}$$

Pre konštantu c_g ľahko odvodíme odhad

$$|c_g| = \left| \int_0^1 g(x)\,\mathrm{d}x \right| \le \int_0^1 |g(x)|\,\mathrm{d}x \overset{(12)}{\le} \int_0^1 \|g\|\,\mathrm{d}x \le \int_0^1 1\,\mathrm{d}x = 1,$$

Príklad 6

pričom vďaka podmienke $g(0)=0$ platí ostrá nerovnosť $|c_g|<1$. Definujme

$$f(x) := \begin{cases} g(x) - \frac{2c_g}{1+|c_g|} \cdot \frac{x}{1-|c_g|}, & x \in [0, 1-|c_g|], \\ g(x) - \frac{2c_g}{1+|c_g|}, & x \in [1-|c_g|, 1]. \end{cases} \tag{14}$$

Funkcia f v (14) je prvkom množiny A, ako sa možno ľahko presvedčiť výpočtom integrálu $\int_0^1 f(x)\,\mathrm{d}x$ a pomocou (13). Naviac, pre každé $x \in [0,1]$ platí

$$|g(x)-f(x)| \overset{(14)}{=} \left\{ \begin{array}{ll} \frac{2|c_g|}{1+|c_g|} \cdot \frac{x}{1-|c_g|}, & x \in [0, 1-|c_g|], \\ \frac{2|c_g|}{1+|c_g|}, & x \in [1-|c_g|, 1]. \end{array} \right\} \leq \frac{2|c_g|}{1+|c_g|} < 1,$$

a tak $\rho(g,f) = \max_{x\in[0,1]} |g(x)-f(x)| < 1$. To však potom znamená, že

$$\rho(g,A) = \inf\{\rho(g,h),\ h \in A\} \leq \rho(g,f) < 1.$$

Výsledok Rieszovej lemy 1 preto v tomto prípade nemožno rozšíriť i pre hodnotu $\eta = 1$, napriek tomu, že sú splnené všetky jej predpoklady.

Veta 2

Nech $(X, \|\cdot\|)$ je normovaný lineárny priestor. Potom $\|\cdot\|$ je spojité zobrazenie priestoru X do euklidovského priestoru $\mathbb{E}$.

Dôkaz Vety 2.

Pri dôkaze využijeme ekvivalentné vyjadrenie trojuholníkovej nerovnosti N3 v Definícii 4. Konkrétne, každá norma $\|\cdot\|$ spĺňa nerovnosť

$$\big|\|x\| - \|y\|\big| \leq \|x - y\| \quad \text{pre každé } x, y \in X. \tag{15}$$

Skutočne, pre ľubovoľné vektory $x, y \in X$ platí

$$\begin{aligned} \|x\| &= \|(x-y)+y\| \leq \|x-y\| + \|y\| &\Rightarrow& \quad \|x\| - \|y\| \leq \|x-y\|, \\ \|y\| &= \|(y-x)+x\| \leq \|y-x\| + \|y\| &\Rightarrow& \quad \|y\| - \|x\| \leq \|x-y\|, \end{aligned}$$

z čoho ihneď vyplýva nerovnosť (15). Nech teraz $x \in X$ je ľubovoľný vektor a $\{x_k\}_{k=1}^{\infty} \subseteq X$ nejaká postupnosť, ktorá má v danej norme limitu x, t.j., platí $\lim_{k\to\infty} \|x_k - x\| = 0$. Z (15) potom dostávame, že $\lim_{k\to\infty} \|x_k\| = \|x\|$, čo dokazuje spojitosť zobrazenia $\|\cdot\|$ v bode x. A keďže prvok $x \in X$ bol vybraný ľubovoľne, platí tento výsledok na celom priestore X. Dôkaz je hotový. ∎

Definícia 7 (Ekvivalencia noriem)

Nech X je lineárny priestor a $\|\cdot\|_1$, $\|\cdot\|_2$ jeho dve normy. Povieme, že normy $\|\cdot\|_1$, $\|\cdot\|_2$ sú ekvivalentné, ak pre každú postupnosť $\{x_k\}_{k=1}^{\infty}$ prvkov v X a každý bod $x \in X$ platí relácia

$$\lim_{k\to\infty} x_k = x \text{ v norme } \|\cdot\|_1 \iff \lim_{k\to\infty} x_k = x \text{ v norme } \|\cdot\|_2. \tag{16}$$

Veta 3

Nech X je lineárny priestor a $\|\cdot\|_1$, $\|\cdot\|_2$ jeho dve normy. Potom tieto normy sú ekvivalentné práve vtedy, keď existujú kladné reálne čísla m a M s vlastnosťou

$$m\,\|x\|_1 \le \|x\|_2 \le M\,\|x\|_1 \quad \text{pre každý vektor } x \in X. \tag{17}$$

Dôkaz Vety 3.

Označme ρ_1, ρ_2 metriky indukované normami $\|\cdot\|_1$, $\|\cdot\|_2$ podľa Poznámky 2. Predpokladajme, že normy $\|\cdot\|_1$, $\|\cdot\|_2$ sú ekvivalentné a nech $\{x_k\}_{k=1}^{\infty} \subseteq X$ je postupnosť spĺňajúca $\lim_{k\to\infty} x_k = 0$ v norme $\|\cdot\|_1$. V súlade s (16) potom $\lim_{k\to\infty} x_k = 0$ i v norme $\|\cdot\|_2$, čo znamená, že identické zobrazenie z metrického priestoru (X, ρ_1) do metrického priestoru (X, ρ_2) je spojité v bode $x = 0$. Teda

Dôkaz Vety 3 (pokračovanie).

$$\text{pre každé } \varepsilon > 0 \text{ existuje } \delta > 0 \text{ tak, že pre každé } x \in X \text{ s } \|x\|_1 < \delta \text{ je } \|x\|_2 < \varepsilon. \tag{18}$$

Položme v (18) $\varepsilon = 1$. To znamená, že existuje $\delta > 0$ s vlastnosťou, že pre každé $x \in X$ spĺňajúce $\|x\|_1 < \delta$ platí $\|x\|_2 < 1$. Nech x je ľubovoľný nenulový vektor a označme $\tilde{x} := \frac{\delta}{2\|x\|_1}\,x$. Zrejme $\tilde{x} \in X$ a pre normu $\|\tilde{x}\|_1$ máme

$$\|\tilde{x}\|_1 = \left\|\frac{\delta}{2\|x\|_1}\,x\right\|_1 = \frac{|\delta|}{2\|x\|_1}\,\|x\|_1 = \frac{\delta}{2} < \delta.$$

V zhode s vyššie uvedeným potom $\|\tilde{x}\|_2 < 1$, čo následne dáva

$$1 > \|\tilde{x}\|_2 = \left\|\frac{\delta}{2\|x\|_1}\,x\right\|_2 = \frac{|\delta|}{2\|x\|_1}\,\|x\|_2 = \frac{\delta}{2}\,\frac{\|x\|_2}{\|x\|_1}, \quad \text{a tak } \|x\|_2 < \frac{2}{\delta}\,\|x\|_1.$$

Tým sme dokázali druhú nerovnosť v (17) s voľbou $M := \frac{2}{\delta} > 0$. Analogicky sa dokáže i platnosť prvej nerovnosti v (17) (v predchádzajúcich úvahách zameníme úlohu noriem $\|\cdot\|_1$, $\|\cdot\|_2$). Naopak, ak normy $\|\cdot\|_1$, $\|\cdot\|_2$ spĺňajú (17) pre nejaké $m, M > 0$, potom pre každú postupnosť $\{x_k\}_{k=1}^{\infty} \subseteq X$ a bod $x \in X$ máme

$$m\,\|x_k - x\|_1 \le \|x_k - x\|_2 \le M\,\|x_k - x\|_1 \quad \text{pre každý index } k \in \mathbb{N}.$$

Tieto nerovnosti ihneď implikujú ekvivalenciu noriem $\|\cdot\|_1$, $\|\cdot\|_2$ v súlade s Definíciou 7. Dôkaz je preto kompletný. ■

Poznámka 5

Poznamenajme, že normy $\|\cdot\|_1$, $\|\cdot\|_2$ na X spĺňajúce reláciu (17) sú skutočne v ekvivalentnom vzťahu, nakoľko nie je ťažké overiť, že platí

$$\frac{1}{M}\,\|x\|_2 \leq \|x\|_1 \leq \frac{1}{m}\,\|x\|_2 \quad \text{pre každý vektor } x \in X. \tag{19}$$

Príklad 7

Pre dané $n \in \mathbb{N}$ nech $X := \mathbb{R}^n$. Potom normy $\|\cdot\|_1$ a $\|\cdot\|_2$ na X predstavené v Príklade 1 pre $p = 1$ a $p = 2$ sú podľa Vety 3 ekvivalentné. Skutočne, ak

$$\|x\|_1 \overset{(4)}{=} \sum_{k=1}^{n} |x_k|, \qquad \|x\|_2 \overset{(4)}{=} \sqrt{\sum_{k=1}^{n} |x_k|^2}, \quad x = (x_1, \dots, x_n) \in X, \tag{20}$$

potom platia nerovnosti

$$\frac{1}{\sqrt{n}}\,\|x\|_1 \leq \|x\|_2 \leq \|x\|_1 \quad \text{pre každý vektor } x \in X. \tag{21}$$

Prvá nerovnosť v (21) je dôsledkom klasickej nerovnosti medzi aritmetickým a kvadratickým priemerom reálnych čísiel $|x_1|, \dots, |x_n|$, kým druhá nerovnosť v (21) vyplýva triviálne z vyjadrení daných noriem v (20).

Príklad 8

Nech X je lineárny priestor tvaru

$$X := \left\{ f \in \mathcal{C}^1[0,\pi],\ f(0) = 0 = f(\pi) \right\}, \tag{22}$$

t.j., priestor všetkých reálnych funkcií so spojitou deriváciou na intervale $[0,\pi]$ a nulovými hodnotami v krajných bodoch. Uvažujme na X dvojicu noriem

$$\|f\|_1 := \max_{x\in[0,\pi]} |f(x)|, \qquad \|f\|_2 := \max_{x\in[0,\pi]} |f(x)| + \max_{x\in[0,\pi]} |f'(x)|, \quad f \in X. \tag{23}$$

Jedná sa o neekvivalentné normy. Totiž, pre postupnosť funkcií $\{f_k\}_{k=1}^{\infty} \subseteq X$ s predpismi $f_k(x) := \frac{\sin k^2 x}{k}$, $k \in \mathbb{N}$, platí

$$\|f_k\|_1 \overset{(23)}{=} \max_{x\in[0,\pi]} \left| \frac{\sin k^2 x}{k} \right| = \frac{1}{k},$$

$$\|f_k\|_2 \overset{(23)}{=} \max_{x\in[0,\pi]} \left| \frac{\sin k^2 x}{k} \right| + \max_{x\in[0,\pi]} |k \cos k^2 x| = \frac{1}{k} + k$$

pre každé $k \in \mathbb{N}$. V prvej norme teda postupnosť $\{f_k\}$ konverguje k funkcii identicky nulovej na $[0,\pi]$, kým vzhľadom na druhú normu je táto postupnosť s ohľadom na Poznámku 3 neohraničená, a teda nemá limitu v priestore X.

Príklad 8

Uvažujme teraz na priestore X nasledujúcu dvojicu noriem

$$\left.\begin{aligned} \|f\|_1 &:= \left(\int_0^\pi |f'(x)|^2 \,\mathrm{d}x\right)^{1/2}, \\ \|f\|_2 &:= \left(\int_0^\pi |f'(x)|^2 \,\mathrm{d}x\right)^{1/2} + \left(\int_0^\pi |f(x)|^2 \,\mathrm{d}x\right)^{1/2}, \end{aligned}\right\} \quad f \in X. \tag{24}$$

Nie je ťažké overiť, že sa skutočne jedná o normy na priestore X v zmysle Definície 4. V tomto prípade sú normy $\|\cdot\|_1$, $\|\cdot\|_2$ ekvivalentné. Z (24) triviálne vyplýva, že $\|f\|_1 \leq \|f\|_2$ pre každú funkciu $f \in X$. Na druhej strane, pomocou teórie lineárnych diferenciálnych rovníc druhého rádu sa dá dokázať nerovnosť

$$\int_0^\pi \left(|f'(x)|^2 - |f(x)|^2\right) \mathrm{d}x \geq 0 \quad \text{pre každé } f \in X \tag{25}$$

(konkrétne sa jedná o dôsledok tzv. diskonjugovanosti rovnice $y'' + y = 0$ na intervale $(0, \pi)$). Využitím výsledku (25) a formúl v (24) potom ihneď dostávame nerovnosť $\|f\|_2 \leq 2\|f\|_1$ pre každú funkciu $f \in X$, ako sa možno ľahko presvedčiť. Celkovo teda máme odhady

$$\|f\|_1 \leq \|f\|_2 \leq 2\|f\|_1 \quad \text{pre všetky } f \in X,$$

ktoré podľa Vety 3 zaručujú ekvivalenciu noriem $\|\cdot\|_1$, $\|\cdot\|_2$ v (24).

Definícia 8 (Izometria normovaných lineárnych priestorov)

Nech X a Y sú dva normované lineárne priestory s normami $\|\cdot\|_X$ a $\|\cdot\|_Y$. Hovoríme, že priestory $(X, \|\cdot\|_X)$ a $(Y, \|\cdot\|_Y)$ sú izometrické (lineárne izometrické, izometricky izomorfné), ak existuje bijektívne lineárne zobrazenie $F : X \to Y$ zachovávajúce normy, t.j., platí $\|F(x)\|_Y = \|x\|_X$ pre každý vektor $x \in X$.

Definícia 9 (Homeomorfizmus normovaných lineárnych priestorov)

Nech X a Y sú dva normované lineárne priestory s normami $\|\cdot\|_X$ a $\|\cdot\|_Y$. Hovoríme, že priestory $(X, \|\cdot\|_X)$ a $(Y, \|\cdot\|_Y)$ sú homeomorfé (lineárne homeomorfné), ak existuje bijektívne lineárne zobrazenie $F : X \to Y$ a kladné reálne konštanty m, M s vlastnosťou $m\,\|x\|_X \leq \|F(x)\|_Y \leq M\,\|x\|_X$ pre každé $x \in X$.

Poznámka 6

Existencia lineárneho homeomorfizmu medzi dvomi normovanými lineárnymi priestormi zaručuje, že dané priestory sú tak z algebraického hľadiska ako aj z hľadiska funkcionálnej analýzy „identické". Obzvlášť to umožňuje medzi týmito priestormi prenášať pojem otvorenosti, uzavretosti, úplnosti a kompaktnosti. Poznamenajme, že izometria normovaných priestorov je zrejme špeciálnym prípadom lineárneho homeomorfizmu s $m = 1 = M$, ako vidno z Definícií 8 a 9.

Nekonečné rady v Banachových priestoroch

Definícia 10 (Konvergencia nekonečného radu)

Nech X je normovaný lineárny priestor s normou $\|\cdot\|$ a $\{x_k\}_{k=1}^{\infty} \subseteq X$ je postupnosť. Definujme

$$y_n := \sum_{k=1}^{n} x_k, \quad n \in \mathbb{N}. \tag{26}$$

Hovoríme, že nekonečný rad $\sum_{k=1}^{\infty} x_k$ konverguje, resp. je konvergentný, v priestore X, ak postupnosť $\{y_n\}_{n=1}^{\infty}$ má v X limitu vzhľadom na $\|\cdot\|$, t.j., $\lim_{n\to\infty} y_n = x$ pre isté $x \in X$. V tomto prípade kladieme $\sum_{k=1}^{\infty} x_k = x$.

Veta 4

Nech $(X, \|\cdot\|)$ je Banachov priestor a $\{x_k\}_{k=1}^{\infty} \subseteq X$ postupnosť s vlastnosťou

$$\text{číselný rad } \sum_{k=1}^{\infty} \|x_k\| \text{ konverguje v } \mathbb{R}. \tag{27}$$

Potom nekonečný rad $\sum_{k=1}^{\infty} x_k$ konverguje v X.

Dôkaz Vety 4.

V súlade s Definíciami 5 a 10 stačí ukázať, že postupnosť $\{y_n\}_{n=1}^{\infty}$ v (26) je cauchyovská v X. Zvoľme $\varepsilon > 0$. Predpoklad (27) na základe Cauchyho–Bolzanovho kritéria konvergencie číselného radu potom zaručuje existenciu indexu $n_\varepsilon \in \mathbb{N}$ s vlastnosťou, že

$$\text{pre každé dva indexy } m, n \geq n_\varepsilon,\ n > m,\ \text{platí } \|x_{m+1}\| + \cdots + \|x_n\| < \varepsilon. \tag{28}$$

Využitím trojuholníkovej nerovnosti následne dostávame

$$\|y_n - y_m\| \overset{(27)}{=} \|x_{m+1} + \cdots + x_n\| \leq \|x_{m+1}\| + \cdots + \|x_n\| \overset{(28)}{<} \varepsilon$$

pre každé $m, n \geq n_\varepsilon$, $n > m$, čo dokazuje cauchyovskosť, a teda i konvergenciu postupnosti $\{y_n\}_{n=1}^{\infty}$ v X. Dôkaz je hotový. ■

Poznámka 7

Tvrdenie Vety 4 je zovšeobecnením klasického výsledku o absolútnej konvergencii číselných radov v $\mathbb{R}$, resp. v $\mathbb{C}$. Konkrétne, ukazuje, že v ľubovoľnom Banachovom priestore je každý absolútne konvergentný nekonečný rad, t.j., spĺňajúci podmienku (27), zároveň i konvergentný (v zmysle Definície 10).

Normované priestory konečnej dimenzie

Poznámka 8

Klasickým výsledkom funkcionálnej analýzy je pozorovanie, že každý reálny normovaný lineárny priestor X konečnej dimenzie $n \in \mathbb{N}$ je lineárne izometrický s priestorom $\mathbb{R}^n$, na ktorom je zavedená vhodná norma. Konkrétne, nech $\|\cdot\|$ je norma na X a $\{x_1, \dots, x_n\} \subseteq X$ nejaká (algebraická) báza lineárneho priestoru X. Potom zobrazenie $F : X \to \mathbb{R}^n$ dané

$$F(x) := (\lambda_1, \dots, \lambda_n) \in \mathbb{R}^n, \quad x = \lambda_1 x_1 + \dots + \lambda_n x_n \in X, \tag{29}$$

je zrejme izomorfizmus lineárnych priestorov X a $\mathbb{R}^n$. Naviac, zobrazenie $\|\cdot\|_* : \mathbb{R}^n \to [0, \infty)$ definované pre každú n-ticu $(\lambda_1, \dots, \lambda_n) \in \mathbb{R}^n$ predpisom

$$\|(\lambda_1, \dots, \lambda_n)\|_* := \|x\|, \quad x = \lambda_1 x_1 + \dots + \lambda_n x_n \in X, \tag{30}$$

je norma na priestore $\mathbb{R}^n$, ako možno ľahko overiť podľa Definície 4. A keďže podľa (29) a (30) platí $\|F(x)\|_* = \|x\|$ pre každé $x \in X$, normované priestory $(X, \|\cdot\|)$ a $(\mathbb{R}^n, \|\cdot\|_*)$ sú v súlade s Definíciou 8 izometrické. Vo svetle Poznámky 6 sa teda pri skúmaní normovaných priestorov s dimenziou n stačí sústrediť na priestor $\mathbb{R}^n$. Všetky získané výsledky tak budú platné pre každý konečnorozmerný normovaný priestor nad telesom $\mathbb{R}$.

Veta 5

Pre dané $n \in \mathbb{N}$ sú každé dve normy na priestore $\mathbb{R}^n$ ekvivalentné.

Dôkaz Vety 5.

Uvažujme tzv. kanonickú bázu $\{e_1, \dots, e_n\}$ priestoru $\mathbb{R}^n$, t.j.,

$$e_k := (0, \dots, 1, \dots, 0), \quad \text{kde } 1 \text{ je na } k\text{-tej pozícii pre každé } k \in \{1, \dots, n\}. \tag{31}$$

Potom každý vektor $x = (x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n$ sa dá zrejme vyjadriť v tvare

$$x = x_1\, e_1 + \dots + x_n\, e_n. \tag{32}$$

Nech $\|\cdot\|$ je ľubovoľná, ale pevne zvolená norma na priestore $\mathbb{R}^n$. Dokážeme, že je ekvivalentná so súčtovou normou

$$\|x\|_1 = \sum_{k=1}^{n} |x_k| \tag{33}$$

predstavenou v Príklade 1 pre $p = 1$. Položme $M := \max_{1 \le k \le n} \|e_k\|$. Potom

$$\|x\| \overset{(32)}{=} \left\| \sum_{k=1}^{n} x_k\, e_k \right\| \le \sum_{k=1}^{n} |x_k|\, \|e_k\| \le M \sum_{k=1}^{n} |x_k| \overset{(33)}{=} M\, \|x\|_1, \quad x \in \mathbb{R}^n. \tag{34}$$

Dôkaz Vety 5 (pokračovanie).

Z Príkladu 7 ďalej vieme, že daná súčtová norma je ekvivalentná s euklidovskou normou, a tak normované priestory $(\mathbb{R}^n, \|\cdot\|_1)$ a $\mathbb{E}^n$ sú podľa Vety 3 a Definície 9 lineárne homeomorfné prostredníctvom identického zobrazenia F. Každá podmnožina v $\mathbb{R}^n$, ktorá je ohraničená a uzavretá vzhľadom na súčtovú normu, je teda v tejto norme i kompaktná. Obzvlášť, jednotková sféra $S(0,1)$ v $\mathbb{R}^n$ vzhľadom na normu $\|\cdot\|_1$, zavedená v (11), je kompaktná v tejto norme, nakoľko je vzhľadom na ňu očividne ohraničená a uzavretá v $\mathbb{R}^n$. Uvažujme funkciu $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ s predpisom $f(x) := \|x\|$ pre každý vektor $x \in \mathbb{R}^n$. V súlade s Vetou 2 a s ohľadom na nerovnosť (34) je f spojité zobrazenie na $\mathbb{R}^n$ vzhľadom na normu $\|\cdot\|_1$. Podľa Weierstrassovej vety je potom f ohraničená na $S(0,1)$, pričom svoje odpovedajúce globálne extrémy na $S(0,1)$ i nadobúda. Konkrétne, ak $m := \min_{x \in S(0,1)} f(x)$, potom existuje vektor $y \in S(0,1)$ taký, že $m = f(y) = \|y\|$. Zrejme $m \geq 0$. Ak by $m = 0$, potom nutne vektor $y = 0$, a tak i $\|y\|_1 = 0$, čo však odporuje relácii $y \in S(0,1)$. Preto konštanta m je kladná. Nech teraz $x \in \mathbb{R}^n \setminus \{(0,\dots,0)\}$ je ľubovoľné. Potom vektor $\tilde{x} := \frac{x}{\|x\|_1}$ je prvkom jednotkovej sféry $S(0,1)$, a následne platí

$$m \leq f(\tilde{x}) = \left\| \frac{x}{\|x\|_1} \right\| = \frac{\|x\|}{\|x\|_1}, \quad \text{a teda} \quad m\,\|x\|_1 \leq \|x\|. \tag{35}$$

Kombináciou výsledkov v (34) a (35) vo svetle Vety 2 napokon dostávame ekvivalenciu noriem $\|\cdot\|$ a $\|\cdot\|_1$. A keďže norma $\|\cdot\|$ bola zvolená ľubovoľne, môžeme uzavrieť, že každé dve normy na $\mathbb{R}^n$ sú vzájomne ekvivalentné. ∎

Dôsledok 1

Pre dané $n \in \mathbb{N}$ uvažujme normovaný lineárny priestor $\mathbb{R}^n$ s normou $\|\cdot\|$ a nech $\{x_1, \dots, x_n\} \subseteq \mathbb{R}^n$ je nejaká jeho (algebraická) báza. Potom v priestore $\mathbb{R}^n$ konvergencia v norme $\|\cdot\|$ splýva so súradnicovou konvergenciou vzhľadom na bázu $\{x_1, \dots, x_n\}$. Presnejšie, ak $\{x^{[k]}\}_{k=1}^{\infty} \subseteq \mathbb{R}^n$ je postupnosť a $x \in \mathbb{R}^n$ a

$$x^{[k]} = \lambda_1^{[k]} x_1 + \cdots + \lambda_n^{[k]} x_n, \quad \left(\lambda_1^{[k]}, \dots, \lambda_n^{[k]}\right) \in \mathbb{R}^n \quad \text{pre každé } k \in \mathbb{N}, \tag{36}$$

$$x = \lambda_1 x_1 + \cdots + \lambda_n x_n, \quad (\lambda_1, \dots, \lambda_n) \in \mathbb{R}^n, \tag{37}$$

potom $\lim_{k\to\infty} x^{[k]} = x$ v norme $\|\cdot\|$ práve vtedy, keď $\lim_{k\to\infty} \lambda_i^{[k]} = \lambda_i$ pre každé $i \in \{1, \dots, n\}$.

Dôkaz Dôsledku 1.

Ľahko sa ukáže, že pre každú zvolenú bázu $\{x_1, \dots, x_n\}$ priestoru $\mathbb{R}^n$ je funkcia

$$\|x\|_* := \sum_{i=1}^{n} |\lambda_i|, \quad x = \lambda_1 x_1 + \cdots + \lambda_n x_n \in \mathbb{R}^n, \tag{38}$$

normou na $\mathbb{R}^n$. Obzvlášť, je očividné, že konvergencia v tejto norme je ekvivalentná so súradnicovou konvergenciou vzhľadom na bázu $\{x_1, \dots, x_n\}$. A keďže podľa Vety 5 sú normy $\|\cdot\|$ a $\|\cdot\|_*$ ekvivalentné, platí výsledok v dôsledku. ∎

Dôsledok 2

Pre dané $n \in \mathbb{N}$ je každý normovaný lineárny priestor $(\mathbb{R}^n, \|\cdot\|)$ úplný, t.j., Banachov priestor. Okrem toho každá podmnožina v $\mathbb{R}^n$, ktorá je ohraničená a uzavretá vzhľadom na normu $\|\cdot\|$, je v tejto norme i kompaktná.

Veta 6

Každý reálny normovaný lineárny priestor konečnej dimenzie je Banachov priestor a konvergencia v ľubovoľnej norme je ekvivalentná so súradnicovou konvergenciou vzhľadom na akúkoľvek (algebraickú) bázu priestoru.

Veta 7

Nech X je reálny normovaný lineárny priestor s normou $\|\cdot\|$. Nasledujúce tvrdenia sú ekvivalentné.

(i) *Priestor X má konečnú dimenziu.*

(ii) *Každá množina $A \subseteq X$, ktorá je ohraničená a uzavretá vzhľadom na normu $\|\cdot\|$, je v tejto norme i kompaktná.*

Dôkaz Vety 7.

Smer (i) $\Rightarrow$ (ii) vyplýva z Poznámky 8 a Dôsledku 2. Nech platí výrok (ii), t.j., každá ohraničená a uzavretá podmnožina v X je kompaktná. Obzvlášť, jednotková sféra $S(0,1)$ v (11) je teda množina kompaktná v priestore X. Predpokladajme sporom, že priestor X nemá konečnú dimenziu. Zvoľme ľubovoľný vektor $x_1 \in S(0,1)$. Potom množina $A_1 := \mathrm{Lin}\,\{x_1\}$ je zrejme vlastný algebraický podpriestor lineárneho priestoru X s dimenziou 1. V súlade s Vetou 6 je A_1 úplný normovaný priestor. Množina A_1 je preto uzavretá v X vzhľadom na normu $\|\cdot\|$, čo následne podľa Definície 6 znamená, že A_1 je vlastný podpriestor normovaného priestoru X. Z Rieszovej lemy 1 pre $\eta := \frac{1}{2}$ potom vyplýva, že existuje vektor $x_2 \in S(0,1)$ taký, že

$$\rho(x_2, A_1) \geq \frac{1}{2}, \quad \text{a tak i} \quad \|x_2 - x_1\| \geq \frac{1}{2}.$$

Vektory x_1 a x_2 sú zrejme lineárne nezávislé. Položme $A_2 := \mathrm{Lin}\,\{x_1, x_2\}$. Využijúc analogické argumenty ako vyššie platí, že A_2 je vlastný podpriestor normovaného priestoru X s dimenziou 2. Podľa Rieszovej lemy 1 pre $\eta := \frac{1}{2}$ teda existuje prvok $x_3 \in S(0,1)$ s vlastnosťou

$$\rho(x_3, A_2) \geq \frac{1}{2}, \quad \text{a tak i} \quad \|x_3 - x_1\| \geq \frac{1}{2} \quad \text{a} \quad \|x_3 - x_2\| \geq \frac{1}{2}.$$

Podobne, množina $A_3 := \mathrm{Lin}\,\{x_1, x_2, x_3\}$ je vlastný podpriestor normovaného priestoru X s dimenziou 3, pričom existuje vektor $x_4 \in S(0,1)$ spĺňajúci

Dôkaz Vety 7 (pokračovanie).

$$\rho(x_4, A_3) \geq \frac{1}{2}, \quad \text{a tak i} \quad \|x_4 - x_1\| \geq \frac{1}{2}, \quad \|x_4 - x_2\| \geq \frac{1}{2}, \quad \text{a} \quad \|x_4 - x_3\| \geq \frac{1}{2}.$$

Nakoľko priestor X je podľa predpokladu nekonečnorozmerný, môžeme v tomto procese pokračovať ďalej. Získame tak postupnosť $\{x_k\}_{k=1}^{\infty} \subseteq S(0,1)$ s vlastnosťou $\|x_k - x_l\| \geq \frac{1}{2}$ pre každé dva rôzne indexy $k, l \in \mathbb{N}$. Daná postupnosť teda nemá žiadny hromadný bod, čo je však v rozpore s kompaktnosťou množiny $S(0,1)$. Preto priestor X musí mať konečnú dimenziu, t.j., platí tvrdenie (i). ■

Poznámka 9

Všimnime si, že v predloženom dôkaze sme vlastne ukázali ekvivalenciu

priestor X má konečnú dimenziu práve vtedy, keď jednotková sféra je kompaktná.

Ďalej poznamenajme, že ďalšie významné kritérium týkajúce sa dimenzie normovaného priestoru je nasledujúce. Nech $(X, \|\cdot\|)$ je normovaný lineárny priestor. Potom X má konečnú dimenziu práve vtedy, keď každá norma $\|\cdot\|_*$ na X je ekvivalentná s $\|\cdot\|$. Implikácia „$\Rightarrow$" je vo svetle Poznámky 8 obsahom Vety 5. Dôkaz opačnej implikácie je založený na pozorovaní, že v každom nekonečnerozmernom normovanom priestore X vieme k danej zvolenej norme $\|\cdot\|$ vždy zostrojiť novú normu $\|\cdot\|_*$ na X, ktorá nie je ekvivalentná s $\|\cdot\|$.

Obsah

Pojem skalárneho súčinu na lineárnom priestore

Definícia 11 (Unitárny priestor)

Nech X je lineárny priestor na $\mathbb{R}$ a $\langle\cdot,\cdot\rangle : X \times X \to \mathbb{R}$ zobrazenie, ktoré pre každú trojicu prvkov $x, y, z \in X$ a každú dvojicu skalárov $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ spĺňa podmienky

P1 $\langle x,\, x\rangle \geq 0$ a $\langle x,\, x\rangle = 0$ práve vtedy, keď $x = 0$,

P2 $\langle x,\, y\rangle = \langle y,\, x\rangle$,

P3 $\langle \alpha\, x + \beta\, y,\, z\rangle = \alpha\, \langle x,\, z\rangle + \beta\, \langle y,\, z\rangle$.

Zobrazenie $\langle\cdot,\cdot\rangle$ sa nazýva skalárny súčin na X a dvojicu $(X, \langle\cdot,\cdot\rangle)$ označujeme ako lineárny priestor so skalárnym súčinom, resp. unitárny priestor nad $\mathbb{R}$.

Poznámka 10

V prípade lineárneho priestoru X nad telesom komplexných čísiel $\mathbb{C}$ je skalárny súčin $\langle\cdot,\cdot\rangle$ na X zobrazenie s hodnotami v $\mathbb{C}$, pričom číslo $\langle x,\, x\rangle$ je pre každý vektor $x \in X$ reálne. Komplexný skalárny súčin je definovaný pomocou rovnakých axióm ako v Definícii 11, až na P2, ktorá je nahradená podmienkou

P2* $\langle x,\, y\rangle = \overline{\langle y,\, x\rangle}$ pre každé $x, y \in X$.

Poznámka 11

Poznamenajme, že z axióm P2 a P3 reálneho skalárneho súčinu v Definícii 11 vyplýva jeho linearita i vzhľadom na druhú zložku, t.j., platí

$$\langle x,\, \alpha\, y + \beta\, z\rangle = \alpha\,\langle x,\, y\rangle + \beta\,\langle x,\, z\rangle \quad \text{pre každé } x, y, z \in X \text{ a } \alpha, \beta \in \mathbb{R}, \tag{39}$$

ako možno ľahko overiť. Naviac, z (39) s $\alpha = \beta = 0$ vyplýva $\langle x,\, 0\rangle = 0$. Naproti tomu, komplexný skalárny súčin je antilineárny v druhej zložke, konkrétne

$$\langle x,\, \alpha\, y + \beta\, z\rangle = \overline{\alpha}\,\langle x,\, y\rangle + \overline{\beta}\,\langle x,\, z\rangle \quad \text{pre každé } x, y, z \in X \text{ a } \alpha, \beta \in \mathbb{C}. \tag{40}$$

Zdôraznime, že počas celej prednášky sa budeme zaoberať výhradne iba reálnym skalárnym súčinom.

Príklad 9

Pre dané $n \in \mathbb{N}$ nech $X := \mathbb{R}^n$. Potom zobrazenie

$$\langle x,\, y\rangle := \sum_{k=1}^{n} x_k\, y_k, \quad x = (x_1, \ldots, x_n),\; y = (y_1, \ldots, y_n) \in \mathbb{R}^n, \tag{41}$$

je (reálny) skalárny súčin na lineárnom priestore X, ako sa môžeme ľahko presvedčiť. Dvojica $(X, \langle\cdot,\cdot\rangle)$ je teda n-rozmerný (reálny) unitárny priestor.

Príklad 10

Klasickým príkladom (reálneho) unitárneho priestoru s nekonečnou dimenziou je priestor l^2, na ktorom je skalárny súčin definovaný predpisom

$$\langle x, y\rangle := \sum_{k=1}^{\infty} x_k\, y_k, \quad x = \{x_k\}_{k=1}^{\infty},\ y = \{y_k\}_{k=1}^{\infty} \in l^2. \tag{42}$$

Poznamenajme, že konvergencia nekonečného radu v (42) je zaručená na základe Hölderovej (resp. Cauchyho) nerovnosti

$$\sum_{k=1}^{n} |x_k\, y_k| \le \left(\sum_{k=1}^{n} |x_k|^2\right)^{1/2} \left(\sum_{k=1}^{n} |y_k|^2\right)^{1/2}, \tag{43}$$

platiacej pre každé $n \in \mathbb{N}$. Limitovaním nerovnosti (43) pre $n \to \infty$ a využitím konvergencie nekonečných radov $\sum |x_k|^2$ a $\sum |y_k|^2$ dostávame absolútnu konvergenciu, a následne i konvergenciu radu v (42) pre každú dvojicu $x, y \in l^2$.

Veta 8 (Cauchyho–Schwarzova–Buňakovského nerovnosť)

Nech X je unitárny priestor so skalárnym súčinom $\langle\cdot,\cdot\rangle$. Potom platí nerovnosť

$$|\langle x, y\rangle| \le \sqrt{\langle x, x\rangle}\,\sqrt{\langle y, y\rangle} \quad \textit{pre každú dvojicu vektorov } x, y \in X. \tag{44}$$

Dôkaz Vety 8.

Nech x, y sú ľubovoľné vektory v X. Zrejme pre každé $t \in \mathbb{R}$ je vektor $tx + y$ prvkom priestoru X a podľa axiómy P1 v Definícii 11 platí

$$\langle tx + y,\, tx + y\rangle \geq 0 \tag{45}$$

Roznásobením súčinu v (45) v súlade s P2 a P3 v Definícii 11 a (39) dostávame

$$0 \leq \langle tx + y,\, tx + y\rangle = t^2\langle x,\, x\rangle + 2t\,\langle x,\, y\rangle + \langle y,\, y\rangle. \tag{46}$$

Podľa (46) teda reálna kvadratická funkcia $f(t) := t^2\langle x,\, x\rangle + 2t\,\langle x,\, y\rangle + \langle y,\, y\rangle$ nadobúda na $\mathbb{R}$ iba nezáporné hodnoty. To znamená, že jej diskriminant

$$D = 4\,\langle x,\, y\rangle^2 - 4\langle x,\, x\rangle\,\langle y,\, y\rangle \leq 0, \tag{47}$$

z čoho ihneď vyplýva Cauchyho–Schwarzova–Buňakovského nerovnosť (44). ■

Poznámka 12

Využitím nerovnosti (44) je možné pomerne ľahko ukázať, že pre každý unitárny priestor X so skalárnym súčinom $\langle\cdot,\cdot\rangle$ je zobrazenie

$$\|x\| := \sqrt{\langle x,\, x\rangle}, \quad x \in X, \tag{48}$$

normou na lineárnom priestore X. Kým platnosť prvých dvoch axióm v Definícii 4

Poznámka 12

je pre $\|\cdot\|$ v (48) zrejmá, trojuholníková nerovnosť N3 vyplýva z výpočtu

$$\|x+y\|^2 \overset{(48)}{=} \langle x+y,\, x+y\rangle = \langle x,\, x\rangle + 2\,\langle x,\, y\rangle + \langle y,\, y\rangle \overset{(48)}{=} \|x\|^2 + 2\,\langle x,\, y\rangle + \|y\|^2$$
$$\overset{(44),(48)}{\leq} \|x\|^2 + 2\,\|x\|\cdot\|y\| + \|y\|^2 = (\,\|x\| + \|y\|\,)^2 \quad \text{pre každé } x, y \in X.$$

Každý unitárny priestor X je teda zároveň i normovaný lineárny priestor s normou $\|\cdot\|$ v (48), ktorá je indukovaná príslušným skalárnym súčinom $\langle\cdot,\cdot\rangle$. Poznamenajme, že v tomto prípade sa daný skalárny súčin dá reprezentovať v tvare

$$\langle x,\, y\rangle = \frac{1}{4}\,(\,\|x+y\|^2 - \|x-y\|^2\,)\,, \qquad x, y \in X, \tag{49}$$

ako sa môžeme ľahko presvedčiť aplikáciou formuly (48). Obzvlášť, indukovaná norma $\|\cdot\|$ spĺňa pre každé $x, y \in X$ tzv. rovnobežníkové pravidlo

$$\|x+y\|^2 + \|x-y\|^2 = 2\,(\,\|x\|^2 + \|y\|^2\,)\,. \tag{50}$$

Definícia 12 (Hilbertov priestor)

Unitárny priestor X nad $\mathbb{R}$, ktorý je úplný vzhľadom na normu v (48) indukovanú daným skalárnym súčinom na X, sa nazýva (reálny) Hilbertov priestor.

Príklad 11

Je ľahko vidieť, že skalárny súčin $\langle\cdot,\cdot\rangle$ na $\mathbb{R}^n$ zavedený v Príklade 9, indukuje v súlade s Poznámou 12 euklidovskú normu na $\mathbb{R}^n$ predstavenú v Príklade 1 (pre $p = 2$). Obvzlášť, euklidovský priestor $\mathbb{E}^n$ je úplný, a tak $(\mathbb{R}^n, \langle\cdot,\cdot\rangle)$ je podľa Definície 12 n-rozmerný Hilbertov priestor. Na druhej strane, priestor l^2 v Príklade 10 je Hilbertov priestor s nekonečnou dimenziou. Odpovedajúci skalárny súčin v (42) v tomto prípade vytvára p-normu zavedenú v Príklade 2 pre $p = 2$.

Poznámka 13

Pomocou normy $\|\cdot\|$ na lineárnom priestore X zavedenej v Poznámke 12 je možné Cauchyho–Schwarzovu–Buňakovského nerovnosť (44) zapísať v tvare

$$|\langle x,\, y\rangle| \leq \|x\| \cdot \|y\| \quad \text{pre každé } x, y \in X. \tag{51}$$

Veta 9

Nech $(X, \langle\cdot,\cdot\rangle)$ je unitárny priestor. Potom $\langle\cdot,\cdot\rangle$ je spojité zobrazenie priestoru $X \times X$ do euklidovského priestoru $\mathbb{E}$.

Dôkaz Vety 9.

Nech $\{x_k\}, \{y_k\} \subseteq X$ sú dve postupnosti konvergentné v X vzhľadom na normu $\|\cdot\|$ v (48), t.j., existujú $x, y \in X$ tak, že $\|x_k - x\| \to 0$ a $\|y_k - y\| \to 0$ pre $k \to \infty$. Pomocou axióm skalárneho súčinu v Definícii 11 a Cauchyho–Schwarzovej–Buňakovského nerovnosti (51) odvodíme

$$
\begin{aligned}
\big|\langle x_k, y_k\rangle - \langle x, y\rangle\big| &= \big|\langle x_k, y_k\rangle - \langle x, y_k\rangle + \langle x, y_k\rangle - \langle x, y\rangle\big| \\
&= \big|\langle x_k - x, y_k\rangle + \langle x, y_k - y\rangle\big| \le \big|\langle x_k - x, y_k\rangle\big| + \big|\langle x, y_k - y\rangle\big| \\
&\overset{(51)}{\le} \|x_k - x\|\,\|y_k\| + \|x\|\,\|y_k - y\| \;\to 0 \quad \text{pre } k \to \infty,
\end{aligned}
$$

pretože postupnosť $\{\|y_k\|\}$ je ohraničená. Preto $\lim_{k\to\infty}\langle x_k, y_k\rangle = \langle x, y\rangle$. ■

Veta 10 (Jordanova–von Neumannova)

Nech X je normovaný lineárny priestor s normou $\|\cdot\|$. Potom je táto norma vytvorená nejakým skalárnym súčinom $\langle\cdot,\cdot\rangle$ v zmysle (48) *práve vtedy, keď platí rovnobežníkové pravidlo* (50). *V tomto prípade daný skalárny súčin spĺňa* (49).

Definícia 13 (Izometria unitárnych priestorov)

Nech X a Y sú dva unitárne priestory so skalárnymi súčinmi $\langle\cdot,\cdot\rangle_X$ a $\langle\cdot,\cdot\rangle_Y$. Hovoríme, že priestory $(X, \langle\cdot,\cdot\rangle_X)$ a $(Y, \langle\cdot,\cdot\rangle_Y)$ sú izometrické (lineárne izometrické, izometricky izomorfné), ak existuje bijektívne lineárne zobrazenie $F : X \to Y$ zachovávajúce skalárne súčiny, t.j., platí $\langle F(x), F(y)\rangle_Y = \langle x, y\rangle_X$ pre každé dva vektory $x, y \in X$.

Poznámka 14

Na základe výsledkov predchádzajúcej sekcie o normovaných priestoroch konečnej dimenzie a z Poznámky 11 ľahko odvodíme, že každý konečnorozmerný Hilbertov priestor s dimenziou n, $n \in \mathbb{N}$, je izometricky izomorfný s euklidovským priestorom $\mathbb{E}^n$, v ktorom je skalárny súčin definovaný podľa (41). Neskôr v prednáške ukážeme, že podobná klasifikácia funguje i v prípade separabilných Hilbertových priestorov s nekonečnou dimenziou. Konkrétne, dokážeme, že každý nekonečnorozmerný separabilný Hilbertov priestor je izometricky izomorfný s priestorom l^2 diskutovaným v Príkladoch 10 a 11.

Ortogonalita a ortonormalita

Definícia 14 (Ortogonálne a ortonormálne systémy vektorov)

Nech X je unitárny priestor so skalárnym súčinom $\langle \cdot, \cdot \rangle$. Hovoríme, že vektory $x, y \in X$ sú ortogonálne, ak $\langle x, y \rangle = 0$. Neprázdny systém nenulových vektorov $S \subseteq X$ sa označuje ako ortogonálny, ak platí $\langle x, y \rangle = 0$ pre každé dva rôzne prvky $x, y \in S$. Ak naviac $\|x\| = \sqrt{\langle x, x \rangle} = 1$ pre každé $x \in S$, systém S sa nazýva ortonormálny.

Veta 11

Nech X je unitárny priestor so skalárnym súčinom $\langle \cdot, \cdot \rangle$ a $S \subseteq X$ je ľubovoľný ortogonálny systém. Potom S je lineárne nezávislý vo vektorovom priestore X.

Dôkaz Vety 11.

Nech $\{x_1, \ldots, x_m\} \subseteq S$, $m \in \mathbb{N}$, je nejaká konečná podmnožina vektorov a $\lambda_1, \ldots, \lambda_m \in \mathbb{R}$ m-tica skalárov spĺňajúca

$$\lambda_1 x_1 + \cdots + \lambda_m x_m = 0. \tag{52}$$

Využitím základných vlastností skalárneho súčinu potom dostávame

Dôkaz Vety 11 (pokračovanie).

$$0 = \langle x_i, 0 \rangle \overset{(52)}{=} \langle x_i, \lambda_1 x_1 + \cdots + \lambda_m x_m \rangle = \lambda_1 \langle x_i, x_1 \rangle + \cdots + \lambda_m \langle x_i, x_m \rangle$$

$$= \lambda_i \langle x_i, x_i \rangle \quad \text{pre každé } i \in \{1, \ldots, m\}, \tag{53}$$

keďže v súlade s Definíciou 14 platí $\langle x_i, x_j \rangle = 0$ pre každé dva rôzne indexy $i, j \in \{1, \ldots, m\}$. Nakoľko $\langle x_i, x_i \rangle \neq 0$ pre každé $i \in \{1, \ldots, m\}$, z (53) máme rovnosť $\lambda_i = 0$ pre každý index $i \in \{1, \ldots, m\}$. Podľa Definície 1 sú teda vektory $x_1, \ldots, x_m$ lineárne nezávislé v X. A keďže konečná podmnožina $\{x_1, \ldots, x_m\} \subseteq S$ je ľubovoľná, i celý systém S je lineárne nezávislý v X. ■

Veta 12 (Ortonormalizácia lineárne nezávislej množiny)

Nech X je unitárny priestor so skalárnym súčinom $\langle \cdot, \cdot \rangle$ a $A \subseteq X$ je nanajvýš spočítateľná podmnožina lineárne nezávislá v X. Potom existuje ortonormálny systém $S \subseteq X$ taký, že platí $\mathrm{Lin}\, A = \mathrm{Lin}\, S$.

Dôkaz Vety 12.

Tvrdenie sa dokáže pomocou štandardného Gramovho–Schmidtovho ortogonalizačného/ortonormalizačného procesu, a preto ho vynechávame. ■

Veta 13

Nech X je separabilný unitárny priestor so skalárnym súčinom $\langle\cdot,\cdot\rangle$. Potom každý ortogonálny systém $S \subseteq X$ je nanajvýš spočítateľný.

Dôkaz Vety 13.

Nech $\|\cdot\|$ je norma na X indukovaná príslušným skalárnym súčinom $\langle\cdot,\cdot\rangle$ podľa Poznámky 12 a nech $S \subseteq X$ je nejaký ortogonálny systém. Bez ujmy na všeobecnosti predpokladajme, že systém S je ortonormálny, t.j., v zhode s Definíciou 14 platí $\|x\| = 1$ pre každé $x \in S$. Potom pre vzdialenosť každých dvoch rôznych prvkov $x, y \in S$ máme

$$\rho(x,y) = \|x-y\| \overset{(48)}{=} \sqrt{\langle x-y,\, x-y\rangle} = \sqrt{\langle x,\, x\rangle - 2\,\langle x,\, y\rangle + \langle y,\, y\rangle} = \sqrt{2}. \quad (54)$$

Nech ďalej $N \subseteq X$ je spočítateľná podmnožina hustá v metrickom priestore (X,ρ) a označme $A := \{B(x, \frac{\sqrt{2}}{2}),\ x \in S\}$. Zrejme otvorené gule $B(x, \frac{\sqrt{2}}{2})$, $x \in S$, sú v súlade s (54) vzájomne disjunktné, pričom každá z nich obsahuje aspoň jeden prvok množiny N. To znamená, že systém A je nutne nanajvýš spočítateľný, a tak i ortogonálny systém S je nanajvýš spočítateľný. ∎

Definícia 15 (Úplné a uzavreté systémy vektorov)

Nech X je unitárny priestor so skalárnym súčinom $\langle\cdot,\cdot\rangle$ a $A \subseteq X$ systém.

(i) Systém A nazývame úplným, ak jediný prvok $x \in X$, ktorý spĺňa $\langle y, x\rangle = 0$ pre každé $y \in A$, je $x = 0$.

(ii) Systém A sa označuje ako uzavretý, ak platí $\overline{\mathrm{Lin}\, A} = X$, t.j., uzáver množiny všetkých konečných lineárnych kombinácií prvkov systému A je rovný celému priestoru X.

Definícia 16 (Ortogonálna/ortonormálna báza unitárneho priestoru)

Nech X je unitárny priestor. Každý uzavretý ortogonálny/ortonormálny systém $S \subseteq X$ sa nazýva ortogonálna/ortonormálna báza priestoru X.

Veta 14

Nech X je separabilný unitárny priestor so skalárnym súčinom $\langle\cdot,\cdot\rangle$. Potom v priestore X existuje aspoň jedna ortonormálna báza.

Dôkaz Vety 14.

Nech $\{x_k\}_{k=1}^{\infty} \subseteq X$ je podmnožina hustá v priestore X. Z tejto postupnosti vylúčime všetky jej členy x_l, $l \in \mathbb{N}$, ktoré sa dajú vyjadriť ako lineárna kombinácia prvkov x_i s indexami $i < l$. Získame tak nanajvýš spočítateľnú množinu $A \subseteq X$, ktorá je lineárne nezávislá X a zároveň $\overline{\mathrm{Lin}\, A} = X$. Následne, v súlade s Vetou 12, jej ortonormalizáciou dostaneme nanajvýš spočítateľný ortonormálny systém $S \subseteq X$, ktorý spĺňa $\overline{\mathrm{Lin}\, S} = X$. Podľa Definícií 15 a 16 je tak množina S ortonormálnou bázou priestoru X a dôkaz je hotový. ■

Príklad 12

Príkladom funkcionálneho unitárneho priestoru je množina $\mathcal{C}[-\pi, \pi]$ reálnych funkcií spojitých na intervale $[-\pi, \pi]$, na ktorej je definovaný skalárny súčin tvaru

$$\langle f, g \rangle := \int_{-\pi}^{\pi} f(x)\, g(x)\, \mathrm{d}x, \quad f, g \in \mathcal{C}[-\pi, \pi]. \tag{55}$$

Ľahko vidíme, že odpovedajúca norma indukovaná týmto skalárnym súčinom je integrálna norma $\|\cdot\|_I$ zavedená v (8). Obzvlášť, v súlade s Príkladom 3 $(\mathcal{C}[-\pi, \pi], \langle\cdot,\cdot\rangle)$ nie je Hilbertov priestor. Jedná sa však o separabilný unitárny priestor a jednou z jeho ortonormálnych báz je tzv. trigonometrický systém

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi}}, \qquad \frac{\cos nx}{\sqrt{\pi}}, \qquad \frac{\sin nx}{\sqrt{\pi}}, \qquad n \in \mathbb{N}. \tag{56}$$

Fourierove koeficienty a Fourierov rad

Definícia 17 (Fourierove koeficienty a Fourierov rad)

Nech X je unitárny priestor so skalárnym súčinom $\langle\cdot,\cdot\rangle$ a $S = \{u_k\}_{k=1}^{\infty} \subseteq X$ je spočítateľný ortonormálny systém. Pre dané $x \in X$ sa reálne čísla definované

$$c_k := \langle x, u_k\rangle, \quad k \in \mathbb{N}, \tag{57}$$

nazývajú Fourierove koeficienty prvku x vzhľadom na systém S. Nekonečný rad $\sum_{k=1}^{\infty} c_k\, u_k$ sa označuje ako Fourierov rad prvku x vzhľadom na systém S.

Poznámka 15

Pre daný spočítateľný ortonormálny systém $S = \{u_k\}_{k=1}^{\infty} \subseteq X$ a dané $x \in X$ uvažujme postupnosť $\{s_n\}_{n=1}^{\infty} \subseteq X$ čiastočných súčtov príslušného Fourierovho radu prvku x vzhľadom na S (tzv. Fourierove polynómy prvku x), t.j.,

$$s_n := \sum_{k=1}^{n} c_k\, u_k, \quad n \in \mathbb{N}, \tag{58}$$

kde c_k, $k \in \mathbb{N}$, sú Fourierove koeficienty prvku x v (57). Budeme skúmať, kedy $\lim_{n\to\infty} s_n = x$ v norme $\|\cdot\|$ indukovanej daným skalárnym súčinom v (48).

Lema 2

Nech X je unitárny priestor so skalárnym súčinom $\langle\cdot,\cdot\rangle$, $S = \{u_k\}_{k=1}^{\infty} \subseteq X$ ortonormálny systém, $x \in X$ daný vektor, $\{c_k\}_{k=1}^{\infty}$ odpovedajúca postupnosť jeho Fourierových koeficientov v (57) a $n \in \mathbb{N}$ pevný index. Potom pre každú n-ticu skalárov $\lambda_1, \dots, \lambda_n \in \mathbb{R}$ platí nerovnosť

$$\|x - s_n\| \le \left\| x - \sum_{k=1}^{n} \lambda_k\, u_k \right\|, \tag{59}$$

kde s_n je n-tý Fourierov polynóm prvku x definovaný v (58). Obzvlášť, rovnosť v (59) nastane práve vtedy keď $\lambda_k = c_k$ pre každé $k \in \{1, \dots, n\}$.

Dôkaz Lemy 2.

Položme $I := \|x - \sum_{k=1}^{n} \lambda_k\, u_k\|$. Využitím Definície 17 a základných vlastností skalárneho súčinu v Definícii 11 a Poznámke 11 postupne máme

$$I^2 = \left\| x - \sum_{k=1}^{n} \lambda_k\, u_k \right\|^2 \overset{(48)}{=} \left\langle x - \sum_{k=1}^{n} \lambda_k\, u_k,\ x - \sum_{l=1}^{n} \lambda_l\, u_l \right\rangle$$

$$= \langle x,\, x\rangle - \sum_{l=1}^{n} \lambda_l \underbrace{\langle x,\, u_l\rangle}_{c_l} - \sum_{k=1}^{n} \lambda_k \underbrace{\langle u_k,\, x\rangle}_{c_k} + \sum_{k,l=1}^{n} \lambda_k\, \lambda_l \underbrace{\langle u_k,\, u_l\rangle}_{\delta_{kl}}$$

Dôkaz Lemy 2 (pokračovanie).

$$\stackrel{(48)}{=} \|x\|^2 - \sum_{l=1}^{n} \lambda_l \, c_l - \sum_{k=1}^{n} \lambda_k \, c_k + \sum_{m=1}^{n} \lambda_m^2$$

$$\stackrel{k=l=m}{=} \|x\|^2 + \sum_{k=1}^{n} \underbrace{\left(\lambda_k^2 - 2\lambda_k \, c_k + c_k^2\right)}_{|\lambda_k - c_k|^2} - \sum_{k=1}^{n} |c_k|^2$$

$$= \|x\|^2 - \sum_{k=1}^{n} |c_k|^2 + \sum_{k=1}^{n} |\lambda_k - c_k|^2.$$

Z tejto analýzy vyplýva, že hodnota I, ako funkcia premenných $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$, je minimálna práve pre voľbu $\lambda_k = c_k$ pre každé $k \in \{1, \ldots, n\}$. Teda dostávame

$$I \geq I(c_1, \ldots, c_n) = \left\| x - \sum_{k=1}^{n} c_k \, u_k \right\| \stackrel{(58)}{=} \|x - s_n\|,$$

čo dokazuje platnosť nerovnosti (59). Dôkaz je hotový. ■

Poznámka 16

Výsledok Lemy 2 ukazuje, že spomedzi všetkých lineárnych kombinácií vektorov $\{u_1, \dots, u_n\} \subseteq S$ aproximuje prvok x v norme $\|\cdot\|$ najlepšie práve čiastočný súčet s_n Fourierovho radu vektora x vzhľadom na systém S. Konkrétne, z dôkazu Lemy 2 pre každú n-ticu skalárov $\lambda_1, \dots, \lambda_n \in \mathbb{R}$ vyplýva formula

$$\underbrace{\left\| x - \sum_{k=1}^{n} \lambda_k u_k \right\|^2}_{\text{chyba aproximácie}} = \|x\|^2 - \sum_{k=1}^{n} |c_k|^2 + \sum_{k=1}^{n} |\lambda_k - c_k|^2. \tag{60}$$

Dôsledok 3 (Besselova nerovnosť)

S označením a predpokladmi Lemy 2 platí pre každé $x \in X$ a $n \in \mathbb{N}$ identita

$$\|x\|^2 = \sum_{k=1}^{n} |c_k|^2 + \|x - s_n\|^2. \tag{61}$$

Obzvlášť, platí tzv. Besselova nerovnosť

$$\sum_{k=1}^{n} |c_k|^2 \leq \|x\|^2 \text{ pre každé } n \in \mathbb{N}, \quad \text{resp.} \quad \sum_{k=1}^{\infty} |c_k|^2 \leq \|x\|^2. \tag{62}$$

Dôkaz Dôsledku 3.

Formula (61) ihneď vyplýva z rovnosti (60) pre $\lambda_k := c_k$, $k \in \{0, \ldots, n\}$. Keďže $\|x - s_n\|^2 \geq 0$ pre každé $n \in \mathbb{N}$, z (61) máme $\sum_{k=1}^{n} |c_k|^2 \leq \|x\|^2$, $n \in \mathbb{N}$, čo následne pre $n \to \infty$ implikuje Besselovu nerovnosť (62). ■

Poznámka 17

Významným dôsledkom Besselovej nerovnosti (62) je skutočnosť, že pre každý daný ortonormálny systém $S = \{u_k\}_{k=1}^{\infty} \subseteq X$ je nekonečný rad $\sum_{k=1}^{\infty} |c_k|^2$ pre každý vektor $x \in X$ konvergentný, t.j., postupnosť $\{c_k\}_{k=1}^{\infty}$ Fourierových koeficientov vektora $x \in X$ vzhľadom na systém S je prvkom Hilbertovho priestoru l^2 z Príkladov 10 a 11. Obzvlášť, platí potom podmienka $\lim_{k\to\infty} c_k = 0$.

Dôsledok 4 (Parsevalova rovnosť)

S označením a predpokladmi Lemy 2 platí pre $x \in X$ tzv. Parsevalova rovnosť

$$\sum_{k=1}^{\infty} |c_k|^2 = \|x\|^2 \tag{63}$$

práve vtedy, Fourierov rad $\sum_{k=0}^{\infty} c_k\, u_k = x$ v norme $\|\cdot\|$, t.j., $\lim_{n\to\infty} s_n = x$.

Dôkaz Dôsledku 4.

Uvedená ekvivalencia bezprostredne vyplýva z formuly (61) pre $n \to \infty$. ∎

Veta 15

Nech X je unitárny priestor so skalárnym súčinom $\langle \cdot, \cdot \rangle$ a $S = \{u_k\}_{k=1}^{\infty} \subseteq X$ ortonormálny systém. Potom S je uzavretý vzhľadom na X v zmysle Definície 15(ii) práve vtedy, keď každý prvok $x \in X$ spĺňa Parsevalovu rovnosť (63) *vzhľadom na systém S.*

Dôkaz Vety 15.

Predpokladajme, že systém S je uzavretý vzhľadom na X a nech $x \in X$ je ľubovoľný vektor. V súlade s Definíciou 15(ii) potom pre každé $\varepsilon > 0$

$$\text{existuje index } n_\varepsilon \in \mathbb{N} \text{ a skaláry } \lambda_1, \ldots, \lambda_{n_\varepsilon} \in \mathbb{R} \text{ tak, že } \left\| x - \sum_{k=1}^{n_\varepsilon} \lambda_k \, u_k \right\| \leq \varepsilon.$$

Nech $\{c_k\}_{k=1}^{\infty}$ je postupnosť Fourierových koeficientov prvku x vzhľadom na systém S. Zvoľme nejaké $\varepsilon > 0$. Využitím formuly (60) postupne dostávame

Dôkaz Vety 15 (pokračovanie).

$$\|x\|^2 \overset{(60)}{=} \left\| x - \sum_{k=1}^{n_\varepsilon} \lambda_k u_k \right\|^2 + \sum_{k=1}^{n_\varepsilon} |c_k|^2 - \sum_{k=1}^{n_\varepsilon} |\lambda_k - c_k|^2 \leq \varepsilon^2 + \sum_{k=1}^{\infty} |c_k|^2, \qquad (64)$$

keďže podľa Poznámky 17 nekonečný rad $\sum_{k=1}^{\infty} |c_k|^2$ konverguje. Nerovnosť (64) zrejme platí pre každé $\varepsilon > 0$, a tak nutne $\|x\|^2 \leq \sum_{k=1}^{\infty} |c_k|^2$. Na druhej strane, z Dôsledku 3 vieme, že vektor x spĺňa Besselovu nerovnosť (62), t.j., $\sum_{k=1}^{\infty} |c_k|^2 \leq \|x\|^2$. Prvok x teda spĺňa Parsevalovu rovnosť (63) vzhľadom na systém S. Naopak, nech každý vektor $x \in X$ vyhovuje Parsevalovej rovnosti vzhľadom na systém S, t.j., platí $\sum_{k=1}^{\infty} |c_k|^2 = \|x\|^2$, kde $\{c_k\}_{k=1}^{\infty}$ je odpovedajúca postupnosť Fourierových koeficientov prvku x vzhľadom na S. Potom podľa Dôsledku 4 pre každé $x \in X$ máme $x = \lim_{n\to\infty} s_n$, kde s_n, $n \in \mathbb{N}$, je n-tý Fourierov polynóm v (58). Obzvlášť, to znamená, že $\overline{\mathrm{Lin}\, S} = X$, a tak v zhode s Definíciou 15(ii) je systém S uzavretý vzhľadom na priestor X. ■

Poznámka 18

Z Vety 14 vieme, že každý separabilný unitárny priestor X má ortonormálnu bázu, t.j., uzavretý ortonormálny systém. Podľa Vety 15 teda v takomto priestore X existuje ortonormálny systém, vzhľadom na ktorý každé $x \in X$ spĺňa (63).

Rieszova–Fischerova veta

Poznámka 19

Nech X je unitárny priestore so skalárnym súčinom $\langle \cdot, \cdot \rangle$ a $S = \{u_k\}_{k=1}^{\infty} \subseteq X$ je ortonormálny systém. V predchádzajúcej sekcii sme ukázali, že pre každý prvok $x \in X$ postupnosť $\{c_k\}_{k=1}^{\infty}$ jeho Fourierových koeficientov v (57) patrí do priestoru l^2 (Poznámka 17). Okrem toho sme v Dôsledku 4 podali nutnú a postačujúcu podmienku na to, aby pre daný vektor $x \in X$ príslušný Fourierov rad $\sum_{k=1}^{\infty} c_k\, u_k$ konvergoval k x v norme priestoru X. Konkrétne, platí ekvivalencia

$$\lim_{n\to\infty} \left\| x - \sum_{k=1}^{n} c_k\, u_k \right\| = 0 \quad \Longleftrightarrow \quad \text{rad } \sum_{k=1}^{\infty} |c_k|^2 \text{ konverguje so súčtom } \|x\|^2.$$

Tieto poznatky teraz rozšírime. Dokážeme, že pre daný ortonormálny systém S jediné rady typu $\sum_{k=1}^{\infty} \lambda_k\, u_k$, ktoré konvergujú v X, sú Fourierove rady. Ďalej ukážeme, že v prípade Hilbertovho priestoru, t.j., úplného unitárneho priestoru,

- každá postupnosť $\{\lambda_k\}_{k=1}^{\infty}$ z priestoru l^2 je postupnosť Fourierových koeficientov nejakého prvku $x \in X$ vzhľadom na S;
- každý Fourierov rad $\sum_{k=1}^{\infty} c_k\, u_k$ konverguje v priestore X.

Tieto výsledky sú obsiahnuté vo Vete 17 v nasledujúcom výklade.

Lema 3

Nech X je unitárny priestor so skalárnym súčinom $\langle\cdot,\cdot\rangle$ a $S=\{u_k\}_{k=1}^{\infty}\subseteq X$ je ortonormálny systém. Nech $\{\lambda_k\}_{k=1}^{\infty}$ je postupnosť reálnych čísiel s vlastnosťou, že rad $\sum_{k=1}^{\infty}\lambda_k\,u_k$ je konvergentný v priestore X so súčtom x. Potom $\sum_{k=1}^{\infty}\lambda_k\,u_k$ je Fourierov rad prvku x vzhľadom na systém S, t.j., čísla λ_k, $k\in\mathbb{N}$, sú Fourierove koeficienty vektora x definované v (57).

Dôkaz Lemy 3.

V zhode s predpokladmi platí $x=\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\lambda_k\,u_k$. Využijúc spojitosť skalárneho súčinu $\langle\cdot,\cdot\rangle$ podľa Vety 9, pre každý daný index $m\in\mathbb{N}$ potom máme

$$\langle x,\,u_m\rangle=\left\langle\lim_{n\to\infty}\left(\sum_{k=1}^{n}\lambda_k\,u_k\right),\,u_m\right\rangle=\lim_{n\to\infty}\left\langle\left(\sum_{k=1}^{n}\lambda_k\,u_k\right),\,u_m\right\rangle$$

$$=\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\lambda_k\,\underbrace{\langle u_k,\,u_m\rangle}_{\delta_{km}}=\lim_{n\to\infty}\lambda_m=\lambda_m,$$

čo so zreteľom na (57) dokazuje tvrdenie. ■

Veta 16 (Rieszova–Fischerova)

Nech X je Hilbertov priestor so skalárnym súčinom $\langle \cdot, \cdot \rangle$ a $S = \{u_k\}_{k=1}^{\infty} \subseteq X$ je ortonormálny systém. Nech $\{\lambda_k\}_{k=1}^{\infty}$ je ľubovoľná postupnosť z priestoru l^2, t.j., rad $\sum_{k=1}^{\infty} |\lambda_k|^2$ konverguje. Potom rad $\sum_{k=1}^{\infty} \lambda_k\, u_k$ je konvergentný v priestore X, t.j., existuje vektor $x \in X$ taký, že $\sum_{k=1}^{\infty} \lambda_k\, u_k = x$ v norme X. Naviac, čísla λ_k, $k \in \mathbb{N}$, sú Fourierove koeficienty prvku x vzhľadom na systém S.

Dôkaz Vety 16.

Nech $\{\lambda_k\}_{k=1}^{\infty}$ je dané ako v predpokladoch vety a uvažujme postupnosť $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ prvkov priestoru X definovanú $x_n := \sum_{k=1}^{n} \lambda_k\, u_k$, $n \in \mathbb{N}$. Ukážeme, že postupnosť $\{x_n\}$ je cauchyovská v norme $\|\cdot\|$ priestoru X. Pre $n > m$ máme

$$\left\| x_n - x_m \right\|^2 = \left\| \sum_{k=1}^{n} \lambda_k\, u_k - \sum_{k=1}^{m} \lambda_k\, u_k \right\|^2 = \left\| \sum_{k=m+1}^{n} \lambda_k\, u_k \right\|^2$$

$$\overset{(48)}{=} \left\langle \left(\sum_{k=m+1}^{n} \lambda_k\, u_k \right), \left(\sum_{l=m+1}^{n} \lambda_l\, u_l \right) \right\rangle$$

$$= \sum_{k,l=m+1}^{n} \lambda_k\, \lambda_l\, \underbrace{\langle u_k, u_l \rangle}_{\delta_{kl}} = \sum_{k=m+1}^{n} |\lambda_k|^2. \tag{65}$$

Dôkaz Vety 16 (pokračovanie).

V zhode s predpokladmi nekonečný rad $\sum_{k=1}^{\infty} |\lambda_k|^2$ konverguje, a preto podľa Cauchyho–Bolzanovho kritéria platí

$$\text{pre každé } \varepsilon > 0 \text{ existuje } n_0 \in \mathbb{N} \text{ tak, že pre každé } n > m \geq n_0 \text{ platí } \sum_{k=m+1}^{n} |\lambda_k|^2 < \varepsilon^2$$

So zreteľom na identitu (65) je však tento výrok ekvivalentný s reláciou

$$\text{pre každé } \varepsilon > 0 \text{ existuje } n_0 \in \mathbb{N} \text{ tak, že pre každé } n > m \geq n_0 \text{ platí } \|x_n - x_m\| < \varepsilon.$$

Teda skutočne postupnosť $\{x_n\}$ je cauchyovská v norme $\|\cdot\|$. A keďže priestor X je v súlade s Definíciou 12 úplný, postupnosť $\{x_n\}$ je následne i konvergentná v priestore X, t.j., existuje $x \in X$ tak, že $\lim_{n\to\infty} x_n = x$. Inak povedané, rad $\sum_{k=1}^{\infty} \lambda_k u_k = x$ v norme priestoru X. Skutočnosť, že sa jedná o Fourierov rad prvku x vzhľadom na systém S, vyplýva z Lemy 3. Dôkaz je kompletný. ■

Poznámka 20

Poznamenajme, že podľa Dôsledku 4 limitný vektor x spĺňa Parsevalovu rovnosť (63), t.j., platí $\sum_{k=1}^{\infty} |\lambda_k|^2 = \|x\|^2$.

Dôsledok 5

Nech X je Hilbertov priestor so skalárnym súčinom $\langle \cdot, \cdot \rangle$ a $S = \{u_k\}_{k=1}^{\infty} \subseteq X$ je ortonormálny systém. Nech $\{\lambda_k\}_{k=1}^{\infty}$ je nejaká postupnosť reálnych čísiel. Potom rad $\sum_{k=1}^{\infty} \lambda_k \, u_k$ konverguje v priestore X práve vtedy, keď čísla λ_k, $k \in \mathbb{N}$, sú Fourierove koeficienty vhodného prvku $x \in X$ vzhľadom na systém S.

Dôkaz Dôsledku 5.

Smer "$\Rightarrow$" je obsahom Lemy 3. Platnosť implikácie "$\Leftarrow$" je dôsledkom Rieszovej–Fischerovej vety 16. Konkrétne, ak λ_k, $k \in \mathbb{N}$, sú Fourierove koeficienty prvku $x \in X$, potom podľa Poznámky 17 je číselný rad $\sum_{k=1}^{\infty} |\lambda_k|^2$ konvergentný, a teda postupnosť $\{\lambda_k\}_{k=1}^{\infty} \in l^2$. To následne podľa Rieszovej–Fischerovej vety 16 dokazuje konvergenciu radu $\sum_{k=1}^{\infty} \lambda_k \, u_k$ v norme priestoru X. ■

Poznámka 21

Je nutné zdôrazniť, že v prípade všeobecného spočítateľného ortonormálneho systému S v Hilbertovom priestore X nie je vektor $x \in X$ v Dôsledku 5 pre danú postupnosť $\{\lambda_k\}_{k=1}^{\infty}$ určený jednoznačne. Na druhej strane, v súlade s Lemou 3 práve jeden z takýchto vektorov je súčtom radu $\sum_{k=1}^{\infty} \lambda_k \, u_k$ v priestore X.

Veta 17 (Zhrnutie a doplnenie)

Nech X je Hilbertov priestor so skalárnym súčinom $\langle\cdot,\cdot\rangle$ a $S = \{u_k\}_{k=1}^{\infty} \subseteq X$ je ortonormálny systém. Nech $\{\lambda_k\}_{k=1}^{\infty}$ je nejaká postupnosť reálnych čísiel. Nasledujúce tvrdenia sú ekvivalentné.

(i) *Postupnosť $\{\lambda_k\}_{k=1}^{\infty}$ je prvkom priestoru l^2.*

(ii) *Rad $\sum_{k=1}^{\infty} \lambda_k u_k$ konverguje v priestore X.*

(iii) *Existuje vektor $x \in X$ s vlastnosťou, že čísla λ_k, $k \in \mathbb{N}$, sú jeho Fourierove koeficienty vzhľadom na systém S.*

Naviac v prípade, ak systém S je úplný vzhľadom na X, je vektor x z časti (iii) určený jednoznačne a platí $\sum_{k=1}^{\infty} \lambda_k u_k = x$ v norme priestoru X.

Dôkaz Vety 17.

Implikácia "(i) $\Rightarrow$ (ii)" vyplýva z Rieszovej–Fischerovej vety 16, ekvivalencia tvrdení (ii) a (iii) je obsahom Dôsledku 5, a napokon platnosť implikácie "(iii) $\Rightarrow$ (i)" je komentovaná v Poznámke 17. Stačí teda dokázať jednoznačnosť vektora x z časti (iii) v prípade úplného systému ortonormálneho S. Nech $y \in X$ je ďalší prvok, ktorý má za svoje Fourierove koeficienty čísla λ_k, $k \in \mathbb{N}$, t.j., podľa (57)

$$\langle x, u_k\rangle = \lambda_k = \langle y, u_k\rangle \quad \text{pre každé } k \in \mathbb{N}.$$

Dôkaz Vety 17 (pokračovanie).

Potom $\langle x - y, u_k \rangle = 0$ pre každé $k \in \mathbb{N}$ a vďaka úplnosti systému $S = \{u_k\}_{k=1}^{\infty}$ podľa Definície 15(i) dostávame rovnosť $x = y$. Napokon, v súlade s Poznámkou 21 daný jediný vektor x nutne spĺňa $\sum_{k=1}^{\infty} \lambda_k u_k = x$. ■

Definícia 18 (Ortogonálny doplnok uzavretého podpriestoru)

Nech X je unitárny priestor so skalárnym súčinom $\langle \cdot, \cdot \rangle$ a $A \subseteq X$ (uzavretý) podpriestor. Množinu $A^{\perp}$ definovanú

$$A^{\perp} := \{x \in X,\ \langle x, y \rangle = 0 \text{ pre každé } y \in A\} \tag{66}$$

nazývame ortogonálny doplnok podpriestoru A v unitárnom priestore X.

Poznámka 22

Zrejme pre každý podpriestor $A \subseteq X$ je ortogonálny doplnok $A^{\perp}$ z Definície 18 (uzavretým) podpriestorom v X a platí $A \subseteq \left(A^{\perp}\right)^{\perp}$. Je nutné zdôrazniť, že v prípade všeobecného unitárneho priestoru nemusí posledná inklúzia nutne prechádzať na rovnosť. Ak však X je Hilbertov priestor, potom vždy $A = \left(A^{\perp}\right)^{\perp}$, ako dokážeme v Dôsledku 6. Dodajme, že pre každý unitárny priestor X platia rovnosti $X^{\perp} = \{0\}$ a $\{0\}^{\perp} = X$.

Veta 18

Nech X je Hilbertov priestor so skalárnym súčinom $\langle \cdot, \cdot \rangle$. Potom ľubovoľný ortonormálny systém $S \subseteq X$ je uzavretý v X práve vtedy, keď je úplný v X.

Dôkaz Vety 18.

Nech ortonormálny systém S je uzavretý vzhľadom na X a nech vektor $x \in X$ spĺňa $\langle u, x \rangle = 0$ pre každé $u \in S$. V súlade s Definíciou 15(ii) existuje postupnosť $\{x_n\}_{n=1}^{\infty} \subseteq \operatorname{Lin} S$ taká, že $\lim_{n\to\infty} x_n = x$ v norme $\|\cdot\|$. Potom ale nutne platí $\langle x_n, x \rangle = 0$ pre každé $n \in \mathbb{N}$, a následne

$$\|x\|^2 \overset{(48)}{=} \langle x, x \rangle = \left\langle \lim_{n\to\infty} x_n, x \right\rangle \overset{\text{Veta 9}}{=} \lim_{n\to\infty} \langle x_n, x \rangle = \lim_{n\to\infty} 0 = 0,$$

t.j., vektor $x = 0$. Podľa Definície 15(i) je teda systém S úplný. Naopak, nech systém S je úplný vzhľadom na X a zvoľme ľubovoľný vektor $x \in \left(\overline{\operatorname{Lin} S}\right)^{\perp}$. Nakoľko $S \subseteq \overline{\operatorname{Lin} S}$, podľa Definície 18 platí $\langle x, u \rangle = 0$ pre každé $u \in S$. Vďaka úplnosti systému S je potom $x = 0$, v súlade s Definíciou 15(i). Takže podpriestor $\left(\overline{\operatorname{Lin} S}\right)^{\perp} = \{0\}$, a následne podľa Poznámky 22 máme

$$\overline{\operatorname{Lin} S} = \left(\left(\overline{\operatorname{Lin} S}\right)^{\perp}\right)^{\perp} = \{0\}^{\perp} = X.$$

V zhode s Definíciou 15(ii) je teda systém S uzavretý a dôkaz je hotový. ∎

Poznámka 23

Tvrdenie Vety 18 je s ohľadom na Definíciu 16 ekvivalentné s výrokom, že v Hilbertovom priestore X je nejaký ortonormálny systém S úplný práve vtedy, keď je ortonormálnou bázou priestoru X. Obzvlášť, nie je ťažké si premyslieť, že ak S je nanajvýš spočítateľný, je priestor X v tomto prípade nutne separabilný. Na druhej strane, každý separabilný Hilbertov priestor má nanajvýš spočítateľnú ortonormálnu bázu (kombinácia Viet 13 a 14). Vo svetle výsledkov Vety 17 potom dostávame nasledujúce pozorovanie. Nech X je separabilný Hilbertov priestor so skalárnym súčinom $\langle \cdot, \cdot \rangle$ a $S = \{u_k\}_{k=1}^{\infty} \subseteq X$ je nejaká jeho ortonormálna báza. Potom každý vektor $x \in X$ možno jednoznačne vyjadriť v tvare

$$x = \sum_{k=1}^{\infty} c_k\, u_k, \quad \text{kde } c_k = \langle x, u_k \rangle \text{ pre každé } k \in \mathbb{N}. \tag{67}$$

Naviac, postupnosť $\{c_k\}_{k=1}^{\infty}$ je prvkom priestoru l^2 a platí $\|x\|^2 = \sum_{k=1}^{\infty} |c_k|^2$.

Poznámka 24

Doplňme, že všetky prezentované výsledky týkajúce sa Fourierových radov platia pre ľubovoľné, t.j., i pre nespočítateľné ortonormálne systémy S.

Obsah

Separabilný Hilbertov priestor

Veta 19 (O izomorfizme)

Každé dva separabilné Hilbertove priestory s nekonečnou dimenziou sú izometricky izomorfné. Naviac, každý nekonečnorozmerný separabilný Hilbertov priestor je izometricky izomorfný s priestorom l^2.

Dôkaz Vety 19.

Je zrejmé, že stačí dokázať druhú časť tvrdenia. Nech H je ľubovoľný nekonečnorozmerný separabilný Hilbertov priestor so skalárnym súčinom $\langle \cdot, \cdot \rangle$ a $S = \{u_k\}_{k=1}^{\infty}$ je v zhode s Poznámkou 23 nejaká jeho ortonormálna báza. Využitím Vety 17 môžeme ľahko overiť, že priradenie Ψ definované

$$\text{pre každé } x \in H \text{ je } \Psi(x) = \{c_k\}_{k=1}^{\infty}, \text{ kde } c_k = \langle x, u_k \rangle \text{ pre každé } k \in \mathbb{N}, \tag{68}$$

je bijektívne zobrazenie medzi prvkami priestorov H a l^2. Okrem toho, pre každú dvojicu vektorov $x, y \in H$ a každý skalár $\lambda \in \mathbb{R}$ platí

$$\Psi(x+y) \overset{(68)}{=} \{\langle x+y, u_k \rangle\}_{k=1}^{\infty} = \{\langle x, u_k \rangle + \langle y, u_k \rangle\}_{k=1}^{\infty} \overset{(68)}{=} \Psi(x) + \Psi(y),$$

$$\Psi(\lambda x) \overset{(68)}{=} \{\langle \lambda x, u_k \rangle\}_{k=1}^{\infty} = \{\lambda \langle x, u_k \rangle\}_{k=1}^{\infty} \overset{(68)}{=} \lambda \Psi(x),$$

Dôkaz Vety 19 (pokračovanie).

a tak zobrazenie Ψ je lineárne. Napokon ukážeme, že Ψ zachováva skalárny súčin. Nech $x, y \in H$ sú ľubovoľné vektory a $\{c_k\}_{k=1}^{\infty}, \{d_k\}_{k=1}^{\infty} \in l^2$ príslušné postupnosti ich Fourierových koeficientov v (57) vzhľadom na systém S. V súlade s (67) a (68) potom platí

$$x = \sum_{k=1}^{\infty} c_k\, u_k = \lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} c_k\, u_k, \qquad y = \sum_{k=1}^{\infty} d_k\, u_k = \lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} d_k\, u_k. \tag{69}$$

Využitím vlastností skalárneho súčinu v Definícii 11 a Vete 9 postupne máme

$$\begin{aligned}
\langle x,\, y\rangle &\overset{(69)}{=} \left\langle \left(\lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} c_k\, u_k \right),\, y \right\rangle = \lim_{n\to\infty} \left\langle \left(\sum_{k=1}^{n} c_k\, u_k \right),\, y \right\rangle \\
&= \lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} c_k\, \langle u_k,\, y\rangle \overset{(69)}{=} \lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} c_k\, d_k = \sum_{k=1}^{\infty} c_k\, d_k \\
&\overset{(42)}{=} \langle\, \{c_k\}_{k=1}^{\infty},\, \{d_k\}_{k=1}^{\infty} \,\rangle_{l^2} \overset{(68)}{=} \langle\, \Psi(x),\, \Psi(y)\, \rangle_{l^2}\,,
\end{aligned}$$

kde $\langle\cdot,\cdot\rangle_{l^2}$ je skalárny súčin v priestore l^2 zavedený v Príklade 10. Zobrazenie Ψ je teda v zhode s Definíciou 13 izometrický izomorfizmus priestorov H a l^2. ■

Lema 4

Nech (M, ρ) *je separabilný metrický priestor a* $N \subseteq M$ *podmnožina. Potom* (N, ρ) *je tiež separabilný metrický priestor.*

Poznámka 25

Z Poznámky 14, Vety 19 a Lemy 4 vyplýva, že každý (uzavretý) podpriestor N ľubovoľného separabilného Hilbertovho priestoru H je buď Hilbertov priestor konečnej dimenzie (izometricky izomorfný s euklidovským priestorom $\mathbb{E}^n$ pre vhodné $n \in \mathbb{N}$) alebo nekonečnorozmerný separabilný Hilbertov priestor (izometricky izomorfný s priestorom l^2). Naviac, v podpriestore N je možné vždy vybrať ortonormálny systém $S = \{u_k\}_{k=1}^{m}$, kde $m \in \mathbb{N} \cup \{\infty\}$, tak, aby $\overline{\mathrm{Lin}\, S} = N$.

Príklad 13

Poznamenajme, že okrem unitárneho priestoru l^2 je ďalšou realizáciou separabilného Hilbertovho priestoru s nekonečnou dimenziou úplný obal unitárneho priestoru $(\mathcal{C}[-\pi, \pi], \langle\cdot,\cdot\rangle)$ prezentovaného v Príklade 12.

Veta o projekcii do uzavretého podpriestoru

Veta 20 (O projekcii do uzavretého podpriestoru)

Nech H je Hilbertov priestor so skalárnym súčinom $\langle \cdot, \cdot \rangle$ a $A \subseteq H$ (uzavretý) podpriestor. Potom každé $x \in H$ sa dá jednoznačne vyjadriť v tvare $x = y + z$, kde $y \in A$ a $z \in A^{\perp}$. Vektor y sa nazýva projekcia prvku x do podpriestoru A.

Dôkaz Vety 20.

Dokážeme najprv existenciu daného rozkladu pre každý prvok $x \in H$. Ak $x \in A$, potom stačí vziať $y = x$ a $z = 0$. Predpokladajme preto, že vektor $x \in H$ nie je prvkom uzavretého podpriestoru A, t.j., vzdialenosť $d := \rho(x, A) > 0$. Pripomeňme, že metrika ρ na H je indukovaná normou $\| \cdot \|$ danou skalárnym súčinom $\langle \cdot, \cdot \rangle$ podľa (3) a (48). Obzvlášť, platí

$$0 < d \leq \|x - u\| \quad \text{pre každé } u \in A. \tag{70}$$

Naviac, existuje postupnosť $\{y_k\}_{k=1}^{\infty} \subseteq A$ s vlastnosťou

$$\lim_{k \to \infty} \|x - y_k\| = \lim_{k \to \infty} \rho(x, y_k) = d. \tag{71}$$

Ukážeme, že postupnosť $\{y_k\}_{k=1}^{\infty}$ je cauchyovská. Využitím rovnobežníkového pravidla (50) pre každé dva indexy $m, n \in \mathbb{N}$ postupne máme

Dôkaz Vety 20 (pokračovanie).

$$\begin{aligned} \|y_n - y_m\|^2 &= \|(x - y_m) - (x - y_n)\|^2 \\ &\overset{(50)}{=} 2\,\|x - y_m\|^2 + 2\,\|x - y_n\|^2 - \|2x - y_n - y_m\|^2 \\ &= 2\,\|x - y_m\|^2 + 2\,\|x - y_n\|^2 - 4\left\|x - \frac{1}{2}(y_n + y_m)\right\|^2 \end{aligned} \tag{72}$$

Nakoľko vektor $u := \frac{1}{2}(y_n + y_m)$ je zrejme prvkom podpriestoru A, podľa (70) platí $d \leq \|x - u\|$, a tak pomocou (72) dostávame nerovnosť

$$\|y_n - y_m\|^2 \leq 2\,\|x - y_m\|^2 + 2\,\|x - y_n\|^2 - 4d^2 \tag{73}$$

A keďže z (71) vieme, že $\lim_{m\to\infty} \|x - y_m\| = d = \lim_{n\to\infty} \|x - y_n\|$, získaná nerovnosť (73) implikuje reláciu

$$\|y_n - y_m\| \to 0 \quad \text{pre} \quad \min\{m, n\} \to \infty. \tag{74}$$

Teda postupnosť $\{y_k\}_{k=1}^{\infty}$ je skutočne cauchyovská a vďaka úplnosti priestoru H i konvergentná v H. Označme $y := \lim_{k\to\infty} y_k$. Keďže podpriestor A je uzavretý, vektor $y \in A$. Naviac, využijúc spojitosť normy $\|\cdot\|$ v súlade s Vetou 2, z relácie (71) vyplýva rovnosť $\|x - y\| = d$. Položme $z := x - y$. Ukážeme, že vektor z je prvkom ortogonálneho doplnku $A^{\perp}$, t.j., v zhode s (66) spĺňa $\langle z, u\rangle = 0$ pre každé $u \in A$. Zvoľme nejaký vektor $u \in A$. Potom pre každý skalár $t \in \mathbb{R}$ je

Dôkaz Vety 20 (pokračovanie).

$$z + tu = x - y + tu = x - \underbrace{(y - tu)}_{\in A}, \quad \text{a tak podľa (70) platí } \|z + tu\| \geq d.$$

Následne, využitím formuly (48) a základných vlastností skalárneho súčinu máme

$$d^2 \leq \|z + tu\|^2 \overset{(48)}{=} \langle z + tu,\, z + tu\rangle = \langle z,\, z\rangle + 2t\,\langle z,\, u\rangle + t^2\langle u,\, u\rangle$$

$$\overset{(48)}{=} \underbrace{\|z\|^2}_{d^2} + t^2\|u\|^2 + 2t\,\langle z,\, u\rangle, \quad \text{a tak } t^2\|u\|^2 + 2t\,\langle z,\, u\rangle \geq 0 \text{ pre každé } t \in \mathbb{R}.$$

Nie je ťažké si premyslieť, že posledná nerovnosť môže byť splnená pre každé $t \in \mathbb{R}$ jedine vtedy, keď $\langle z,\, u\rangle = 0$. Preto $z \in A^\perp$, a tak platí rozklad $x = y + z$. Zostáva dokázať jednoznačnosť tohto rozkladu. Ak $\tilde{y} \in A$ a $\tilde{z} \in A^\perp$ je iná dvojica vekorov spĺňajúca $x = \tilde{y} + \tilde{z}$, potom platí $y + z = \tilde{y} + \tilde{z}$, a následne $y - \tilde{y} = \tilde{z} - z$. Avšak vektor $y - \tilde{y} \in A$ a vektor $\tilde{z} - z \in A^\perp$, takže podľa Definície 18 máme

$$\|y - \tilde{y}\|^2 \overset{(48)}{=} \langle y - \tilde{y},\, y - \tilde{y}\rangle = \langle \tilde{z} - z,\, y - \tilde{y}\rangle = 0,$$

a tak $\tilde{y} = y$, a následne i $\tilde{z} = z$. Dôkaz je teraz kompletný. ∎

Poznámka 26

Je potrebné zdôrazniť, že Veta 20 o projekcii do uzavretého podpriestoru platí pre ľubovoľný Hilbertov priestor H, špeciálne teda i pre neseparabilné priestory. Poznamenajme, že výsledok Vety 20 možno ekvivalentne vyjadriť v tvare

$$H = A \oplus A^{\perp}, \tag{75}$$

kde symbol $\oplus$ reprezentuje tzv. direktný (priamy) súčet podpriestorov A a $A^{\perp}$.

Dôsledok 6

Nech H je Hilbertov priestor so skalárnym súčinom $\langle \cdot, \cdot \rangle$ a $A \subseteq H$ (uzavretý) podpriestor. Potom platí rovnosť $A = \left(A^{\perp}\right)^{\perp}$.

Dôkaz Dôsledku 6.

V súlade s Poznámkou 22 zrejme stačí dokázať inklúziu $\left(A^{\perp}\right)^{\perp} \subseteq A$. Nech $x \in \left(A^{\perp}\right)^{\perp}$ je ľubovoľný vektor. Z Vety 20 vieme, že existujú vektory $y \in A$ a $z \in A^{\perp}$ s vlastnosťou $x = y+z$. Obzvlášť, podľa (66) máme $\langle x, z \rangle = 0 = \langle y, z \rangle$, a tak $\|z\|^2 = \langle z, z \rangle = 0$, čo znamená, že vektor $z = 0$. Preto $x = y \in A$. ∎

Dôsledok 7

Nech H je separabilný Hilbertov priestor a $S \subseteq H$ je ľubovoľný ortonormálny systém. Potom je možné systém S rozšíriť na ortonormálnu bázu priestoru H.

Dôkaz Dôsledku 7.

Z Vety 13 vyplýva, že systém S je nanajvyš spočítateľný, t.j., $S = \{u_k\}_{k=1}^{m}$, kde $m \in \mathbb{N} \cup \{\infty\}$. Označme $A := \overline{\mathrm{Lin}\, S}$. Potom zrejme $A \subseteq H$ je (uzavretý) podpriestor Hilbertovho priestoru H a podľa (75) platí rovnosť $H = A \oplus A^{\perp}$. Ďalej, vďaka Poznámke 25 vieme, že v (uzavretom) podpriestore $A^{\perp}$ existuje nanajvyš spočítateľný ortonormálny systém $T = \{v_k\}_{k=1}^{n}$, kde $n \in \mathbb{N} \cup \{\infty\}$ s vlastnosťou $\overline{\mathrm{Lin}\, T} = A^{\perp}$. Nie je ťažké si premyslieť, že v súlade s Definíciou 15(i) potom $S \cup T$ predstavuje úplný ortonormálny systém v H. Napokon, podľa Vety 18 je systém $S \cup T$ uzavretý vzhľadom na H, a tak v zhode s Definíciou 16 tvorí ortonormálnu bázu priestoru H. Dôkaz je hotový. ■

Poznámka 27

Poznamenajme, že Dôsledok 7 platí i pre neseparabilný Hilbertov priestor.