AKADEMIE VĚD ČESKÉ REPUBLIKY

Česká matice technická
Ročník CIV, 1999
Číslo spisu 472

Tato publikace vyšla s finanční podporou Fondu Akademie věd České republiky pro vydávání vědecké literatury a České matice technické

KAREL
REKTORYS

Variační metody

V INŽENÝRSKÝCH PROBLÉMECH A V PROBLÉMECH MATEMATICKÉ FYZIKY

Obsah

Část II. Variační metody

Část III. Aplikace variačních metod k řešení obyčejných a parciálních diferenciálních rovnic s okrajovými podmínkami

Část IV. Teorie diferenciálních rovnic s okrajovými podmínkami, založená na Laxově-Milgramově větě

Část V. Problém vlastních čísel

Část VI. Některé speciální metody. Regulárnost slabého řešení

Kapitola 1
Úvod

Teorie diferenciálních rovnic je pro inženýry a přírodovědce stále jednou z nejatraktivnějších matematických disciplín, i když není právě nejmladší. Důvod je ten, že diferenciální rovnice popisují převážnou část jevů ve fyzice, a tedy i v oborech, které jsou jí blízké nebo které se z ní přímo odštěpily jako samostatné vědní disciplíny (teorie pružnosti apod.).

Přitom poměrně značné teoretické i praktické obtíže působí pracovníkům v aplikovaných oborech (ale i matematikům) úlohy, které vedou k řešení diferenciálních rovnic s okrajovými podmínkami, zejména parciálních diferenciálních rovnic. V některých případech, je-li daná rovnice i daná oblast velmi jednoduchá, je možno získat řešení daného problému v tzv. uzavřeném tvaru, nejčastěji ve formě nekonečné řady. K těmto výsledkům vede např. tzv. Fourierova metoda (srov. str. 468) a metoda Laplaceovy transformace. Snahou matematiků v minulém století a na začátku tohoto století bylo vhodně modifikovat metody tohoto typu, resp. najít nové metody, které by i v obecnějších případech vedly k řešení v uzavřeném tvaru. V podstatě je možno říci, že tyto snahy skončily nezdarem a že se začaly rozvíjet rozmanité metody pro hledání vhodného přibližného řešení. Z nich se zejména osvědčily metoda sítí a metody variační, z nichž značné popularity dosáhly Ritzova metoda, Galerkinova metoda a v poslední době metoda konečných prvků.

Předností metody sítí je její myšlenková jednoduchost, univerzálnost a poměrně snadná zpracovatelnost na samočinných počítačích. Použití této metody však není výhodné, je-li třeba na základě získaného síťového řešení určit přibližně derivace hledané funkce. Například v problémech rovinné pružnosti (nosné stěny apod.) hledáme Airyovu funkci $U(x, y)$ jako řešení biharmonické rovnice s okrajovými podmínkami a z této funkce pak počítáme složky tenzoru napětí

$$v_x = \frac{\partial^2 U}{\partial y^2}, \quad v_y = \frac{\partial^2 U}{\partial x^2}, \quad \tau_{xy} = -\frac{\partial^2 U}{\partial x\,\partial y}.$$

Řešíme-li uvažovaný problém metodou sítí, jsou přibližné hodnoty funkcí v_x, v_y, τ_{xy}, získané jako diferenční kvocienty síťového řešení, velmi nespolehlivé, zejména v okolí hranice uvažované oblasti[1]).

Velkou oblibu při řešení teoretických problémů v inženýrských a přírodovědných aplikacích získaly, jak jsme se již zmínili, metody variační. Tyto metody vznikly v době, kdy byl objeven tzv. *Dirichletův princip*: Uvažujme Dirichletův problém pro Laplaceovu rovnici v rovině,

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0 \quad \text{v} \quad G\,, \tag{1.1}$$

$$u = g(s) \quad \text{na} \quad \Gamma\,, \tag{1.2}$$

kde G je omezená rovinná oblast a Γ její hranice (nebudeme na tomto místě dále precizovat).

Nechť M je množina těch funkcí, které jsou spojité v $\bar{G} = G + \Gamma$, mají v $\bar{G}$ spojité první parciální derivace a splňují podmínku (1.2). Dirichletův princip tvrdí, že ta funkce, která minimalizuje mezi všemi funkcemi z množiny M tzv. *Dirichletův integrál*

$$I(u) = \iint_G \left[\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)^2\right] \mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,, \tag{1.3}$$

je v G harmonická, a je tedy řešením problému (1.1), (1.2).

Tohoto principu použil k řešení celé řady problémů (zejména z teorie funkcí komplexní proměnné) B. Riemann. Riemann pokládal přitom za samozřejmé, že pro každou funkci $g(s)$, spojitou na Γ, existuje taková funkce z uvažované množiny M, pro kterou integrál (1.3) dosahuje skutečně na této množině minima. Že existence takové minimalizující funkce není samozřejmá, ukázal německý matematik K. Weierstrass. Sestrojil příklad integrálu, obdobného integrálu (1.3)[2]), který nenabývá minimální hodnoty pro žádnou funkci z dané množiny funkcí (a to funkcí s velmi „rozumnými" vlastnostmi). O něco později ukázal J. Hadamard příklad funkce, která je řešením (v klasickém smyslu) problému (1.1), (1.2) a pro niž je integrál (1.3) divergentní, takže v tomto případě nelze k řešení problému (1.1), (1.2) použít Dirichletova principu.

Tyto příklady způsobily, že Dirichletův princip byl na dlouhou dobu odsunut do pozadí. Znovu jej oživily práce jednoho z největších matematiků, D. Hilberta, který ukázal, že v problematice, týkající se oprávněnosti použití Dirichletova principu, nešlo jen o nějaký „malý omyl" ve formulaci, ale že šlo o příčinu daleko hlubší, související s tím, co nyní nazýváme úplností metrického prostoru

[1]) Proto jsme navrhli pro přibližné řešení této úlohy tzv. metodu nejmenších čtverců na hranici (viz kap. 43), která je podle našeho názoru pro tento případ podstatně vhodnější.

[2]) Přesněji, Weierstrass uvažoval případ funkcí jedné proměnné.

(viz o tom podrobně v kap. 10 a 11 a ve čtvrté části této knihy). Dalším význačným činitelem, který upozornil teoretiky i praktiky na využití Dirichletova principu, popř. některých jeho zobecnění, byla metoda, kterou předložil r. 1913 německý inženýr W. Ritz. Ukažme základní myšlenku jeho metody na jedné z prvních úloh, k jejichž řešení svou metodu aplikoval.

Dirichletův problém pro Poissonovu rovnici,

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = f(x, y) \quad \text{v oblasti } G\,, \tag{1.4}$$

$$u = 0 \qquad \text{na hranici } \Gamma\,, \tag{1.5}$$

vede k úloze najít minimum funkcionálu

$$F(u) = \iint_G \left[\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)^2\right] \mathrm{d}x\,\mathrm{d}y - 2\iint_G fu\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y \tag{1.6}$$

na množině N[1]), jejíž prvky tvoří dostatečně hladké[2]) funkce splňující podmínku (1.5). Zvolme v této množině n lineárně nezávislých funkcí

$$\varphi_1(x, y), \ldots, \varphi_n(x, y) \tag{1.7}$$

a hledejme přibližné řešení uvažovaného problému jako funkci minimalizující funkcionál (1.6) nikoli na množině N, ale na „n-dimenzionální" podmnožině P, jejíž prvky tvoří všechny lineární kombinace funkcí (1.7), tedy všechny funkce tvaru

$$b_1\,\varphi_1(x, y) + \ldots + b_n\,\varphi_n(x, y) \tag{1.8}$$

s libovolnými koeficienty $b_1, \ldots, b_n$.

Dosadíme-li (1.8) do (1.6) místo funkce $u(x, y)$, stane se funkcionál (1.6) funkcí $h(b_1, \ldots, b_n)$ těchto koeficientů. Má-li pak funkcionál (1.6) nabývat pro některou funkci

$$u_n(x, y) = c_1\,\varphi_1(x, y) + \ldots + c_n\,\varphi_n(x, y) \tag{1.9}$$

na množině P minima, musí být v takovém případě splněny rovnice

$$\frac{\partial h}{\partial b_1}(c_1, \ldots, c_n) = 0, \ldots, \frac{\partial h}{\partial b_n}(c_1, \ldots, c_n) = 0\,. \tag{1.10}$$

Z tvaru (1.6) uvažovaného funkcionálu je však zřejmé, že funkce $h(b_1, \ldots, b_n)$ je

[1]) Předpisem (1.6) je každé funkci $u(x, y) \in N$ přiřazeno určité (reálné) číslo $F(u)$. Takové přiřazení nazýváme funkcionálem (daným na množině N). Rovněž (1.3) je funkcionál, daný na množině M. Podrobně o tom viz v kap. 8, str. 114.

[2]) V této kapitole nemáme možnost opírat se o pojmy zavedené v dalším textu, takže se na některých místech budeme vyjadřovat poněkud nepřesně.

kvadratickou funkcí proměnných $b_1, \ldots, b_n$, takže soustava (1.10) pro neznámé $c_1, \ldots, c_n$ bude lineární. Najdeme-li její řešení, bude funkce (1.9) v některém smyslu aproximací hledaného řešení problému (1.4), (1.5).

Ritzova metoda – myšlenkově velmi jednoduchá, jak je vidět z uvedeného příkladu – se stala základem tzv. *přímých variačních metod*. Jejím speciálním případem – pro speciální volbu tzv. báze – je v podstatě i metoda konečných prvků (kap. 42). Značně příbuzná je v lineárním případě i Galerkinova metoda.

Variačních metod použili inženýři a přírodovědci jako účinného prostředku k řešení svých problémů. Zároveň se však objevila řada otázek teoretických i praktických. Ukázalo se, že zdaleka není jasná ani otázka správné, resp. vhodné formulace problému a vhodné koncepce pojmu řešení. Pozornost upoutaly otázky konvergence, zejména otázky, za jakých předpokladů, v jakém smyslu a jak rychle konverguje přibližné řešení k „přesnému". Vznikaly nové metody a zkoumala se otázka vhodnosti jejich použití k řešení určité třídy problémů. Vznik nových metod (např. metody konečných prvků) i modifikování „klasických" metod byl způsoben i rychlým rozvojem samočinných počítačů, jejichž použití umožnilo řešit v poměrně krátkém čase soustavy rovnic o velkém počtu neznámých. Brzy se však ukázalo, že nepřesnosti, které vznikají zaokrouhlovacími chybami při výpočtu koeficientů těchto soustav i při jejich řešení, mohou podstatně ovlivnit přesnost celého výpočtu. Často překvapující a zřejmě nesmyslné výsledky získané během numerických procesů vyvolaly intenzívní studium stability těchto procesů, spojené s vhodnou volbou tzv. báze, apod. (Viz kap. 20.)

Ukázalo se, že řešení mnoha otázek, teoreticky zajímavých a prakticky naléhavých, není snadné. Rozhodující význam při řešení těchto otázek měla funkcionální analýza, jejíž aparát se ukázal dostatečně účinným prostředkem, aby vnesl do těchto otázek jasno. Naopak, problematika variačních metod bohatě přispěla k rozvoji některých odvětví funkcionální analýzy.

Variační metody zaznamenaly od svého vzniku bouřlivý rozvoj. Z prací základního významu se zmiňme alespoň o klasických pracích Hilbertových a Courantových, dále o pracích (do určité míry na ně navazujících) Sobolevových a Michlinových v teorii založené na větě o minimu kvadratického funkcionálu („funkcionálu energie") a o pracích Browderových, Lionsových a Nečasových v teorii založené na pojmu slabého řešení a na Laxově - Milgramově větě. Tyto práce mají význam jak praktický (nové metody, konvergenční věty apod.), tak teoretický (existenční věty). Značná část moderních prací, týkajících se lineárních problémů, je věnována metodě konečných prvků.

Jak jsme se již zmínili, je dnes těžké představit si studium variačních metod bez znalosti aspoň některých základních pojmů a výsledků z funkcionální analýzy, zejména bez znalosti teorie Hilbertova prostoru. K studiu této teorie tedy přistoupíme v první části knihy.

Část 1. HILBERTŮV PROSTOR

Kapitola 2

Skalární součin funkcí. Norma, metrika

Uvedeme nejprve několik slov k používanému označení.

Symbolem G značíme v celé knize N-rozměrnou oblast, tedy otevřenou souvislou množinu v euklidovském prostoru E_N. V této knize budeme uvažovat jen omezené oblasti, a to oblasti s tzv. *lipschitzovskou hranicí*. Precizace tohoto pojmu je poněkud složitější a působila by na začátku čtenáři zbytečné obtíže. Proto jsme ji přesunuli do kap. 28. Na tomto místě jen poznamenejme, že jde o oblasti dostatečně obecné, abychom mohli mezi ně zařadit právě ty oblasti, s kterými se nejčastěji setkáme v inženýrských aplikacích, pokud jde o řešení diferenciálních rovnic eliptického typu s okrajovými podmínkami na omezených oblastech. V rovině patří mezi tyto oblasti, zhruba řečeno, oblasti s hladkou, resp. po částech hladkou hranicí, bez bodů vratu. V třírozměrném prostoru jde rovněž o oblasti, jejichž hranice je hladká, resp. po částech hladká a nemá singularity odpovídající v jistém smyslu bodům vratu u rovinných křivek (hrany vratu apod.). Příkladem rovinných, resp. prostorových oblastí (tj. pro $N = 2$, resp. $N = 3$) s lipschitzovskou hranicí je kruh, mezikruží, čtverec, trojúhelník, resp. koule, krychle apod. Pro $N = 1$ je oblastí interval (a, b). Budeme-li uvažovat zároveň více oblastí, budeme je rozlišovat indexy, tedy G_1, G_2 atd.

Hranici oblasti G značíme Γ, resp. $\Gamma_1, \Gamma_2, \ldots$, jde-li o oblasti $G_1, G_2, \ldots$. Uzávěr oblasti G v prostoru E_N, tedy množinu $G + \Gamma$, značíme $\bar{G}$. Místo „uzávěr oblasti v prostoru E_N" říkáme stručně *uzavřená oblast*.

Souřadnice bodů v E_N budeme nejčastěji značit $x_1, \ldots, x_N$. Místo o bodu $(x_1, \ldots, x_N)$ budeme často stručně mluvit o bodu x. Místo

$$\int \ldots \int_G u(x_1, \ldots, x_N) \, dx_1 \ldots dx_N$$

budeme stručně psát

$$\int_G u(x) \, dx .$$

V případě $N = 1$ píšeme ovšem

$$\int_a^b u(x)\,dx\,.$$

V rovině, resp. v třírozměrném prostoru budeme často používat označení x, y, resp. x, y, z místo x_1, x_2, resp. x_1, x_2, x_3.

Nechť je dána oblast G a obraťme se k vyšetřování funkcí daných na této oblasti, zejména k definici skalárního součinu dvou funkcí. *Všude v této knize* (pokud nebude výslovně uveden opak) *budeme uvažovat reálné funkce; také konstanty, s kterými se v textu, zejména v definicích, setkáme, předpokládáme reálné.*

Definice 2.1. Množinu M, jejímiž prvky jsou funkce[1]) dané na některé množině[2]) S, nazveme *lineálem* (*lineární množinou, lineárním systémem, lineárním prostorem*), jestliže zároveň s každými dvěma funkcemi $u_1(x)$, $u_2(x)$ z M patří do této množiny také funkce

$$a_1\,u_1(x) + a_2\,u_2(x)\,, \tag{2.1}$$

kde a_1, a_2 jsou libovolné (reálné) konstanty. Přitom součet dvou funkcí a násobení funkce konstantou jsou definovány v obvyklém smyslu, známém z klasické analýzy.

Tedy speciálně s funkcí u_1 patří do M také libovolný její násobek [jak je vidět z (2.1), položíme-li $a_2 = 0$] a s funkcemi u_1, u_2 patří do M i jejich součet [jak je opět vidět z (2.1), je-li $a_1 = 1$, $a_2 = 1$].

Příklad 2.1. Označme L množinu všech funkcí spojitých v uzavřené oblasti $\bar{G}$, s obvyklou definicí součtu dvou funkcí a násobení funkce konstantou. Pak L je lineál, neboť, jak je dobře známo, jsou-li $u_1(x)$ a $u_2(x)$ dvě funkce spojité v $\bar{G}$, a tedy patřící do L, je i funkce $a_1\,u_1(x) + a_2\,u_2(x)$ spojitá v $\bar{G}$, a tedy patří do L.

Z definice 2.1 plyne (a čtenář si to jistě snadno ověří na právě uvedeném příkladě): Je-li M lineál, pak zároveň s každými n funkcemi $u_1(x), u_2(x), \ldots, u_n(x)$ patří do M i libovolná jejich lineární kombinace

$$a_1\,u_1(x) + a_2\,u_2(x) + \ldots + a_n\,u_n(x)\,.$$

Příklad 2.2. Vyberme z lineálu L v příkl. 2.1 množinu všech těch funkcí $u(x)$, pro které platí $|u(x)| \leqq 7$ pro každé $x \in \bar{G}$. Označme tuto novou množinu $\tilde{L}$. Množina $\tilde{L}$ není lineál, neboť např. není pravda, že pro každou funkci $u(x) \in \tilde{L}$ a pro libovolnou konstantu a platí, že také $a\,u(x) \in \tilde{L}$. Např. funkce daná v oblasti G předpisem

[1]) Na tomto místě se omezujeme jen na tento speciální případ, aby výklad byl názorný. V definici lineálu není nikterak podstatné, jsou-li prvky dané množiny funkce nebo nikoliv. Srov. definici 6.1 na str. 68.

[2]) Zpravidla oblasti.

$u(x) \equiv 4$ (tedy funkce konstantní v této oblasti) patří do $\tilde{L}$, neboť je v $\bar{G}$ spojitá a platí $|u(x)| \leqq 7$, zatímco funkce $2u(x)$ již nepatří do $\tilde{L}$, neboť $2u(x) \equiv 8$, a tedy $|2u(x)| > 7$.

Uvažujme nyní lineál L z příkl. 2.1. Pro libovolné dvě funkce $u(x) \in L$, $v(x) \in L$ definujeme:

Definice 2.2. *Skalárním součinem funkcí* $u(x)$, $v(x)$ z lineálu L rozumíme integrál

$$\int_G u(x)\,v(x)\,dx\,.$$

Skalární součin funkcí $u(x)$, $v(x)$ značíme (u, v), tedy

$$(u, v) = \int_G u(x)\,v(x)\,dx\,. \tag{2.2}$$

Skalární součin funkcí $u(x)$, $v(x)$ je tedy určité reálné číslo, dané hodnotou integrálu (2.2).

Příklad 2.3. Nechť $\bar{G}$ je čtverec $0 \leqq x \leqq 1$, $0 \leqq y \leqq 1$, $u(x, y) = x^2 + y^2$, $v(x, y) \equiv 2$. Pak

$$(u, v) = \int_0^1\int_0^1 (x^2 + y^2)\,.\,2\,dx\,dy = \frac{4}{3}\,.$$

Ze známých vlastností integrálu plynou ihned tyto vlastnosti skalárního součinu:

Věta 2.1. *Pro skalární součin z definice* 2.2 *platí* [$u(x)$, $v(x)$, $u_1(x)$, $u_2(x)$ *jsou libovolné funkce z lineálu* L, a_1, a_2 *jsou libovolná reálná čísla*]:

$$(u, v) = (v, u)\,, \tag{2.3}$$

$$(a_1u_1 + a_2u_2, v) = a_1(u_1, v) + a_2(u_2, v)\,, \tag{2.4}$$

$$(u, u) \geqq 0\,, \tag{2.5}$$

$$(u, u) = 0 \Leftrightarrow u(x) \equiv 0 \quad v \quad G\,. \tag{2.6}$$

Vztah (2.3) vyjadřuje *symetrii* skalárního součinu, vztah (2.4) jeho *aditivnost* a *homogennost*. Vztahy (2.5) a (2.6) znamenají, že násobíme-li funkci $u(x)$ skalárně jí samou, je tento skalární součin vždy nezáporný, přičemž je roven nule právě tehdy, je-li $u(x) \equiv 0$.

Důkaz věty 2.1 je snadný. Vlastnost (2.3) plyne z rovnosti

$$\int_G u(x)\,v(x)\,dx = \int_G v(x)\,u(x)\,dx\,,$$

vlastnost (2.4) z rovnosti

$$\int_G [a_1 u_1(x) + a_2 u_2(x)]\, v(x)\, dx = a_1 \int_G u_1(x)\, v(x)\, dx + a_2 \int_G u_2(x)\, v(x)\, dx .$$

Dále

$$(u, u) = \int_G u^2(x)\, dx \geqq 0 ;$$

je-li $u(x) \equiv 0$, je zřejmě $(u, u) = 0$; je-li

$$\int_G u^2(x)\, dx = 0 ,$$

pak $u(x) \equiv 0$, jak je známo z integrálního počtu, neboť funkce $u(x)$ je podle předpokladu spojitá v $\bar{G}$[1]).

Všimněme si, že z (2.4) a (2.3) ihned vyplývá

$$(u, a_1 v_1 + a_2 v_2) = a_1(u, v_1) + a_2(u, v_2) , \tag{2.7}$$

kde $u(x)$, $v_1(x)$, $v_2(x)$ jsou funkce z lineálu L, a_1, a_2 jsou reálné konstanty, neboť

$$(u, a_1 v_1 + a_2 v_2) = (a_1 v_1 + a_2 v_2, u) = a_1(v_1, u) + a_2(v_2, u) = a_1(u, v_1) + a_2(u, v_2).$$

Také tohoto vztahu budeme často používat. Z (2.4) a (2.7) pak již snadno plyne

$$(a_1 u_1 + a_2 u_2, a_3 u_3 + a_4 u_4) = a_1 a_3(u_1, u_3) + a_2 a_3(u_2, u_3) + a_1 a_4(u_1, u_4) + a_2 a_4(u_2, u_4) \tag{2.8}$$

(tj. postup při skalárním násobení funkcí je formálně stejný jako při násobení mnohočlenů). Speciálně pro libovolné funkce $u(x)$, $v(x)$ z lineálu L a libovolné reálné konstanty a, b platí

$$(au, bv) = ab(u, v) . \tag{2.9}$$

Skalární součin a jeho vlastnosti umožňují definovat další pro nás velmi užitečný pojem normy funkce.

Definice 2.3. *Normou funkce* $u(x)$ z lineálu L rozumíme nezáporné číslo

$$\|u\| = \sqrt{(u, u)} = \sqrt{\int_G u^2(x)\, dx} . \tag{2.10}$$

---

[1]) Čtenář si jistě všiml, že s výjimkou tohoto posledního kroku jsme nikde nepotřebovali předpoklad o spojitosti funkcí $u(x)$ a $v(x)$ v $\bar{G}$, stačilo, aby příslušné integrály měly smysl. Proto v příští kapitole, kde rozšíříme pojem skalárního součinu na obecnější třídu funkcí, bude přenesení základních vlastností skalárního součinu na tento obecnější případ velmi snadné.

Např. pro normu funkce $u = \sin \pi x \sin \pi y$ na čtverci $0 \leqq x \leqq 1$, $0 \leqq y \leqq 1$ dostáváme

$$\|u\| = \sqrt{\left(\int_0^1 \int_0^1 \sin^2 \pi x \sin^2 \pi y \, dx\, dy\right)} = \sqrt{\left(\int_0^1 \sin^2 \pi x \, dx \, . \int_0^1 \sin^2 \pi y \, dy\right)} = \sqrt{\left(\tfrac{1}{2} \cdot \tfrac{1}{2}\right)} = \tfrac{1}{2} .$$

Věta 2.2. *Norma z definice* 2.3 *má tyto vlastnosti* [$u(x)$, $v(x)$ *jsou libovolné funkce z lineálu* L, a *je libovolná reálná konstanta*]:

$$\|u\| \geqq 0 , \tag{2.11}$$

$$\|u\| = 0 \Leftrightarrow u(x) \equiv 0 \quad v \quad G , \tag{2.12}$$

$$\|au\| = |a| \, . \, \|u\| , \tag{2.13}$$

$$|(u, v)| \leqq \|u\| \, . \, \|v\| , \tag{2.14}$$

$$\|u + v\| \leqq \|u\| + \|v\| \quad (\textit{tzv. trojúhelníková nerovnost}) , \tag{2.15}$$

$$\big|\|u\| - \|v\|\big| \leqq \|u - v\| . \tag{2.16}$$

Důkaz:[1]) Vlastnosti (2.11) a (2.12) plynou přímo z definice normy a z vlastností (2.5), (2.6) skalárního součinu.

Dále z definice normy a z (2.9) plyne $\|au\|^2 = (au, au) = a^2(u, u)$, odkud ihned dostáváme (2.13).

Důkaz nerovnosti (2.14): Nechť $u \in L$, $v \in L$. Pro každé reálné číslo λ platí podle (2.5)

$$(u + \lambda v, u + \lambda v) \geqq 0$$

čili podle (2.8)

$$(u, u) + \lambda(v, u) + \lambda(u, v) + \lambda^2(v, v) \geqq 0 ,$$

a tedy, protože $(v, u) = (u, v)$,

$$(u, u) + 2(u, v)\, \lambda + (v, v)\, \lambda^2 \geqq 0 . \tag{2.17}$$

Funkce u a v jsou sice libovolné, ale pevně dané funkce z lineálu L, takže (u, u), (u, v) a (v, v) jsou pevná čísla. Kvadratický výraz v λ na levé straně nerovnosti (2.17) má být nezáporný pro všechna reálná λ, což je možné jen tehdy, není-li jeho diskriminant kladný, tj. platí-li

$$(u, v)^2 - (u, u)(v, v) \leqq 0 ,$$

---

[1]) Jak vyplyne z důkazu, jsou vlastnosti normy bezprostředními důsledky vlastností (2.3) až (2.6) skalárního součinu. V dalších kapitolách zobecníme pojem skalárního součinu, a to tak, aby jeho základní vlastnosti zůstaly zachovány. Proto také vlastnosti příslušné normy, definované vztahem obdobným vztahu (2.10), zůstanou nezměněny. Totéž se týká i vlastností metriky, uvedených ve větě 2.3.

čili

$$(u, v)^2 \leqq (u, u)(v, v) .$$

Uvážíme-li, že podle definice normy je $(u, u) = \|u\|^2$, $(v, v) = \|v\|^2$, plyne z předcházející nerovnosti okamžitě nerovnost (2.14).

Důkaz nerovnosti (2.15): Je

$$\|u + v\|^2 = (u + v, u + v) = (u, u) + 2(u, v) + (v, v) = \\ = \|u\|^2 + 2(u, v) + \|v\|^2 . \tag{2.18}$$

Z (2.14) plyne $(u, v) \leqq \|u\| . \|v\|$. Nahradíme-li v (2.18) výraz $2(u, v)$ větším (nebo stejně velkým) výrazem $2\|u\| . \|v\|$, dostaneme

$$\|u + v\|^2 \leqq \|u\|^2 + 2\|u\| . \|v\| + \|v\|^2 = (\|u\| + \|v\|)^2 ,$$

odkud ihned vyplývá (2.15).

Abychom dokázali nerovnost (2.16), uvažujme s prvky u, v zároveň prvky $u - v$, v. Pro tyto prvky platí podle (2.15)

$$\|(u - v) + v\| \leqq \|u - v\| + \|v\|$$

čili

$$\|u\| \leqq \|u - v\| + \|v\| ,$$

odkud plyne

$$\|u\| - \|v\| \leqq \|u - v\| .$$

Obdobně, uvažujeme-li prvky $v - u$, u, dostaneme

$$\|v\| - \|u\| \leqq \|u - v\| .$$

Z obou posledních nerovností plyne nerovnost (2.16).

Příklad 2.4. Uvažujme na intervalu $\langle 0, \pi \rangle$ funkce $u = \cos x$, $v = x$. Je

$$\|u\|^2 = \int_0^\pi \cos^2 x \, dx = \frac{\pi}{2} ,$$

$$\|v\|^2 = \int_0^\pi x^2 \, dx = \frac{\pi^3}{3} ,$$

$$(u, v) = \int_0^\pi x \cos x \, dx = -2 ,$$

$$\|u + v\|^2 = \int_0^\pi (\cos x + x)^2 \, dx = \frac{\pi^3}{3} + \frac{\pi}{2} - 4 .$$

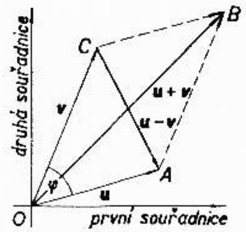
Zřejmě

$$2 = |(u, v)| \leqq \|u\| . \|v\| = \sqrt{\left(\frac{\pi}{2}\right)} . \sqrt{\left(\frac{\pi^3}{3}\right)} = \frac{\pi^2}{\sqrt{6}} \doteq 4{,}04 ,$$

$$\underbrace{\sqrt{\left(\frac{\pi^3}{3} + \frac{\pi}{2} - 4\right)}}_{\doteq 2{,}82} = \|u + v\| \leqq \|u\| + \|v\| = \underbrace{\sqrt{\left(\frac{\pi}{2}\right)} + \sqrt{\left(\frac{\pi^3}{3}\right)}}_{\doteq 4{,}47}$$

ve shodě s (2.14) a (2.15).

Poznámka 2.1. Pojmy skalárního součinu a normy funkcí jsou přímou analogií známých pojmů z elementární vektorové algebry. Zejména vlastnosti normy jsou analogické velmi názorným vlastnostem délky vektoru: Uvažujme v rovině vektory



Obr. 1.

$\boldsymbol{u}$ a $\boldsymbol{v}$ s počátečními body v počátku souřadnic (obr. 1). Jejich skalární součin je definován, jak známo, vztahem

$$\boldsymbol{u} . \boldsymbol{v} = uv \cos \varphi ,$$

kde u, resp. v je délka vektoru $\boldsymbol{u}$, resp. $\boldsymbol{v}$ a φ je úhel sevřený těmito vektory. Pro délku vektoru zřejmě platí vztahy obdobné vztahům (2.11) až (2.16) pro normu funkce:

a) $u \geqq 0$, přičemž $u = 0$ platí právě tehdy, je-li $\boldsymbol{u}$ nulový vektor [srov. (2.11) a (2.12)];

b) délka vektoru $a\boldsymbol{u}$ je $|a|$-násobkem délky vektoru $\boldsymbol{u}$ [srov. (2.13)];

c) platí $|\boldsymbol{u} . \boldsymbol{v}| \leqq uv$ [srov. (2.14)], neboť $|\cos \varphi| \leqq 1$;

d) délka vektoru $\boldsymbol{u} + \boldsymbol{v}$ nemůže být větší než součet délek vektorů $\boldsymbol{u}$ a $\boldsymbol{v}$ [srov. (2.15)]; viz trojúhelník OAB v obr. 1;

e) rozdíl délek vektorů (popř. absolutní hodnota tohoto rozdílu) nemůže být větší než délka rozdílu těchto vektorů [srov. (2.16)]; viz trojúhelník OAC v obr. 1.

Vidíme tedy, že skalární součin funkce i norma funkce jsou definovány velmi přirozeným způsobem, odpovídajícím elementárním geometrickým představám, na jejichž podkladě také ve svých počátcích skutečně vznikaly.

Dalším geometricky názorným pojmem je pojem vzdálenosti dvou funkcí:

Definice 2.4. *Vzdáleností dvou funkcí* $u(x)$, $v(x)$ z lineálu L rozumíme číslo

$$\varrho(u, v) = \|u - v\| , \tag{2.19}$$

tj. normu rozdílu těchto funkcí.

Příklad 2.5. Pro vzdálenost funkcí u, v z příkl. 2.4 dostáváme

$$\varrho^2(u, v) = \|u - v\|^2 = \int_0^\pi (\cos x - x)^2 \,dx = \frac{\pi^3}{3} + \frac{\pi}{2} + 4 ,$$

tedy

$$\varrho(u, v) = \sqrt{\left(\frac{\pi^3}{3} + \frac{\pi}{2} + 4\right)} \doteq 3{,}98 .$$

Z definice vzdálenosti dvou funkcí a z vlastností (2.11), (2.12), (2.13) a (2.15) normy, uvedených ve větě 2.2, vyplývají okamžitě tyto základní vlastnosti vzdálenosti funkcí:

Věta 2.3. *Pro libovolné funkce* $u(x)$, $v(x)$, $z(x)$ *z* L *platí*

$$\varrho(u, v) \geqq 0 , \tag{2.20}$$

$$\varrho(u, v) = 0 \Leftrightarrow u(x) \equiv v(x) , \tag{2.21}$$

$$\varrho(u, v) = \varrho(v, u) , \tag{2.22}$$

$$\varrho(u, z) \leqq \varrho(u, v) + \varrho(v, z) . \tag{2.23}$$

Důkaz: Vlastnosti (2.20) a (2.21) vyplývají přímo z definice vzdálenosti (2.19) a z (2.11) a (2.12). Dále z definice vzdálenosti a ze vztahu (2.13) pro $a = -1$ plyne

$$\varrho(u, v) = \|u - v\| , \quad \varrho(v, u) = \|v - u\| = \|-(u - v)\| = |-1| \, \|u - v\| = \|u - v\| ,$$

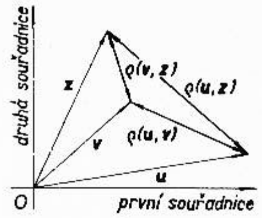
odkud ihned dostáváme (2.22). Dále

$$\varrho(u, z) = \|u - z\| = \|(u - v) + (v - z)\| \leqq \|u - v\| + \|v - z\| \tag{2.24}$$

podle (2.15), odkud plyne (2.23), neboť součet posledních členů v (2.24) je podle definice vzdálenosti roven číslu $\varrho(u, v) + \varrho(v, z)$.

Poznámka 2.2. Také vlastnosti (2.20) až (2.23) vzdálenosti funkcí mají jednoduchou geometrickou analogii (viz obr. 2): Označíme-li $\varrho(\mathbf{u}, \mathbf{v})$ vzdálenost koncových bodů vektorů $\mathbf{u}$, $\mathbf{v}$ s počátečními body v počátku souřadnic, pak je za prvé $\varrho(\mathbf{u}, \mathbf{v}) = \varrho(\mathbf{v}, \mathbf{u})$ [srov. (2.22)], neboť $\varrho(\mathbf{u}, \mathbf{v})$ je dáno délkou vektoru $\mathbf{u} - \mathbf{v}$, resp.

vektoru $\mathbf{v} - \mathbf{u}$, což je totéž. Za druhé je zřejmě $\varrho(\mathbf{u}, \mathbf{v}) \geqq 0$, přičemž $\varrho(\mathbf{u}, \mathbf{v}) = 0$ právě tehdy, když vektory $\mathbf{u}$ a $\mathbf{v}$ splývají [srov. (2.20) a (2.21)]. Analogií nerovnosti (2.23) je nerovnost $\varrho(\mathbf{u}, \mathbf{z}) \leqq \varrho(\mathbf{u}, \mathbf{v}) + \varrho(\mathbf{v}, \mathbf{z})$, jejíž geometrický význam je zřejmý z obr. 2. Tedy i v případě pojmu vzdálenosti dvou funkcí je příbuznost s elementárními geometrickými pojmy a jejich vlastnostmi velmi názorná.



Obr. 2.

Poznámka 2.3. Def. 2.4 nám umožňuje podle (2.19) „měřit" vzdálenost dvou funkcí, patřících do lineálu L. Říkáme také, že předpisem (2.19) je na lineálu L dána *metrika* a lineál L (popř. jinou množinu, v níž je dána metrika) pak nazýváme metrickým prostorem. V obecném případě definujeme:

Definice 2.5. Množinu M nazýváme *metrickým prostorem*, jestliže pro každou dvojici u, v jejích prvků je definováno číslo $\varrho(u, v)$, tzv. *vzdálenost prvků* u, v, mající vlastnosti (2.20) až (2.23).

Všimněme si, že v této definici nikterak nepožadujeme, aby prvky množiny M byly funkce; jak uvidíme, je často výhodné mít k dispozici metrické prostory, jejichž prvky jsou jiného charakteru. V def. 2.5 také nepředpokládáme, že by množina M musila být lineálem.

Řekneme-li v dalším textu, že na množině M zavedeme metriku, budeme tím rozumět, že pro dvojice prvků této množiny definujeme vhodným způsobem vzdálenost splňující požadavky (2.20) až (2.23), čímž se množina M stane metrickým prostorem.

Požadavky (2.20) až (2.23) kladené na vzdálenost $\varrho(u, v)$ se nazývají *axiómy metriky*. Obdobně požadavky (2.11), (2.12), (2.13) a (2.15), charakterizující normu, nazýváme *axiómy normy*. Je-li vzdálenost definována pomocí normy vztahem (2.19), pak, jak jsme dokázali ve větě 2.3, plyne ze splnění axiómů normy i splnění axiómů metriky.

V námi dosud uvažovaném lineálu L jsme zavedli metriku předpisem (2.19), kde norma $\| \ \|$ je definována vztahem (2.10)[1]. Na tomto lineálu je možno definovat

---

[1]) V takovém případě často říkáme, že norma je *indukována* nebo *generována* skalárním součinem.

vzdálenost i jiným způsobem tak, aby byly splněny axiómy metriky. Definujme například normu na lineálu L předpisem

$$\|u\|_C = \max_{x \in \bar{G}} |u(x)| . \tag{2.25}$$

(Proč jsme tuto normu odlišili od předcházející normy právě připsáním indexu C, vyplyne z dalšího textu.) Tedy normu $\|u\|_C$ funkce $u \in L$ dostaneme tak, že sestrojíme funkci $|u(x)|$, která bude v uzavřené oblasti $\bar{G}$ spojitá [neboť $u(x)$ je podle předpokladu spojitá], a vezmeme její maximální hodnotu v $\bar{G}$. Lze bez obtíží ukázat, což nebudeme na tomto místě podrobně dokazovat, že $\|u\|_C$ splňuje všechny čtyři axiómy normy, takže jsme skutečně oprávněni nazvat ji normou. Definujeme-li nyní vzdálenost dvou funkcí $u(x)$, $v(x)$ z lineálu L předpisem

$$\varrho_C(u, v) = \|u - v\|_C \tag{2.26}$$

čili

$$\varrho_C(u, v) = \max_{x \in \bar{G}} |u(x) - v(x)| , \tag{2.27}$$

bude, jak jsme právě poznamenali, splňovat takto definovaná vzdálenost i axiómy metriky (2.20) až (2.23). Lineál L opatřený metrikou (2.27) se nazývá *metrický prostor C.*

Příklad 2.6. Pro vzdálenost ϱ_C funkcí $u(x) = \cos x$, $v(x) = x$ z příkl. 2.4 a 2.5 v prostoru $C(0, \pi)$ dostaneme

$$\varrho_C(u, v) = 1 + \pi \doteq 4{,}14 ;$$

funkce $u(x) = \cos x$ je totiž v intervalu $\langle 0, \pi \rangle$ klesající, funkce $v(x) = x$ rostoucí a funkce $|u(x) - v(x)| = |\cos x - x|$ nabývá v intervalu $\langle 0, \pi \rangle$ maxima zřejmě v bodě $x = \pi$, kde je $|u(\pi) - v(\pi)| = |\cos \pi - \pi| = 1 + \pi$.

Všimněme si, že v prostoru C je vzdálenost uvažovaných funkcí jiná než v prostoru s metrikou (2.19) (viz příkl. 2.5). Totéž ovšem platí i pro normu; doporučujeme čtenáři, aby na příkladě funkcí $u(x) = \cos x$, $v(x) = x$, $x \in \langle 0, \pi \rangle$, ověřil, že norma $\| \ \|_C$ má vlastnosti (2.11), (2.12), (2.13) a (2.15).

Poznámka 2.4. Jsou-li funkce $u(x)$, $v(x)$ sobě „blízké" ve všech bodech uzavřené oblasti $\bar{G}$, pak je v prostoru C i jejich vzdálenost malá, neboť když v $\bar{G}$ platí $|u(x) - v(x)| \leqq \varepsilon$, pak podle (2.27) je také $\varrho_C(u, v) \leqq \varepsilon$. Naopak, je-li v prostoru C vzdálenost funkcí $u(x)$ a $v(x)$ malá, je v $\bar{G}$ rozdíl funkcí $u(x)$ a $v(x)$ malý v absolutní hodnotě, neboť ze vztahu $\varrho_C(u, v) \leqq \varepsilon$ plyne podle (2.27), že všude v $\bar{G}$ je $|u(x) - v(x)| \leqq \varepsilon$.

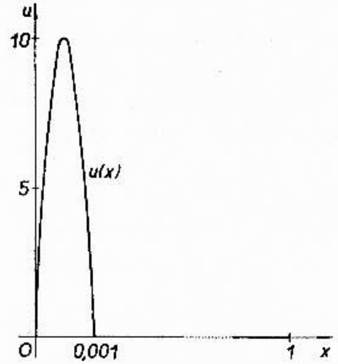
V prostoru s metrikou (2.19) je situace poněkud rozdílná. Je-li rozdíl funkcí $u(x)$ a $v(x)$ všude v $\bar{G}$ malý (v absolutní hodnotě), pak vzdálenost $\varrho(u, v)$ je také malá, neboť je-li v $\bar{G}$ všude $|u(x) - v(x)| \leqq \varepsilon$, pak podle (2.19) je

$$\varrho(u, v) = \|u - v\| = \sqrt{\int_G [u(x) - v(x)]^2 \,dx} \leqq \sqrt{\int_G \varepsilon^2 \,dx} = \sqrt{(\varepsilon^2 P)} = \varepsilon \sqrt{P} , \tag{2.28}$$

kde $P = \int_G dx$ je objem (N-rozměrný) oblasti G. Je-li však $\varrho(u, v)$ malé, neplyne odtud, že rozdíl $|u(x) - v(x)|$ je v $\bar{G}$ všude malý. Jako příklad uvažujme dvojici funkcí

$$u(x) = \begin{cases} 10 \sin 1\,000\, \pi x & \text{pro} \quad 0 \leqq x \leqq 0{,}001 , \\ 0 & \text{pro} \quad 0{,}001 \leqq x \leqq 1 , \end{cases}$$

$$v(x) \equiv 0 \qquad \text{pro} \quad 0 \leqq x \leqq 1 .$$



Obr. 3.

Funkce $u(x)$ (zřejmě spojitá v intervalu $\langle 0, 1 \rangle$) je graficky znázorněna na obr. 3. Podle (2.19) a (2.10) je

$$\varrho(u, v) = \|u(x) - v(x)\| = \sqrt{\left(\int_0^1 [u(x) - v(x)]^2 \,dx \right)} =$$

$$= \sqrt{\int_0^{0{,}001} 100 \sin^2 1\,000\, \pi x \,dx} = \sqrt{0{,}05} \doteq 0{,}224 .$$

Vzdálenost funkcí u a v podle def. 2.4 je zde malá, zatímco rozdíl funkčních hodnot je v bodě $x = 0{,}000\,5$ roven deseti, takže $\varrho_C(u, v) = 10$. Jestliže místo uvažované funkce $u(x)$ vezmeme funkci

$$u(x) = \begin{cases} 10 \sin 100\,000\, \pi x & \text{pro} \quad 0 \leqq x \leqq 0{,}000\,01 , \\ 0 & \text{pro} \quad 0{,}000\,01 \leqq x \leqq 1 , \end{cases}$$

dostaneme $\varrho(u, v) \doteq 0{,}0224$, přičemž v bodě $x = 0{,}000\,005$ bude rozdíl funkčních hodnot opět roven deseti. Vhodným zkrácením intervalu, na němž je funkce $u(x)$ právě uvažovaného tvaru různá od nuly, a odpovídajícím zvýšením frekvence sinové funkce je možno učinit poměr mezi maximem hodnot $|u(x) - v(x)|$ a vzdáleností $\varrho(u, v)$ funkcí u a v libovolně velkým.

Je jistě otázka, proč jsme na lineálu L zavedli metriku (2.19), když metrika (2.27) je, jak jsme právě ukázali, do určité míry přirozenější, neboť je-li všude v $\bar{G}$ rozdíl funkcí u a v malý, je i vzdálenost funkcí podle metriky (2.27) malá, a naopak. Přesto v celé knize budeme převážně pracovat právě s metrikou (2.19), popř. s metrikami příbuznými. Hlavní důvody, proč tak činíme, jsou dva: Metrika (2.19) byla zavedena pomocí normy (2.10), „indukované" skalárním součinem (2.2); skalární součin — v různých modifikacích — bude pro nás v této publikaci základním kamenem a bude vždy pro nás podstatné, abychom mohli pracovat s metrikou indukovanou určitým skalárním součinem s vlastnostmi (2.3) až (2.6). V prostoru C s metrikou (2.27) nelze definovat skalární součin s „rozumnými" vlastnostmi (viz například [24]). To je tedy první podstatný důvod, proč dáváme přednost metrice (2.19). Dále, jak uvidíme, setkáme se s řadou úloh, a to jak u teoretických problémů, tak u problémů aplikovaných, např. inženýrských, kde zdaleka nevystačíme jen se spojitými funkcemi. Ukazuje se, že je obtížné rozšířit vhodným způsobem metriku (2.27) na obecnější třídu funkcí, než jsou spojité funkce, zatímco rozšíření metriky (2.19) na dostatečně obecnou třídu funkcí je velmi jednoduché a vede přirozeným způsobem k vytvoření tzv. prostoru L_2. K tomuto rozšíření nyní přistoupíme. Později bude pro nás metrika (2.19) užitečná i při konstrukci obecnějších prostorů.

Kapitola 3
Prostor L_2

Skalární součin, normu a vzdálenost funkcí, zavedené v předcházející kapitole pro funkce z lineálu L, rozšíříme nyní na lineál tzv. funkcí integrovatelných s druhou mocninou na oblasti G.

Definice 3.1. Řekneme, že reálná *funkce* $u(x)$ je *integrovatelná v oblasti G s druhou mocninou* (*s kvadrátem*), jsou-li konvergentní [tj. existují-li[1]) a jsou-li konečné] integrály

$$\int_G u(x)\,dx\,, \quad \int_G u^2(x)\,dx\,. \tag{3.1}$$

[1]) V Lebesgueově smyslu, viz pozn. 3.1. Srov. také pozn. 28.4, str. 340.

Poznámka 3.1. Z definice plyne, že každá funkce, spojitá v uzavřené oblasti $\bar{G}$, je integrovatelná s druhou mocninou, neboť pro spojitou funkci jsou zřejmě oba integrály konvergentní. Tedy každá funkce z lineálu L, uvažovaného v kap. 2, je integrovatelná s druhou mocninou. Do třídy funkcí integrovatelných s druhou mocninou však patří i funkce mnohem obecnější (viz také příkl. 3.1). Čtenáře upozorňujeme zde na to, že pro správnost některých výsledků, které získáme s použitím právě zavedeného pojmu, zejména výsledků, které jsou založeny na pojmu úplnosti prostoru L_2 (viz kap. 4), je třeba uvažovat integrály (3.1) v tzv. *Lebesgueově smyslu*. O Lebesgueově definici integrálu a o základních vlastnostech tohoto integrálu je stručně pojednáno v kap. 28. Pro pochopení dalšího textu však není nutné, aby se čtenář s Lebesgueovou teorií na tomto místě seznamoval: Funkce, s kterými se ve svých inženýrských nebo přírodovědných problémech setká a které nemají „příliš vysoké" singularity v případě, že jde o neohraničené funkce (srov. příkl. 3.1), jsou integrovatelné v uvažované oblasti G s druhou mocninou jak v Lebesgueově, tak i v klasickém Riemannově smyslu a hodnoty integrálů i základní metody jejich výpočtu jsou v obou případech stejné. Z teoretického hlediska je ovšem třeba uvažovat integrály v dalším textu této knihy jako integrály v Lebesgueově smyslu. V tomto smyslu jsou také uvažovány integrály (3.1) a *funkcemi integrovatelnými s druhou mocninou v dané oblasti budeme vždy rozumět funkce integrovatelné s druhou mocninou v Lebesgueově smyslu.*

Pokud jde o ohraničené funkce, patří mezi funkce integrovatelné s druhou mocninou zejména funkce spojité a po částech spojité v oblasti G. Pokud jde o neohraničené funkce, uveďme dva příklady pro případ $N = 1$, tj. pro funkce jedné proměnné:

Příklad 3.1. Funkce

$$u(x) = \frac{1}{\sqrt[3]{x}}$$

je funkce integrovatelná v intervalu $(0, 1)$ s druhou mocninou, neboť oba integrály (3.1) jsou konvergentní:

$$\int_0^1 u(x)\,dx = \int_0^1 \frac{dx}{\sqrt[3]{x}} = \frac{3}{2}\,, \quad \int_0^1 u^2\,dx = \int_0^1 \frac{dx}{\sqrt[3]{x^2}} = 3\,.$$

Na druhé straně, funkce

$$u(x) = \frac{1}{\sqrt{x}}$$

není integrovatelná s druhou mocninou v intervalu $(0,1)$, neboť první z integrálů (3.1) je konvergentní, druhý však nikoli:

$$\int_0^1 u(x)\,dx = \int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{x}} = 2\,, \quad \int_0^1 u^2(x)\,dx = \int_0^1 \frac{dx}{x} = +\infty\,.$$

Z teorie Lebesgueova integrálu je známo (viz kap. 28):

a) Jsou-li funkce $u(x)$ a $v(x)$ integrovatelné v oblasti G s druhou mocninou, je i funkce

$$a_1 u(x) + a_2 v(x),$$

kde a_1, a_2 jsou libovolné reálné konstanty, integrovatelná s druhou mocninou.

b) Jsou-li $u(x)$, $v(x)$ integrovatelné s druhou mocninou, pak integrál

$$\int_G u(x)\, v(x)\, dx$$

je konvergentní. Přitom platí běžná pravidla:

$$\int_G u(x)\, v(x)\, dx = \int_G v(x)\, u(x)\, dx,$$

$$\int_G [a_1 u_1(x) + a_2 u_2(x)]\, v(x)\, dx = a_1 \int_G u_1(x)\, v(x)\, dx + a_2 \int_G u_2(x)\, v(x)\, dx.$$

Vlastnost a) ukazuje, že množina funkcí integrovatelných s druhou mocninou na uvažované oblasti G tvoří lineál[1]). Vlastnost b) dává možnost definovat na tomto lineálu skalární součin:

Definice 3.2. Nechť $u(x)$, $v(x)$ jsou dvě funkce integrovatelné s druhou mocninou v oblasti G. Jejich *skalárním součinem* rozumíme číslo

$$(u, v) = \int_G u(x)\, v(x)\, dx. \tag{3.2}$$

Obdobným způsobem jako v kap. 2 definujeme pro funkce integrovatelné s druhou mocninou i normu a vzdálenost:

Definice 3.3. *Normou funkce* $u(x)$, integrovatelné s druhou mocninou v oblasti G, rozumíme nezáporné číslo

$$\|u\| = \sqrt{(u, u)} = \sqrt{\int_G u^2(x)\, dx}. \tag{3.3}$$

Definice 3.4. *Vzdáleností dvou funkcí* $u(x)$, $v(x)$, integrovatelných s druhou mocninou v oblasti G, rozumíme normu jejich rozdílu,

$$\varrho(u, v) = \|u - v\| = \sqrt{\int_G [u(x) - v(x)]^2\, dx}. \tag{3.4}$$

[1]) Později (viz str. 36) se ještě podrobněji zmíníme o otázce rovnosti dvou prvků na tomto lineálu.

Z právě uvedených definic skalárního součinu, normy a vzdálenosti funkcí integrovatelných s druhou mocninou v oblasti G je zřejmé, že tyto pojmy jsou zobecněním obdobných pojmů, definovaných v předcházející kapitole pro poměrně speciální třídu funkcí, tj. pro funkce z lineálu L. Lze očekávat – a věta 3.1 nám to potvrdí – že se u těchto pojmů setkáme s obdobnými vlastnostmi, s jakými jsme se setkali v předcházející kapitole. Speciálně se ukáže, že vzdálenost (3.4) splňuje axiómy metriky (2.20) až (2.23). To nás opravňuje k této definici:

Definice 3.5. Lineál funkcí integrovatelných s druhou mocninou v oblasti G, s metrikou danou předpisem (3.4), nazýváme *metrickým prostorem* $L_2(G)$.

Skalární součin a norma v tomto prostoru jsou dány vztahy (3.2) a (3.3).

Ve speciálním případě $N = 1$, kdy tedy jde o interval (a, b), píšeme $L_2(a, b)$ místo $L_2(G)$. Pokud je z výkladu jasné, o jakou oblast jde, mluvíme často jen o prostoru L_2.

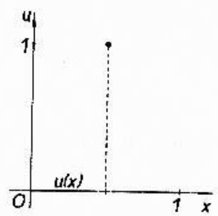
Prostor $L_2(G)$ je tedy metrický prostor (def. 2.5, str. 29), jehož prvky[1]) tvoří funkce integrovatelné s druhou mocninou v oblasti G a v němž skalární součin, norma a vzdálenost jsou definovány předpisy (3.2), (3.3) a (3.4).

Zejména do prostoru $L_2(G)$ patří všechny funkce spojité v uzavřené oblasti $\bar{G}$, tedy funkce z lineálu L, o němž jsme mluvili v kap. 2.

Jak jsme již předeslali, přenášejí se vlastnosti skalárního součinu, normy i vzdálenosti, odvozené v kap. 2 pro funkce z lineálu L, téměř beze změny na případ funkcí z prostoru $L_2(G)$. Pouze vztahy obdobné vztahům (2.12) [resp. (2.6) a (2.21)] potřebují pro tento případ podrobnější vysvětlení:

Je-li funkce $u(x)$ spojitá v $\bar{G}$, pak ze vztahu

$$\int_G u^2(x)\, dx = 0 \tag{3.5}$$



Obr. 4.

plyne $u(x) \equiv 0$ v $\bar{G}$, a tedy i v G. Je-li pouze $u(x) \in L_2(G)$, pak ze vztahu (3.5) nelze usoudit, že $u(x)$ je rovna nule všude v G. Uvažujme např. $N = 1$ a $(a, b) = (0, 1)$. Funkce $u_1(x)$, rovná nule v intervalu $(0, 1)$, s výjimkou bodu $x = 0,5$, kde platí $u_1 = 1$ (viz obr. 4), je zřejmě integrovatelná v intervalu $(0, 1)$ s druhou mocninou

[1]) Viz však def. 3.6 a text, který jí předchází.

a platí pro ni rovnost (3.5). Tato rovnost je splněna např. i pro funkci $u_2(x)$, rovnou nule v intervalu $(0, 1)$, s výjimkou spočetné množiny bodů

$$x_1 = 1,\ x_2 = \tfrac{1}{2},\ x_3 = \tfrac{1}{3},\ x_4 = \tfrac{1}{4}, \ldots,$$

v nichž může nabývat libovolných konečných hodnot, popř. nemusí být v některých z těchto bodů definována. Totéž platí dokonce pro libovolnou funkci, rovnou nule v intervalu $(0, 1)$, s výjimkou bodů tvořících množinu (Lebesgueovy) míry nula, v nichž nabývá libovolných konečných hodnot, popř. v nichž (nebo v některých z nich) není definována.[1])

Abychom odstranili tuto potíž a také další potíže, které by vznikly, kdybychom neučinili následující „úmluvu", definujeme:

Definice 3.6. Nechť funkce $u(x)$, $v(x)$ jsou v oblasti G integrovatelné s druhou mocninou a nechť jsou si v oblasti G *rovny skoro všude*, čímž rozumíme to, že se liší v oblasti G nejvýše v bodech tvořících množinu míry nula (v některých z bodů této množiny nemusí být popř. některá z těchto funkcí definována). Pak řekneme, že tyto dvě funkce jsou v prostoru $L_2(G)$ *ekvivalentní*. Píšeme $u = v$ v $L_2(G)$.

Funkce $u(x)$, $v(x)$ jsou tedy v tomto prostoru pokládány za sobě rovné. Říkáme také, že všechny navzájem ekvivalentní funkce představují v prostoru $L_2(G)$ jediný prvek.

Dvě funkce $u(x)$, $v(x)$, ekvivalentní v prostoru $L_2(G)$, jsou charakterizovány vlastností

$$\int_G [u(x) - v(x)]^2 \,\mathrm{d}x = 0 .$$

Funkce $u(x)$, $v(x)$, které nejsou ekvivalentní v prostoru $L_2(G)$ [píšeme $u \neq v$ v $L_2(G)$], jsou charakterizovány vlastností

$$\int_G [u(x) - v(x)]^2 \,\mathrm{d}x \neq 0 .$$

Mezi funkcemi navzájem ekvivalentními v $L_2(G)$ může být jen jediná funkce spojitá v G. Například mezi funkcemi ekvivalentními nulové funkci [píšeme $u = 0$ v $L_2(G)$] je jediná funkce spojitá v G, a tou je funkce identicky rovná nule v G.

Napíšeme-li, že ze vztahu

$$\int_G u^2(x) \,\mathrm{d}x = 0 \tag{3.6}$$

[1]) Čtenář se nemusí obávat pojmu množina míry nula. V aplikacích, s nimiž se setká, jde v jednorozměrném případě zpravidla o množinu skládající se z konečného počtu bodů nebo v případě $N = 2$, resp. $N = 3$ o velmi jednoduché množiny (hladké nebo po částech hladké křivky, resp. plochy, apod.) v dvojrozměrné, resp. třírozměrné oblasti. Bližší informace o tomto pojmu najde čtenář v kap. 28.

plyne

$$u = 0 \quad \text{v} \quad L_2(G),$$

znamená to tedy, že $u(x)$ je funkce ekvivalentní v prostoru $L_2(G)$ nulové funkci [říkáme také stručně, že *$u(x)$ je v $L_2(G)$ ekvivalentní nule*], tj. že $u(x) \equiv 0$ v G, popř. s výjimkou bodů tvořících v oblasti G množinu míry nula.

Po tomto úvodu již můžeme vyslovit tuto větu:

Věta 3.1. *Pro skalární součin* (3.2), *normu* (3.3) *a vzdálenost* (3.4) *platí tyto vztahy* [a, a_1, a_2 *jsou libovolná reálná čísla*, u, v, z, u_1, u_2 *libovolné prvky z* $L_2(G)$]:

$$(u, v) = (v, u), \tag{3.7}$$

$$(a_1u_1 + a_2u_2, v) = a_1(u_1, v) + a_2(u_2, v), \tag{3.8}$$

$$(u, u) \geqq 0, \tag{3.9}$$

$$(u, u) = 0 \Leftrightarrow u = 0 \quad v \quad L_2(G), \tag{3.10}$$

$$\|u\| \geqq 0, \tag{3.11}$$

$$\|u\| = 0 \Leftrightarrow u = 0 \quad v \quad L_2(G), \tag{3.12}$$

$$\|au\| = |a|\,\|u\|, \tag{3.13}$$

$$|(u, v)| \leqq \|u\| \,.\, \|v\|, \tag{3.14}$$

$$\|u + v\| \leqq \|u\| + \|v\|, \tag{3.15}$$

$$\big|\|u\| - \|v\|\big| \leqq \|u - v\|, \tag{3.16}$$

$$\varrho(u, v) \geqq 0, \tag{3.17}$$

$$\varrho(u, v) = 0 \Leftrightarrow u = v \quad v \quad L_2(G), \tag{3.18}$$

$$\varrho(u, v) = \varrho(v, u), \tag{3.19}$$

$$\varrho(u, z) \leqq \varrho(u, v) + \varrho(v, z). \tag{3.20}$$

D ů k a z y všech těchto tvrzení jsou zcela analogické důkazům příslušných tvrzení, provedeným podrobně v kap. 2 (srov. také poznámky pod čarou na str. 24 a 25) a nebudeme je zde znovu uvádět. Význam vztahů (3.10), (3.12) a (3.18) byl vysvětlen před právě vyslovenou větou.

Také jednoduché pravidlo pro počítání se skalárním součinem,

$$(a_1u_1 + a_2u_2, a_3u_3 + a_4u_4) = \\ = a_1a_3(u_1, u_3) + a_2a_3(u_2, u_3) + a_1a_4(u_1, u_4) + a_2a_4(u_2, u_4), \tag{3.21}$$

odvozené v kap. 2, zůstává v platnosti. Nerovnost (3.14) je známa v literatuře pod názvem *Schwarzova* (*Hölderova* nebo také *Cauchyova - Buňakovského*) *nerovnost*. Podrobně vypsána pro prostor $L_2(G)$ zní takto:

$$\left|\int_G u(x)\, v(x)\, dx\right| \leqq \sqrt{\left(\int_G u^2(x)\, dx\right)} \cdot \sqrt{\left(\int_G v^2(x)\, dx\right)}.$$

V dalším textu budeme skalární součin, resp. normu, resp. vzdálenost funkcí z prostoru $L_2(G)$ značit tak, jak jsme to vyznačili v příslušných definicích, tj. symbolem

$$(u, v), \text{ resp. } \|u\|, \text{ resp. } \varrho(u, v).$$

Jen tam, kde by mohlo dojít k záměně s obdobnými pojmy, resp. symboly v jiném metrickém prostoru, budeme psát podrobněji

$$(u, v)_{L_2(G)}, \quad \|u\|_{L_2(G)}, \quad \varrho(u, v)_{L_2(G)}.$$

Přistoupíme nyní k definici dalšího důležitého pojmu, a to pojmu konvergence v prostoru $L_2(G)$.

Kapitola 4

Konvergence v prostoru $L_2(G)$ (konvergence v průměru). Úplný prostor. Separabilní prostor

a) Konvergence v prostoru $L_2(G)$

Prostor $L_2(G)$ je, jak víme z předcházející kapitoly, metrický prostor s metrikou

(4.1) $$\varrho(u, v) = \|u - v\| = \sqrt{\int_G [u(x) - v(x)]^2\, dx}.$$

Podle (4.1) v něm tedy můžeme „měřit" vzdálenost jeho prvků. Tato okolnost dovoluje zavést v tomto prostoru pojem konvergence. Konvergenci v prostoru $L_2(G)$ je zvykem nazývat konvergencí v průměru (podrobněji konvergencí v průměru v oblasti G):

Definice 4.1. Říkáme, že *posloupnost funkcí* $u_n \in L_2(G)$ *konverguje v prostoru* $L_2(G)$ *k funkci* $u \in L_2(G)$ [nebo že *konverguje v průměru*[1]) k této funkci], jestliže

(4.2) $$\lim_{n\to\infty} \varrho(u_n, u) = 0,$$

[1]) V této knize budeme častěji používat pojmu „konvergence v $L_2(G)$" než „konvergence v průměru", kde je ještě třeba specifikovat, o kterou oblast, v níž konvergenci v průměru vyšetřujeme, jde, pokud to ovšem není v některých případech z textu zřejmé.

tj. jestliže

(4.3) $$\lim_{n\to\infty} \sqrt{\int_G [u_n(x) - u(x)]^2\, dx} = 0.$$

Píšeme

$$\lim_{n\to\infty} u_n(x) = u(x) \text{ v } L_2(G)$$

nebo stručně

$$u_n \to u \text{ v } L_2(G).$$

Funkci $u(x)$ nazýváme *limitou* (*limitní funkcí*) posloupnosti $\{u_n(x)\}$ v prostoru $L_2(G)$.

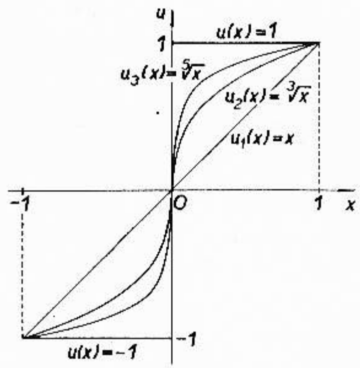
Definici 4.1 lze vyslovit v této zřejmě ekvivalentní formě:

Definice 4.2. *Posloupnost funkcí* $u_n \in L_2(G)$ *konverguje v prostoru* $L_2(G)$ (*v průměru*) *k funkci* $u \in L_2(G)$, jestliže ke každému $\varepsilon > 0$ lze najít číslo n_0 tak, že pro všechny funkce $u_n(x)$ s indexem n větším než n_0 platí

(4.4) $$\varrho(u_n, u) < \varepsilon,$$

tj.

$$\sqrt{\int_G [u_n(x) - u(x)]^2\, dx} < \varepsilon.$$



Obr. 5.

Příklad 4.1. V intervalu $(a, b) = (-1, 1)$ uvažujme posloupnost funkcí

(4.5) $$u_n(x) = x^{1/(2n-1)},$$

tj. posloupnost funkcí

(4.6) $$x, \sqrt[3]{x}, \sqrt[5]{x}, \sqrt[7]{x}, \dots.$$

Každá z funkcí (4.5) je spojitá v intervalu $\langle -1, 1\rangle$, tedy pro každé n je $u_n \in L_2(-1, 1)$. Z názoru lze očekávat (viz obr. 5), že funkce

$$u(x) = \begin{cases} -1 & \text{pro} \quad -1 \leqq x < 0\,, \\ 0 & \text{pro} \quad x = 0\,, \\ 1 & \text{pro} \quad 0 < x \leqq 1 \end{cases} \tag{4.7}$$

[pro kterou zřejmě také platí $u \in L_2(-1, 1)$], bude v prostoru $L_2(-1, 1)$ limitou posloupnosti (4.5). Dokážeme, že tomu skutečně tak je: Máme dokázat (viz def. 4.1), že

$$\lim_{n\to\infty} \varrho(u_n, u) = 0\,,$$

čili, což je totéž, že

$$\lim_{n\to\infty} \varrho^2(u_n, u) = 0\,.$$

Ale podle (4.1) a protože funkce $u_n(x)$ a $u(x)$ jsou liché, je

$$\varrho^2(u_n, u) = \int_{-1}^{1} [x^{1/(2n-1)} - u(x)]^2 \, dx = 2\int_0^1 (x^{1/(2n-1)} - 1)^2 \, dx =$$

$$= 2\left(\frac{2n-1}{2n+1} - 2\,\frac{2n-1}{2n} + 1\right) = \frac{2}{n(2n+1)}\,.$$

Zřejmě je

$$\lim_{n\to\infty} \varrho^2(u_n, u) = \lim_{n\to\infty} \frac{2}{n(2n+1)} = 0\,,$$

takže skutečně

$$\lim_{n\to\infty} u_n(x) = u(x) \text{ v } L_2(-1, 1)\,,$$

což jsme měli dokázat.

Všimněme si, že zatímco funkce $u_n(x)$ jsou funkce spojité v intervalu $\langle -1, 1\rangle$, limitní funkce v tomto intervalu spojitá není.

Poznámka 4.1. Definici konvergence, uvedenou na začátku této kapitoly, lze zcela analogicky vyslovit pro obecný metrický prostor, tedy pro prostor s metrikou v obecném případě jinou, než je metrika prostoru $L_2(G)$:

Řekneme, že posloupnost $\{u_n\}$ prvků metrického prostoru P s metrikou ϱ_P *konverguje v tomto prostoru k prvku* $u \in P$, jestliže $\lim_{n\to\infty} \varrho_P(u_n, u) = 0$. (Srov. def. 7.2, str. 85.)

Totéž platí ovšem i pro některé další pojmy a výsledky, s kterými se v této kapitole setkáme. Definovali jsme zde konvergenci zatím jen pro prostor $L_2(G)$, abychom mohli pojem konvergence v metrickém prostoru, který zpravidla činí čtenáři — — nematematikovi určité potíže, osvětlit na pokud možno nejjednodušším případě.

V předcházejícím příkladě jsme dokázali, že funkce (4.7) je v prostoru $L_2(-1, 1)$ limitou posloupnosti (4.5). Je otázka, nemá-li posloupnost (4.5) v tomto prostoru ještě jinou limitu. Na tuto otázku odpovídá tato věta:

Věta 4.1. *Posloupnost funkcí $u_n \in L_2(G)$ může mít v prostoru $L_2(G)$ nejvýše jednu limitu.*

Důkaz: Nechť posloupnost funkcí $u_n \in L_2(G)$ má v tomto prostoru dvě limity $u \in L_2(G)$, $v \in L_2(G)$ a nechť $u \neq v$ v $L_2(G)$, takže

$$\varrho(u, v) = a > 0\,. \tag{4.8}$$

Označme $a/2 = \varepsilon > 0$. Podle def. 4.2 existuje k tomuto ε takové n_0, že pro všechna $n > n_0$ platí

$$\varrho(u_n, u) < \varepsilon \quad \text{a zároveň} \quad \varrho(u_n, v) < \varepsilon\,. \tag{4.9}$$

Použijeme-li (3.20) a (3.19), dostaneme podle (4.9)

$$\varrho(u, v) \leqq \varrho(u, u_n) + \varrho(u_n, v) = \varrho(u_n, u) + \varrho(u_n, v) < 2\varepsilon\,,$$

což je ve sporu s (4.8), neboť $2\varepsilon = a$.

Poznámka 4.2. Věta 4.1 tvrdí — a z jejího důkazu je zřejmé —, že posloupnost $\{u_n(x)\}$ má v prostoru $L_2(G)$ nejvýše jednu limitu ve smyslu, o němž jsme mluvili v předcházející kapitole, tj. v tom smyslu, že dvě funkce, které se v oblasti G liší nejvýše na množině míry nula, jsou v prostoru $L_2(G)$ sobě rovné. Je zřejmé, že limitou posloupnosti (4.5) v metrice prostoru $L_2(G)$ je také funkce

$$v(x) = \begin{cases} -1 & \text{pro} \quad -1 \leqq x < 0\,, \\ 1 & \text{pro} \quad 0 \leqq x \leqq 1 \end{cases}$$

nebo obecně jakákoli funkce, která se od funkce (4.7) liší v bodech tvořících množinu míry nula. Všechny tyto funkce jsou však v prostoru $L_2(G)$ ekvivalentní.

Příklad 4.2. Vraťme se k příkladu na str. 31 a uvažujme v intervalu $\langle 0, 1\rangle$ posloupnost funkcí

$$u_n(x) = \begin{cases} 10 \sin (10^{2n+1} \pi x) & \text{pro} \quad 0 \leqq x \leqq 10^{-(2n+1)}\,, \\ 0 & \text{pro} \quad 10^{-(2n+1)} \leqq x \leqq 1\,. \end{cases} \tag{4.10}$$

Tvrdíme, že

$$\lim_{n\to\infty} u_n(x) = 0 \text{ v } L_2(0, 1)\,. \tag{4.11}$$

Skutečně, označíme-li $u(x)$ funkci identicky rovnou nule v intervalu $\langle 0, 1\rangle$, je

$$\varrho^2(u_n, u) = \int_0^1 [u_n(x) - 0]^2 \, dx = \int_0^1 u_n^2(x) \, dx = \int_0^{10^{-(2n+1)}} 100 \sin^2 (10^{2n+1} \pi x) \, dx =$$
$$= 50 \,.\, 10^{-(2n+1)} \,,$$

odkud

$$\lim_{n\to\infty} \varrho^2(u_n, u) = 0 \,,$$

a tedy také

$$\lim_{n\to\infty} \varrho(u_n, u) = 0 \,,$$

což je tvrzení (4.11).

Na tomto příkladě je dobře vidět (srov. obr. 3 na str. 31), že i když posloupnost $\{u_n(x)\}$ konverguje v prostoru $L_2(G)$, tj. v průměru, k funkci $u(x)$, neznamená to nikterak, že pro dostatečně velká n se funkce $u_n(x)$ a $u(x)$ v oblasti G všude „málo" liší. V našem příkladě je

$$\max_{x\in\langle 0,1\rangle} |u_n(x) - u(x)| = 10$$

dokonce pro každé n. Zároveň se však funkce $u_n(x)$ a $u(x)$ z tohoto příkladu liší s rostoucím n na množině stále menší míry.

Pro informaci čtenáře uvedeme ještě toto tvrzení, i když je v dalších kapitolách nebudeme potřebovat: *Konverguje-li posloupnost $u_n(x)$ k funkci $u(x)$ stejnoměrně v G, konverguje k ní i v prostoru $L_2(G)$, tj. v průměru.* Důkaz je snadný a plyne téměř okamžitě z definice konvergence v průměru. Z obyčejné bodové konvergence (v obecném případě nestejnoměrné) však neplyne konvergence v průměru. Ani naopak z konvergence v průměru neplyne bodová konvergence (a tím méně stejnoměrná). Srov. příklady v [35], str. 576.

b) Úplnost

Obraťme se nyní k hlubšímu zkoumání pojmu konvergence a některých jeho vlastností.

Z klasické analýzy je dobře známé Bolzanovo - Cauchyovo kritérium konvergence číselné posloupnosti: Posloupnost $\{a_n\}$ reálných čísel je konvergentní právě tehdy, platí-li

$$\lim_{\substack{m\to\infty\\ n\to\infty}} |a_m - a_n| = 0 \,. \tag{4.12}$$

Přitom symbol (4.12) znamená, že ke každému $\varepsilon > 0$ lze najít číslo n_0 tak, že platí-li zároveň $m > n_0$, $n > n_0$, pak platí $|a_m - a_n| < \varepsilon$.

Definice 4.3. Posloupnost funkcí $u_n \in L_2(G)$ se nazývá *cauchyovská (fundamentální) v prostoru $L_2(G)$*, platí-li

$$\lim_{\substack{m\to\infty\\ n\to\infty}} \varrho(u_m, u_n) = 0 \,. \tag{4.13}$$

Přitom opět význam symbolu (4.13) je ten, že ke každému $\varepsilon > 0$ lze najít n_0 tak, že je-li zároveň $m > n_0$, $n > n_0$, pak je $\varrho(u_m, u_n) < \varepsilon$.

Definice cauchyovské posloupnosti zůstává nezměněna i v metrických prostorech s jinou metrikou, než je metrika prostoru $L_2(G)$:

Definice 4.4. Posloupnost prvků u_n metrického prostoru P s metrikou ϱ_P se nazývá *cauchyovská (fundamentální) v prostoru P*, platí-li

$$\lim_{\substack{m\to\infty\\ n\to\infty}} \varrho_P(u_m, u_n) = 0 \,. \tag{4.14}$$

Speciálně v euklidovském prostoru E_1, v němž je metrika dána vztahem $\varrho_{E_1}(a_m, a_n) = |a_m - a_n|$ (tj. vzdáleností bodů a_m a a_n na číselné ose), je cauchyovská posloupnost charakterizována vztahem (4.12).

V libovolném metrickém prostoru platí (důkaz je zcela obdobný jako v klasické analýze):

Věta 4.2. *Každá posloupnost konvergentní v daném metrickém prostoru P*[1]) *je cauchyovská v tomto prostoru.*

Každá cauchyovská posloupnost však nemusí být v prostoru P konvergentní.

Definice 4.5. Metrický prostor P se nazývá *úplný*, jestliže každá cauchyovská posloupnost je v tomto prostoru konvergentní, tj. jestliže ke každé cauchyovské posloupnosti $\{u_n\}$ lze najít prvek u, ležící v prostoru P, který je v tomto prostoru limitou této posloupnosti.

Z právě uvedeného Bolzanova - Cauchyova kritéria plyne, že euklidovský prostor E_1 je úplný prostor. Lze ukázat, že totéž platí pro libovolný euklidovský prostor E_N.

Pro naše pozdější úvahy má základní význam tato věta:

Věta 4.3. *Prostor $L_2(G)$ je úplný prostor.*

Důkaz tohoto tvrzení je poměrně obtížný a je podrobně uveden např. v [26]. Poznamenejme, že v důkazu věty 4.3 se podstatně využívá toho, že prvky prostoru $L_2(G)$ jsou funkce integrovatelné s druhou mocninou v Lebesgueově smyslu.

---

[1]) Viz pozn. 4.1.

Poznámka 4.3. Ne každý metrický prostor je úplný. Uveďme jednoduchý příklad:

Nechť M je některý lineál prvků z prostoru $L_2(G)$. Definujme na tomto lineálu skalární součin stejným předpisem jako pro prvky prostoru $L_2(G)$, tedy vztahem

$$(u, v) = \int_G u(x)\, v(x)\, \mathrm{d}x\,, \quad u \in M\,, \; v \in M\,.$$

Na základě tohoto součinu definujme na M obvyklým způsobem normu a vzdálenost. Tím tedy dostaneme určitý metrický prostor, označme jej $M_{L_2(G)}$, v němž je definována metrika shodná s metrikou prostoru $L_2(G)$. [Je-li speciálně prostor $M_{L_2(G)}$ úplný, je zvykem nazývat jej *lineárním podprostorem* prostoru $L_2(G)$; srov. def. 5.11, str. 63.]

Na rozdíl od prostoru $L_2(G)$ nemusí být prostor $M_{L_2(G)}$ úplný. Jako příklad uvažujme lineál M všech funkcí spojitých v uzavřeném intervalu $\langle -1, 1 \rangle$. Ukážeme, že příslušný prostor $M_{L_2(-1,1)}$ není úplný. Posloupnost (4.5) funkcí $u_n(x)$ z příkl. 4.1 patří totiž zřejmě do tohoto prostoru, neboť funkce (4.5) jsou v intervalu $\langle -1, 1 \rangle$ spojité. Posloupnost (4.5) je v prostoru $M_{L_2(-1,1)}$ cauchyovská, neboť (viz příkl. 4.1) je konvergentní, a tedy cauchyovská, v prostoru $L_2(-1, 1)$ a prostory $L_2(-1, 1)$ a $M_{L_2(-1,1)}$ mají shodnou metriku. Přesto posloupnost (4.5) není v prostoru $M_{L_2(-1,1)}$ konvergentní. Předpokládejme naopak, že konverguje v tomto prostoru k určité funkci $v \in M_{L_2(-1,1)}$, která je tedy (neboť patří do tohoto prostoru) spojitá v intervalu $\langle -1, 1 \rangle$, a dojdeme ke sporu. K této funkci by pak totiž konvergovala posloupnost (4.5) i v prostoru $L_2(-1, 1)$, který má s prostorem $M_{L_2(-1,1)}$ shodnou metriku. V příkl. 4.1 jsme však viděli, že posloupnost (4.5) konverguje v $L_2(-1, 1)$ k funkci $u(x)$, dané předpisem (4.7), která není v intervalu $\langle -1, 1 \rangle$ spojitá; není dokonce ani ekvivalentní v $L_2(-1, 1)$ nějaké spojité funkci, neboť ji nelze učinit v intervalu $\langle -1, 1 \rangle$ spojitou tím, že bychom změnili její hodnoty na množině nulové míry. Tedy je $u \neq v$ v $L_2(-1, 1)$, takže z učiněného předpokladu o tom, že funkce $v(x)$ je v prostoru $M_{L_2(-1,1)}$ limitou posloupnosti (4.5), jsme dospěli k závěru, že posloupnost (4.5) má v prostoru $L_2(-1, 1)$ dvě různé limity, což je ve sporu s větou 4.1, str. 41.

Posloupnost (4.5), cauchyovská v prostoru $M_{L_2(-1,1)}$, nemá tedy v tomto prostoru limitu, takže tento prostor není úplný [a tedy není ani lineárním podprostorem prostoru $L_2(-1, 1)$].

Poznámka 4.4. V dalších kapitolách poznáme, že vlastnost úplnosti uvažovaných prostorů má v mnohých úvahách rozhodující význam. Prostor, který není úplný, lze „doplnit" tzv. ideálními elementy tak, aby takto doplněný prostor byl úplný. Tento proces je podobný procesu „zúplnění" prostoru racionálních čísel doplněním o čísla iracionální a je podrobně popsán např. v [26]. V obecném případě však bývá obtížné určit blíže charakter zmíněných ideálních elementů. S poměrně jednoduchým a názorným „zúplněním" metrického prostoru se setkáme v kap. 10.

c) Hustota. Separabilnost

Čtenáři je jistě dobře znám pojem okolí bodu v euklidovských prostorech E_1 (na přímce), E_2 (v rovině) atd. Zavedení metriky v prostoru $L_2(G)$ dovoluje definovat okolí i v tomto prostoru a na základě pojmu okolí zavést a aplikovat i některé další běžné pojmy, analogické pojmům známým z klasické analýzy:

Definice 4.6. Buď $\delta > 0$. *δ-okolím (δ-sférou) funkce $u(x)$ v prostoru $L_2(G)$* rozumíme množinu všech funkcí $v \in L_2(G)$, pro něž je

$$\varrho(u, v) < \delta\,. \tag{4.15}$$

Příklad 4.3. V prostoru $L_2(0, 1)$ leží v δ-okolí funkce $u(x) \equiv 0$ zřejmě funkce tvaru $v(x) = k$, kde pro konstantu k platí $|k| < \delta$, neboť pro tyto funkce je

$$\varrho(u, v) = \sqrt{\int_0^1 (0 - k)^2\, \mathrm{d}x} = \sqrt{\int_0^1 k^2\, \mathrm{d}x} = |k| < \delta\,.$$

V tomto okolí však leží např. i funkce (4.10) z příkl. 4.2, pokud n je tak velké, že $\sqrt{(50 \,.\, 10^{-(2n+1)})} < \delta$, atd.

Definice 4.7. Nechť M je nějaká množina funkcí z prostoru $L_2(G)$. Řekneme, že funkce $u \in L_2(G)$ je v prostoru $L_2(G)$ *hromadným bodem* této množiny, jestliže v každém (libovolně malém) δ-okolí funkce $u(x)$ leží nekonečně mnoho funkcí z množiny M.

Příklad 4.4. Nechť množina M je množina všech funkcí (4.10) ($n = 1, 2, \ldots$). Pak funkce $u(x) \equiv 0$ je v $L_2(0, 1)$ jejím hromadným bodem, jak ihned vyplývá z definice limity a z výsledku příkl. 4.2 (viz také závěr příkl. 4.3).

Zcela stejně jako v klasické analýze se dokáže:

Věta 4.4. *Funkce $u(x)$ je v prostoru $L_2(G)$ hromadným bodem množiny M právě tehdy, existuje-li posloupnost funkcí $u_n \in M$, která konverguje v $L_2(G)$ k funkci $u(x)$.*

Tvrzení uvedené v příkl. 4.4 vyplývá tedy z této věty přímo.

Příklad 4.5. Nechť L je lineál všech funkcí spojitých v intervalu $\langle -1, 1 \rangle$. Pak funkce (4.7) z příkl. 4.1 je v $L_2(-1, 1)$ hromadným bodem této množiny, neboť je limitou posloupnosti funkcí (4.5) z této množiny.

Podle uvedené definice hromadný bod množiny M nemusí nutně být prvkem této množiny. V obou uvedených příkladech hromadný bod není prvkem uvažované množiny.

Definice 4.8. Množina $\overline{M}$, která vznikne sjednocením množiny M a všech jejích hromadných bodů, se nazývá *uzávěr množiny M v prostoru* $L_2(G)$. Je-li $M = \overline{M}$, nazývá se množina M *uzavřená v prostoru* $L_2(G)$.

Uzávěr množiny M tedy dostaneme, „přidáme-li" k této množině všechny její hromadné body. Uzavřená množina je taková, k níž patří všechny její hromadné body.

Příklad 4.6. Lineál L všech funkcí spojitých v intervalu $\langle -1, 1 \rangle$ není uzavřená množina v $L_2(-1, 1)$. Podle příkl. 4.1 je totiž funkce (4.7) v prostoru $L_2(-1, 1)$ hromadným bodem tohoto lineálu a přitom není spojitou funkcí, takže do lineálu L nepatří.

Definice 4.9. Množina M [funkcí z prostoru $L_2(G)$] se nazývá *hustá v prostoru* $L_2(G)$, jestliže každá funkce z prostoru $L_2(G)$ je jejím hromadným bodem [tj., viz def. 4.8, jestliže $\overline{M} = L_2(G)$].

Užijeme-li výsledku věty 4.4, lze def. 4.9 vyjádřit v této ekvivalentní formě:

Definice 4.10. Množina M se nazývá *hustá v prostoru* $L_2(G)$, jestliže ke každé funkci $u \in L_2(G)$ lze najít posloupnost funkcí $u_n \in M$, konvergující v $L_2(G)$ k funkci $u(x)$.

Protože podle definice konvergence v prostoru $L_2(G)$ znamená, že funkce $u(x)$ a $u_n(x)$ jsou v metrice prostoru $L_2(G)$ libovolně blízké, je-li n dostatečně velké [srov. (4.2), resp. (4.4)], je množina M hustá v prostoru $L_2(G)$ právě tehdy, lze-li každou funkci z prostoru $L_2(G)$ s libovolnou přesností aproximovat v metrice tohoto prostoru funkcemi z množiny M; podrobněji, lze-li ke každé funkci $u \in L_2(G)$ a ke každému $\varepsilon > 0$ najít funkci $v \in M$ tak, že platí

$$\|u - v\|_{L_2(G)} < \varepsilon \, .$$

Čtenáři je jistě známa Weierstrassova věta, tvrdící, že každou funkci spojitou v uzavřeném intervalu $\langle a, b \rangle$ lze s libovolnou přesností aproximovat mnohočlenem, dokonce stejnoměrně v $\langle a, b \rangle$, a tedy tím spíše v průměru. To platí (viz např. [32]) i pro funkce z $L_2(a, b)$: K dané funkci $u \in L_2(a, b)$ a ke každému $\varepsilon > 0$ lze najít mnohočlen $P(x)$ tak, že $\varrho(u, P) < \varepsilon$. Lze ukázat, že za předpokladů, které jsme učinili o oblasti G (viz kap. 2; srov. také kap. 28), platí toto tvrzení i pro $N > 1$, tj. že platí věta, kterou zde uvedeme bez důkazu (viz např. [46]):

Věta 4.5. *Množina všech mnohočlenů je hustá v prostoru* $L_2(G)$.

Je zřejmé, že v případě $N > 1$ jde o mnohočleny v N proměnných, tedy např. pro $N = 2$ o funkce tvaru

$$\sum_{i=0}^{p} \sum_{k=0}^{q} a_{ik} x_1^i x_2^k \, ,$$

kde a_{ik} jsou koeficienty mnohočlenu a p, q jsou celá nezáporná čísla.

Každý mnohočlen je spojitá funkce v uzavřené oblasti $\overline{G}$. (A ovšem nikoli naopak, neboť funkce spojitá v $\overline{G}$ nemusí být mnohočlenem.) Protože platí věta 4.5, platí tedy tím spíše:

Věta 4.6. *Lineál L všech funkcí, spojitých v uzavřené oblasti $\overline{G}$, je hustý v* $L_2(G)$.

V kap. 8 ukážeme některé další užitečné příklady množin hustých v $L_2(G)$.

Nakonec uvedeme ještě jeden důležitý pojem. Jak známo, množina M se nazývá *spočetná*, lze-li její prvky sestavit v posloupnost, tj. přiřadit je vzájemně jednoznačně přirozeným číslům. Například lze ukázat, že množina všech racionálních čísel je spočetná, zatímco množina všech reálných čísel je nespočetná.

O množině M řekneme, že je *nejvýše spočetná*, je-li spočetná, nebo obsahuje-li jen konečný počet prvků.

Definice 4.11. Metrický prostor se nazývá *separabilní*, existuje-li v něm nejvýše spočetná množina, hustá v tomto prostoru.

Lze ukázat, což zde dokazovat nebudeme[1]), že v prostoru $L_2(G)$ je takovou spočetnou a hustou množinou množina všech mnohočlenů s racionálními koeficienty.

Tedy:

Věta 4.7. *Prostor* $L_2(G)$ *je separabilní.*

Kapitola 5
Ortogonální systémy v prostoru $L_2(G)$

a) Lineární závislost a nezávislost v $L_2(G)$

Nejprve uvedeme některé základní pojmy a výsledky, týkající se lineární závislosti a nezávislosti funkcí. Pokud budeme v této kapitole mluvit o funkcích, budeme jimi vždy rozumět funkce z $L_2(G)$ a v tom smyslu budeme také chápat rovnost mezi nimi [tj. $u(x) = v(x)$ v $L_2(G)$ právě tehdy, jsou-li $u(x)$ a $v(x)$ funkce ekvivalentní v $L_2(G)$].

Definice 5.1. Řekneme, že *funkce $u(x)$ je v prostoru $L_2(G)$ lineární[2]) kombinací*

---

[1]) Toto tvrzení je jednoduchým důsledkem věty 4.5 a textu, který následuje za def. 4.10.

[2]) Prvky prostoru $L_2(G)$ tvoří lineál — označme jej M — funkcí integrovatelných s druhou mocninou v oblasti G, přičemž rovnost mezi těmito funkcemi je definována ve výše uvedeném smyslu. V definici lineární kombinace funkcí a později jejich lineární závislosti zcela stačí mluvit o lineálu M — tedy mluvit o lineární kombinaci, resp. lineární závislosti prvků *v lineálu M*, nikoli *v prostoru* $L_2(G)$ — neboť vlastnosti tohoto prostoru (metriku apod.) v těchto definicích nepotřebujeme. Přesto však dáváme přednost uvedené terminologii, neboť nám umožní jednoduchou formulaci některých výsledků (viz např. větu 5.2).

funkcí

(5.1) $$v_1(x), \ldots, v_r(x)\,, \quad kde\ v_i \in L_2(G),\ i = 1, \ldots, r\,,$$

lze-li ji v tomto prostoru vyjádřit ve tvaru

(5.2) $$u(x) = a_1 v_1(x) + \ldots + a_r v_r(x)\,,$$

kde $a_1, \ldots, a_r$ jsou vhodné reálné konstanty.

Funkce $u(x)$ je tedy v $L_2(G)$ lineární kombinací funkcí (5.1), lze-li ji napsat jako součet těchto funkcí, násobených vhodnými konstantami.

Definice 5.2. O funkcích

(5.3) $$u_1(x), \ldots, u_k(x)\,, \quad u_i \in L_2(G),\ i = 1, \ldots, k\,,$$

říkáme, že jsou v prostoru $L_2(G)$ *lineárně závislé*, lze-li aspoň jednu z nich vyjádřit v tomto prostoru jako lineární kombinaci ostatních $k - 1$ funkcí. Nelze-li žádnou z těchto funkcí vyjádřit v $L_2(G)$ jako lineární kombinaci ostatních, řekneme, že funkce (5.3) jsou v prostoru $L_2(G)$ *lineárně nezávislé.*

Stručně také říkáme, že *systém funkcí* (5.3) *je v prostoru* $L_2(G)$ *lineárně závislý*, resp. *lineárně nezávislý.*

Téměř přímo z definice plyne následující věta, která je obdobou známé věty z kursu analýzy:

Věta 5.1. *Funkce* (5.3) *jsou v* $L_2(G)$ *lineárně závislé právě tehdy, lze-li najít konstanty* $b_1, \ldots, b_k$, *z nichž aspoň jedna je různá od nuly, takové, že v* $L_2(G)$ *platí*

(5.4) $$b_1 u_1(x) + \ldots + b_k u_k(x) = 0\,.$$

Funkce (5.3) *jsou v* $L_2(G)$ *lineárně nezávislé právě tehdy, je-li možno rovnost* (5.4) *splnit, jen když všechny konstanty* $b_1, \ldots, b_k$ *jsou rovny nule.*

Poznamenejme znovu, že máme stále na mysli funkce integrovatelné v oblasti G s druhou mocninou a že rovnosti (5.2), (5.4) chápeme v $L_2(G)$, tj. že tyto rovnosti jako rovnosti mezi funkcemi jsou splněny v oblasti G popř. s výjimkou bodů tvořících množinu míry nula. Pokud ovšem v těchto rovnostech se vyskytují jen spojité funkce [viz následující příklad; funkci $u(x)$ ekvivalentní nule můžeme vždy pokládat za spojitou, položíme-li $u(x) \equiv 0$ v G], jde o rovnosti v obvyklém smyslu, tj. splněné všude v G.

Příklad 5.1. Funkce

$$u_1 = \sin^2 xy\,, \quad u_2 = \cos^2 xy\,, \quad u_3 \equiv 4$$

jsou v $L_2(G)$, kde G je libovolná oblast roviny xy, lineárně závislé, neboť v $L_2(G)$ platí

$$4u_1 + 4u_2 - u_3 = 0\,.$$

Za konstanty b_1, b_2, b_3 v (5.4) stačí tedy zvolit čísla 4, 4, -1.

Funkce

$$u_1 = x^2\,, \quad u_2 = x\,, \quad u_3 \equiv 1$$

jsou v $L_2(a, b)$, kde a, b jsou libovolná reálná čísla, $a < b$, lineárně nezávislé, neboť, jak je známo z algebry, je rovnost

$$b_1 x^2 + b_2 x + b_3 \,.\, 1 = 0$$

možno splnit pro *všechna* x z některého intervalu jen tehdy, je-li $b_1 = b_2 = b_3 = 0$.

Rozhodnout přímo na základě def. 5.2 nebo věty 5.1 o tom, jsou-li dané funkce v $L_2(G)$ lineárně závislé nebo lineárně nezávislé, je v obecném případě obtížné. Poměrně jednoduché kritérium lineární závislosti, resp. nezávislosti funkcí v prostoru $L_2(G)$ podává tato věta:

Věta 5.2. *Funkce*

(5.5) $$u_1(x), \ldots, u_k(x)\,, \quad u_i \in L_2(G)\,, \quad i = 1, \ldots, k\,,$$

jsou v $L_2(G)$ *lineárně závislé právě tehdy, je-li tzv. Gramův determinant*

$$D(u_1, \ldots, u_k) = \begin{vmatrix} (u_1, u_1), (u_1, u_2), \ldots, (u_1, u_k) \\ (u_2, u_1), (u_2, u_2), \ldots, (u_2, u_k) \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ (u_k, u_1), (u_k, u_2), \ldots, (u_k, u_k) \end{vmatrix}\,,$$

sestavený ze skalárních součinů těchto funkcí, roven nule.

Důkaz: 1. Nechť funkce (5.5) jsou v $L_2(G)$ lineárně závislé. Podle věty 5.1 existují konstanty $b_1, b_2, \ldots, b_k$, nikoli všechny rovné nule, tak, že v $L_2(G)$ platí

(5.6) $$b_1 u_1 + b_2 u_2 + \ldots + b_k u_k = 0\,.$$

Násobme postupně tuto rovnici skalárně funkcemi $u_1, u_2, \ldots, u_k$ „zleva".[1])

---

[1]) Podrobně: Rovnici (5.6) násobíme funkcí $u_1(x)$. Dostaneme

$$b_1 u_1(x)\, u_1(x) + b_2 u_1(x)\, u_2(x) + \ldots + b_k u_1(x)\, u_k(x) = 0\,.$$

Integrujeme-li tuto rovnici přes oblast G a podle definice skalárního součinu píšeme

$$\int_G u_1(x)\, u_1(x) \mathrm{d}x = (u_1, u_1), \quad \int_G u_1(x)\, u_2(x)\, \mathrm{d}x = (u_1, u_2)$$

atd., dostaneme první z rovnic (5.7). Formálně tedy vznikne tato rovnice z rovnice (5.6) „násobením funkcí u_1 skalárně zleva". Ostatní rovnice (5.7) vzniknou obdobně „skalárním násobením funkcemi $u_2, \ldots, u_k$ zleva".

Dostaneme rovnice

$$(5.7)\qquad \begin{aligned} (u_1, u_1)\, b_1 + (u_1, u_2)\, b_2 + \ldots + (u_1, u_k)\, b_k &= 0\,,\\ (u_2, u_1)\, b_1 + (u_2, u_2)\, b_2 + \ldots + (u_2, u_k)\, b_k &= 0\,,\\ &\ldots\ldots\\ (u_k, u_1)\, b_1 + (u_k, u_2)\, b_2 + \ldots + (u_k, u_k)\, b_k &= 0\,. \end{aligned}$$

Na soustavu (5.7) se můžeme dívat jako na soustavu k rovnic pro k neznámých $b_1, \ldots, b_k$. Tato soustava má mít nenulové řešení, neboť podle předpokladu čísla $b_1, \ldots, b_k$ nejsou všechna rovna nule. To je, jak známo, možné jen tehdy, je-li determinant soustavy roven nule. To však je právě Gramův determinant D. Tím je dokázáno první tvrzení věty 5.2.

2. Nechť $D = 0$. Napišme soustavu (5.7). Pak tato soustava má nenulové řešení (má jich dokonce nekonečně mnoho). Vyberme jedno z nich, označme je $b_1, \ldots, b_k$, a utvořme funkci

$$(5.8)\qquad v(x) = b_1 u_1(x) + \ldots + b_k u_k(x)\,.$$

Dokážeme, že $(v, v) = 0$, takže $v = 0$ v $L_2(G)$. Tím bude dokázáno (podle věty 5.1), že funkce $u_1(x), \ldots, u_k(x)$ jsou v $L_2(G)$ lineárně závislé, neboť podle (5.8) bude v $L_2(G)$ splněna rovnost

$$0 = b_1 u_1(x) + \ldots + b_k u_k(x)$$

s konstantami $b_1, \ldots, b_k$, které nejsou všechny rovny nule.

Dokažme tedy, že $(v, v) = 0$. K tomu účelu násobme (5.8) postupně funkcemi $u_1, \ldots, u_k$ skalárně zleva. Dostaneme

$$(5.9)\qquad \begin{aligned} (u_1, v) &= b_1(u_1, u_1) + b_2(u_1, u_2) + \ldots + b_k(u_1, u_k)\,,\\ (u_2, v) &= b_1(u_2, u_1) + b_2(u_2, u_2) + \ldots + b_k(u_2, u_k)\,,\\ &\ldots\ldots\\ (u_k, v) &= b_1(u_k, u_1) + b_2(u_k, u_2) + \ldots + b_k(u_k, u_k)\,. \end{aligned}$$

Protože čísla $b_1, \ldots, b_k$ jsou podle předpokladu řešením soustavy (5.7), jsou v (5.9) všechny pravé strany rovny nule, a tedy

$$(5.10)\qquad (u_1, v) = 0, (u_2, v) = 0, \ldots, (u_k, v) = 0\,.$$

Násobíme-li jednotlivé rovnosti v (5.10) postupně čísly $b_1, \ldots, b_k$ a vzniklé rovnosti sečteme, dostaneme [podle vlastnosti (3.8) skalárního součinu]

$$(b_1 u_1 + b_2 u_2 + \ldots + b_k u_k, v) = 0$$

čili podle (5.8)

$$(v, v) = 0\,,$$

což jsme měli dokázat.

Z věty 5.2 okamžitě plyne:

Věta 5.3. *Funkce*

$$u_1(x), \ldots, u_k(x)\,, \quad u_i \in L_2(G)\,, \quad i = 1, \ldots, k\,,$$

jsou v $L_2(G)$ lineárně nezávislé právě tehdy, je-li jejich Gramův determinant D různý od nuly.

Příklad 5.2. Funkce

$$u_1 = \sin x\,, \quad u_2 = \cos x\,, \quad u_3 = 1$$

jsou v $L_2(0, \pi)$ lineárně nezávislé, neboť

$$D = \begin{vmatrix} (u_1, u_1), & (u_1, u_2), & (u_1, u_3) \\ (u_2, u_1), & (u_2, u_2), & (u_2, u_3) \\ (u_3, u_1), & (u_3, u_2), & (u_3, u_3) \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \pi/2, & 0, & 2 \\ 0, & \pi/2, & 0 \\ 2, & 0, & \pi \end{vmatrix} = \pi^3/4 - 2\pi \neq 0\,.^{1})$$

b) Ortogonální a ortonormální systémy v $L_2(G)$

Definice 5.3. Dvě funkce $u \in L_2(G)$, $v \in L_2(G)$ se nazývají *ortogonální v prostoru* $L_2(G)$, je-li jejich skalární součin roven nule, tj. je-li

$$(5.11)\qquad (u, v) = 0\,.$$

Píšeme $u \perp v$ v $L_2(G)$.

Definice 5.4. Funkce $u \in L_2(G)$, jejíž norma je rovna jedné,

$$(5.12)\qquad \|u\| = 1\,,$$

nazývá se *normovaná v prostoru* $L_2(G)$.

Definice 5.5. Systém (posloupnost) funkcí

$$(5.13)\qquad \varphi_1(x), \varphi_2(x), \ldots, \varphi_n(x), \ldots, \varphi_i \in L_2(G)\,, \quad i = 1, 2, \ldots\,,$$

---

[1]) Je

$$(u_1, u_1) = \int_0^\pi \sin x \sin x \, dx = \frac{\pi}{2} \text{ atd.}$$

navzájem ortogonálních v prostoru $L_2(G)$ se nazývá *ortogonální* v tomto prostoru. Jsou-li funkce (5.13) navíc normované, nazývá se *ortonormovaný* nebo *ortonormální v prostoru* $L_2(G)$.

V dalším textu budou významnou úlohu hrát právě systémy ortonormální.

Příklad 5.3. Systém funkcí

$$\sqrt{\left(\frac{2}{\pi}\right)} \sin x, \sqrt{\left(\frac{2}{\pi}\right)} \sin 2x, \ldots, \sqrt{\left(\frac{2}{\pi}\right)} \sin nx, \ldots \tag{5.14}$$

je ortonormální v $L_2(0, \pi)$. Neboť, jak známo, pro libovolná přirozená čísla $j \neq k$ platí

$$(\varphi_j, \varphi_k) = \frac{2}{\pi} \int_0^\pi \sin jx \sin kx \, dx = 0$$

a

$$\|\varphi_k\|^2 = (\varphi_k, \varphi_k) = \frac{2}{\pi} \int_0^\pi \sin^2 kx \, dx = \frac{2}{\pi} \cdot \frac{\pi}{2} = 1 .$$

Poznámka 5.1. Řekneme, že *systém funkcí*

$$\varphi_1(x), \varphi_2(x), \ldots, \varphi_n(x), \ldots$$

je v prostoru $L_2(G)$ *lineárně nezávislý*, jestliže každý systém vytvořený z konečného počtu těchto funkcí je lineárně nezávislý ve smyslu def. 5.2.

Vybereme-li z ortonormálního systému (5.13) libovolných j funkcí, pak tyto funkce budou v $L_2(G)$ lineárně nezávislé, neboť z vlastností ortonormálnosti plyne, že příslušný Gramův determinant bude mít v hlavní diagonále samé jedničky a všude jinde nuly, takže bude roven jedné. *Tedy každý systém ortonormální v* $L_2(G)$ *je v tomto prostoru lineárně nezávislý.*

Poznámka 5.2. Je-li funkce $u(x)$ lineární kombinací funkcí ortonormálního systému (5.13),

$$u(x) = \sum_{k=1}^{r} a_k \varphi_k(x) ,$$

vypočteme snadno její normu. Neboť z předpokladu ortonormálnosti

$$(\varphi_i, \varphi_j) = \begin{cases} 1 , & \text{je-li } i = j , \\ 0 , & \text{je-li } i \neq j , \end{cases}$$

plyne pro normu $\|u\|$ uvažované funkce $u(x)$ ihned

$$\|u\|^2 = (u, u) = \left(\sum_{k=1}^{r} a_k \varphi_k, \sum_{l=1}^{r} a_l \varphi_l\right) = \sum_{k=1}^{r} \sum_{l=1}^{r} a_k a_l (\varphi_k, \varphi_l) = \sum_{k=1}^{r} a_k^2 . \tag{5.15}$$

Tohoto výsledku často s výhodou použijeme.

V dalším textu budeme mluvit o nekonečných řadách v prostoru $L_2(G)$, tj. o řadách tvaru

$$\sum_{k=1}^{\infty} u_k(x) , \tag{5.16}$$

kde $u_k \in L_2(G)$, $k = 1, 2, \ldots$.

V def. 4.1, str. 38, jsme zavedli pojem konvergence posloupnosti $\{v_n(x)\}$ k funkci $v(x)$ a vysvětlili význam zápisu

$$\lim_{n \to \infty} v_n(x) = v(x) \text{ v } L_2(G) .$$

Tento zápis znamená, že

$$\lim_{n \to \infty} \varrho(v_n, v) = 0 \text{ v } L_2(G) .$$

Pokud jde o řadu (5.16), zavedeme, jak je u řad obvyklé, tzv. *částečné součty* $s_n(x)$ této řady:

$$s_n(x) = \sum_{k=1}^{n} u_k(x) .$$

Definice 5.6. Řekneme, že řada (5.16) je *konvergentní v prostoru* $L_2(G)$ (nebo že *konverguje v oblasti G v průměru*) a má součet $s(x)$, je-li posloupnost $\{s_n(x)\}$ jejích částečných součtů konvergentní v prostoru $L_2(G)$ a má limitu $s(x)$.

Jednou z dalších otázek, s nimiž se budeme zabývat v této kapitole, bude otázka rozvinutí libovolné funkce $u \in L_2(G)$ v řadu podle ortonormálního systému (5.13). K tomu účelu nejprve dokážeme tuto větu:

Věta 5.4. *Je-li systém* (5.13) *ortonormální v prostoru* $L_2(G)$, *pak řada*

$$\sum_{k=1}^{\infty} a_k \varphi_k(x) \quad (a_k \text{ reálné konstanty}) \tag{5.17}$$

konverguje v prostoru $L_2(G)$ *právě tehdy, je-li konvergentní číselná řada*

$$\sum_{k=1}^{\infty} a_k^2 . \tag{5.18}$$

Důkaz: Podle definice je řada (5.17) konvergentní v $L_2(G)$ právě tehdy, je-li v $L_2(G)$ konvergentní posloupnost jejích částečných součtů $s_n(x)$. Protože prostor $L_2(G)$ je úplný, konverguje tato posloupnost právě tehdy, je-li cauchyovská (viz předcházející kapitolu), tj. právě tehdy, platí-li

$$\lim_{\substack{m \to \infty \\ n \to \infty}} \varrho(s_m, s_n) = 0 . \tag{5.19}$$

Totéž platí pro číselnou řadu (5.18); tato řada je konvergentní právě tehdy, je-li posloupnost jejích částečných součtů

$$\sigma_i = \sum_{k=1}^{i} a_k^2$$

cauchyovská, tj. právě tehdy, platí-li

$$\lim_{\substack{m\to\infty \\ n\to\infty}} |\sigma_m - \sigma_n| = 0 .$$

Dokážeme-li tedy, že posloupnost $\{s_n(x)\}$ je cauchyovská právě tehdy, je-li cauchyovská číselná posloupnost $\{\sigma_n\}$, bude důkaz věty 5.4 proveden. Ale je (můžeme předpokládat, že je $m > n$, jinak bychom obrátili pořadí sčítanců)

$$\varrho^2(s_m, s_n) = \|s_m - s_n\|^2 = \Big\|\sum_{k=1}^{m} a_k\varphi_k - \sum_{k=1}^{n} a_k\varphi_k\Big\|^2 = \Big\|\sum_{k=n+1}^{m} a_k\varphi_k\Big\|^2 = \sum_{k=n+1}^{m} a_k^2$$

[srov. (5.15)], takže

$$\varrho^2(s_m, s_n) = \sigma_m - \sigma_n .$$

Obdobně, je-li $n > m$, dostaneme

$$\varrho^2(s_m, s_n) = \sigma_n - \sigma_m .$$

V každém případě tedy je

$$\varrho^2(s_m, s_n) = |\sigma_m - \sigma_n| , \tag{5.20}$$

odkud je zřejmé, že posloupnost $\{s_n(x)\}$ je v $L_2(G)$ cauchyovská právě tehdy, je-li cauchyovská číselná posloupnost $\{\sigma_n\}$.

Tím je důkaz věty 5.4 proveden.

Čtenáře upozorňujeme, aby měl stále na zřeteli, že jde o konvergenci řady (5.17) v prostoru $L_2(G)$, tj. o konvergenci v průměru, tedy nikoli o konvergenci bodovou.

c) Fourierovy řady. Úplné systémy. Schmidtův ortonormalizační proces

Definice 5.7. Nechť jsou dány ortonormální systém (5.13) a funkce $u \in L_2(G)$. Čísla

$$\alpha_k = (u, \varphi_k) = \int_G u(x)\, \varphi_k(x)\, dx , \quad k = 1, 2, \dots , \tag{5.21}$$

se nazývají *Fourierovy koeficienty funkce* $u(x)$ *vzhledem k systému* (5.13). Řada

$$\sum_{k=1}^{\infty} \alpha_k\varphi_k(x)$$

se nazývá *Fourierova řada funkce* $u(x)$ *vzhledem k systému* (5.13).

Příklad 5.4. V $L_2(0, \pi)$ jsou Fourierovy koeficienty funkce $u(x)$ vzhledem k systému (5.14) dány integrály

$$\alpha_k = \sqrt{\left(\frac{2}{\pi}\right)} \int_0^\pi u(x) \sin kx \, dx .$$

Příslušná Fourierova řada je

$$\sum_{k=1}^{\infty} \alpha_k \cdot \sqrt{\left(\frac{2}{\pi}\right)} \sin kx = \sum_{k=1}^{\infty} \beta_k \sin kx ,$$

kde

$$\beta_k = \sqrt{\left(\frac{2}{\pi}\right)} \alpha_k = \frac{2}{\pi} \int_0^\pi u(x) \sin kx \, dx .$$

Fourieovy koeficienty funkce $u(x)$ i příslušná Fourierova řada mají mnoho zajímavých, a jak uvidíme, pro aplikace užitečných vlastností. První z nich je, že mezi všemi řadami tvaru $\sum_{k=1}^{\infty} a_k\varphi_k(x)$ právě částečné součty řady $\sum_{k=1}^{\infty} \alpha_k\varphi_k(x)$ aproximují nejlépe funkci $u(x)$ v průměru:

Věta 5.5. *Nechť systém* (5.13) *je ortonormální a nechť* $u(x)$ *je funkce z* $L_2(G)$. *Nechť* n *je libovolné, ale pevné přirozené číslo. Označme*

$$u_n(x) = \sum_{k=1}^{n} \alpha_k\varphi_k(x) , \tag{5.22}$$

kde α_k *jsou Fourierovy koeficienty funkce* $u(x)$ *vzhledem k systému* (5.13) *a*

$$s_n(x) = \sum_{k=1}^{n} a_k\varphi_k(x) , \tag{5.23}$$

kde a_k *jsou libovolná (reálná) čísla. Pak platí*

$$\varrho(u_n, u) \leqq \varrho(s_n, u) . \tag{5.24}$$

Přitom v (5.24) *je ostrá nerovnost, jakmile aspoň jedno z čísel* a_k *je různé od* α_k, $k = 1, \dots, n$.

Důkaz: Podle předpokladu je $(\varphi_i, \varphi_k) = 0$ pro $i \neq k$, $(\varphi_k, \varphi_k) = \|\varphi_k\|^2 = 1$ a dále $(u, \varphi_k) = \alpha_k$. Můžeme tedy psát [srov. také (5.15)]

$$\begin{aligned}\varrho^2(s_n, u) &= \|u - s_n\|^2 = \Big(u - \sum_{k=1}^{n} a_k\varphi_k, u - \sum_{k=1}^{n} a_k\varphi_k\Big) = (u, u) - 2\sum_{k=1}^{n} a_k(u, \varphi_k) + \\ &+ \sum_{k=1}^{n} \sum_{l=1}^{n} a_k a_l(\varphi_k, \varphi_l) = \|u\|^2 - 2\sum_{k=1}^{n} a_k\alpha_k + \sum_{k=1}^{n} a_k^2 = \|u\|^2 - \sum_{k=1}^{n} \alpha_k^2 + \\ &+ \sum_{k=1}^{n} \alpha_k^2 - 2\sum_{k=1}^{n} a_k\alpha_k + \sum_{k=1}^{n} a_k^2 = \|u\|^2 - \sum_{k=1}^{n} \alpha_k^2 + \sum_{k=1}^{n} (a_k - \alpha_k)^2 .\end{aligned} \tag{5.25}$$

Protože číslo $\sum_{k=1}^{n} (a_k - \alpha_k)^2$ je nezáporné (dokonce kladné, je-li v tomto součtu aspoň jedno a_k různé od α_k), plyne ihned z (5.25), že $\varrho(s_n, u)$ je minimální právě tehdy, je-li $a_k = \alpha_k$ pro $k = 1, \ldots, n$. Tím je věta dokázána.

Je-li $a_k = \alpha_k$ pro všechna $k = 1, \ldots, n$, pak $\sum_{k=1}^{n} (a_k - \alpha_k)^2 = 0$ a z (5.25) plyne

$$\varrho^2(u_n, u) = \|u\|^2 - \sum_{k=1}^{n} \alpha_k^2$$

[což může čtenář ověřit i přímým výpočtem, vyjde-li z výrazu $\|u - u_n\|^2$ pro $\varrho^2(u_n, u)$]. Protože $\varrho^2(u_n, u) \geqq 0$, plyne odtud

$$\sum_{k=1}^{n} \alpha_k^2 \leqq \|u\|^2 \tag{5.26}$$

pro libovolné přirozené n. Tedy všechny částečné součty řady $\sum_{k=1}^{\infty} \alpha_k^2$ jsou shora ohraničené číslem $\|u\|^2$. Protože uvažovaná řada je řada s nezápornými členy, plyne odtud, že je konvergentní a z (5.26) zároveň plyne, že její součet není větší než $\|u\|^2$. Platí tedy:

Věta 5.6. *Pro každou funkci $u \in L_2(G)$ je řada $\sum_{k=1}^{\infty} \alpha_k^2$ čtverců Fourierových koeficientů této funkce vzhledem k libovolnému ortonormálnímu systému z prostoru $L_2(G)$ konvergentní. Přitom platí*

$$\sum_{k=1}^{\infty} \alpha_k^2 \leqq \|u\|^2 . \tag{5.27}$$

Nerovnost (5.27) se nazývá *Besselova nerovnost.*

Z uvedené věty plyne okamžitě podle věty 5.4:

Věta 5.7. *Nechť (5.13) je ortonormální systém v $L_2(G)$ a nechť $u \in L_2(G)$. Pak Fourierova řada $\sum_{k=1}^{\infty} \alpha_k \varphi_k(x)$, příslušná této funkci, je konvergentní v prostoru $L_2(G)$.*

Na tomto místě opět připomínáme čtenáři, že jde o konvergenci řady $\sum_{k=1}^{\infty} \alpha_k \varphi_k(x)$ v průměru, nikoli o bodovou konvergenci.

Poznámka 5.3. Z rovnosti (5.25),

$$\varrho^2(s_n, u) = \|u\|^2 - \sum_{k=1}^{n} \alpha_k^2 + \sum_{k=1}^{n} (a_k - \alpha_k)^2 , \tag{5.28}$$

platné pro každé přirozené n, plyne také tento důsledek: Nechť řada $\sum_{k=1}^{\infty} a_k \varphi_k(x)$, jejímiž částečnými součty jsou součty (5.23), konverguje v $L_2(G)$ k funkci $u(x)$. To znamená, že

$$\lim_{n \to \infty} \varrho(s_n, u) = 0 ,$$

čili, podle (5.28), že

$$\lim_{n \to \infty} [\|u\|^2 - \sum_{k=1}^{n} \alpha_k^2 + \sum_{k=1}^{n} (a_k - \alpha_k)^2] = 0 . \tag{5.29}$$

Přitom α_k jsou Fourierovy koeficienty funkce $u(x)$ vzhledem k systému (5.13). Podle (5.26) je rozdíl $\|u\|^2 - \sum_{k=1}^{n} \alpha_k^2$ pro každé n nezáporný, takže (5.29) může být splněno jen tehdy, když žádný ze sčítanců řady $\sum_{k=1}^{\infty} (a_k - \alpha_k)^2$ není kladný, tj. když $a_k = \alpha_k$ pro každé k. Platí tedy:

Věta 5.8. *Nechť (5.13) je ortonormální systém v $L_2(G)$. Konverguje-li řada $\sum_{k=1}^{\infty} a_k \varphi_k(x)$ v $L_2(G)$ k funkci $u(x)$, pak a_k jsou nutně Fourierovy koeficienty této funkce vzhledem k systému (5.13).*

Podle věty 5.7 je Fourierova řada libovolné funkce $u \in L_2(G)$ v prostoru $L_2(G)$ konvergentní. Odtud však nikterak neplyne, že tato řada konverguje v $L_2(G)$ právě k funkci $u(x)$. Uvažujme např. systém

$$\varphi_1 = \sqrt{\left(\frac{2}{\pi}\right)} \sin x , \quad \varphi_2 = \sqrt{\left(\frac{2}{\pi}\right)} \sin 3x , \quad \varphi_3 = \sqrt{\left(\frac{2}{\pi}\right)} \sin 5x , \tag{5.30}$$

$$\varphi_4 = \sqrt{\left(\frac{2}{\pi}\right)} \sin 7x , \ldots ,$$

který je zřejmě v prostoru $L_2(0, \pi)$ ortonormální. Budiž $u = \sin 2x$. Protože tato funkce je ortogonální v prostoru $L_2(0, \pi)$ ke všem funkcím systému (5.30) [srov. str. 52], jsou všechny její Fourierovy koeficienty $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \ldots$ vzhledem k systému (5.30) rovny nule. Příslušná Fourierova řada

$$0 . \sin x + 0 . \sin 3x + 0 . \sin 5x \ldots$$

je ovšem podle věty 5.7 konvergentní, nekonverguje však v $L_2(0, \pi)$ k funkci $u = \sin 2x$, nýbrž k funkci $u = 0$.

Tato okolnost by nemohla nastat, kdyby systém (5.30) obsahoval také funkci $\sqrt{(2/\pi)} \sin 2x$. V systému (5.30) tedy „něco chybí", je „neúplný".

Definice 5.8. Ortonormální systém (5.13) se nazývá *úplný v prostoru $L_2(G)$*, jestliže pro každou funkci $u \in L_2(G)$ konverguje příslušná Fourierova řada k této funkci v průměru.

Snadno najdeme podmínku pro to, aby daný ortonormální systém byl v prostoru $L_2(G)$ úplný:

Podle def. 5.6 konverguje posloupnost částečných součtů (5.22) Fourierovy řady funkce $u(x)$ v $L_2(G)$ k funkci $u(x)$ právě tehdy, když

$$\lim_{n\to\infty} \varrho(u_n, u) = 0\,,$$

čili, jak plyne z rovnosti $\varrho^2(u_n, u) = \|u\|^2 - \sum_{k=1}^{n} \alpha_k^2$ (str. 56), právě tehdy, když

$$\lim_{n\to\infty} \left(\|u\|^2 - \sum_{k=1}^{n} \alpha_k^2\right) = 0\,,$$

tj. když

$$\sum_{k=1}^{\infty} \alpha_k^2 = \|u\|^2\,. \tag{5.31}$$

Tato rovnost, vyjadřující nutnou a postačující podmínku, aby Fourierova řada funkce $u(x)$ konvergovala v $L_2(G)$ k této funkci, se nazývá *Parsevalova rovnost*, často též *rovnice úplnosti*, nebo *rovnice uzavřenosti*.

Najdeme ještě jiné poměrně jednoduché kritérium pro úplnost daného systému:

Definice 5.9. Ortonormální systém (5.13) se nazývá *uzavřený v prostoru* $L_2(G)$, jestliže neexistuje žádná funkce $v \in L_2(G)$, ortogonální ke všem funkcím tohoto systému, s výjimkou funkce rovné nule v $L_2(G)$ (tj. rovné nule skoro všude v oblasti G).

Věta 5.9. *Ortonormální systém je v* $L_2(G)$ *úplný právě tehdy, je-li v* $L_2(G)$ *uzavřený.*

Důkaz: 1. Nechť systém (5.13) je úplný. To znamená, že Fourierova řada, příslušná libovolné funkci z $L_2(G)$, konverguje v průměru k této funkci. Máme dokázat, že systém (5.13) je uzavřený, tj. že neexistuje funkce $u \neq 0$ v $L_2(G)$, ortogonální ke všem funkcím systému (5.13). Důkaz provedeme sporem. Nechť existuje funkce $u \neq 0$ v $L_2(G)$ a nechť je ortogonální ke všem funkcím systému (5.13). To tedy znamená, že všechny její Fourierovy koeficienty jsou rovny nule. Její Fourierova řada konverguje tedy v $L_2(G)$ k funkci $v = 0$, a nikoli k funkci $u \neq 0$. To je ve sporu s předpokladem, že systém (5.13) je úplný. Tedy je-li systém (5.13) úplný, je i uzavřený.

2. Nechť systém (5.13) je uzavřený, tj. nechť neexistuje s výjimkou funkce $u = 0$ v $L_2(G)$ žádná funkce ortogonální ke všem funkcím systému (5.13). Máme dokázat, že systém (5.13) je úplný, tj. že Fourierova řada, příslušná libovolné funkci z $L_2(G)$, konverguje v průměru k této funkci. Důkaz opět provedeme sporem. Nechť $v \in L_2(G)$ a nechť její Fourierova řada $\sum_{k=1}^{\infty} \alpha_k \varphi_k(x)$ konverguje[1]) k funkci $w(x) \neq v(x)$ v $L_2(G)$.

[1]) Podle věty 5.7 je zaručeno, že tato řada je v $L_2(G)$ skutečně konvergentní.

Z věty 5.8 plyne, že α_k jsou také Fourierovy koeficienty funkce $w(x)$. Tedy funkce $z(x) = v(x) - w(x)$ má všechny své Fourierovy koeficienty rovny nule, takže je ortogonální ke všem funkcím systému (5.13). Přitom však je $z \neq 0$ v $L_2(G)$, neboť v $L_2(G)$ je $v(x) \neq w(x)$, což je spor s předpokladem, že (5.13) je uzavřený systém. Tedy je-li systém (5.13) uzavřený, je i úplný, čímž je věta 5.9 dokázána.

Příklad 5.5. Okolnost (nám již známá), že systém (5.30) není úplný v $L_2(0, \pi)$, je nyní přímým důsledkem věty 5.9, neboť funkce $u(x) = \sin 2x$ je ortogonální v $L_2(0, \pi)$ ke všem funkcím systému (5.30) a přitom není v $L_2(0, \pi)$ nulová.

Rozhodnout v obecném případě o tom, je-li daný ortonormální systém úplný, bývá obtížné. Lze však ukázat (viz např. [25]), že systém (5.14) je úplný ortonormální systém v prostoru $L_2(0, \pi)$, obecněji, že systém

$$\sqrt{\left(\frac{2}{b-a}\right)} \sin \frac{n\pi(x-a)}{b-a}\,, \quad n = 1, 2, \ldots\,, \tag{5.32}$$

je úplný ortonormální systém v $L_2(a, b)$. Analogická tvrzení platí i ve speciálních N-rozměrných oblastech ($N > 1$). Např. je-li G obdélník $0 < x_1 < a$, $0 < x_2 < b$, pak systém funkcí

$$\frac{2}{\sqrt{(ab)}} \sin \frac{m\pi x_1}{a} \sin \frac{n\pi x_2}{b}\,, \quad m = 1, 2, \ldots, n = 1, 2, \ldots\,, \tag{5.33}$$

je úplný ortonormální systém v $L_2(G)$.

Je-li (5.13) úplný ortonormální systém v $L_2(G)$, lze podle předcházejícího textu funkci $u \in L_2(G)$ vyjádřit příslušnou Fourierovou řadou,

$$u(x) = \sum_{k=1}^{\infty} \alpha_k \varphi_k(x)\,, \quad \alpha_k = (u, \varphi_k)\,, \quad k = 1, 2, \ldots\,. \tag{5.34}$$

Úplnému ortonormálnímu systému v $L_2(G)$ říkáme proto *ortonormální báze* v tomto prostoru. V obecnějším případě definujeme:

Definice 5.10. Systém (posloupnost) funkcí

$$\psi_1, \psi_2, \ldots, \psi_n, \ldots \tag{5.35}$$

z $L_2(G)$ (které nemusí být ani ortogonální, ani normované) se nazývá *úplný* v $L_2(G)$, je-li množina všech lineárních kombinací prvků tohoto systému hustá v $L_2(G)$, tj. jestliže ke každé funkci $u \in L_2(G)$ a ke každému $\varepsilon > 0$ lze najít přirozené n a čísla $a_1^{(n)}, \ldots, a_{(n)}^{(n)}$ tak, že platí

$$\varrho(u, \sum_{k=1}^{n} a_k^{(n)} \psi_k) < \varepsilon\,.$$

Je-li mimo to systém (5.35) v $L_2(G)$ lineárně nezávislý (pozn. 5.1), řekneme, že tvoří v $L_2(G)$ *bázi*.

Poznámka 5.4. Bází v prostoru $L_2(G)$ rozumíme tedy každou lineárně nezávislou posloupnost prvků z $L_2(G)$, úplnou v tomto prostoru. Připomeňme, že pokud jde o pojem báze, může se čtenář v literatuře setkat i s jinými definicemi. Důležitý je zejména pojem tzv. Schauderovy báze: O systému (5.35) řekneme, že tvoří v prostoru $L_2(G)$ *Schauderovu bázi* (nebo *bázi v Schauderově smyslu*), lze-li každý prvek $u \in L_2(G)$ vyjádřit v tomto prostoru, a to jednoznačně, ve tvaru

$$u(x) = \sum_{k=1}^{\infty} a_k \psi_k(x) . \tag{5.36}$$

Zřejmě je-li (5.35) Schauderova báze v $L_2(G)$, je v $L_2(G)$ i bází ve smyslu definice 5.10 [neboť z jednoznačnosti vyjádření (5.36) plyne lineární nezávislost systému (5.35)], přičemž však báze podle definice 5.10 nemusí být vždy bází Schauderovou. Báze podle naší definice je tedy „slabší" [klade na systém (5.35) slabší požadavky než definice Schauderova]. Proto jsme také v naší knize tuto definici zvolili, neboť, jak uvidíme, nebudeme ani v teorii ani v aplikacích variačních metod potřebovat vlastnosti Schauderovy báze, ale stačí nám zcela vlastnosti báze podle naší definice, tj. její úplnost a lineární nezávislost jejích členů.

V dalším textu rozumíme tedy bází bázi podle definice 5.10.

Poznámka 5.5. Je-li systém (5.35) v $L_2(G)$ *ortonormální* (pak je ovšem i lineárně nezávislý), pojem úplnosti podle def. 5.8 splývá s pojmem úplnosti podle def. 5.10: Nechť systém (5.35) je úplný podle def. 5.8. To znamená, že každou funkci $u \in L_2(G)$ lze v $L_2(G)$ vyjádřit (a to jednoznačně, viz větu 5.8) jako součet příslušné Fourierovy řady. Pak je tedy systém (5.35) Schauderovou bází, a tím spíše bází podle def. 5.10, a je tedy ve smyslu této definice úplný. Naopak, je-li systém (5.35) úplný ve smyslu def. 5.10, lze každou funkci $u \in L_2(G)$ s libovolnou přesností aproximovat v tomto prostoru vhodnou lineární kombinací

$$\sum_{k=1}^{n} a_k^{(n)} \psi_k(x)$$

prvků tohoto systému, a podle věty 5.5 tím spíše lineární kombinací

$$\sum_{k=1}^{n} \alpha_k \psi_k(x) ,$$

kde α_k jsou Fourierovy koeficienty funkce $u(x)$ vzhledem k systému (5.35). Tedy Fourierova řada každé funkce $u \in L_2(G)$ konverguje v $L_2(G)$ k této funkci, takže systém (5.35) je úplný podle def. 5.8.

Zároveň je vidět, že když systém (5.35) je v $L_2(G)$ ortonormální, splývá pojem Schauderovy báze s pojmem báze, zavedené def. 5.10. Jak jsme již předeslali, mluvíme v tomto případě o *ortonormální bázi* v $L_2(G)$.

Příkladem neortonormální báze v prostoru $L_2(a, b)$ je, jak lze ukázat, posloupnost funkcí

$$1,\ x,\ x^2, \ldots, x^n, \ldots ; \tag{5.37}$$

obdobně v prostoru $L_2(G)$ tvoří bázi (nikoli ortonormální) odpovídající systém mnohočlenů, např. pro $N = 2$ systém funkcí

$$1,\ x,\ y,\ x^2,\ xy,\ y^2, \ldots . \tag{5.38}$$

Poznámka 5.6. Z úplného systému (5.35), který je v obecném případě vytvořen z funkcí, které nejsou ani ortogonální, ani normované, lze získat ortonormální bázi tzv. *Schmidtovým ortogonalizačním*, přesněji *ortonormalizačním procesem*:

Nechť je dán v $L_2(G)$ úplný systém (5.35). Je-li některá z funkcí (5.35) lineární kombinací ostatních, můžeme ji ze systému (5.35) vypustit, aniž bychom tím narušili úplnost tohoto systému. Můžeme proto předpokládat, že systém (5.35) tvoří v $L_2(G)$ bázi. Zejména tedy žádná z funkcí tohoto systému není nulová, takže každá z nich má kladnou normu.

Z uvažovaného systému utvoříme ortonormální bázi takto:

Předně položíme

$$\varphi_1(x) = \frac{\psi_1(x)}{\|\psi_1\|} .$$

Zřejmě

$$\|\varphi_1\| = \left\| \frac{\psi_1}{\|\psi_1\|} \right\| = \frac{\|\psi_1\|}{\|\psi_1\|} = 1 , \tag{5.39}$$

takže funkce $\varphi_1(x)$ je normovaná. Položme dále

$$g_2(x) = \psi_2(x) + a\,\varphi_1(x) \tag{5.40}$$

a určeme konstantu a z podmínky, aby funkce φ_1 a g_2 byly ortogonální, tj. aby platilo

$$(\varphi_1, g_2) = 0 . \tag{5.41}$$

Odtud podle (5.40) plyne

$$(\varphi_1, \psi_2) + a(\varphi_1, \varphi_1) = 0$$

čili, protože platí (5.39),

$$a = -(\varphi_1, \psi_2) .$$

Poznamenejme, že $\|g_2\| \neq 0$. Kdyby totiž bylo $g_2 = 0$ v $L_2(G)$, dostali bychom podle (5.40)

$$0 = \psi_2(x) + \frac{a}{\|\psi_1\|}\,\psi_1(x),$$

což by znamenalo, že funkce ψ_1 a ψ_2 jsou v $L_2(G)$ lineárně závislé, a to ve sporu s předpokladem, že (5.35) je v $L_2(G)$ báze. Můžeme tedy položit

$$\varphi_2(x) = \frac{g_2(x)}{\|g_2\|}.$$

Funkce $\varphi_2(x)$ je normovaná a podle (5.41) je v $L_2(G)$ ortogonální k funkci $\varphi_1(x)$.

Položme dále

$$g_3(x) = \psi_3(x) + b\,\varphi_1(x) + c\,\varphi_2(x) \tag{5.42}$$

a určeme konstanty b a c tak, aby platilo

$$(\varphi_1, g_3) = 0\,, \quad (\varphi_2, g_3) = 0\,, \tag{5.43}$$

tj. určeme je z rovnic

$$(\varphi_1, \psi_3) + b(\varphi_1, \varphi_1) + c(\varphi_1, \varphi_2) = 0\,, \tag{5.44}$$

$$(\varphi_2, \psi_3) + b(\varphi_2, \varphi_1) + c(\varphi_2, \varphi_2) = 0\,. \tag{5.45}$$

Protože je $(\varphi_1, \varphi_1) = 1$, $(\varphi_2, \varphi_2) = 1$ a $(\varphi_1, \varphi_2) = (\varphi_2, \varphi_1) = 0$, plyne z (5.44) $b = -(\varphi_1, \psi_3)$ a z (5.45) $c = -(\varphi_2, \psi_3)$. Stejně jako v předcházejícím případě zjistíme, že $\|g_3\| \neq 0$, a položíme

$$\varphi_3(x) = \frac{g_3(x)}{\|g_3\|}.$$

Funkce $\varphi_3(x)$ je normovaná a podle (5.43) je ortogonální k funkcím $\varphi_1(x)$ a $\varphi_2(x)$. Tak postupujeme dále, až dospějeme k ortonormálnímu systému

$$\varphi_1(x)\,, \quad \varphi_2(x), \ldots, \quad \varphi_n(x), \ldots. \tag{5.46}$$

Snadno se přesvědčíme, že systém (5.46) tvoří v $L_2(G)$ ortonormální bázi. Ortonormálnost tohoto systému je zřejmá z jeho konstrukce, stačí tedy dokázat jeho úplnost. Avšak z uvedeného procesu ortonormalizace je vidět, že n-tý člen systému (5.46) je lineární kombinací prvních n členů systému (5.35), a naopak. Je-li tedy možno každou funkci $u \in L_2(G)$ s libovolnou přesností aproximovat v $L_2(G)$ vhodnou lineární kombinací funkcí systému (5.35), lze to učinit i pomocí funkcí systému (5.46), z čehož snadnou úvahou vyplývá (viz pozn. 5.5), že systém (5.46) je v $L_2(G)$ úplný.

Uvedeným ortonormalizačním procesem dostáváme tedy skutečně ortonormální bázi v $L_2(G)$.

Příklad 5.6. Čtenáři doporučujeme, aby aplikoval pro případ intervalu $(-1, 1)$ právě popsaný ortonormalizační proces na bázi (5.37). Dostaneme v $L_2(-1, 1)$ úplný ortonormální systém mnohočlenů

$$\frac{\sqrt{2}}{2}\,, \quad \sqrt{\left(\frac{3}{2}\right)}\,x\,, \quad \sqrt{\left(\frac{5}{8}\right)}(3x^2 - 1), \ldots,$$

lišících se jen konstantami od Legendreových polynomů.

d) Rozklad prostoru $L_2(G)$ na ortogonální podprostory

Již v pozn. 4.3, str. 44, jsme se zmínili o pojmu tzv. lineárního podprostoru: Nechť M je lineál nějakých prvků z $L_2(G)$. Zaveďme na tomto lineálu skalární součin a tím i metriku prostoru $L_2(G)$, čímž se lineál M stane metrickým prostorem. Tento prostor budeme značit symbolem $M_{L_2(G)}$ nebo prostě symbolem M.

Definice 5.11. Je-li prostor M úplný, nazýváme jej *lineárním podprostorem prostoru* $L_2(G)$.

Příklad 5.7. Uvažujme v prostoru $L_2(0, 1)$ množinu M všech funkcí konstantních v intervalu $(0, 1)$. M je zřejmě lineál, neboť lineární kombinace konstantních funkcí je opět konstantní funkce. Označme stejným symbolem M příslušný metrický prostor s metrikou prostoru $L_2(0, 1)$. Tvrdíme, že M je úplný prostor: Podle definice máme dokázat, že každá cauchyovská posloupnost má v M limitu, tj. že existuje prvek, ležící v M, který je v M limitou této posloupnosti. Nechť

$$v_1(x) \equiv k_1\,, \quad v_2(x) \equiv k_2, \ldots, \quad v_n(x) \equiv k_n, \ldots, \tag{5.47}$$

kde $k_1, k_2, \ldots$ jsou reálné konstanty, je cauchyovská posloupnost funkcí v tomto prostoru. Je

$$\varrho(v_m, v_n) = \sqrt{\int_0^1 (k_m - k_n)^2\,dx} = |k_m - k_n| = \varrho_{E_1}(k_m, k_n)\,,$$

takže (5.47) je cauchyovská posloupnost v prostoru M právě tehdy, je-li $\{k_n\}$ cauchyovská číselná posloupnost v euklidovském prostoru E_1 [kde, jak známo, je vzdálenost $\varrho_{E_1}(a, b)$ prvků a, b dána číslem $|a - b|$]. Ale podle Bolzanova - Cauchyova kritéria má cauchyovská posloupnost $\{k_n\}$ v prostoru E_1 limitu; označme ji k.

Odtud okamžitě plyne, že posloupnost (5.47) má v prostoru M za limitu funkci $v(x) \equiv k$, neboť

$$\lim_{n\to\infty} \varrho(v, v_n) = \lim_{n\to\infty} \sqrt{\int_0^1 (k - k_n)^2 \, dx} = \lim_{n\to\infty} |k - k_n| = 0 .$$

Tedy každá cauchyovská posloupnost má v prostoru M limitu. Prostor M je úplný, a je tedy lineárním podprostorem prostoru $L_2(0, 1)$.

Příklad 5.8. Uvažujme lineál L funkcí spojitých v uzavřeném intervalu $\langle -1, 1 \rangle$. Metrický prostor, který vznikne, zavedeme-li v tomto lineálu metriku prostoru $L_2(-1, 1)$, označme $M_{L_2(-1,1)}$. Prostor $M_{L_2(-1,1)}$ není lineárním podprostorem prostoru $L_2(-1, 1)$, neboť není úplný (viz pozn. 4.3, str. 44).

Pro informaci čtenáře uveďme ještě následující větu, i když ji v dalším textu nebudeme potřebovat (označení viz před def. 5.11, str. 63):

Věta 5.10. *Prostor $M_{L_2(G)}$ je lineární podprostor prostoru $L_2(G)$ právě tehdy, je-li lineál M uzavřená množina v $L_2(G)$.*

Důkaz je poměrně snadný a přenecháváme jej čtenáři. Bude pro něho užitečným procvičením zavedených pojmů.

Uvažujme nyní v prostoru $L_2(G)$ určitý lineární podprostor, který stručně označíme N. Platí tato důležitá věta:

Věta 5.11. *Nechť $u(x)$ je libovolná funkce z prostoru $L_2(G)$. Pak $u(x)$ lze, a to jednoznačně, rozložit v součet*

(5.48) $$u(x) = v(x) + w(x),$$

kde $v \in N$ a funkce $w(x)$ je ortogonální ke každé funkci z N.

Funkce $v(x)$ se nazývá *ortogonální projekce funkce $u(x)$ do podprostoru N.* Okolnost, že funkce $w(x)$ je ortogonální ke každé funkci z podprostoru N, zapisujeme stručně symbolem $w \perp N$ a říkáme, že funkce $w(x)$ je *ortogonální k podprostoru N.*

Důkaz věty 5.11 najde čtenář např. v [26]. Záleží v tom, že funkci $v(x)$ určíme jako funkci, která realizuje minimum vzdálenosti $\varrho(u, z)$ funkce $u(x)$ od všech funkcí $z(x)$ podprostoru N. Přitom se podstatně využívá toho, že $L_2(G)$ i N jsou úplné prostory.

Příklad 5.9. Uvažujme v prostoru $L_2(0, 1)$ lineární podprostor M z příkl. 5.7. Jde tedy o podprostor všech funkcí konstantních v intervalu $\langle 0, 1 \rangle$. Rozložme funkci

(5.49) $$u(x) = x^2, \quad x \in \langle 0, 1 \rangle,$$

v součet (5.48). Funkce $v(x)$ bude rovna zatím neznámé konstantě, označme ji a. Rozklad (5.48) bude tedy tvaru

$$x^2 = a + (x^2 - a).$$

Konstantu a určíme z podmínky, aby funkce $w(x)$, v našem případě funkce $w(x) = x^2 - a$, byla v $L_2(0, 1)$ ortogonální k podprostoru M, tj. ke každé funkci tvaru $z(x) = k$, kde k je konstanta. Zapíšeme-li podmínku ortogonality, dostaneme

$$(z, w) = \int_0^1 k(x^2 - a) \, dx = 0$$

čili

$$k(\tfrac{1}{3} - a) = 0,$$

odkud v důsledku toho, že konstanta k je libovolná, plyne $a = \frac{1}{3}$. Tedy projekcí funkce (5.49) do podprostoru M je funkce $v(x) = \frac{1}{3}$. Zároveň je

$$x^2 - \tfrac{1}{3} \perp M.$$

Lze ukázat, že množina K všech funkcí, ortogonálních k danému podprostoru N [přesněji: prostor K těchto funkcí, s metrikou prostoru $L_2(G)$], je opět lineární podprostor v $L_2(G)$. Říkáme, že prostor $L_2(G)$ je *ortogonálním součtem* (ortogonálních) *podprostorů* N a K, a píšeme

(5.50) $$L_2(G) = N \oplus K.$$

Význam tohoto symbolu vysvětluje věta 5.11: Každou funkci $u \in L_2(G)$ lze jednoznačně zapsat jako součet dvou funkcí $v(x) \in N$ a $w(x) \in K$ (přičemž $v \perp K$ a $w \perp N$).

Podprostoru K říkáme *ortogonální doplněk* podprostoru N v prostoru $L_2(G)$. Píšeme

$$K = L_2(G) \ominus N.$$

Poznámka 5.7. Čtenáře jistě napadne jednoduchá geometrická interpretace věty 5.11: Uvažujme třírozměrný euklidovský prostor E_3 a v něm rovinu σ, procházející počátkem souřadnic. Pak libovolný polohový vektor $\mathbf{r}$ z tohoto prostoru lze jednoznačně rozložit v součet dvou ortogonálních vektorů $\mathbf{r}_1$ a $\mathbf{r}_2$, z nichž první je ortogonální projekcí vektoru $\mathbf{r}$ do roviny σ a druhý leží v přímce p, procházející počátkem souřadnic a kolmé k rovině σ. Podprostoru N, resp. K z věty 5.11 zde tedy odpovídá množina všech polohových vektorů, ležících v rovině σ, resp. v přímce p.

e) Některé vlastnosti skalárního součinu

V závěru této kapitoly uvedeme ještě některé vlastnosti skalárního součinu, které nám budou užitečné v dalších kapitolách.

Věta 5.12. *Nechť posloupnost $\{u_n(x)\}$ konverguje v prostoru $L_2(G)$ k funkci $u(x)$, posloupnost $\{v_n(x)\}$ k funkci $v(x)$. Pak posloupnost skalárních součinů (u_n, v_n) konverguje k číslu (u, v).*

Stručným zápisem:

(5.51) $$u_n \to u\,, \quad v_n \to v \ \text{ v } \ L_2(G) \Rightarrow (u_n, v_n) \to (u, v)\,.$$

Důkaz: Máme dokázat, že

$$\lim_{n\to\infty} (u_n, v_n) = (u, v)\,,$$

tj. že

$$\lim_{n\to\infty} [(u_n, v_n) - (u, v)] = 0\,,$$

čili, což je totéž, že

(5.52) $$\lim_{n\to\infty} |(u_n, v_n) - (u, v)| = 0\,.$$

Podle předpokladu je

$$u_n \to u\,, \quad v_n \to v \ \text{ v } \ L_2(G)$$

čili

(5.53) $$\lim_{n\to\infty} \|u_n - u\| = 0\,, \quad \lim_{n\to\infty} \|v_n - v\| = 0\,.$$

Dále je

$$\begin{aligned} |(u_n, v_n) - (u, v)| &= |(u_n - u, v_n - v) + (u, v_n - v) + (v, u_n - u)| \leqq \\ &\leqq |(u_n - u, v_n - v)| + |(u, v_n - v)| + |(v, u_n - u)| \leqq \\ &\leqq \|u_n - u\| \, \|v_n - v\| + \|u\| \, \|v_n - v\| + \|v\| \, \|u_n - u\| \end{aligned}$$

[podle Schwarzovy nerovnosti (3.14), str. 37], odkud v důsledku (5.53) okamžitě plyne (5.52).

Věta 5.12 má několik jednoduchých důsledků:

Věta 5.13. (užíváme jen stručného zápisu).

(5.54) *Je-li $u_n \to u$ v $L_2(G)$ a $v \in L_2(G)$, pak $(u_n, v) \to (u, v)$.*

Důkaz je snadný: V (5.51) stačí položit $v_n = v$ pro každé n.

Věta 5.14.

(5.55) *Je-li $u_n \to u$ v $L_2(G)$, pak $\|u_n\| \to \|u\|$.*

Důkaz: V (5.51) stačí položit $v_n = u_n$ a $v = u$; odtud podle (5.51) plyne $\|u_n\|^2 \to \|u\|^2$, což implikuje (5.55).

Věta 5.15. *Nechť M je hustá množina v $L_2(G)$* (str. 46) *a nechť $u(x)$ je ortogonální ke každé funkci z množiny M. Pak $u = 0$ v $L_2(G)$.*

Důkaz: Množina M je podle předpokladu hustá v $L_2(G)$. Speciálně lze tedy najít posloupnost funkcí $u_n(x) \in M$ takovou, že

$$\lim_{n\to\infty} u_n(x) = u(x) \ \text{ v } \ L_2(G)\,.$$

Ale pro každou funkci $u_n(x)$ platí podle předpokladu

(5.56) $$(u_n, u) = 0\,.$$

Podle (5.54), kde pokládáme $v(x) = u(x)$, je

$$\lim_{n\to\infty} (u_n, u) = (u, u) = 0$$

[podle (5.56)], odkud plyne $u = 0$ v $L_2(G)$.

Věta 5.15 se ukáže velmi užitečnou v našich dalších úvahách.

Kapitola 6
Hilbertův prostor

Přistoupíme nyní k definici Hilbertova prostoru, jehož příkladem je, jak uvidíme, nám již dobře známý prostor $L_2(G)$ funkcí integrovatelných v oblasti G s druhou mocninou s metrikou zavedenou v kap. 3. Uvedením axiómů Hilbertova prostoru a vyšetřováním jeho vlastností jsme mohli začít již dříve, nezávisle na tom, zda jsme se předtím seznámili s prostorem $L_2(G)$. Zvolili jsme však jinou cestu, která je podle našeho názoru pro čtenáře, který není profesionálním matematikem, mnohem přístupnější. Pojmy, které jsme zavedli v předcházejících kapitolách, jsou totiž v prostoru $L_2(G)$ mnohem názornější než v abstraktním Hilbertově prostoru, a přitom jsme je zavedli způsobem, kterého lze téměř beze změny použít i v obecnějším případě. Tato kapitola přinese tedy čtenáři zobecnění dříve zavedených pojmů i získaných výsledků, bude však pro něho zároveň i určitým přehledem a zopakováním předcházejícího textu.

a) Unitární prostor. Hilbertův prostor

Uvažujme množinu M, jejíž prvky mohou mít velmi obecný charakter. Množinu M mohou tvořit např. funkce, dané na oblasti G, tak jak tomu bylo v předcházejících kapitolách. Množina M může však být např. množinou všech n-rozměrných vektorů nebo množinou číselných posloupností, posloupností funkcí apod.

Definice 6.1. Řekneme, že M je *lineál* nebo *lineární množina* (podrobněji *lineární množina nad tělesem reálných čísel*), *lineární prostor*, *vektorový prostor*, také *lineární soustava* (*lineární systém*), má-li tyto vlastnosti:

1. Pro libovolné prvky u, v z M je definován jejich součet $u + v$ a pro každý prvek $u \in M$ a každé reálné číslo a je definován součin au, přičemž $u + v$ i au jsou rovněž prvky M.[1])

2. Pro takto zavedené operace sčítání a násobení reálným číslem platí tyto axiómy (obdobné známým pravidlům z vektorové algebry; odtud název vektorový prostor):

$$u + v = v + u\,, \qquad u + (v + z) = (u + v) + z\,,$$
$$a(u + v) = au + av\,, \qquad (a + b)\,u = au + bu\,,$$
$$a(bu) = (ab)\,u\,, \qquad 1\,.\,u = u\,.$$

3. Existuje takový prvek $O \in M$, že $u + O = u$ pro každé $u \in M$. Prvek O nazýváme *nulovým prvkem lineálu M*.

4. Ke každému $u \in M$ existuje $v \in M$ tak, že $u + v = O$. Prvek v nazýváme *prvkem opačným k prvku u*.

Z uvedených axiómů plyne řada důsledků a „pravidel“, obdobných známým pravidlům z algebry, o nichž se zde nebudeme podrobně zmiňovat. Poznamenejme např., že prvky O a v z axiómů 3 a 4 jsou jednoznačně určeny, že platí $0\,.\,u = O$ pro každé $u \in M$, atd.

Nulový prvek lineálu M budeme často značit prostě symbolem 0, pokud nebude nebezpečí nedorozumění (záměna s číslem nula). Podrobněji budeme psát $u = 0$ v M.

Klasickým příkladem lineálu je množina všech reálných n-rozměrných algebraických vektorů $\mathbf{u} = (u_1, \ldots, u_n)$ s obvyklou definicí součtu dvou vektorů, $\mathbf{u} + \mathbf{v} = (u_1 + v_1, \ldots, u_n + v_n)$ a násobení vektoru číslem, $c\mathbf{u} = (cu_1, \ldots, cu_n)$. Nulovým prvkem tohoto lineálu je nulový vektor $\mathbf{o} = (0, \ldots, 0)$. Právě vlastnosti tohoto lineálu byly určitým vzorem pro obecnou definici lineálu.

---

[1]) Odtud ovšem okamžitě plyne, že i libovolná lineární kombinace

$$a_1u_1 + \ldots + a_nu_n \tag{6.1}$$

prvků $u_1, \ldots, u_n$ z M, kde $a_1, \ldots, a_n$ jsou reálná čísla, patří do M.

Dalším jednoduchým příkladem lineálu je množina L všech reálných funkcí spojitých v uzavřené oblasti $\bar{G}$ s obvyklou definicí součtu dvou funkcí a násobení funkce reálným číslem. Zápis $u = 0$ v L zde znamená, že $u(x) \equiv 0$ v $\bar{G}$. Příklad množiny funkcí, která není lineálem, byl uveden na str. 22, příkl. 2.2.

Poznámka 6.1. Vzhledem k účelu, který sledujeme, stačí nám vybudovat teorii „reálného“ Hilbertova prostoru, proto v (6.1) (viz poznámku pod čarou na str. 68) uvažujeme konstanty $a_1, \ldots, a_n$ reálné. O obecnějším případě viz pozn. 6.11, str. 82.

Definice 6.2. Říkáme, že na lineálu M je definován *skalární součin*, je-li každé dvojici u, v prvků z této množiny přiřazeno reálné číslo

$$(u, v) \tag{6.2}$$

s těmito vlastnostmi (u, v, u_1, u_2 jsou libovolné prvky lineálu M, a_1, a_2 jsou libovolná reálná čísla):

$$(u, v) = (v, u)\,, \tag{6.3}$$

$$(a_1u_1 + a_2u_2, v) = a_1(u_1, v) + a_2(u_2, v)\,, \tag{6.4}$$

$$(u, u) \geqq 0\,, \tag{6.5}$$

$$(u, u) = 0 \Leftrightarrow u = 0 \text{ v } M. \tag{6.6}$$

Poznámka 6.2. Pro skalární součin (6.2) používáme zde stejného symbolu jako pro skalární součin funkcí v prostoru $L_2(G)$. Již v závěru kap. 3 jsme uvedli, že tam, kde by mohlo dojít k záměně se skalárním součinem v jiném prostoru, budeme skalární součin v prostoru $L_2(G)$ značit symbolem $(u, v)_{L_2(G)}$. Také pokud se budeme v dalším textu setkávat se skalárním součinem v různých prostorech, vyznačíme vždy příslušným indexem, o který skalární součin jde, pokud to ovšem nebude ze souvislosti zřejmé. Tato poznámka se týká i dále zavedených pojmů normy a vzdálenosti prvků.

Klasickým příkladem skalárního součinu je skalární součin

$$(\mathbf{u}, \mathbf{v}) = u_1v_1 + \ldots + u_nv_n \tag{6.7}$$

dvou reálných n-rozměrných algebraických vektorů $\mathbf{u} = (u_1, \ldots, u_n)$, $\mathbf{v} = (v_1, \ldots, v_n)$, definovaný na lineálu těchto vektorů, uvažovaném v předcházejícím textu (str. 68). Podobně jako vlastnosti tohoto lineálu byly určitým vzorem pro obecnou definici lineálu, byly vlastnosti součinu (6.7) určitým vzorem pro obecnou definici skalárního součinu.

Uvedeme některé další příklady.

Příklad 6.1. Uvažujme lineál M, jehož prvky tvoří funkce integrovatelné s druhou mocninou v oblasti G, přičemž dvě funkce, rovné v G skoro všude, pokládáme za totožné. Vztahem

$$(u, v) = \int_G u(x)\, v(x)\, dx \tag{6.8}$$

je na tomto lineálu definován skalární součin, neboť, jak jsme ověřili v kap. 3 (věta 3.1; část důkazů byla podrobně provedena již v kap. 2), vztah (6.8) splňuje všechny předepsané vlastnosti (6.3) až (6.6) skalárního součinu.

Příklad 6.2. Nechť lineál M je množina všech vektorových funkcí tvaru

$$\boldsymbol{u}(x) = u_1(x)\, \boldsymbol{i} + u_2(x)\, \boldsymbol{j}\,,$$

jejichž souřadnice $u_1(x)$, $u_2(x)$ jsou funkce integrovatelné s druhou mocninou v oblasti G. Je-li a libovolné reálné číslo a jsou-li $\boldsymbol{u}(x) = u_1(x)\, \boldsymbol{i} + u_2(x)\, \boldsymbol{j}$, $\boldsymbol{v}(x) = v_1(x)\, \boldsymbol{i} + v_2(x)\, \boldsymbol{j}$ libovolné prvky z M, definujeme

$$\boldsymbol{u}(x) + \boldsymbol{v}(x) = [u_1(x) + v_1(x)]\, \boldsymbol{i} + [u_2(x) + v_2(x)]\, \boldsymbol{j}\,, \quad a\boldsymbol{u}(x) = au_1(x)\, \boldsymbol{i} + au_2(x)\, \boldsymbol{j}\,.$$

Čtenář snadno ověří, že jde o lineál. Nulovým prvkem tohoto lineálu je funkce $\boldsymbol{u}$, jejíž obě souřadnice jsou rovny nule v $L_2(G)$. Vztahem

$$(\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v}) = (u_1, v_1) + (u_2, v_2)\,,$$

kde (u_k, v_k), $k = 1, 2$, jsou skalární součiny (6.8), je na lineálu M definován skalární součin. Vlastnosti (6.3) a (6.4) jsou zřejmé. Dále

$$(\boldsymbol{u}, \boldsymbol{u}) = (u_1, u_1) + (u_2, u_2)\,,$$

odkud ihned plyne $(\boldsymbol{u}, \boldsymbol{u}) \geqq 0$ a $(\boldsymbol{u}, \boldsymbol{u}) = 0$ pro $\boldsymbol{u} = 0$ v M. Dále $(u_1, u_1) \geqq 0$, $(u_2, u_2) \geqq 0$. Z rovnosti

$$(u_1, u_1) + (u_2, u_2) = 0$$

tedy plyne $(u_1, u_1) = 0$ a $(u_2, u_2) = 0$, odkud $u_1 = 0$ a $u_2 = 0$ v $L_2(G)$, takže skutečně $(\boldsymbol{u}, \boldsymbol{u}) = 0 \Rightarrow \boldsymbol{u} = 0$ v M, čímž je dokázána i druhá implikace v (6.6).

Zcela obdobně lze zavést skalární součin i na lineálu vektorových funkcí o více než dvou souřadnicích.

Příklad 6.3. Uvažujme množinu funkcí spojitých v uzavřené oblasti $\overline{G}$, pro které v $\overline{G}$ platí $|u(x)| \leq 10$. Na této množině nelze zavést skalární součin s vlastnostmi (6.3) až (6.6), neboť uvažovaná množina není lineál. [Na kterém z axiómů (6.3) až (6.6) skalárního součinu bychom ztroskotali?]

Příklad 6.4. Uvažujme lineál M, jehož prvky jsou funkce spojité včetně první derivace v uzavřeném intervalu $\langle 0, 1 \rangle$, s obvyklou definicí sčítání funkcí a násobení funkce reálným číslem a s nulovým prvkem $u(x) \equiv 0$ v $\langle 0, 1 \rangle$. Ukážeme, že vztahem

$$(u, v) = \int_0^1 u(x)\, v(x)\, dx + \int_0^1 u'(x)\, v'(x)\, dx \tag{6.9}$$

je na tomto lineálu definován skalární součin. Vlastnosti (6.3) a (6.4) pro vztah (6.9) jsou zřejmé. Dále je

$$(u, u) = \int_0^1 u^2(x)\, dx + \int_0^1 u'^2(x)\, dx\,, \tag{6.10}$$

takže $(u, u) \geqq 0$; je-li $u(x) \equiv 0$ v intervalu $\langle 0, 1 \rangle$, je $(u, u) = 0$; je-li $(u, u) = 0$, plyne z (6.10) $u(x) \equiv 0$ v intervalu $\langle 0, 1 \rangle$. Tedy vztah (6.9) splňuje všechny vlastnosti skalárního součinu.

Příklad 6.5. Uvažujme stejný lineál M jako v předcházejícím příkladě. Vztahem

$$(u, v) = \int_0^1 u'(x)\, v'(x)\, dx \tag{6.11}$$

není na lineálu M dán skalární součin. Všechny axiómy skalárního součinu jsou splněny s výjimkou posledního: Podle (6.11) je

$$(u, u) = \int_0^1 u'^2(x)\, dx\,.$$

Je-li $(u, u) = 0$, plyne odtud $u'(x) \equiv 0$ v intervalu $\langle 0, 1 \rangle$, nikoli však $u(x) \equiv 0$ v tomto intervalu. Např. funkce $u(x) \equiv 3$ v intervalu $\langle 0, 1 \rangle$ patří do lineálu M, splňuje vztah $(u, u) = 0$ a není nulovým prvkem tohoto lineálu.

Poznámka 6.3. Protože vlastnosti (6.3) až (6.6) skalárního součinu (6.2) a vlastnosti (3.7) až (3.10) skalárního součinu (3.2), str. 37, jsou obdobné, jsou obdobné i důsledky odvozené z těchto vlastností. Zejména platí pravidlo o násobení,

$$(a_1u_1 + a_2u_2, a_3u_3 + a_4u_4) = a_1a_3(u_1, u_3) + a_2a_3(u_2, u_3) + \\ + a_1a_4(u_1, u_4) + a_2a_4(u_2, u_4)\,,$$

analogické pravidlu (3.21).

Definice 6.3. Nechť na lineálu M je definován skalární součin (6.2) s vlastnostmi (6.3) až (6.6). Číslo

$$\|u\| = \sqrt{(u, u)} \tag{6.12}$$

nazýváme *normou prvku* u tohoto lineálu a číslo

$$\varrho(u, v) = \|u - v\| \tag{6.13}$$

nazýváme *vzdáleností prvků* u, v tohoto lineálu.

Čtenář si jistě povšiml, že v kap. 3 byly norma i vzdálenost v prostoru $L_2(G)$ zavedeny zcela analogickým způsobem, a to na základě skalárního součinu (3.2), str. 34. Protože všechny vlastnosti (3.11) až (3.20), odvozené v kap. 3 (popř. již v kap. 2) pro normu a vzdálenost v prostoru $L_2(G)$, byly odvozeny jen na základě vlastností (3.7) až (3.10) skalárního součinu, které jsou zcela analogické vlastnostem (6.3) až (6.6) skalárního součinu (6.2), budou mít norma (6.12) i vzdálenost (6.13) opět vlastnosti zcela analogické vlastnostem (3.11) až (3.20). Shrneme je do této věty (čtenář, který si chce znovu připomenout myšlenky příslušných důkazů z kap. 2 a 3, může si snadno podle nich podrobně dokázat jednotlivá tvrzení uváděné věty):

Věta 6.1. *Pro normu* (6.12) *a vzdálenost* (6.13) *platí* (u, v, z *jsou libovolné prvky lineálu* M, a *je libovolné reálné číslo*):

$$\|u\| \geqq 0\,, \tag{6.14}$$

$$\|u\| = 0 \Leftrightarrow u = 0 \quad v \quad M\,,^1) \tag{6.15}$$

$$\|au\| = |a|\,\|u\|\,, \tag{6.16}$$

$$|(u, v)| \leqq \|u\| \cdot \|v\|\,, \tag{6.17}$$

$$\|u + v\| \leqq \|u\| + \|v\|\,, \tag{6.18}$$

$$\big|\|u\| - \|v\|\big| \leqq \|u - v\|\,, \tag{6.19}$$

$$\varrho(u, v) \geqq 0\,, \tag{6.20}$$

$$\varrho(u, v) = 0 \Leftrightarrow u = v \quad v \quad M\,,^2) \tag{6.21}$$

$$\varrho(u, v) = \varrho(v, u)\,, \tag{6.22}$$

$$\varrho(u, z) \leqq \varrho(u, v) + \varrho(v, z)\,. \tag{6.23}$$

Definice 6.4. Lineál M s metrikou (6.13), kde norma je dána vztahem (6.12), nazýváme *unitárním prostorem* (*prostorem se skalárním součinem, prostorem s kvadratickou metrikou*).

Tento prostor budeme v této kapitole značit symbolem S_2. V jednotlivých speciálních případech budeme ovšem užívat speciální symboliky, jak jsme to učinili např. u nám již dobře známého prostoru $L_2(G)$.

---

[1]) Tj. u je nulový prvek lineálu M.

[2]) Tj. $u - v = 0$ v M.

Metrika (6.13) prostoru S_2 je dána normou (6.12) na základě skalárního součinu (6.2) s vlastnostmi (6.3) až (6.6). Říkáme také, že tato *metrika je indukována* (*generována*) *skalárním součinem* (6.2).

V kap. 4 jsme na základě metriky (3.4) s vlastnostmi (3.17) až (3.20) zavedli několik důležitých pojmů [pojem konvergence v prostoru $L_2(G)$, hromadného bodu, hustoty, úplnosti atd.] a odvodili jsme pro jejich vlastnosti několik základních vět. Protože metrika (6.13) má vlastnosti (6.20) až (6.23) zcela analogické vlastnostem (3.17) až (3.20) metriky (3.4), lze pro prostor S_2 definovat zcela analogicky obdobné pojmy a téměř doslova přenést důkazy příslušných vět. Nebudeme zde proto reprodukovat úvahy, podrobně provedené v kap. 4, a jen v přehledu uvedeme odpovídající definice a věty. Jen tam, kde bude třeba, upozorníme čtenáře na některé odlišnosti a doplníme text potřebnými poznámkami, popř. uvedeme některé další výsledky. Čtenáři doporučujeme, aby si objasnil zavedené pojmy a aplikoval příslušné věty na prostorech uvedených v příkl. 6.1, 6.2 a 6.4.

Definice 6.5. Říkáme, že posloupnost prvků $u_n \in S_2$ *konverguje v* S_2 *k prvku* $u \in S_2$, jestliže

$$\lim_{n\to\infty} \varrho(u_n, u) = 0\,.$$

Píšeme

$$\lim_{n\to\infty} u_n = u \text{ v } S_2$$

a prvek u nazýváme *limitou* nebo *limitním prvkem posloupnosti* $\{u_n\}$.

Příklad 6.6. V prostoru z příkl. 6.4 (označme tento prostor W) máme

$$\varrho_W^2(u, v) = \|u - v\|_W^2 = (u - v, u - v)_W = \tag{6.24}$$
$$= \|u - v\|_{L_2(0,1)}^2 + \|u' - v'\|_{L_2(0,1)}^2 = \varrho_{L_2(0,1)}^2(u, v) + \varrho_{L_2(0,1)}^2(u', v')\,.$$

Konvergence v tomto prostoru tedy znamená, že posloupnost funkcí $u_n(x)$ konverguje v $L_2(0, 1)$ k limitní funkci a zároveň posloupnost derivací $u_n'(x)$ konverguje v $L_2(0, 1)$ k derivaci této limitní funkce.

Poznámka 6.4. Na základě pojmu konvergence posloupnosti definujeme konvergenci nekonečné řady: O řadě

$$\sum_{k=1}^{\infty} u_k$$

řekneme, že je *konvergentní v prostoru* S_2 *a má součet* $s \in S_2$, jestliže posloupnost $\{s_n\}$ jejích částečných součtů,

$$s_n = \sum_{k=1}^{n} u_k\,,$$

konverguje v S_2 k prvku $s \in S_2$.

Věta 6.2. *Posloupnost $\{u_n\}$ může mít v S_2 nejvýše jednu limitu.*

Tedy tato posloupnost buď má v S_2 limitu, a to jedinou, nebo nemá v S_2 žádnou limitu.

Definice 6.6. Posloupnost prvků $u_n \in S_2$ se nazývá *cauchyovská* (*fundamentální*) *v prostoru* S_2, jestliže platí

$$\lim_{\substack{m\to\infty \\ n\to\infty}} \varrho(u_m, u_n) = 0\,,$$

podrobně, lze-li ke každému $\varepsilon > 0$ najít číslo n_0 tak, že je-li zároveň $m > n_0$, $n > n_0$, platí

$$\varrho(u_m, u_n) < \varepsilon\,.$$

Věta 6.3. *Každá posloupnost $\{u_n\}$, která konverguje v S_2 k některému prvku $u \in S_2$, je v S_2 cauchyovská.*

Každá cauchyovská posloupnost však nemusí mít v prostoru S_2 limitu.

Definice 6.7. Prostor S_2 se nazývá *úplný*, jestliže každá posloupnost $\{u_n\}$, cauchyovská v S_2, konverguje v S_2 k některému prvku $u \in S_2$.

Příklad 6.7. Prostor $L_2(G)$ z příkl. 6.1 je úplný (viz větu 4.3, str. 43).

Příklad 6.8. Také prostor z příkl. 6.2, str. 70 [označme jej $\mathbf{L}_2(G)$], je úplný. Pro každé dva prvky $\mathbf{u} \in \mathbf{L}_2(G)$, $\mathbf{v} \in \mathbf{L}_2(G)$ předně platí

$$\begin{aligned} \varrho^2_{\mathbf{L}_2(G)}(\mathbf{u}, \mathbf{v}) &= \|\mathbf{u} - \mathbf{v}\|^2_{\mathbf{L}_2(G)} = (\mathbf{u} - \mathbf{v}, \mathbf{u} - \mathbf{v})_{\mathbf{L}_2(G)} = \\ &= (u_1 - v_1, u_1 - v_1)_{L_2(G)} + (u_2 - v_2, u_2 - v_2)_{L_2(G)} = \\ &= \|u_1 - v_1\|^2_{L_2(G)} + \|u_2 - v_2\|^2_{L_2(G)} = \varrho^2_{L_2(G)}(u_1, v_1) + \varrho^2_{L_2(G)}(u_2, v_2)\,, \end{aligned}$$

takže pro posloupnost $\{{}^n\mathbf{u}\}$ prvků z $\mathbf{L}_2(G)$ máme

$$\varrho^2_{\mathbf{L}_2(G)}({}^m\mathbf{u} - {}^n\mathbf{u}) = \varrho^2_{L_2(G)}({}^m u_1 - {}^n u_1) + \varrho^2_{L_2(G)}({}^m u_2 - {}^n u_2)\,.$$

Odtud plyne, že posloupnost $\{{}^n\mathbf{u}\}$ je v $\mathbf{L}_2(G)$ cauchyovská právě tehdy, jsou-li posloupnosti $\{{}^n u_1\}$ i $\{{}^n u_2\}$ cauchyovské v $L_2(G)$. Nechť tedy $\{{}^n\mathbf{u}\}$ je cauchyovská posloupnost v $\mathbf{L}_2(G)$, takže $\{{}^n u_1\}$ i $\{{}^n u_2\}$ jsou cauchyovské posloupnosti v $L_2(G)$. Ale prostor $L_2(G)$ je úplný, takže posloupnost $\{{}^n u_1\}$, resp. $\{{}^n u_2\}$ má v $L_2(G)$ jedinou limitu, označme ji u_1, resp. u_2. Funkce $\mathbf{u} = u_1\mathbf{i} + u_2\mathbf{j}$ je zřejmě v $\mathbf{L}_2(G)$ limitou posloupnosti $\{{}^n\mathbf{u}\}$ a patří do $\mathbf{L}_2(G)$, takže prostor $\mathbf{L}_2(G)$ je úplný.

Příklad 6.9. Lze ukázat, že prostor W z příkl. 6.4 není úplný. [Podle (6.24) je posloupnost $\{u_n\}$ v tomto prostoru cauchyovská právě tehdy, jsou-li zároveň posloupnosti $\{u_n\}$, $\{u_n'\}$ cauchyovské v $L_2(0, 1)$; nyní stačí uvažovat takovou posloupnost $\{u_n\}$ cauchyovskou v prostoru W, že např. příslušná posloupnost $\{u_n'\}$, cauchyovská v $L_2(G)$, konverguje v $L_2(G)$ k funkci, která není spojitá v intervalu $\langle 0, 1\rangle$.]

Prostor S_2, který není úplný, lze „zúplnit", přidáme-li k němu nové prvky, tzv. *ideální elementy* (viz např. [26]; viz též kap. 10). Lze ukázat, že např. prostor W z příkl. 6.4 bude úplný, přidáme-li k němu určité prvky z prostoru $L_2(0, 1)$, které na tomto místě nebudeme blíže specifikovat. [Jde o ty funkce z $L_2(0, 1)$, které mají tzv. první zobecněnou derivaci integrovatelnou s druhou mocninou (v Lebesgueově smyslu) v intervalu $(0, 1)$. Viz definici prostoru $W_2^{(1)}$ v kap. 29, str. 345.] V obecném případě bývá obtížné blíže určit povahu uvedených ideálních elementů.

Definice 6.8. Buď $\delta > 0$. *δ-okolím* (*δ-sférou*) prvku u v prostoru S_2 rozumíme množinu všech prvků z S_2, pro něž platí

$$\varrho(u, v) < \delta\,.$$

Definice 6.9. Nechť N je nějaká množina prvků z prostoru S_2. Říkáme, že prvek $u \in S_2$ je v prostoru S_2 *hromadným bodem množiny* N, jestliže v každém libovolně malém δ-okolí prvku u leží nekonečně mnoho prvků z množiny N.

Hromadný bod množiny N v prostoru S_2 může, ale nemusí patřit do množiny N.

Věta 6.4. *Prvek $u \in S_2$ je v prostoru S_2 hromadným bodem množiny N právě tehdy, existuje-li posloupnost prvků $u_n \in N$, která konverguje v S_2 k prvku u.*

Definice 6.10. Množina $\bar{N}$, která je sjednocením prvků množiny N a všech jejích hromadných bodů v prostoru S_2, se nazývá *uzávěr množiny N v prostoru S_2*. Je-li $\bar{N} = N$ (tj. patří-li každý hromadný bod množiny N do této množiny), říkáme, že množina N je v prostoru S_2 *uzavřená*.

Definice 6.11. Množina N se nazývá *hustá v prostoru S_2*, platí-li $\bar{N} = S_2$, tj. je-li každý prvek prostoru S_2 hromadným bodem množiny N v tomto prostoru.

Poznámka 6.5. Podle věty 6.4 je množina N hustá v prostoru S_2 právě tehdy, jestliže ke každému prvku u prostoru S_2 lze najít posloupnost $\{u_n\}$ prvků z množiny N, která v S_2 konverguje k prvku u. Nebo také: Množina N je hustá v prostoru S_2, lze-li každý prvek $u \in S_2$ s libovolnou přesností aproximovat prvky množiny N; podrobněji, jestliže ke každému $u \in S_2$ a $\varepsilon > 0$ existuje prvek $v \in N$ tak, že $\varrho(u, v) < \varepsilon$.

Definice 6.12. Existuje-li v S_2 nejvýše spočetná množina, hustá v S_2, nazývá se prostor S_2 *separabilní*.

Poznámka 6.6. Příkladem separabilního prostoru je prostor $L_2(G)$ (viz větu 4.7). Na základě toho lze ukázat (čtenář to snadno provede sám), že i prostor $\mathbf{L}_2(G)$ z příkl. 6.2 je separabilní.

Definice 6.13. Je-li unitární prostor S_2 úplný, nazýváme jej *Hilbertovým prostorem.*

V dalším textu této knihy budeme pro Hilbertův prostor převážně používat symbolu H, majícího popř. různé indexy, bude-li třeba rozlišit dva nebo více uvažovaných Hilbertových prostorů.

Čtenáře upozorňujeme na značnou nejednotnost v definicích Hilbertova prostoru, s kterou se setká v literatuře. Ne všude se žádá úplnost Hilbertova prostoru. Někde se naproti tomu žádá nejen úplnost, ale i separabilnost, někdy se vyslovuje i požadavek, aby v prostoru H ke každému přirozenému n existovalo n lineárně nezávislých prvků. Pokud budeme v této knize mluvit o Hilbertově prostoru, budeme jím vždy rozumět prostor podle def. 6.13, tedy úplný unitární prostor.

Příklad 6.10. Prostory $L_2(G)$ a $\mathbf{L}_2(G)$ z příkl. 6.1 a 6.2 jsou Hilbertovy prostory. Prostor $L_2(G)$ je úplný podle věty 4.3, úplnost prostoru $\mathbf{L}_2(G)$ jsme ukázali v příkl. 6.8. Podle pozn. 6.6 jsou navíc oba prostory separabilní.

Prostor W z příkl. 6.4 není Hilbertův prostor, neboť není úplný (příkl. 6.9).

Další úvahy budeme provádět převážně v Hilbertově prostoru, i když v mnoha definicích i větách bude zřejmé, že požadavek úplnosti je zbytečný. (Na některých závažnějších místech vyznačíme tuto okolnost přímo tím, že příslušnou větu formulujeme pro prostor S_2. Tím spíše pak platí tato věta v Hilbertově prostoru.) Protože celá další tematika této kapitoly je jen analogií kap. 5 a také důkazy příslušných tvrzení, které jsme podrobně provedli v kap. 5, jsou zcela analogické, budeme postupovat stejnou přehlednou formou, jako jsme to učinili v první části této kapitoly.

b) Lineární závislost a nezávislost v Hilbertově prostoru. Ortogonální systémy, Fourierovy řady

Definice 6.14. Říkáme, že $u \in S_2$ je v prostoru S_2 *lineární kombinací* prvků $v_1, \ldots, v_r$ tohoto prostoru, lze-li u vyjádřit v S_2 ve tvaru

$$u = a_1 v_1 + \ldots + a_r v_r \,, \tag{6.25}$$

kde $a_1, \ldots, a_r$ jsou vhodné reálné konstanty.

Definice 6.15. Říkáme, že prvky $u_1, \ldots, u_k$ z S_2 jsou v prostoru S_2 *lineárně závislé*, je-li aspoň jeden z nich lineární kombinací ostatních. V opačném případě říkáme, že jsou v prostoru S_2 *lineárně nezávislé.*

Mluvíme také o *lineárně závislém*, resp. *lineárně nezávislém systému prvků* $u_1, \ldots, u_k$ (v prostoru S_2).

Věta 6.5. *Prvky $u_1 \in S_2, \ldots, u_k \in S_2$ jsou v prostoru S_2 lineárně závislé právě tehdy, je-li jejich Gramův determinant*

$$D(u_1, \ldots, u_k) = \begin{vmatrix} (u_1, u_1), & (u_1, u_2), & \ldots, & (u_1, u_k) \\ (u_2, u_1), & (u_2, u_2), & \ldots, & (u_2, u_k) \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ (u_k, u_1), & (u_k, u_2), & \ldots, & (u_k, u_k) \end{vmatrix}$$

roven nule.

Důsledek: Prvky $u_1, \ldots, u_k$ prostoru S_2 jsou v tomto prostoru lineárně nezávislé právě tehdy, je-li $D \neq 0$.

Poznámka 6.7. Jestliže v prostoru S_2 existuje n lineárně nezávislých prvků, ale každých $n + 1$ prvků z tohoto prostoru je již lineárně závislých, říkáme, že prostor S_2 má *konečnou dimenzi n.* Příkladem takového prostoru je prostor n-rozměrných algebraických vektorů s obvyklými operacemi součtu dvou vektorů a násobení vektorů číslem a s obvyklou definicí skalárního součinu (str. 69). Jestliže ke každému n existuje v prostoru S_2 n lineárně nezávislých prvků, říkáme, že prostor S_2 má *nekonečnou dimenzi.* Příkladem takového prostoru je prostor $L_2(G)$.

Definice 6.16. Prvky u, v prostoru S_2 se nazývají *ortogonální* v tomto prostoru, je-li jejich skalární součin v tomto prostoru roven nule,

$$(u, v) = 0 \,. \tag{6.26}$$

Píšeme

$$u \perp v \,. \tag{6.27}$$

Definice 6.17. Řekneme, že prvek $u \in S_2$ je *normovaný*, jestliže

$$\|u\| = 1 \,.$$

Definice 6.18. Jestliže pro každé dva navzájem různé prvky systému

$$\varphi_1, \varphi_2, \ldots, \varphi_n, \ldots, \quad \varphi_i \in S_2 \,, \quad i = 1, 2, \ldots, \tag{6.28}$$

platí

$$(\varphi_i, \varphi_k) = 0$$

(tj. jestliže prvky tohoto systému jsou navzájem ortogonální), nazývá se systém (6.28) *ortogonální v prostoru S_2.* Jsou-li mimo to jeho prvky v S_2 normované, nazývá se *ortonormovaný* nebo *ortonormální v S_2.*

Příklady některých ortogonálních systémů v prostoru $L_2(G)$ jsme uvedli v kap. 5. Řekneme, že systém prvků

$$\psi_1, \psi_2, \ldots, \psi_n, \ldots, \quad \psi_i \in S_2, \quad i = 1, 2, \ldots,$$

je v prostoru S_2 *lineárně nezávislý*, jestliže každý systém, vytvořený z konečného počtu těchto prvků, je v S_2 lineárně nezávislý ve smyslu def. 6.15.

Vybereme-li z ortonormálního systému (6.28) libovolných j prvků, budou tyto prvky podle věty 6.5 v S_2 lineárně nezávislé, neboť z vlastností ortonormálnosti plyne, že jejich Gramův determinant bude mít v hlavní diagonále samé jedničky a všude jinde nuly, takže bude roven jedné. Tedy *každý systém ortonormální v S_2 je v S_2 lineárně nezávislý.*

Věta 6.6. *Nechť (6.28) je ortonormální systém v Hilbertově prostoru H. Pak řada*

$$\sum_{k=1}^{\infty} a_k \varphi_k, \tag{6.29}$$

kde a_k jsou reálné konstanty, je v prostoru H konvergentní právě tehdy, je-li konvergentní řada

$$\sum_{k=1}^{\infty} a_k^2. \tag{6.30}$$

Čtenář si jistě všiml, že větu 6.6 jsme formulovali pro Hilbertův prostor, nikoli pro prostor S_2. Z důkazu obdobné věty 5.4, str. 53, je totiž vidět, že je třeba požadovat úplnost příslušného prostoru, aby tvrzení věty bylo správné. (Kde jsme tuto úplnost v důkazu věty 5.4. potřebovali?)

Definice 6.19. Nechť (6.28) je ortonormální systém v S_2 a nechť $u \in S_2$. Čísla

$$\alpha_k = (u, \varphi_k), \quad k = 1, 2, \ldots, \tag{6.31}$$

se nazývají *Fourierovy koeficienty prvku u vzhledem k systému* (6.28). Řada

$$\sum_{k=1}^{\infty} \alpha_k \varphi_k \tag{6.32}$$

se nazývá *Fourierova řada* [vzhledem k systému (6.28)], *příslušná prvku u.*

Fourierova řada dává nejlepší aproximaci prvku u v prostoru S_2 mezi všemi řadami typu (6.29) v tomto smyslu:

Věta 6.7. *Nechť (6.28) je ortonormální systém v S_2, u libovolný prvek prostoru S_2. Budiž n libovolné, ale pevně zvolené přirozené číslo. Označme*

$$u_n = \sum_{k=1}^{n} \alpha_k \varphi_k$$

n-tý částečný součet Fourierovy řady, příslušné prvku u,

$$s_n = \sum_{k=1}^{n} a_k \varphi_k$$

částečný součet řady (6.29), kde a_k jsou libovolná reálná čísla. Pak platí

$$\varrho(u, u_n) \leqq \varrho(u, s_n),$$

přičemž tato nerovnost je ostrá, jakmile je $a_k \neq \alpha_k$ aspoň pro jeden z indexů $k = 1, \ldots, n$.

Věta 6.8. *Řada čtverců Fourierových koeficientů libovolného prvku $u \in S_2$ je konvergentní a platí Besselova nerovnost*

$$\sum_{k=1}^{\infty} \alpha_k^2 \leqq \|u\|^2. \tag{6.33}$$

Věta 6.9. *Nechť (6.28) je ortonormální systém v Hilbertově prostoru H a nechť u je libovolný prvek tohoto prostoru. Pak Fourierova řada*

$$\sum_{k=1}^{\infty} \alpha_k \varphi_k, \tag{6.34}$$

příslušná prvku u, je v prostoru H konvergentní. Přitom nutná a postačující podmínka k tomu, aby konvergovala právě k prvku u, je aby byla splněna tzv. Parsevalova rovnost (také *podmínka úplnosti* nebo *podmínka uzavřenosti*)

$$\sum_{k=1}^{\infty} \alpha_k^2 = \|u\|^2. \tag{6.35}$$

Definice 6.20. Ortonormální systém (6.28) se nazývá *úplný v Hilbertově prostoru H*, jestliže pro každé $u \in H$ příslušná Fourierova řada konverguje v H k tomuto prvku, tj. je-li pro každé $u \in H$ splněna rovnost (6.35).

Definice 6.21. Systém (6.28) se nazývá *uzavřený v prostoru H*, jestliže jediný prvek, který je ortogonální ke všem prvkům tohoto systému, je nulový prvek tohoto prostoru.

Věta 6.10. *Ortonormální systém (6.28) je v Hilbertově prostoru úplný právě tehdy, je-li v něm uzavřený.*

Některé příklady úplných ortonormálních systémů v $L_2(G)$ byly uvedeny v předcházející kapitole.

Definice 6.22. Systém (posloupnost)

$$\psi_1, \psi_2, \ldots, \psi_n, \ldots \tag{6.36}$$ [1])

prvků Hilbertova prostoru (nikoli nutně ortonormální) se nazývá *úplný* v tomto prostoru, je-li množina všech lineárních kombinací prvků tohoto prostoru hustá v H, tj. lze-li ke každému prvku $u \in H$ a ke každému $\varepsilon > 0$ najít přirozené číslo n a čísla $a_1^{(n)}, \ldots, a_n^{(n)}$ tak, že platí

$$\varrho(u, \sum_{k=1}^{n} a_k^{(n)} \psi_k) < \varepsilon . \tag{6.37}$$

Je-li mimo to systém (6.36) v H lineárně nezávislý (str. 78), řekneme, že tvoří v prostoru H *bázi*.

Báze v prostoru H je tedy nejvýše spočetný lineárně nezávislý úplný systém v H. Je-li přitom tento systém ortonormální, nazývá se *ortonormální báze* v tomto prostoru.

Poznámka 6.8. K def. 6.22 lze připojit poznámky (týkající se pojmu tzv. *Schauderovy báze* atd.) zcela obdobné pozn. 5.4 a 5.5, str. 60.

Poznámka 6.9. Z požadavku lineární nezávislosti báze (6.36) vyplývá, že vybereme-li z ní libovolný konečný počet prvků, je Gramův determinant, příslušný těmto prvkům, různý od nuly.

Příklady bází, ortonormálních i neortonormálních, byly uvedeny v předcházející kapitole [systémy (5.14), (5.32), (5.33), (5.37), (5.38)].

Není-li systém (6.36) ortonormální, lze jej ortonormalizovat procesem, který byl ukázán v pozn. 5.6, str. 61. Přitom takto vzniklý ortonormální systém je v H úplný právě tehdy, je-li v H úplný systém (6.36),

Lze ukázat, že platí (viz např. [27])

Věta 6.11. *V každém separabilním Hilbertově prostoru existuje báze.*[2])

Na základě toho, co jsme právě řekli o možnosti tuto bázi ortonormalizovat, platí dokonce:

[1]) V této definici připouštíme, že systém (6.36) může být i konečný. Např. v každém prostoru, jehož dimenze je k (srov. pozn. 6.7, str. 77), tvoří každých k lineárně nezávislých prvků bázi.

[2]) Myšlenka důkazu tohoto tvrzení je velmi jednoduchá: Je-li H separabilní, existuje v něm nejvýše spočetná množina, hustá v H. Tuto množinu uspořádáme v posloupnost a vyškrtáme v ní členy, které jsou lineární kombinací předcházejících členů.

Věta 6.12. *V každém separabilním Hilbertově prostoru existuje ortonormální báze.*[1])

Snadno se ukáže (vyplývá to téměř přímo z definice hustoty), že najdeme-li v prostoru S_2 (nejvýše spočetnou) bázi, je prostor S_2 separabilní.

c) Ortogonální podprostory. Některé vlastnosti skalárního součinu

Definice 6.23. Uvažujme lineál N některých prvků Hilbertova prostoru H. Zavedeme-li na tomto lineálu stejnou metriku jako v H, stane se N metrickým prostorem. Je-li N úplný prostor, nazýváme jej (*lineárním*) *podprostorem prostoru H*.

Analogií věty 5.10, str. 64, je tato věta:

Věta 6.13. *Prostor N je lineárním podprostorem prostoru H právě tehdy, je-li množina N uzavřená v H.*

Definice 6.24. Říkáme, že prvek $u \in H$ je *ortogonální k podprostoru N* Hilbertova prostoru H, a píšeme

$$u \perp N ,$$

je-li ortogonální ke všem prvkům tohoto podprostoru.

Věta 6.14. *Nechť N je lineární podprostor Hilbertova prostoru H. Pak každý prvek $u \in H$ lze, a to jednoznačně, rozložit v součet*

$$u = v + w , \tag{6.38}$$

kde $v \in N$ a $w \perp N$.

Prvek v nazýváme *ortogonální projekcí prvku u do podprostoru N.* Viz také příkl. 5.9, str. 64.

Poznámka 6.10. Lze ukázat, že množina všech prvků $w \in H$, ortogonálních k lineárnímu podprostoru N Hilbertova prostoru, je opět lineární podprostor. Označme jej K. O podprostoru K říkáme, že je *ortogonální k podprostoru N*, a píšeme $K \perp N$. Výsledek věty 6.14 pak stručně charakterizujeme zápisem

$$H = N \oplus K \tag{6.39}$$

a říkáme, že daný Hilbertův prostor je *ortogonálním součtem* podprostorů N a K.

[1]) Platí dokonce, jak lze očekávat, ještě více (viz např. [27], [28], [30]): Je-li M hustá množina v separabilním Hilbertově prostoru H, lze bázi (resp. ortonormální bázi) v H zkonstruovat z prvků této množiny.

Prostor K nazýváme *ortogonálním doplňkem* podprostoru N v prostoru H. Píšeme

$$K = H \ominus N . \tag{6.40}$$

Je-li $N = H$ (tento případ není v def. 6.23 vyloučen), pak K obsahuje jen jediný prvek, a to nulový prvek prostoru H.

Uvedeme ještě analogie vět 5.12 až 5.14 z kap. 5. V jejich formulaci užijeme zkráceného zápisu $u_n \to u$, $v_n \to v$, resp. $a_n \to a$, vyjadřujícího, že posloupnost $\{u_n\}$ konverguje v Hilbertově prostoru H k prvku u, posloupnost $\{v_n\}$ k prvku v, resp. číselná posloupnost $\{a_n\}$ konverguje k (reálnému) číslu a.

Věta 6.15. *Je-li $u_n \to u$, $v_n \to v$, pak $(u_n, v_n) \to (u, v)$.*

Zejména tedy, položíme-li v této větě $v_n = v$ pro každé n, resp. $v_n = u_n$ a $v = u$, dostaneme tyto důsledky věty 6.15:

Věta 6.16. *Je-li $u_n \to u$, pak $(u_n, v) \to (u, v)$ pro každé $v \in H$.*

Věta 6.17. *Je-li $u_n \to u$, pak $\|u_n\| \to \|u\|$.*

Důležitá je i analogie věty 5.15:

Věta 6.18. *Je-li $u \in H$ ortogonální ke všem prvkům množiny N husté v Hilbertově prostoru H, pak u je nulový prvek prostoru H.*

d) Komplexní Hilbertův prostor

Poznámka 6.11. V této kapitole jsme uvedli teorii tzv. *reálného Hilbertova prostoru*. V některých případech je užitečné uvažovat Hilbertův prostor s „komplexními" prvky, které tvoří lineál M nad tělesem komplexních čísel, kde tedy v (6.1) (viz pozn. pod čarou na str. 68) jsou $a_1, \ldots, a_n$ čísla komplexní. Typickým příkladem takových „komplexních" prvků jsou komplexní funkce reálné proměnné, tj. funkce tvaru

$$u(x) = u_1(x) + \mathrm{i}\, u_2(x) , \tag{6.41}$$

kde $u_1(x)$ a $u_2(x)$ jsou reálné funkce v některé oblasti G a i je imaginární jednotka.

Zde vznikají některé obtíže. Máme-li zkonstruovat metrický prostor, jehož metrika je indukována skalárním součinem [viz (6.12), (6.13)], je třeba, aby číslo (u, u) bylo nezáporné. Proto je předně třeba na lineálu M definovat skalární součin vhodným způsobem. Kdybychom např. pro funkce (6.41) definovali skalární součin stejně, jako jsme to učinili dříve, tj. předpisem

$$(u, v) = \int_G u(x)\, v(x)\, \mathrm{d}x$$

[kde $v(x) = v_1(x) + \mathrm{i}\, v_2(x)$], nebylo by číslo

$$(u, u) = \int_G u^2(x)\, \mathrm{d}x$$

v obecném případě nezáporné (nebylo by v obecném případě ani reálné). Definujeme-li však

$$(u, v) = \int_G u(x)\, \overline{v(x)}\, \mathrm{d}x , \tag{6.42}$$

kde

$$\overline{v(x)} = v_1(x) - \mathrm{i}\, v_2(x)$$

je funkce komplexně sdružená k funkci $v(x)$, je $u(x)\,\overline{u(x)} = u_1^2(x) + u_2^2(x)$ a číslo

$$(u, u) = \int_G [u_1^2(x) + u_2^2(x)]\, \mathrm{d}x$$

je nezáporné. Čtenář ihned namítne, že pak nebude splněn axióm (6.3),

$$(u, v) = (v, u) ,$$

neboť podle (6.42) je

$$(v, u) = \int_G v(x)\, \overline{u(x)}\, \mathrm{d}x = \int_G \overline{u(x)\, \overline{v(x)}}\, \mathrm{d}x = \overline{(u, v)} ,$$

kde jako obvykle pruhem označujeme hodnoty komplexně sdružené. Lze ukázat, že všechny obtíže s tím spojené, lze jednoduchým způsobem odstranit, žádáme-li, aby skalární součin (u, v) na lineálu M [v obecném případě s komplexními koeficienty v (6.1)] byl definován jako číslo (v obecném případě komplexní), splňující požadavky (axiómy)

$$(u, v) = \overline{(v, u)} , \tag{6.43}$$

$$(a_1 u_1 + a_2 u_2, v) = a_1(u_1, v) + a_2(u_2, v) , \tag{6.44}$$

$$(u, u) \geqq 0 , \tag{6.45}$$

$$(u, u) = 0 \Leftrightarrow u = 0 \text{ v } M . \tag{6.46}$$

První z těchto axiómů je tedy odlišný od axiómů reálného Hilbertova prostoru. S tím souvisí i některé změny v algebře skalárního součinu, neboť z (6.43) a (6.44) např. plyne

$$(u, av) = \overline{(av, u)} = \overline{a(v, u)} = \bar{a}\overline{(v, u)} = \bar{a}(u, v) . \tag{6.47}$$

Vzorec pro skalární násobení z pozn. 6.3 je pak třeba nahradit vzorcem

$$(a_1u_1 + a_2u_2, a_3u_3 + a_4u_4) = a_1\bar{a}_3(u_1, u_3) + a_2\bar{a}_3(u_2, u_3) + \\ + a_1\bar{a}_4(u_1, u_4) + a_2\bar{a}_4(u_2, u_4) .$$

Definujeme-li normu a vzdálenost vztahy (6.12) a (6.13), zůstanou vlastnosti normy i vzdálenosti, vyjádřené vztahy (6.14) až (6.23), nezměněny a také teorie unitárního prostoru a teorie Hilbertova prostoru, vybudovaná na těchto vztazích a uvedená v přehledu v této kapitole, zůstává nezměněna.

Pokud se v dalším textu této knihy setkáme s komplexním Hilbertovým prostorem, upozorníme čtenáře, bude-li tato okolnost vyžadovat na některých místech určité opatrnosti.

Kapitola 7

Některé poznámky k předcházejícím kapitolám Normovaný prostor, Banachův prostor

Hlavním cílem předcházejících kapitol bylo vybudování teorie Hilbertova prostoru, s kterým se budeme v různých formách v dalším textu neustále setkávat. Proto jsme vyšli z pojmu lineární množiny (lineálu) a zavedli jsme na ní skalární součin, normu a vzdálenost; řadu pojmů a výsledků, týkajících se metrických prostorů, jsme uvedli jen pro tento lineární případ. V této kapitole chceme aspoň ve stručnosti obrátit čtenářovu pozornost k otázkám, které pojmy (popř. výsledky) lze, resp. nelze rozšířit na prostory, které nejsou lineární. Čtenář, který se chce pokud možno nejrychleji seznámit s variačními metodami v dalších kapitolách, může tuto kapitolu zatím vynechat.

Při definici skalárního součinu v předcházející kapitole jsme upozornili na to, že je podstatné, aby množina, na níž skalární součin zavádíme, byla lineálem, mají-li být splněny všechny uvedené axiómy skalárního součinu. Neboť přímo v těchto axiómech mluvíme o součtu prvků množiny M a o jejich násobení libovolným reálným číslem (a tím také o libovolné lineární kombinaci těchto prvků). Pokud jde o definici metrického prostoru, není nikterak třeba, aby metrika v něm byla „indukována“ skalárním součinem, a již na str. 29 jsme viděli, že k tomu, abychom mohli zavést na některé množině M metriku, nepotřebujeme, aby množina M byla lineálem. Totéž se týká mnoha dalších pojmů (konvergence v metrickém prostoru, úplnosti, hustoty, separabilnosti atd.).

Definice, které zde uvedeme pro tento obecnější případ, jsou téměř doslova stejné, jako byly námi uvedené definice pro případ lineárních prostorů, a stačilo by odkázat čtenáře na tyto definice s tím, aby v nich provedl jen formální změny (např. aby v některých definicích kap. 6 nahradil prostor S_2 obecným metrickým prostorem). Pokládáme však za mnohem účelnější uvést zde tyto definice a příslušné základní výsledky v přehledu, a to přímo ve znění, na které se budeme později odvolávat.

Definice 7.1. Množinu M nazýváme *metrickým prostorem*, jestliže pro každou dvojici u, v jejích prvků je definována vzdálenost $\varrho(u, v)$, která splňuje tyto tzv. *axiómy metriky* (u, v, z jsou libovolné prvky množiny M):

$$\varrho(u, v) \geqq 0 , \tag{7.1}$$

$$\varrho(u, v) = 0 \Leftrightarrow u = v \text{ v } M , \tag{7.2}$$

$$\varrho(u, v) = \varrho(v, u) , \tag{7.3}$$

$$\varrho(u, z) \leqq \varrho(u, v) + \varrho(v, z) . \tag{7.4}$$

Definice 7.2. Říkáme, že posloupnost prvků u_n metrického prostoru P *konverguje v tomto prostoru k prvku* $u \in P$, jestliže

$$\lim_{n\to\infty} \varrho(u_n, u) = 0 . \tag{7.5}$$

Píšeme

$$\lim_{n\to\infty} u_n = u \text{ v } P \tag{7.6}$$

a prvek u nazýváme *limitou* nebo *limitním prvkem posloupnosti* $\{u_n\}$ v prostoru P.

Věta 7.1. *Posloupnost* $\{u_n\}$ *může mít v metrickém prostoru* P *nejvýše jednu limitu.*

Definice 7.3. Posloupnost prvků u_n metrického prostoru P se nazývá *cauchyovská* (*fundamentální*) v tomto prostoru, platí-li

$$\lim_{\substack{m\to\infty \\ n\to\infty}} \varrho(u_m, u_n) = 0 ;$$

podrobně: lze-li ke každému $\varepsilon > 0$ najít číslo n_0 tak, že je-li zároveň $m > n_0$, $n > n_0$, platí

$$\varrho(u_m, u_n) < \varepsilon .$$

Věta 7.2. *Každá posloupnost* $\{u_n\}$, *která konverguje v metrickém prostoru* P *k některému prvku* $u \in P$, *je v tomto prostoru cauchyovská.*

Jak jsme viděli v předcházejících kapitolách, ne každá cauchyovská posloupnost je v obecném metrickém prostoru P konvergentní.

Definice 7.4. Metrický prostor P se nazývá *úplný*, jestliže každá posloupnost $\{u_n\}$, cauchyovská v prostoru P, konverguje v tomto prostoru k některému prvku $u \in P$.

Poznámka 7.1. K metrickému prostoru, který není úplný, lze zkonstruovat úplný prostor, tzv. *úplný obal daného prostoru*, přidáním tzv. *ideálních elementů*. Pro speciální případ viz poměrně jednoduchou konstrukci v kap. 10.

Definice 7.5. Buď $\delta > 0$. *δ-okolím (δ-sférou) prvku u* v metrickém prostoru P rozumíme množinu všech prvků $v \in P$, pro něž platí

$$\varrho(u, v) < \delta . \tag{7.7}$$

Definice 7.6. Nechť N je některá množina prvků metrického prostoru P. Říkáme, že prvek $u \in P$ je *hromadným bodem množiny N* v tomto prostoru, jestliže v každém libovolně malém δ-okolí prvku u leží nekonečně mnoho prvků z množiny N.

Hromadný bod množiny N v prostoru P může, ale nemusí patřit do N.

Věta 7.3. *Prvek u metrického prostoru P je hromadným bodem množiny N v tomto prostoru právě tehdy, existuje-li posloupnost prvků $u_n \in N$, $u_n \neq u$, která konverguje v P k prvku u.*

Definice 7.7. Množina $\bar{N}$, která je sjednocením prvků množiny N a všech jejích hromadných bodů v prostoru P, se nazývá *uzávěr množiny N* v tomto prostoru. Je-li $\bar{N} = N$ (tj. patří-li každý hromadný bod množiny N do této množiny), řekneme, že množina N je v prostoru P *uzavřená*.

Věta 7.4. *Nechť P je úplný metrický prostor. Množina $N \subset P$ s metrikou prostoru P je sama úplným metrickým prostorem právě tehdy, je-li v prostoru P uzavřená.*

Srov. také větu 6.13, str. 81.

Definice 7.8. Množina N se nazývá *hustá v metrickém prostoru P*, platí-li $\bar{N} = P$, tj. je-li každý prvek prostoru P hromadným bodem množiny N v tomto prostoru.

Poznámka 7.2. Z této definice a z definice hromadného bodu plyne: *Množina N je hustá v P právě tehdy, lze-li každý prvek $u \in P$ s libovolnou přesností aproximovat prvky z množiny N, tj. lze-li ke každému prvku $u \in P$ a ke každému $\varepsilon > 0$ najít prvek $v \in N$ tak, že $\varrho(u, v) < \varepsilon$.*

Z def. 7.8 a z věty 7.3 dále plyne:

Věta 7.5. *Množina N je hustá v metrickém prostoru P právě tehdy, jestliže ke každému prvku $u \in P$ existuje posloupnost $\{u_n\}$ prvků množiny N, která konverguje v prostoru P k prvku u.*

Definice 7.9. Metrický prostor P se nazývá *separabilní*, existuje-li v něm nejvýše spočetná[1]) množina N, hustá v tomto prostoru.

V závěru této kapitoly uvedeme ještě tuto definici:

Definice 7.10. Nechť M je lineál. Přiřaďme každému prvku $u \in M$ reálné číslo $\|u\|$, tzv. *normu prvku u*, mající tyto vlastnosti (tj. splňující následující tzv. *axiómy normy*):

$$\|u\| \geqq 0 , \tag{7.8}$$

$$\|u\| = 0 \Leftrightarrow u = 0 \text{ v } M, \text{}^2) \tag{7.9}$$

$$\|au\| = |a| \, \|u\| \quad \text{pro každé } a, \text{}^3) \tag{7.10}$$

$$\|u + v\| \leqq \|u\| + \|v\| \quad \text{pro každé dva prvky } u, v \text{ z lineálu } M . \tag{7.11}$$

Lineál M, na němž je definována norma s vlastnostmi (7.8) až (7.11), nazveme *lineárním normovaným prostorem*.

Položíme-li v tomto prostoru

$$\varrho(u, v) = \|u - v\| , \tag{7.12}$$

ověříme snadno (pro speciální případ jsme to učinili již v kap. 2), že $\varrho(u, v)$ splňuje všechny axiómy metriky. Prostor M s metrikou (7.12) je tedy lineární normovaný metrický prostor.

Definice 7.11. Lineární normovaný metrický prostor, úplný v metrice (7.12), se nazývá *Banachův prostor* nebo *prostor typu B*.

Příkladem Banachova prostoru je prostor $L_2(G)$, obecněji každý Hilbertův prostor s normou $\|u\| = \sqrt{(u, u)}$.

Poznámka 7.3. Ze (7.11) snadno plyne (viz důkaz věty 2.2, str. 25) nerovnost

$$\big| \|u\| - \|v\| \big| \leqq \|u - v\| . \tag{7.13}$$

Dále si všimněme, že v prostoru s metrikou (7.12) je konvergence posloupnosti $\{u_n\}$ k prvku u_0 charakterizována vztahem

$$\lim_{n \to \infty} \|u_n - u_0\| = 0 , \tag{7.14}$$

---

[1]) Tedy spočetná množina nebo množina obsahující jen konečný počet prvků.

[2]) Tj. u je nulový prvek lineálu M.

[3]) Reálné, resp. komplexní podle toho, jde-li o reálný, resp. komplexní normovaný prostor.

cauchyovská posloupnost $\{u_n\}$ je charakterizována vztahem

(7.15) $$\lim_{\substack{m\to\infty\\ n\to\infty}} \|u_m - u_n\| = 0\,.$$

Odtud ihned plyne:

Věta 7.6. *Je-li v prostoru s metrikou* (7.12)

(7.16) $$\lim_{n\to\infty} u_n = u_0\,,$$

pak

(7.17) $$\lim_{n\to\infty} \|u_n\| = \|u_0\|\,.$$

Důkaz: Podle (7.13) máme

$$\big|\|u_n\| - \|u_0\|\big| \leqq \|u_n - u_0\|\,,$$

odkud podle (7.14) plyne

$$\lim_{n\to\infty} \big|\|u_n\| - \|u_0\|\big| = 0\,,$$

což implikuje (7.17).

Věta 7.7. *Je-li v prostoru s metrikou* (7.12) *posloupnost* $\{u_n\}$ *cauchyovská, pak posloupnost* $\{\|u_n\|\}$ *příslušných norem je konvergentní.*

Důkaz: Podle Cauchyovy - Bolzanovy věty [srov. (4.12), str. 42] stačí dokázat, že číselná posloupnost $\{\|u_n\|\}$ je cauchyovská. Avšak z nerovnosti

$$\big|\|u_m\| - \|u_n\|\big| \leqq \|u_m - u_n\|$$

a ze (7.15) okamžitě plyne

$$\lim_{\substack{m\to\infty\\ n\to\infty}} \big|\|u_m\| - \|u_n\|\big| = 0\,,$$

což znamená, že $\{\|u_n\|\}$ je cauchyovská posloupnost.

Protože, jak známo, každá číselná konvergentní posloupnost je omezená, dostáváme jako důsledek vět 7.6 a 7.7 tuto větu:

Věta 7.8. *Je-li v prostoru s metrikou* (7.12) *posloupnost* $\{u_n\}$ *konvergentní nebo aspoň cauchyovská, pak je omezená.* Podrobněji: *Existuje číslo K takové, že*

(7.18) $$\|u_n\| \leqq K \quad \textit{pro všechna } n\,.$$

Kapitola 8
Operátory a funkcionály, zejména v Hilbertově prostoru

V dalším textu budou středem naší pozornosti rovnice tvaru

(8.1) $$Au = f\,,$$

kde A je určitý operátor, v aplikacích nejčastěji diferenciální operátor, f je daný prvek (zpravidla funkce uvažovaná jako prvek některého Hilbertova prostoru, např. prostoru $L_2(G)$) a u je hledané řešení. Abychom blíže objasnili význam rovnice (8.1), uveďme jednoduchý příklad.

Příklad 8.1. Uvažujme rovinnou oblast G s hranicí Γ.[1]) Označme, jako dříve, $\bar{G} = G + \Gamma$ příslušnou uzavřenou oblast a řešme na oblasti G Dirichletův problém pro Poissonovu rovnici,

(8.2) $$\Delta u \equiv \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = f(x, y)$$

(Δ je Laplaceův operátor),

(8.3) $$u = 0 \quad \text{na } \Gamma\,.$$

O funkci $f(x, y)$ zatím předpokládejme, že je spojitá v uzavřené oblasti $\bar{G}$.

Najít tzv. *klasické řešení problému* (8.2), (8.3) znamená najít funkci $u(x, y)$, která je spojitá v uzavřené oblasti $\bar{G}$, splňuje v (otevřené) oblasti G rovnici (8.2) a je rovna nule na hranici Γ. Vzhledem k tomu, že funkce $f(x, y)$ je podle předpokladu spojitá v $\bar{G}$, je přirozené[2]) hledat řešení problému (8.2), (8.3) mezi funkcemi, které patří do $C^{(2)}(\bar{G})$ (tj. jsou spojité v $\bar{G}$ i s parciálními derivacemi do druhého řádu včetně, viz str. 15) a na Γ jsou rovny nule. Množina těchto funkcí tvoří (při obvyklé definici součtu dvou funkcí a násobení funkce konstantou) lineál — označme jej M_1 —, neboť jsou-li u_1, u_2 dvě libovolné funkce z M_1 a a_1, a_2 libovolná (reálná) čísla, je funkce $a_1u_1 + a_2u_2$ rovněž z $C^{(2)}(\bar{G})$ a splňuje podmínku $u = 0$ na Γ, patří tedy také do M_1. Danou úlohu pak formulujeme takto: Máme najít takovou funkci u z lineálu M_1, která splňuje rovnici

$$\Delta u = f\,.$$

[1]) Podle toho, co jsme řekli v kap. 2, rozumíme v této knize oblastí omezenou oblast s hranicí, popsanou v kap. 2 a přesně charakterizovanou v kap. 28 (oblast s tzv. lipschitzovskou hranicí).

[2]) O těchto otázkách budeme podrobně mluvit v dalších kapitolách.

Nebo ještě stručněji: Máme řešit rovnici

$$\Delta u = f \tag{8.4}$$

na lineálu M_1. V souvislosti s tím mluvíme o lineálu M_1 jako o oboru, na němž operátor Δ uvažujeme, stručně jako o *definičním oboru* daného operátoru. Na prvky tohoto oboru pak aplikujeme operaci

$$\Delta u = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2},$$

která každé funkci $u \in M_1$ přiřazuje funkci

$$v = \Delta u\,, \tag{8.5}$$

spojitou v $\bar{G}$. Množina všech funkcí v, kterou dostaneme podle (8.5) pro všechny funkce $u \in M_1$, tvoří zřejmě opět lineál, označme jej N. Lineál N nazveme *oborem hodnot* daného operátoru.

Poznámka 8.1. Je-li definiční obor daného diferenciálního operátoru již specifikován, stačí daný problém s okrajovými podmínkami zapsat jedinou rovnicí

$$Au = f\,,$$

v našem příkladě rovnicí (8.4). Tento zápis zahrnuje i okrajové podmínky, které jsou právě zachyceny vhodnou volbou definičního oboru daného operátoru. V našem příkladě, kdy šlo o řešení rovnice (8.2) s okrajovou podmínkou (8.3), jsme za definiční obor operátoru Δ zvolili lineál M_1. Funkce z tohoto lineálu jsou rovny nule na hranici Γ, a tedy již splňují okrajovou podmínku (8.3).

Po tomto stručném úvodu přikročíme k obecné definici operátoru.

a) Operátory v Hilbertově prostoru

Definice 8.1. Nechť jsou dány dvě množiny M_1 a M_2. Říkáme, že na množině M_1 je definován *operátor A, zobrazující množinu M_1 do množiny M_2*, je-li dán předpis, podle kterého je každému prvku $u \in M_1$ jednoznačně přiřazen určitý prvek $v \in M_2$. Píšeme

$$v = Au\,.\text{[1]} \tag{8.6}$$

Množině M_1 říkáme *definiční obor operátoru A*. Množinu N všech $v \in M_2$, kterou dostaneme podle (8.6) pro všechna $u \in M_1$, nazýváme *oborem hodnot operátoru A*. Označujeme ji R_A.

[1]) V právě definovaném smyslu se často mluví také o *zobrazení množiny M_1 do množiny M_2*. Prvku u pak říkáme vzor, prvku $v = Au$ obraz vzoru u.

Definice 8.2. Je-li $R_A = M_2$, říkáme, že *operátor A zobrazuje množinu M_1 na množinu M_2*.

Zobrazení množiny M_1 *na* množinu M_2 (kdy tedy je $R_A = M_2$) je zřejmě speciálním případem zobrazení množiny M_1 *do* množiny M_2 (kdy žádáme, jen aby bylo $R_A \subset M_2$).

Definici 8.2 je zřejmě možno vyslovit v této ekvivalentní formě:

Definice 8.3. Řekneme, že *operátor A zobrazuje množinu M_1 na množinu M_2*, jestliže ji zobrazuje do množiny M_2 a jestliže ke každému prvku $v \in M_2$ existuje aspoň jeden prvek $u \in M_1$ takový, že $Au = v$.

Protože jedním z hlavních úkolů této knihy je seznámit čtenáře s použitím variačních metod k řešení diferenciálních rovnic s okrajovými podmínkami, budou středem naší pozornosti diferenciální operátory. Klasickým příkladem operátoru, který není diferenciální, je čtvercová matice $\boldsymbol{A}$ n-tého stupně, která podle předpisu

$$\boldsymbol{v} = \boldsymbol{A}\boldsymbol{u}$$

přiřazuje každému vektoru

$$\boldsymbol{u} = \begin{pmatrix} u_1 \\ \vdots \\ u_n \end{pmatrix}$$

z lineálu V všech n-rozměrných vektorů vektor

$$\boldsymbol{v} = \begin{pmatrix} v_1 \\ \vdots \\ v_n \end{pmatrix}$$

z téhož lineálu. [Přitom $\boldsymbol{Au}$ je obvyklý součin matic, viz např. [35], str. 76, uvažujeme-li vektor $\boldsymbol{u}$ jako matici typu $(n, 1)$.]

Je-li matice $\boldsymbol{A}$ regulární, je vztahem $\boldsymbol{v} = \boldsymbol{Au}$ dáno zobrazení lineálu V *na* lineál V. Ke každé regulární matici $\boldsymbol{A}$ existuje totiž inverzní matice $\boldsymbol{A}^{-1}$ (viz např. větu 6 v [35], str. 77), takže ke každému $\boldsymbol{v} \in V$ existuje $\boldsymbol{u} \in V$ (je $\boldsymbol{u} = \boldsymbol{A}^{-1}\boldsymbol{v}$) tak, že $\boldsymbol{Au} = \boldsymbol{v}$.

Příklad 8.2. Definičním oborem operátoru Δ z příkl. 8.1 je lineál M_1 funkcí, patřících do $C^{(2)}(\bar{G})$ a rovných nule na Γ. Operátor Δ zobrazuje lineál M_1 do lineálu M_2 funkcí spojitých v $\bar{G}$, neboť je-li $u \in M_1$, je

$$v = \Delta u = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}$$

funkce spojitá v $\bar{G}$. Na tomto místě nedovedeme rozhodnout, jde-li zároveň o zobrazení *na* lineál M_2, neboť zatím nevíme, zda ke každé spojité funkci $v \in M_2$ lze najít funkci $u \in M_1$ takovou, že $\Delta u = v$. [Čtenář si snadno rozmyslí, že tato otázka je ekvivalentní otázce, má-li Dirichletův problém (8.2), (8.3) řešení $u \in M_1$ pro každou spojitou pravou stranu $f \in M_2$.]

Definice 8.4. O dvou operátorech A, B řekneme, že jsou si *rovny*, píšeme $A = B$, je-li jejich definičním oborem táž množina M a je-li zároveň $Au = Bu$ pro každé $u \in M$.[1])

K této definici poznamenejme toto: Za definiční obor Laplaceova operátoru z příkl. 8.1 jsme zvolili lineál M_1 funkcí patřících do $C^{(2)}(\bar{G})$ a rovných nule na hranici Γ. Takový definiční obor bylo vhodné zvolit k účelu, který jsme sledovali, tj. k hledání řešení uvažovaného Dirichletova problému (8.2), (8.3). Pokud jde o samotný operátor, má smysl definovat jej i na jiných množinách. Zvolme např. za jeho definiční obor lineál N_1 funkcí, které patří rovněž do $C^{(2)}(\bar{G})$, které však nemusí nutně splňovat podmínku $u = 0$ na Γ. Zřejmě každá funkce $u \in M_1$ patří také do N_1, avšak každá funkce $u \in N_1$ nemusí patřit do M_1, neboť nemusí být rovna nule na Γ (např. nenulová funkce konstantní v $\bar{G}$). Lineál N_1 je tedy širší než lineál M_1, tj. $M_1 \subset N_1$ a přitom $M_1 \neq N_1$. Označme A operátor Δ s definičním oborem M_1, B operátor Δ s definičním oborem N_1. Podle def. 8.4 je $A \neq B$, neboť uvedené definiční obory jsou různé. Později, až se budeme zabývat pojmy symetrie, pozitivnosti atd., uvidíme, že uvedené operátory A, B mají skutečně podstatně různé vlastnosti.

Poznamenali jsme již, že pro právě uvažovaný případ definičních oborů M_1, resp. N_1, operátorů A, resp. B, platí $M_1 \subset N_1$, přičemž tato inkluze je ostrá, tj. $M_1 \neq N_1$. Zároveň pro každé $u \in M_1$ je

$$Au = Bu \; (= \Delta u) .$$

V takovém případě řekneme, že operátor B je *rozšířením* operátoru A. Uvedeme definici pro obecný případ. V této definici použijeme označení D_A, resp. D_B pro definiční obor operátoru A, resp. B, které je v literatuře obvyklé a kterého budeme běžně používat v dalším textu.

Definice 8.5. Mějme operátory A, resp. B s definičními obory D_A, resp. D_B. Je-li $D_A \subset D_B$ $(D_A \neq D_B)$ a platí-li zároveň

$$Au = Bu \quad \text{pro každé} \quad u \in D_A ,$$

řekneme, že operátor B je *rozšířením operátoru* A.

V souvislosti s touto problematikou poznamenejme na tomto místě ještě toto: Podle def. 8.1 je operátor dán jednak svým definičním oborem, který jsme v citované definici označili M_1, jednak operací $v = Au$, kterou je dáno zobrazení množiny M_1

[1]) Rovností $Au = Bu$ rozumíme ovšem rovnost prvků Au a Bu v množině M_2, do níž operátory A, B zobrazují množinu M. Je-li např. $M_2 = L_2(G)$, mohou se funkce Au a Bu lišit v G na množině míry nula.

do množiny M_2. Je-li z textu jasné, o jaký definiční obor operátoru A jde, vyjadřujeme se často stručněji, i když nepřesně. Např. mluvíme o operátoru Δ, místo abychom mluvili o operátoru A, jehož definičním oborem je uvažovaná množina funkcí a který je dán na této množině předpisem $v = \Delta u$. Tohoto stručného způsobu vyjadřování budeme často používat, pokud ovšem bude z předcházejícího textu jasné, jaký definiční obor máme na mysli, aby nemohlo dojít k nedorozumění.

V def. 8.4 jsme definovali rovnost dvou operátorů, a to způsobem velmi podobným tomu, jak se zavádí rovnost dvou funkcí v klasické analýze. Obdobně zavádíme i součet dvou operátorů. Určitou modifikaci potřebuje definice součinu:

Definice 8.6. *Součet* $A + B$ a *součin* AB operátorů A, B s definičními obory D_A, resp. D_B, je definován vztahy

$$(A + B)u = Au + Bu , \tag{8.7}$$

$$(AB)u = A(Bu) . \tag{8.8}$$

Přitom operátor $A + B$ je definován na průniku oborů D_A a D_B, operátor AB na množině D_{AB} těch prvků $u \in D_B$, pro které je $Bu \in D_A$.

Požadavky kladené na definiční obory operátorů $A + B$ a AB jsou zcela přirozené: V případě operátoru $A + B$ je definičním oborem průnik definičních oborů D_A a D_B obou operátorů, tedy množina prvků patřících jak do D_A, tak do D_B, neboť potřebujeme, aby měly smysl obě operace Au a Bu na pravé straně rovnosti (8.7). V případě součinu AB je definičním oborem D_{AB} množina těch $u \in D_B$, pro které Bu leží v definičním oboru D_A operátoru A, neboť podle předpisu (8.8) je třeba na prvek Bu aplikovat právě operátor A.

Poznámka 8.2. V obecném případě je $BA \neq AB$, jak vyplývá již z toho, co bylo řečeno o definičním oboru součinu dvou operátorů. Ale ani když je $D_{BA} = D_{AB}$, nemusí platit $BA = AB$, jak je vidět z tohoto příkladu:

Nechť V je lineál všech dvojrozměrných vektorů (srov. str. 68) a nechť

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1, & 1 \\ 2, & -1 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{B} = \begin{pmatrix} 1, & 1 \\ -1, & 1 \end{pmatrix}$$

jsou matice zobrazující V do V. Zřejmě je $D_{\mathbf{A}} = V$, $D_{\mathbf{B}} = V$ a také $D_{\mathbf{AB}} = V$, $D_{\mathbf{BA}} = V$. Přitom (srov. např. [35], str. 76)

$$\mathbf{AB} = \begin{pmatrix} 1, & 1 \\ 2, & -1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1, & 1 \\ -1, & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0, & 2 \\ 3, & 1 \end{pmatrix},$$

$$\mathbf{BA} = \begin{pmatrix} 1, & 1 \\ -1, & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1, & 1 \\ 2, & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3, & 0 \\ 1, & -2 \end{pmatrix},$$

takže $AB \neq BA$. (Např. pro vektor

$$u = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

je

$$ABu = \begin{pmatrix} 0, & 2 \\ 3, & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \end{pmatrix},$$

$$BAu = \begin{pmatrix} 3, & 0 \\ 1, & -2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \end{pmatrix}.)$$

Operátory A, B, pro které platí $BA = AB$, se nazývají *komutativní*.

Definice 8.7. Operátor A se nazývá *prostý* na svém definičním oboru D_A, jestliže pro každé dva prvky $u_1 \neq u_2$ z D_A je

$$Au_1 \neq Au_2 . \tag{8.9}$$

Srov. ovšem poznámku pod čarou na str. 92.

Poznámka 8.3. Uvažujme operátor A, zobrazující množinu M_1 na množinu M_2 a přitom prostý na množině M_1. Z definice zobrazení množiny M_1 *na* množinu M_2 (viz def. 8.3) plyne, že každému prvku $v \in M_2$ odpovídá aspoň jeden prvek $u \in M_1$ takový, že $Au = v$. Z předpokladu, že operátor A je na množině M_1 prostý, plyne, že každému $v \in M_2$ odpovídá dokonce právě jeden prvek $u \in M_1$ takový, že $Au = v$. Neboť kdyby mu odpovídaly dva různé prvky[1]) u_1, u_2, platilo by

$$v = Au_1 = Au_2$$

ve sporu s předpokladem (8.9). Tato vlastnost prostého zobrazení *na* množinu vede k této důležité definici:

Definice 8.8. Nechť operátor A zobrazuje množinu M_1 na množinu M_2 a nechť je prostý. Operátor B, který přiřazuje každému prvku $v \in M_2$ právě ten prvek $u \in M_1$, pro který platí $v = Au$, se nazývá *operátor inverzní k operátoru A*. Označení A^{-1}.

Z definice zřejmě plyne, že pro všechna $u \in M_1$ a pro všechna $v \in M_2$ platí

$$A^{-1}Au = u\,, \quad AA^{-1}v = v\,. \tag{8.10}$$

Příklad 8.3. Uvažujme operátor A z příkl. 8.1, tj. operátor Δ s definičním oborem M_1, jehož prvky tvoří funkce z $C^{(2)}(\bar{G})$ rovné nule na Γ. Jako v citovaném příkladě označme obor hodnot operátoru A symbolem N. Přímo z definice oboru hodnot

[1]) Nebo více takových prvků.

operátoru A plyne, že operátor A zobrazuje lineál M_1 na lineál N. Tvrdíme, že toto zobrazení je prosté. Tato okolnost vyplývá z věty o jednoznačnosti řešení Dirichletova problému (8.2), (8.3) (viz [35], str. 733).[1]) Kdyby totiž k některému $v \in N$ existovaly dva různé prvky u_1, u_2 z M_1 tak, že by platilo $Au_1 = v$, $Au_2 = v$, měl by Dirichletův problém

$$\Delta u = v\,, \quad u = 0 \text{ na } \Gamma \tag{8.11}$$

dvě různá řešení u_1, u_2 z M_1, ve sporu s citovanou větou. Uvažovaný operátor je tedy prostý. Podle pozn. 8.3 odpovídá tedy každému $v \in N$ právě jedno $u \in M_1$ tak, že $\Delta u = v$. Existuje tedy inverzní operátor A^{-1}, přiřazující každému $v \in N$ příslušné řešení u Dirichletova problému (8.11). Jak jsme se již zmínili v příkl. 8.2, nemáme na tomto místě možnost rozhodnout, patří-li do N všechny funkce, spojité v uzavřené oblasti $\bar{G}$, tj. má-li Dirichletův problém (8.11) řešení $u \in M$ pro každou pravou stranu v, spojitou v $\bar{G}$.

Definice 8.9. Operátor A se nazývá *lineární*, je-li jeho definičním oborem D_A lineál a platí-li pro libovolné prvky $u_1, \ldots, u_n$ z D_A a pro libovolná (reálná) čísla $a_1, \ldots, a_n$

$$A(a_1u_1 + \ldots + a_nu_n) = a_1Au_1 + \ldots + a_nAu_n\,. \tag{8.12}$$

Definici 8.9 lze vyslovit v této zřejmě ekvivalentní formě:

Definice 8.10. Operátor A se nazývá *lineární*, je-li jeho definičním oborem D_A lineál a platí-li

$$1. \quad A(au) = aAu \quad \text{pro každé } u \in D_A \text{ a pro každé (reálné) číslo } a\,, \tag{8.13}$$

$$2. \quad A(u_1 + u_2) = Au_1 + Au_2 \quad \text{pro všechna } u_1 \in D_A,\ u_2 \in D_A\,. \tag{8.14}$$

Neboť zřejmě z (8.12) plynou (8.13) a (8.14) jako speciální případy. Naopak, platí-li (8.13) a (8.14), je pro každé $u_1 \in D_A$, $u_2 \in D_A$ a pro libovolná reálná čísla a_1, a_2

$$A(a_1u_1 + a_2u_2) = A(a_1u_1) + A(a_2u_2) = a_1Au_1 + a_2Au_2\,,$$

odkud ihned (důkaz např. indukcí) plyne (8.12).

Příkladem lineárního operátoru je operátor A, daný na lineálu $C^{(1)}(a, b)$ (viz str. 15) předpisem

$$Au = \frac{du}{dx}\,,$$

[1]) Později (viz větu 9.1, str. 120) dokážeme jednoznačnost řešení jiným způsobem, neopírajícím se o věty klasické teorie parciálních diferenciálních rovnic.

neboť předně množina $C^{(1)}(a, b)$ je zřejmě lineál, a za druhé ze známých pravidel o derivování plyne

$$A(au) = \frac{d(au)}{dx} = a\frac{du}{dx} = a\,Au\,,$$

$$A(u_1 + u_2) = \frac{d(u_1 + u_2)}{dx} = \frac{du_1}{dx} + \frac{du_2}{dx} = Au_1 + Au_2\,.$$

Lineární operátory mají, jak uvidíme, velmi důležitý význam v aplikacích.

Poznámka 8.4. Na základě vlastností (8.13), (8.14) lineárního operátoru A lze snadno ukázat, že obor R_A jeho hodnot je opět lineál. Mimoto je zřejmé [stačí v (8.13) psát $a = 0$], že nulovému prvku lineálu D_A odpovídá nulový prvek lineálu R_A, tj. že $A0 = 0$ v R_A. Existuje-li dále k lineárnímu operátoru A inverzní operátor A^{-1} (definovaný na lineálu R_A), pak A^{-1} je v R_A také lineární operátor. Nechť totiž a je libovolné reálné číslo a nechť v_1, v_2 jsou libovolné prvky z R_A. Máme ukázat, že platí $A^{-1}(av_1) = aA^{-1}v_1$, $A^{-1}(v_1 + v_2) = A^{-1}v_1 + A^{-1}v_2$. Jak plyne z definice inverzního operátoru, je

$$A^{-1}v_1 = u_1\,, \quad A^{-1}v_2 = u_2\,,$$

kde u_1, u_2 jsou prvky z D_A, jednoznačně určené danými prvky $v_1, v_2 \in R_A$ takové, že

$$Au_1 = v_1\,, \quad Au_2 = v_2\,.$$

Ale A je lineární operátor, takže

$$A(au_1) = aAu_1 = av_1\,, \quad A(u_1 + u_2) = Au_1 + Au_2 = v_1 + v_2\,.$$

Odtud a z (8.10) plyne

$$A^{-1}(av_1) = A^{-1}A(au_1) = au_1 = aA^{-1}v_1\,, \quad A^{-1}(v_1 + v_2) = A^{-1}A(u_1 + u_2) =$$
$$= u_1 + u_2 = A^{-1}v_1 + A^{-1}v_2\,,$$

čímž je lineárnost operátoru A^{-1} na lineálu R_A dokázána.

Z lineárnosti operátoru A^{-1} mimo jiné plyne: Existuje-li k lineárnímu operátoru inverzní operátor A^{-1}, pak nulovému prvku lineálu R_A odpovídá nulový prvek lineálu D_A, tj. platí $A^{-1}0 = 0$ v D_A.

Často je užitečná tato věta:

Věta 8.1. *Nechť operátor A je lineární v lineálu D_A a nechť R_A je obor jeho hodnot. Pak k operátoru A existuje inverzní operátor A^{-1} právě tehdy, jestliže platí*

$$(8.15) \qquad Au = 0 \;\; v \;\; R_A \Rightarrow u = 0 \;\; v \;\; D_A\,.$$

Důkaz: 1. Nechť k operátoru A existuje inverzní operátor A^{-1}, jehož definičním oborem je tedy lineál R_A. Nechť u je nějaký prvek lineálu D_A, pro který platí

$$(8.16) \qquad Au = 0 \;\; v \;\; R_A\,.$$

Z (8.16) plyne $A^{-1}Au = A^{-1}0 = 0$ v D_A (srov. předcházející poznámku), odkud podle (8.10) je $u = 0$ v D_A.

2. Nechť naopak platí (8.15). Máme dokázat, že k operátoru A existuje v R_A inverzní operátor A^{-1}. K tomu účelu stačí dokázat, že zobrazení lineálu D_A na lineál R_A je prosté, tj. že platí

$$u_1 \neq u_2 \Rightarrow Au_1 \neq Au_2\,.$$

Kdyby však pro $u_1 \neq u_2$ bylo $Au_1 = Au_2$, bylo by, jak plyne z lineárnosti operátoru A

$$A(u_1 - u_2) = 0 \quad a \quad u_1 - u_2 \neq 0\,,$$

což je ve sporu s (8.15). Tím je věta 8.1 dokázána.

Tedy požadavek, aby zobrazení lineálu D_A na lineál R_A bylo prosté, což je postačující podmínka k existenci inverzního operátoru, stačí v případě lineárního operátoru „nahradit" požadavkem (8.15). Tato skutečnost často značně zjednodušuje některé úvahy.

V dalším textu se budeme zabývat především lineárními operátory, zejména v Hilbertově prostoru. S těmito operátory se totiž v naší knize nejčastěji setkáme. Ukažme však aspoň jeden příklad operátoru, důležitého zejména v problematice numerických metod, který v obecném případě není lineární:

Nechť P je metrický prostor s metrikou ϱ. Operátor A, zobrazující prvky tohoto prostoru opět do prostoru P (tj. zobrazující množinu prvků prostoru P do téže množiny) se nazývá *kontraktivní* (*kontrahující*) v tomto prostoru, existuje-li takové číslo α, $0 < \alpha < 1$, že pro každou dvojici prvků $x, y \in P$ platí

$$\varrho(Ax, Ay) \leqq \alpha\,\varrho(x, y)\,.$$

Kontraktivní operátor tedy „zkracuje vzdálenost", odtud jeho jméno: Vzdálenost obrazů Ax, Ay je menší, a to dokonce nejvýše α-krát větší, než vzdálenost vzorů x, y.

Pro kontraktivní operátory platí následující věta, kterou uvedeme bez důkazu, neboť ji v naší knize nikde nepoužijeme. Důkaz najde čtenář např. v [26], str. 47.

Věta 8.2. (*Banachova věta o pevném bodě, věta o kontraktivním zobrazení.*) *Nechť A je kontraktivní operátor v úplném metrickém prostoru P. Pak rovnice*

$$x = Ax$$

má v prostoru P právě jedno řešení, tj. existuje právě jeden prvek $u \in P$, pro který platí $u = Au$. Tento prvek je možno získat jako limitu posloupnosti prvků $x_n \in P$,

$$u = \lim_{n \to \infty} x_n ,$$

kde

$$x_{n+1} = Ax_n , \quad n = 1, 2, \ldots ,$$

přičemž prvek $x_1 \in P$ lze zvolit libovolně.

Za předpokladu, že operátor A je v P kontraktivní, plyne tedy z věty 8.2 předně existence a jednoznačnost řešení rovnice $x = Ax$. Věta 8.2 však dává zároveň návod, jak získat řešení této rovnice iteračním postupem, tj. jako limitu „postupných aproximací" x_n. To je důležité v numerických metodách v nejrozmanitějších matematických disciplínách. Jednu z nejjednodušších aplikací má Banachova věta v lineární algebře, při řešení soustav lineárních rovnic tvaru

$$\mathbf{x} = \mathbf{B}\mathbf{x} + \mathbf{C}$$

s „malou" maticí $\mathbf{B}$. Pak je totiž operátor $\mathbf{A}$, daný vztahem

$$\mathbf{A}\mathbf{x} = \mathbf{B}\mathbf{x} + \mathbf{C} ,$$

kontraktivní na množině uvažovaných n-rozměrných vektorů, na níž je zavedena některým z běžných způsobů metrika (pro kontraktivnost operátoru $\mathbf{A}$ stačí, splňuje-li příslušná norma matice $\mathbf{B}$ vztah $\|\mathbf{B}\| < 1$) a je možno použít zmíněné iterační metody, která je v tomto případě známá jako Ritzova (prostá) iterace. Viz např. [35], str. 947. Viz také příklad aplikace věty 8.2 k řešení nelineárních integrálních rovnic v [35], str. 830, 831. Viz také [9].

V dalších kapitolách se budeme setkávat nejčastěji s operátory v některém Hilbertově prostoru H. Půjde o operátory $A, B, \ldots$, jejichž definičními obory budou některé podmnožiny prostoru H (ve speciálním případě celý prostor H) a které zobrazují tyto podmnožiny do téhož Hilbertova prostoru. Definiční obory těchto operátorů budeme značit, jak jsme se již zmínili, symboly $D_A, D_B, \ldots$, obory hodnot těchto operátorů symboly $R_A, R_B, \ldots$. Protože jde o zobrazení množin $D_A, D_B, \ldots$ do prostoru H, leží množiny $R_A, R_B, \ldots$ v H. Poznamenejme přitom, že mnohé z definic i vět, které v této kapitole vyslovíme pro tento speciální případ, lze přenést na případy obecnější, např. na případ, kdy uvažovaný operátor zobrazuje určitý metrický (popř. normovaný) prostor do jiného metrického (resp. normovaného) prostoru, apod.

V dalším textu této kapitoly půjde tedy o určitý pevně daný Hilbertův prostor H a o vyšetřování operátorů $A, B, \ldots$ s definičními obory $D_A, D_B, \ldots$, ležícími v H, a s obory hodnot $R_A, R_B, \ldots$, ležícími v témž prostoru H. Stručně budeme mluvit o *operátorech v Hilbertově prostoru.*

Připomeňme, že norma v Hilbertově prostoru H je dána vztahem

$$\|u\| = \sqrt{(u, u)}$$

a metrika vztahem

$$\varrho(u, v) = \|u - v\| .$$

Zavedením metriky je, jak víme, dána i konvergence v tomto prostoru a symbol

$$\lim_{n \to \infty} u_n = u \ \text{ v } H$$

znamená totéž jako

$$\lim_{n \to \infty} \varrho(u_n, u) = 0 ,$$

tj. totéž jako

$$\lim_{n \to \infty} \|u_n - u\| = 0 .$$

Rovnicí

$$u = 0 \ \text{ v } H$$

zapisujeme, že u je nulovým prvkem prostoru H.

Definice 8.11. Operátor I se nazývá *jednotkový operátor*, přiřazuje-li každému prvku $u \in D_I$ opět tentýž prvek u. Operátor O nazveme *nulovým operátorem*, přiřazuje-li každému $u \in D_O$ nulový prvek prostoru H.

Jednotkový operátor je tedy charakterizován vztahem

$$Iu = u \quad \text{pro všechna} \quad u \in D_I ,$$

nulový operátor vztahem

$$Ou = 0 \ \text{ v } H \quad \text{pro všechna} \quad u \in D_O .$$

Definice 8.12. Operátor A se nazývá *spojitý v bodě* $u_0 \in D_A$, jestliže pro každou posloupnost prvků $u_n \in D_A$, pro kterou je

$$\lim_{n \to \infty} u_n = u_0 \ \text{ v } H ,$$

platí

$$\lim_{n \to \infty} Au_n = Au_0 \ \text{ v } H$$

(tj. $\lim_{n \to \infty} \|Au_n - Au_0\| = 0$). Je-li operátor A spojitý v každém bodě svého definičního oboru D_A, řekneme, že je *spojitý v* D_A.

Triviálním příkladem spojitého operátoru je jednotkový operátor v H (viz def. 8.11), neboť v tomto případě ze vztahu

$$\lim_{n \to \infty} u_n = u_0 \ \text{ v } H$$

plyne

$$\lim_{n\to\infty} Iu_n = \lim_{n\to\infty} u_n = u_0 = Iu_0 \text{ v } H .$$

Jednoduché kritérium pro spojitost lineárních operátorů uvedeme ve větě 8.3.

Definice 8.13. Operátor A se nazývá *omezený* (*ohraničený*) ve svém definičním oboru D_A, lze-li najít takové číslo $K \geqq 0$, že pro všechna $u \in D_A$ platí

$$\|Au\| \leqq K\|u\| . \tag{8.17}$$

Nejmenší[1]) z čísel K, pro něž je splněn vztah (8.17), nazýváme *normou operátoru* A. Označení $\|A\|$.

Zřejmě platí

$$\|Au\| \leqq \|A\| \, \|u\| \quad \text{pro každé} \quad u \in D_A .$$

Příklad 8.4. Nechť $K(s, x)$ je (reálná) funkce integrovatelná s druhou mocninou ve čtverci Q ($0 \leqq x \leqq 1$, $0 \leqq s \leqq 1$). Označme

$$\int_0^1 \int_0^1 K^2(s, x) \, ds \, dx = C^2 \quad (C > 0) .$$

Uvažujme v Hilbertově prostoru $L_2(0, 1)$ operátor A, daný předpisem

$$Au = v(s) = \int_0^1 K(s, x) \, u(x) \, dx . \tag{8.18}$$

Z teorie Lebesgueova integrálu je známo, že za učiněných předpokladů $[K \in L_2(Q), u \in L_2(0, 1)]$ je předně funkce $K(s, x)$ pro skoro všechna $s \in \langle 0, 1 \rangle$ integrovatelná s druhou mocninou jako funkce proměnné x [takže integrál (8.18) existuje v intervalu $\langle 0, 1 \rangle$ pro proměnnou s skoro všude] a za druhé, že $v(s) \in L_2(0, 1)$. Dále pro každé s, pro které je $K(s, x) \in L_2(0, 1)$, platí podle Schwarzovy nerovnosti (str. 38)

$$v^2(s) = \left(\int_0^1 K(s, x) \, u(x) \, dx \right)^2 \leqq \int_0^1 K^2(s, x) \, dx \, . \int_0^1 u^2(x) \, dx .$$

Odtud plyne

$$\int_0^1 v^2(s) \, ds \leqq \int_0^1 \left(\int_0^1 K^2(s, x) \, dx \, . \int_0^1 u^2(x) \, dx \right) ds =$$

$$= \int_0^1 \int_0^1 K^2(s, x) \, dx \, ds \, . \int_0^1 u^2(x) \, dx$$

[1]) Lze dokázat, že toto nejmenší číslo skutečně existuje.

čili

$$\|v\|^2_{L_2(0,1)} \leqq C^2 \|u\|^2_{L_2(0,1)} ,$$

tj.

$$\|Au\|_{L_2(0,1)} \leqq C\|u\|_{L_2(0,1)} .$$

Operátor (8.18) je tedy v Hilbertově prostoru $L_2(0, 1)$ omezený. Protože v (8.17) můžeme za konstantu K vzít číslo C, plyne pro normu $\|A\|$ operátoru A odhad

$$\|A\| \leqq C .$$

Příklad 8.5. Uvažujme v Hilbertově prostoru $L_2(0, 1)$ lineál $D_A = C^{(1)}(0, 1)$ (str. 15) a definujme na tomto lineálu operátor A vztahem

$$Au = \frac{du}{dx} .$$

Tento operátor není na lineálu D_A omezený. Abychom toto tvrzení dokázali, stačí dokázat, že neexistuje konstanta K taková, že platí

$$\|Au\|_{L_2(0,1)} \leqq K\|u\|_{L_2(0,1)} \quad \text{pro všechna} \quad u \in D_A . \tag{8.19}$$

Předpokládejme naopak, že taková konstanta K existuje a dojdeme ke sporu. Uvažujme funkci

$$v(x) = \sin n\pi x \quad (n \text{ přirozené}) . \tag{8.20}$$

Zřejmě je $v \in D_A$. Dále je

$$Av = n\pi \cos n\pi x .$$

Podle definice normy je dále

$$\|v\|_{L_2(0,1)} = \sqrt{\int_0^1 \sin^2 n\pi x \, dx} = \sqrt{\frac{1}{2}} ,$$

$$\|Av\|_{L_2(0,1)} = \sqrt{\int_0^1 n^2\pi^2 \cos^2 n\pi x \, dx} = n\pi \sqrt{\frac{1}{2}} .$$

Zvolíme-li tedy funkci (8.20) takovou, že $n\pi > K$, dostaneme spor s předpokladem, že (8.19) platí pro každou funkci z lineálu D_A.

Neomezenost je nejen vlastností operátoru A z právě uvedeného příkladu, ale je typickou vlastností diferenciálních operátorů. Tato skutečnost způsobuje, jak známo, v teorii diferenciálních rovnic (obyčejných, zejména však parciálních) s okrajovými podmínkami podstatné obtíže. Jak tyto obtíže překonat, poznáme v dalších kapitolách.

Je-li operátor A lineární, je mezi spojitostí a ohraničeností operátoru jednoduchý vztah:

Věta 8.3. *Nechť A je lineární operátor v Hilbertově prostoru H, zobrazující lineál $D_A \subset H$ do H. Je-li operátor A omezený v D_A, pak je v D_A i spojitý.*

Důkaz: Dokážeme, že A je spojitý v libovolném bodě u_0 svého definičního oboru D_A, čímž bude důkaz proveden. Podle def. 8.12 máme dokázat, že pro libovolnou posloupnost prvků $u_n \in D_A$, konvergující v H k prvku $u_0 \in D_A$, je

$$\lim_{n\to\infty} Au_n = Au_0 ,$$

čili, což je totéž, že je

$$\lim_{n\to\infty} \|Au_n - Au_0\| = 0 . \tag{8.21}$$

Ale operátor A je podle předpokladu lineární, takže

$$Au_n - Au_0 = A(u_n - u_0) , \tag{8.22}$$

a je dále omezený, tedy (viz str. 100)

$$\|A(u_n - u_0)\| \leqq \|A\| \,.\, \|u_n - u_0\| , \tag{8.23}$$

kde $\|A\|$ je norma uvažovaného operátoru (viz def. 8.13). Protože posloupnost $\{u_n\}$ konverguje podle předpokladu k prvku u_0, tj. platí

$$\lim_{n\to\infty} \|u_n - u_0\| = 0 ,$$

plyne z (8.23)

$$\lim_{n\to\infty} \|A(u_n - u_0)\| = 0 ,$$

odkud podle (8.22)

$$\lim_{n\to\infty} \|Au_n - Au_0\| = \lim_{n\to\infty} \|A(u_n - u_0)\| = 0 ,$$

což jsme měli dokázat.

Platí i následující věta, obrácená k větě 8.3; tuto větu uvedeme bez důkazu, neboť ji nebudeme v dalším textu potřebovat:

Lineární operátor A, zobrazující svůj definiční obor $D_A \subset H$ do H a spojitý v D_A, je v D_A omezený.

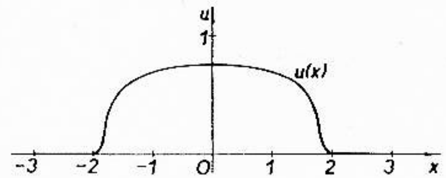
b) Symetrické, pozitivní a pozitivně definitní operátory. Věty o hustotě

V dalším textu budou mít důležitý význam symetrické, pozitivní a pozitivně definitní operátory. Než se seznámíme s těmito pojmy, uvedeme některé věty, které budeme jednak přímo potřebovat, jednak nám budou užitečné v dalších kapitolách. Půjde o tzv. věty o hustotě (věty 8.5 a 8.6) a o Greenovu větu pro funkce více proměnných.

Připomeňme (viz str. 15), že symbolem $C^{(\infty)}(\overline{G})$ označujeme lineál všech (reálných) funkcí, spojitých včetně derivací všech řádů v $\overline{G}$. Symbolem $C_0^{(\infty)}(G)$ [v literatuře se často používá i označení $\mathcal{D}(G)$] budeme značit lineál těch funkcí z $C^{(\infty)}(\overline{G})$, které jsou rovny nule v určitém okolí hranice oblasti G [tato okolí mohou být pro různé funkce z $C_0^{(\infty)}(G)$ různá]. Funkce z lineálu $C_0^{(\infty)}(G)$ jsou v literatuře známy pod názvem *funkce s kompaktním nosičem v G*. Přitom *nosičem* funkce $\varphi(x)$ v oblasti G, označení supp φ[1]), rozumíme uzávěr (v prostoru E_N) množiny těch bodů $x \in \overline{G}$, pro něž je $\varphi(x) \neq 0$. Tedy $\varphi \in C_0^{(\infty)}(G)$ znamená, že $\varphi \in C^{(\infty)}(\overline{G})$ a

$$\operatorname{supp} \varphi \subset G .$$

Protože supp φ je podle definice uzavřená množina a leží podle předpokladu v otevřené oblasti G, má od hranice Γ této oblasti kladnou vzdálenost. Tuto okolnost jsme charakterizovali stručně tím, že jsme řekli, že funkce $\varphi(x)$ je v určitém okolí hranice rovna nule.



Obr. 6.

Pro $N = 1$ je příkladem funkce s kompaktním nosičem v intervalu $(-3, 3)$ funkce daná v tomto intervalu předpisem

$$u(x) = \begin{cases} e^{-1/(4-x^2)} & \text{pro} \quad x \in (-2, 2) , \\ 0 & \text{vně intervalu} \quad (-2, 2) , \end{cases}$$

a znázorněná graficky na obr. 6. Tato funkce má předně v intervalu $(-2, 2)$ zřejmě spojité derivace všech řádů. [To platí ovšem i v intervalech $(2, 3)$ a $(-3, -2)$, kde je identicky rovna nule.] Mimo to lze přímým výpočtem bez obtíží ověřit, že limity zprava v bodě $x = -2$, resp. zleva v bodě $x = 2$, funkce $u(x)$ i všech jejích derivací jsou rovny nule (což ovšem platí i pro limity zleva v bodě $x = -2$ a zprava v bodě $x = 2$). Funkce $u(x)$ má tedy skutečně v intervalu $(-3, 3)$ derivace všech řádů. Mimoto je zřejmě supp $u = \langle -2, 2 \rangle$, takže supp $u \subset (-3, 3)$. Funkce $u(x)$ je tedy skutečně funkce s kompaktním nosičem v intervalu $(-3, 3)$.

Všimněme si nyní případu $N = 1$ podrobněji.

Uvažujme nejprve funkci $\psi(\varrho, x, t)$ definovanou předpisem

$$\psi(\varrho, x, t) = \begin{cases} e^{-1/[\varrho^2 - (x-t)^2]} & \text{pro} \quad |x - t| < \varrho , \\ 0 & \text{pro} \quad |x - t| \geqq \varrho , \end{cases}$$

[1]) Z angl. support.

kde ϱ je pevně dané kladné číslo. Podobně jako v případě právě uvažované funkce $u(x)$ se ukáže, že pro každé pevné $x \in (-\infty, +\infty)$ má funkce $\psi(\varrho, x, t)$ (jako funkce proměnné t) v intervalu $(-\infty, +\infty)$ derivace všech řádů, přičemž je $\psi(\varrho, x, t) \neq 0$ jen v intervalu $(x - \varrho, x + \varrho)$. (Totéž ovšem platí pro funkci ψ jako funkci proměnné x při každém pevném t.)

Označme (stále při pevném x)

$$\int_{-\infty}^{\infty} \psi(\varrho, x, t)\, dt = \int_{x-\varrho}^{x+\varrho} e^{-1/[\varrho^2-(x-t)^2]}\, dt = \int_{-\varrho}^{\varrho} e^{-1/(\varrho^2-z^2)}\, dz = h(\varrho)\,. \tag{8.24}$$

(Použili jsme substituce $t - x = z$.) Z výsledku je zřejmé, že daný integrál nezávisí na x. Funkce

$$\varphi(\varrho, x, t) = \frac{\psi(\varrho, x, t)}{h(\varrho)}\,,$$

pro kterou na základě (8.24) zřejmě platí

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \varphi(\varrho, x, t)\, dt = 1\,, \tag{8.25}$$

se nazývá *regularizující jádro*. Důvod pro tento název vyplyne z následujícího textu:

Uvažujme libovolnou funkci $u \in L_2(a, b)$. Prodlužme tuto funkci nulou na celý interval $(-\infty, +\infty)$ [takže v intervalech $(-\infty, a)$, $(b, +\infty)$ bude $u(x) \equiv 0$] a uvažujme integrál

$$\mu(\varrho, x) = \int_{-\infty}^{\infty} u(t)\, \varphi(\varrho, x, t)\, dt\,,$$

kde ϱ je dané kladné číslo.

Z definice funkce $u(t)$ a z vlastností funkce $\varphi(\varrho, x, t)$ je předně zřejmé, že funkce $\mu(\varrho, x)$ bude identicky rovna nule pro všechna x, ležící vně intervalu $(a - \varrho, b + \varrho)$. Protože dále funkce $\varphi(\varrho, x, t)$ je velmi hladká, lze očekávat, že i funkce $\mu(\varrho, x)$ bude velmi hladká. Vzhledem k (8.25) lze dále očekávat, že když číslo $\varrho > 0$ bude velmi malé, bude se funkce $\mu(\varrho, x)$ v intervalu $\langle a, b\rangle$ „málo" lišit od funkce $u(x)$. Tyto očekávané vlastnosti funkce $\mu(\varrho, x)$ precizuje tato věta (viz [42], str. 219 a 222):

Věta 8.4. *Funkce $\mu(\varrho, x)$ má v intervalu $(-\infty, +\infty)$ derivace všech řádů, přičemž vně intervalu $(a - \varrho, b + \varrho)$ je $\mu(\varrho, x) \equiv 0$.*[1]) *Mimoto platí*

$$\lim_{\varrho \to 0} \mu(\varrho, x) = u(x) \quad v \quad L_2(a, b)\,. \tag{8.26}$$

[1]) Takže $\mu(\varrho, x)$ je funkce s kompaktním nosičem např. v intervalu $(a - 2\varrho, b + 2\varrho)$.

Dokážeme nyní následující větu „o hustotě", které v dalším textu mnohokrát použijeme. Nejprve však uveďme jedno známé tvrzení o funkcích z $L_2(a, b)$, viz např. [32]:

Nechť $u \in L_2(a, b)$. Pak ke každému $\eta > 0$ lze najít takové $\delta > 0$, že platí

$$\int_c^d u^2(x)\, dx < \eta\,, \tag{8.27}$$

jakmile interval $\langle c, d\rangle$ leží v intervalu $\langle a, b\rangle$ a jakmile je

$$|d - c| \leq \delta\,.$$

Věta 8.5. *Lineál $C_0^{(\infty)}(a, b)$ je hustý v $L_2(a, b)$.*

Důkaz: Máme dokázat, že každou funkci $u \in L_2(a, b)$ lze v prostoru $L_2(a, b)$ s libovolnou přesností aproximovat funkcemi z lineálu $C_0^{(\infty)}(a, b)$. Přesněji, že ke každé funkci $u \in L_2(a, b)$ a ke každému $\varepsilon > 0$ existuje funkce $v \in C_0^{(\infty)}(a, b)$ tak, že platí

$$\|u - v\|_{L_2(a,b)} < \varepsilon\,.$$

Nechť tedy funkce $u \in L_2(a, b)$ a číslo $\varepsilon > 0$ jsou dány. Označme

$$\eta = \frac{\varepsilon^2}{8}\,.$$

K tomuto η lze podle (8.27) najít takové $\delta > 0$ [$\delta < (b - a)/2$], že platí

$$\int_a^{a+\delta} u^2(x)\, dx + \int_{b-\delta}^{b} u^2(x)\, dx < 2\eta = \frac{\varepsilon^2}{4}\,. \tag{8.28}$$

Nechť $z(x)$ je funkce definovaná v intervalu $\langle a, b\rangle$ předpisem

$$z(x) = \begin{cases} u(x) & \text{pro} \quad x \in \langle a + \delta, b - \delta\rangle\,, \\ 0 & \text{pro} \quad x \in \langle a, a + \delta) \text{ a } x \in (b - \delta, b\rangle\,. \end{cases}$$

[Tedy funkce splývající s funkcí $u(x)$ v intervalu $\langle a, b\rangle$, s výjimkou δ-okolí bodů a, b, kde je identicky rovna nule.] Zřejmě je $z \in L_2(a, b)$ a

$$\|u(x) - z(x)\|^2_{L_2(a,b)} = \int_a^b [u(x) - z(x)]^2\, dx = \int_a^{a+\delta} u^2(x)\, dx + \int_{b-\delta}^{b} u^2(x)\, dx < \frac{\varepsilon^2}{4}$$

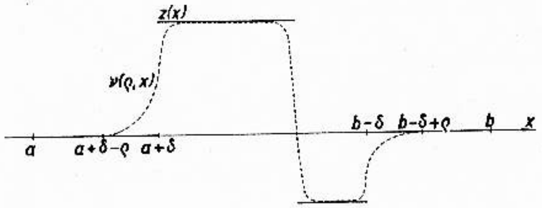
podle (8.28), takže

$$\|u(x) - z(x)\|_{L_2(a,b)} < \frac{\varepsilon}{2}\,.$$

Zvolme $\varrho > 0$ a sestrojme k funkci $z(x)$ funkci $v(\varrho, x)$,

$$v(\varrho, x) = \int_{-\infty}^{\infty} z(t)\,\varphi(\varrho, x, t)\,\mathrm{d}t\,,$$

podobně jako jsme na str. 104 sestrojili funkci $\mu(\varrho, x)$ k funkci $u(x)$. Tato funkce má, podobně jako citovaná funkce $\mu(\varrho, x)$ z věty 8.4, pro všechna $x \in (-\infty, +\infty)$ derivace všech řádů. Protože funkce $z(x)$ je identicky rovna nule v intervalech $\langle a, a + \delta)$, $(b - \delta, b\rangle$, pak mimoto pro každé $\varrho < \delta$ bude funkce $v(\varrho, x)$ funkce s kompaktním nosičem v intervalu (a, b) (obr. 7).



Obr. 7.

Podle (8.26) lze k číslu $\varepsilon/2$ najít takové $\varrho_0 > 0$, že pro každé kladné $\varrho < \varrho_0$ platí

$$\|v(\varrho, x) - z(x)\|_{L_2(a,b)} < \frac{\varepsilon}{2}\,.$$

Bude-li zároveň $\varrho_0 < \delta$, bude, jak jsme se právě zmínili, funkce

$$v(\varrho, x)\,, \quad \varrho < \varrho_0\,, \tag{8.29}$$

funkce s kompaktním nosičem v intervalu (a, b), tj. bude

$$v(\varrho, x) \in C_0^{(\infty)}(a, b)\,. \tag{8.30}$$

Zároveň však bude platit

$$\|u(x) - v(\varrho, x)\|_{L_2(a,b)} \leqq \|u(x) - z(x)\|_{L_2(a,b)} +$$
$$+ \|z(x) - v(\varrho, x)\|_{L_2(a,b)} < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon\,.$$

Za hledanou funkci $v \in C_0^{(\infty)}(a, b)$ stačí tedy zvolit funkci (8.29).

Tím je důkaz věty 8.5 proveden.

Obdobným postupem lze dokázat analogickou větu pro funkce více proměnných:

Věta 8.6. *Nechť G je oblast s lipschitzovskou hranicí. Pak lineál $C_0^{(\infty)}(G)$ všech funkcí s kompaktním nosičem v G je hustý v $L_2(G)$.*

Poznámka 8.5. Z věty 8.5 např. plyne, že lineál N všech funkcí $u(x)$, které jsou v intervalu $\langle a, b\rangle$ spojité včetně derivací prvního a druhého řádu a splňují podmínky $u(a) = 0$, $u(b) = 0$, je hustý v $L_2(a, b)$, neboť lineál N zřejmě obsahuje všechny funkce z lineálu $C_0^{(\infty)}(a, b)$. Lze-li tedy každou funkci $f \in L_2(a, b)$ aproximovat s libovolnou přesností [v metrice prostoru $L_2(a, b)$] funkcemi z lineálu $C_0^{(\infty)}(a, b)$, lze je tím spíše aproximovat s libovolnou přesností funkcemi z lineálu N [kterých je „více" než funkcí z lineálu $C_0^{(\infty)}(a, b)$].

Totéž ovšem platí i pro lineál P těch funkcí, které mají vlastnosti funkcí z lineálu N a splňují obecnější podmínky

$$c_1\,u'(a) + c_2\,u(a) = 0\,, \quad c_3\,u'(b) + c_4\,u(b) = 0\,,$$

kde aspoň jedno číslo v každé z dvojic (c_1, c_2), (c_3, c_4) je různé od nuly [tedy např. podmínky

$$u'(a) - 2\,u(a) = 0\,, \quad u(b) = 0]\,.$$

Také tento lineál obsahuje všechny funkce z lineálu $C_0^{(\infty)}(a, b)$, neboť každá z funkcí $u \in C_0^{(\infty)}(a, b)$ má v intervalu $\langle a, b\rangle$ spojité derivace dokonce všech řádů a je v okolí bodů a, b identicky rovna nule, takže platí

$$u'(a) = 0\,, \quad u(a) = 0\,, \quad u'(b) = 0\,, \quad u(b) = 0\,.$$

Obdobné důsledky plynou i z věty 8.6. Např. lineál Q všech funkcí, které jsou spojité v $\bar{G}$ s parciálními derivacemi do druhého řádu včetně a splňují na hranici Γ podmínku

$$u = 0\,,$$

je hustý v $L_2(G)$. Totéž platí pro lineál R funkcí obdobných vlastností v $\bar{G}$, splňujících na Γ podmínku

$$\frac{\partial u}{\partial v} + cu = 0\,,$$

kde v je vnější normála hranice Γ; c je buď konstanta, která může být popř. rovna nule, nebo funkce daná na hranici Γ, neboť lineály Q a R obsahují lineál $C_0^{(\infty)}(G)$, jehož prvky $u(x)$ zřejmě splňují dané podmínky.

Poznámka 8.6. Na uvažované funkce je možno klást i jiné požadavky. Např. lineál funkcí $u(x)$ s kompaktním nosičem v intervalu (a, b) a přitom takových, že platí

$$\int_a^b u(x)\,\mathrm{d}x = 0\,,$$

je hustý v prostoru $\tilde{L}_2(a, b)$ [s metrikou prostoru $L_2(a, b)$] těch funkcí $f \in L_2(a, b)$, které vyhovují podmínce

$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = 0\,.$$

Pro naše úvahy bude užitečná ještě tato věta, známá z klasické analýzy (*Greenova věta* nebo *věta o integrování per partes pro funkce více proměnných*):

Věta 8.7. *Nechť G je oblast s lipschitzovskou hranicí, nechť funkce $f(x) = f(x_1, \ldots, x_N)$ a $g(x) = g(x_1, \ldots, x_N)$ jsou spojité včetně parciálních derivací $\partial f/\partial x_i$, $\partial g/\partial x_i$ (i je některé z čísel $1, \ldots, N$) v $\bar{G} = G + \Gamma$. Pak platí*

$$\int_G \frac{\partial f}{\partial x_i} g \, dx = \int_\Gamma f g \nu_i \, dS - \int_G f \frac{\partial g}{\partial x_i} \, dx , \tag{8.31}$$

kde ν_i je i-tá souřadnice jednotkového vektoru vnější normály.[1])

Uvedeme nyní definici symetrických, pozitivních a pozitivně definitních operátorů a ukážeme typické příklady těchto operátorů.

Definice 8.14. Nechť D_A je lineál hustý v H.[2]) Operátor A lineární v D_A se nazývá *symetrický* v D_A, jestliže pro každou dvojici prvků u, v z D_A platí

$$(Au, v) = (u, Av) . \tag{8.32}$$

Příklad 8.6. Označme D_A lineál funkcí $u(x)$ spojitých včetně derivací prvního a druhého řádu v uzavřeném intervalu $\langle a, b \rangle$ a splňujících podmínky

$$u(a) = 0 , \quad u(b) = 0 . \tag{8.33}$$

Podle věty 8.5 a pozn. 8.5 je tento lineál hustý v Hilbertově prostoru $L_2(a, b)$ [v němž skalární součin je dán, jak víme, vztahem

$$(u, v) = \int_a^b u(x) \, v(x) \, dx] .$$

Na lineálu D_A definujme operátor A vztahem

$$Au = -u'' . \tag{8.34}$$

Tvrdíme, že operátor A je v D_A symetrický.

Lineárnost operátoru A je zřejmá. Dále podle def. 8.14 máme dokázat, že pro každou dvojici funkcí $u(x)$, $v(x)$ z D_A platí

$$(Au, v) = (u, Av) . \tag{8.35}$$

---

[1]) Lze ukázat, že když hranice Γ oblasti G je lipschitzovská, pak že vektor vnější normály existuje na Γ skoro všude a že integrál přes Γ v (8.31) existuje. Viz kap. 28.

[2]) Proč činíme tento předpoklad vysvitne v důkazu věty 9.2 na str. 123.

Ale je

$$(Au, v) = -\int_a^b u'' v \, dx = -[u'v]_a^b + \int_a^b u'v' \, dx = \int_a^b u'v' \, dx , \tag{8.36}$$

neboť

$$[u'v]_a^b = u'(b) \, v(b) - u'(a) \, v(a) = 0$$

podle podmínek (8.33). Opětným použitím těchto podmínek dostaneme

$$\int_a^b u'v' \, dx = [uv']_a^b - \int_a^b uv'' \, dx = \int_a^b u(-v'') \, dx = (u, Av) . \tag{8.37}$$

Z (8.36) a (8.37) plyne (8.35), což jsme měli dokázat.

Příklad 8.7. Uvažujme v Hilbertově prostoru $L_2(a, b)$ lineál D_B funkcí spojitých včetně derivací prvního a druhého řádu v uzavřeném intervalu $\langle a, b \rangle$, které však nejsou vázány podmínkami (8.33). Protože lineál D_A z příkl. 8.6 je hustý v $L_2(a, b)$, je v $L_2(a, b)$ tím spíše hustý lineál D_B. Na D_B definujme operátor B předpisem

$$Bu = -u'' , \tag{8.38}$$

shodným s předpisem (8.34) pro operátor A. Operátor B není v D_B symetrický. K tomu účelu stačí ukázat, že aspoň pro jednu dvojici funkcí $u(x)$, $v(x)$ z D_B není splněna rovnost

$$(Bu, v) = (u, Bv) . \tag{8.39}$$

Uvažujme funkce

$$u(x) = x - a , \quad v(x) = (x - a)(x - b) , \tag{8.40}$$

které zřejmě patří do D_B. Je

$$(Bu, v) = -\int_a^b u'' v \, dx = 0 , \quad (u, Bv) = -\int_a^b 2(x - a) \, dx = -(b - a)^2 \neq 0 .$$

Pro funkce (8.40) není tedy splněna rovnost (8.39), takže operátor B není v D_B symetrický.

Z příkl. 8.6 a 8.7 je dobře vidět, že dva operátory, jejichž definiční předpis je stejný [v našich příkladech šlo o předpisy (8.34) a (8.38)], mohou mít různé vlastnosti, jsou-li jejich definiční obory různé.

Příklad 8.8. Uvažujme v Hilbertově prostoru $L_2(G)$ lineál D_A funkcí, patřících do $C^{(2)}(\bar{G})$, tedy spojitých s parciálními derivacemi do druhého řádu včetně v uzavřené oblasti $\bar{G} = G + \Gamma$ (s lipschitzovskou hranicí), a splňujících okrajovou podmínku

$$u = 0 \text{ na } \Gamma . \tag{8.41}$$

Podle věty 8.6 a pozn. 8.5 je lineál D_A hustý v $L_2(G)$. Definujme na D_A operátor A předpisem

$$Au = -\Delta u\,, \tag{8.42}$$

kde Δ je Laplaceův operátor. (Proč zde volíme znaménko minus, vysvitne v příkl. 8.10.) Dokážeme, že operátor A je v D_A symetrický.

Lineárnost operátoru A je zřejmá. Vezměme dále libovolné funkce $u(x)$, $v(x)$ z D_A. Je

$$(Au, v) = -\int_G \Delta u \,.\, v \,\mathrm{d}x = -\int_G \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x_1^2} + \ldots + \frac{\partial^2 u}{\partial x_N^2}\right) v \,\mathrm{d}x\,. \tag{8.43}$$

Položíme-li v (8.31) $f = \partial u/\partial x_i$ a $g = v$, dostaneme

$$-\int_G \frac{\partial^2 u}{\partial x_i^2}\, v \,\mathrm{d}x = -\int_\Gamma \frac{\partial u}{\partial x_i}\, v\nu_i \,\mathrm{d}S + \int_G \frac{\partial u}{\partial x_i}\frac{\partial v}{\partial x_i}\,\mathrm{d}x\,. \tag{8.44}$$

Sečteme-li rovnosti (8.44), psané postupně pro $i = 1$ až $i = N$, a uvážíme-li, že

$$\nu_1 \frac{\partial u}{\partial x_1} + \ldots + \nu_N \frac{\partial u}{\partial x_N} = \frac{\partial u}{\partial \nu}\,,$$

kde $\partial u/\partial \nu$ je derivace funkce $u(x)$ podle vnější normály, dostaneme

$$\begin{aligned}(Au, v) &= -\int_G \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x_1^2} + \ldots + \frac{\partial^2 u}{\partial x_N^2}\right) v \,\mathrm{d}x = \\ &= -\int_\Gamma \frac{\partial u}{\partial \nu}\, v \,\mathrm{d}S + \sum_{i=1}^N \int_G \frac{\partial u}{\partial x_i}\frac{\partial v}{\partial x_i}\,\mathrm{d}x = \sum_{i=1}^N \int_G \frac{\partial u}{\partial x_i}\frac{\partial v}{\partial x_i}\,\mathrm{d}x\,,\end{aligned} \tag{8.45}$$

neboť $v \in D_A$, a tedy $v = 0$ na Γ. Zcela obdobně bude

$$(u, Av) = -\int_G \Delta v \,.\, u \,\mathrm{d}x = \sum_{i=1}^N \int_G \frac{\partial v}{\partial x_i}\frac{\partial u}{\partial x_i}\,\mathrm{d}x\,. \tag{8.46}$$

Porovnáním rovností (8.45) a (8.46) dostaneme žádaný vztah

$$(Au, v) = (u, Av) \quad \text{pro všechna} \quad u \in D_A,\ v \in D_A\,,$$

čímž je naše tvrzení dokázáno.

Podobně jako v příkl. 8.7 bychom zjistili, že operátor B, definovaný předpisem (8.42) na lineálu D_B funkcí majících vlastnosti obdobné vlastnostem funkcí z lineálu D_A, které však nejsou vázány podmínkou (8.41), není symetrický.

Definice 8.15. Operátor A se nazývá *pozitivní* ve svém definičním oboru D_A, je-li symetrický[1]) a platí-li pro všechna $u \in D_A$

$$(Au, u) \geqq 0\,, \tag{8.47}$$

přičemž

$$(Au, u) = 0 \Rightarrow u = 0 \text{ v } D_A\,. \tag{8.48}$$

Jestliže mimoto existuje konstanta $C > 0$ taková, že pro všechna $u \in D_A$ je dokonce

$$(Au, u) \geqq C^2 \|u\|^2\,, \tag{8.49}$$

nazývá se operátor A *pozitivně definitní* v D_A.

Z def. 8.15 vyplývá, že každý pozitivně definitní operátor je pozitivní v D_A. Opačné tvrzení neplatí.

Z následujících příkladů bude zřejmé, že ověření podmínky (8.48) je podstatným krokem k tomu, abychom ukázali, že operátor A je v D_A pozitivní. „Obrácená" vlastnost,

$$u = 0 \text{ v } D_A \Rightarrow (Au, u) = 0\,,$$

je ovšem zřejmá.

Příklad 8.9. Operátor A z příkl. 8.6, str. 108, je pozitivní: V příkl. 8.6 jsme dokázali, že je symetrický. Dále z rovnosti (8.36), tj. z rovnosti

$$(Au, v) = \int_a^b u'v' \,\mathrm{d}x \quad \text{pro všechna} \quad u \in D_A,\ v \in D_A\,, \tag{8.50}$$

nejprve plyne

$$(Au, u) = \int_a^b u'^2 \,\mathrm{d}x \geqq 0 \quad \text{pro každé} \quad u \in D_A\,, \tag{8.51}$$

neboť $u'^2(x) \geqq 0$ v $\langle a, b\rangle$. Zbývá dokázat (8.48), tj. správnost implikace

$$(Au, u) = 0 \Rightarrow u(x) \equiv 0 \text{ v } \langle a, b\rangle\,. \tag{8.52}$$

Nechť tedy $(Au, u) = 0$, tj. podle (8.51) nechť

$$\int_a^b u'^2 \,\mathrm{d}x = 0\,. \tag{8.53}$$

---

[1]) Lze ukázat (viz [30]), že v případě komplexního Hilbertova prostoru vyplývá symetričnost operátoru A přímo z požadavku (8.47). U reálného Hilbertova prostoru je třeba požadavek symetričnosti zvlášť vyslovit.

Funkce $u'(x)$ je podle předpokladu spojitá v $\langle a, b\rangle$, neboť $u \in D_A$; z (8.53) tedy plyne

$$u'(x) \equiv 0\,, \text{ tj. } u(x) = \text{konst v } \langle a, b\rangle\,.$$

Protože $u \in D_A$, je $u(a) = u(b) = 0$, a tedy

$$u(x) \equiv 0 \text{ v } \langle a, b\rangle\,,$$

což jsme měli dokázat.

Dokážeme, že operátor A je v D_A dokonce pozitivně definitní. Máme tedy dokázat, že existuje konstanta $C > 0$ tak, že pro každé $u \in D_A$ platí

$$(8.54) \qquad (Au, u) \geqq C^2\|u\|^2\,,$$

tj. podle (8.51), že platí

$$\int_a^b u'^2(x)\,dx \geqq C^2 \int_a^b u^2(x)\,dx\,.$$

Protože $u \in D_A$, je $u(a) = 0$, a tedy

$$u(x) = \int_a^x u'(t)\,dt\,, \quad x \in \langle a, b\rangle\,.$$

Podle Schwarzovy nerovnosti (6.17) (viz také str. 38) je

$$u^2(x) = \left(\int_a^x u'(t)\,dt\right)^2 \leqq \int_a^x 1^2\,dx \,.\int_a^x u'^2(t)\,dt = (x-a)\int_a^x u'^2(t)\,dt\,.$$

Protože $x - a \geqq 0$ a $u'^2(t) \geqq 0$ v $\langle a, b\rangle$, je tím spíše

$$u^2(x) \leqq (x-a)\int_a^b u'^2(t)\,dt\,,$$

a tedy také

$$(8.55) \qquad \int_a^b u^2(x)\,dx \leqq \int_a^b u'^2(t)\,dt\,.\int_a^b (x-a)\,dx = \int_a^b u'^2(t)\,dt\,.\,\frac{(b-a)^2}{2}\,.$$

Přejdeme-li v určitém integrálu $\int_a^b u'^2(t)\,dt$ k běžnému označení x pro integrační proměnnou, můžeme (8.55) zapsat ve tvaru

$$\frac{(b-a)^2}{2}\int_a^b u'^2(x)\,dx \geqq \int_a^b u^2(x)\,dx\,,$$

tj. vzhledem k (8.51) ve tvaru

$$(Au, u) \geqq C^2\|u\|^2$$

s

$$C = \frac{\sqrt{2}}{b-a}\,,$$

což jsme měli dokázat.

Příklad 8.10. Ukážeme, že operátor A z příkl. 8.8 je v D_A pozitivní. V citovaném příkladě jsme ukázali, že je v D_A symetrický. Stačí tedy ukázat, že pro každé $u \in D_A$ platí (8.47), (8.48), tj. že pro každé $u \in D_A$ je

$$(8.56) \qquad (-\Delta u, u) \geqq 0$$

a

$$(8.57) \qquad (-\Delta u, u) = 0 \Rightarrow u(x) \equiv 0 \text{ v } \bar{G}\,.$$

Z (8.45) však plyne pro každé $u \in D_A$

$$(8.58) \qquad (Au, u) = (-\Delta u, u) = \sum_{i=1}^N \int_G \left(\frac{\partial u}{\partial x_i}\right)^2 dx \geqq 0\,,$$

neboť $(\partial u/\partial x_i)^2 \geqq 0$ v $\bar{G}$ pro každé $i = 1, \ldots, N$. Tím je splnění nerovnosti (8.56) pro každé $u \in D_A$ ověřeno. Zbývá dokázat správnost implikace

$$(8.59) \qquad (-\Delta u, u) = 0 \Rightarrow u(x) \equiv 0 \text{ v } \bar{G}\,.$$

Avšak ze vztahu $(-\Delta u, u) = 0$, tj. ze vztahu

$$\sum_{i=1}^N \int_G \left(\frac{\partial u}{\partial x_i}\right)^2 dx = 0$$

plyne

$$(8.60) \qquad \frac{\partial u}{\partial x_1} \equiv 0, \ldots, \frac{\partial u}{\partial x_N} \equiv 0 \text{ v } \bar{G}\,,$$

neboť $u \in D_A$, a tedy derivace $\partial u/\partial x_1, \ldots, \partial u/\partial x_N$ jsou spojité v $\bar{G}$. Z (8.60) plyne

$$u(x) = \text{konst v } \bar{G}$$

a z podmínky (8.41), tj. z podmínky

$$u = 0 \text{ na } \Gamma$$

pak vyplývá

$$u(x) \equiv 0 \text{ v } \bar{G}\,,$$

což jsme měli dokázat.

Operátor A z příkl. 8.8 je tedy v D_A pozitivní. Podobně jako v předcházejícím příkladě lze ukázat, že je v D_A dokonce pozitivně definitní. Důkaz zde nebudeme provádět, neboť tento výsledek vyplyne jako speciální případ úvah, které provedeme později (str. 271).

c) Funkcionály. Rieszova věta

V této kapitole, věnované operátorům, jsme zavedli řadu pojmů. Nejprve (viz def. 8.1 až 8.10) jsme zavedli operátor jako zobrazení množiny M_1 *do* množiny M_2 (jako speciální případ jsme uvedli zobrazení množiny M_1 *na* množinu M_2), zavedli jsme rovnost, součet a součin dvou operátorů (přitom jsme se zmínili o tom, co rozumíme rozšířením daného operátoru), definovali jsme prostý operátor, operátor inverzní k danému operátoru a lineární operátor. V druhé části této kapitoly jsme se věnovali poněkud speciálnějšímu případu operátorů, a to operátorům v Hilbertově prostoru. Definovali jsme jednotkový a nulový operátor, spojitý operátor a omezený operátor, přičemž jsme se zmínili o jednoduchém vztahu mezi těmito dvěma pojmy. Nakonec jsme se soustředili na operátory symetrické, pozitivní a pozitivně definitní, které mají v problémech parciálních diferenciálních rovnic zvláště důležitý význam.

V závěru této kapitoly se zmíníme o speciálním případě operátorů, o tzv. funkcionálech.

Definice 8.16. Operátor F, který zobrazuje svůj definiční obor D_F do množiny reálných, resp. komplexních čísel, nazývá se *funkcionál* (*reálný*, resp. *komplexní*).

Funkcionál F přiřazuje tedy každému prvku $u \in D_F$ určité číslo Fu [často se píše též $F(u)$], reálné nebo komplexní.

V dalším textu, pokud nebude výslovně uveden opak, se budeme zabývat *reálnými* funkcionály.

Protože funkcionál je speciálním případem operátoru, zůstávají pro něho téměř beze změny pojmy a výsledky, uvedené v předcházejícím textu, pokud ovšem nebyly vysloveny pro jiné případy (např. pro případy operátorů, zobrazujících některé množiny z Hilbertova prostoru do téhož Hilbertova prostoru). Zejména tedy zůstává nezměněna def. 8.9:

Definice 8.17. Reálný funkcionál F se nazývá *lineární*, je-li jeho definičním oborem D_F lineál a jestliže pro každá reálná čísla $a_1, \ldots, a_n$ a pro každé prvky $u_1, \ldots, u_n$ z lineálu D_F platí

$$F(a_1u_1 + \ldots + a_nu_n) = a_1Fu_1 + \ldots + a_nFu_n . \tag{8.61}$$

Také definice spojitosti a omezenosti funkcionálu jsou zcela obdobné def. 8.12 a 8.13. Uvedeme je pro případ, že definiční obor D_F daného funkcionálu leží v některém Hilbertově prostoru H. Uvažme, že Fu, resp. Fu_n jsou reálná čísla, a že tedy symbol

$$\lim_{n\to\infty} Fu_n = Fu$$

znamená konvergenci posloupnosti reálných čísel Fu_n k číslu Fu. Normou $\|Au\|$ z def. 8.13 je zde absolutní hodnota $|Fu|$ čísla Fu.

Definice 8.18. Funkcionál F se nazývá *spojitý v bodě* $u_0 \in D_F$, jestliže pro každou posloupnost prvků u_n z D_F, pro kterou je

$$\lim_{n\to\infty} u_n = u_0 \text{ v } H , \tag{8.62}$$

platí

$$\lim_{n\to\infty} Fu_n = Fu_0 . \tag{8.63}$$

Je-li funkcionál F spojitý v každém bodě $u_0 \in D_F$, řekneme, že je *spojitý v* D_F.

Definice 8.19. Funkcionál F se nazývá *omezený* (*ohraničený*) *v* D_F, existuje-li takové číslo K, že pro všechny prvky $u \in D_F$ platí

$$|Fu| \leq K\|u\| . \tag{8.64}$$

Nejmenší z čísel K, pro něž je splněna podmínka (8.64), se nazývá *norma funkcionálu* F. Označení $\|F\|$.

Příklad 8.11. Nechť v je určitý pevný prvek (reálného) Hilbertova prostoru H. Pak vztahem

$$Fu = (u, v) \quad \text{pro všechna} \quad u \in H \tag{8.65}$$

je dán v H lineární omezený funkcionál a jeho norma je rovna normě prvku v. Nejprve je zřejmé, že F je funkcionál, neboť pro každé $u \in H$ je (u, v) určité (reálné) číslo. Dále H je podle definice Hilbertova prostoru lineál; ověření podmínky (8.61) je snadné, neboť z vlastností skalárního součinu plyne

$$F(a_1u_1 + \ldots + a_nu_n) = (a_1u_1 + \ldots + a_nu_n, v) = a_1(u_1, v) + \ldots + a_n(u_n, v) = \tag{8.66}$$
$$= a_1Fu_1 + \ldots + a_nFu_n .$$

Tedy funkcionál (8.65) je lineární. Ze známé nerovnosti pro skalární součin

$$|(u, v)| \leq \|u\| \cdot \|v\|$$

plyne, že je omezený, přičemž za číslo K v nerovnosti (8.64) je možno vzít číslo $\|v\|$. Snadno se však ukáže, že $\|v\|$ je nejmenší z čísel K, splňujících podmínku (8.64): Pro prvek $u = v$ totiž je

$$Fv = (v, v) = \|v\| \cdot \|v\| ,$$

takže číslo $K = \|v\|$ v (8.64) nelze zmenšit. Tedy norma funkcionálu (8.65) je rovna číslu $\|v\|$.

Speciálním případem funkcionálu (8.65) pro $H = L_2(0, 1)$ a $v(x) \equiv 1$ v intervalu $\langle 0, 1 \rangle$ je funkcionál G, daný předpisem

$$Gu = \int_0^1 u(x)\, dx \,. \tag{8.67}$$

Funkcionál G je podle příkl. 8.11 lineární omezený funkcionál s normou $\|G\| = 1$.

Z příkl. 8.11 je jasné, že při pevně zvoleném $v \in H$ definuje skalární součin (u, v) lineární omezený funkcionál s normou $\|F\| = \|v\|$. Platí však i tato velmi důležitá věta:

Věta 8.8. (*Rieszova*). *Každý lineární omezený funkcionál F v Hilbertově prostoru H lze vyjádřit ve tvaru*

$$Fu = (u, v)\,, \tag{8.68}$$

kde v je určitý prvek prostoru H, funkcionálem F jednoznačně určený. Přitom platí $\|v\| = \|F\|$.

Poznamenejme, že existence prvku $v \in H$ takového, že pro všechna $u \in H$ platí (8.68), je podle věty 8.8 zaručena, že však v obecném případě není snadné, je-li funkcionál F dán, tento prvek skutečně najít.

Myšlenka důkazu věty 8.8 je následující: Je-li $Fu = 0$ pro každé $u \in H$, stačí položit $v = 0$. Nechť tedy Fu není nulový funkcionál. Označme L lineál, s metrikou prostoru H, těch prvků $z \in H$, pro které platí $Fz = 0$. Protože funkcionál F je omezený, snadno se dokáže, že L je podprostor prostoru H. Označme K jeho ortogonální doplněk v H, takže $H = L \oplus K$. Protože dále F není nulový funkcionál, existuje takové $x \in K$, že $Fx = \alpha \neq 0$. Pro prvek $y = x/\alpha$ pak platí $y \in K$ a $Fy = 1$. Nechť u je libovolný prvek z H. Označme $Fu = \beta$. Snadno se ukáže, že

$$u = (u - \beta y) + \beta y\,, \quad \text{kde} \quad u - \beta y \in L\,, \quad \beta y \in K\,.$$

Odtud pak jednoduchým výpočtem plyne, neboť $u - \beta y \perp y$,

$$(u, y) = ((u - \beta y) + \beta y, y) = \beta \|y\|^2 = \|y\|^2 \,.\, Fu\,,$$

takže

$$Fu = \left(u, \frac{y}{\|y\|^2}\right).$$

Ve větě 8.8 stačí tedy položit $v = y/\|y\|^2$.

Je-li v' jiný prvek, takový, že pro každé $u \in H$ platí $Fu = (u, v')$, pak (odečtením) $(u, v' - v) = 0$, z čehož, položíme-li $u = v' - v$, plyne $v' = v$, odkud vyplývá jednoznačnost prvku v uvedené vlastnosti.

Dále $|Fu| = |(v, u)| \leq \|v\| \,.\, \|u\|$, takže $\|F\| \leq \|v\|$. Avšak nemůže být $\|F\| < \|v\|$, neboť $Fv = (v, v) = \|v\|^2$, takže skutečně $\|F\| = \|v\|$.

Podobně jako na str. 102 lze ukázat:

Věta 8.9. *Lineární funkcionál je v D_F spojitý právě tehdy, je-li omezený.*

Poznámka 8.7. V následující kapitole se setkáme s funkcionálem F, daným předpisem

$$Fu = (Au, u) - 2(f, u)\,,$$

kde A je pozitivní operátor v lineálu D_A, hustém v Hilbertově prostoru H, $f \in H$. Protože (vzhledem k lineárnosti operátoru A) platí

$$(A(au), au) = a^2(Au, u)$$

pro každé reálné a, mluvíme o členu (Au, u) jako o kvadratickém členu funkcionálu F a funkcionál F samotný nazýváme *kvadratickým funkcionálem*.

Pojmy zavedené v této kapitole, jakož i získané výsledky nám nyní dovolí přejít k formulaci základních vět, umožňujících přímo použití variačních metod k řešení operátorových rovnic tvaru $Au = f$, zejména k řešení jejich speciálního případu, diferenciálních rovnic s okrajovými podmínkami.

Část II. VARIAČNÍ METODY

Kapitola 9

Věta o minimu kvadratického funkcionálu a její důsledky

Již v úvodu předcházející kapitoly jsme uvedli, že v této knize budou středem naší pozornosti rovnice tvaru

$$Au = f\,, \tag{9.1}$$

kde A je určitý operátor (v aplikacích nejčastěji diferenciální operátor), f je daná pravá strana rovnice (9.1) (zpravidla prvek určitého Hilbertova prostoru) a u je hledané řešení. Jak dospíváme k rovnicím tvaru (9.1), jsme ukázali na příkladě Dirichletova problému pro Poissonovu rovnici, tj. problému

$$-\Delta u = f(x, y)\ ^{1})\ \text{v}\ G\,, \tag{9.2}$$

$$u = 0\ \text{na}\ \Gamma\,, \tag{9.3}$$

kde Γ je hranice oblasti G. Přitom jsme operátor $-\Delta$ uvažovali na lineálu M_1 funkcí patřících do $C^{(2)}(\bar{G})$ a splňujících na Γ podmínku (9.3). Ukázali jsme (srov. větu 8.6, resp. pozn. 8.5 a příkl. 8.8 a 8.10), že lineál M_1 je hustý v Hilbertově prostoru $L_2(G)$ a že operátor $-\Delta$ je na tomto lineálu symetrický a pozitivní. Řekli jsme, že později ukážeme, že je dokonce pozitivně definitní.

S obdobným případem se setkáme v dalším textu velmi často: Je dán určitý Hilbertův prostor H [nemusí to být vždy prostor $L_2(G)$, jak tomu bylo v uvažovaném příkladě; při řešení některých problémů je výhodné uvažovat prostory obecnější nebo prostory jiného charakteru]. V tomto prostoru je dán určitý lineál D_A hustý v H a na něm pozitivní (popř. pozitivně definitní) operátor A, zobrazující lineál D_A

---

[1]) Místo operátoru Δ, uvažovaného v citovaném příkladě, uvažujeme zde operátor $-\Delta$, který má před operátorem Δ tu přednost, v dalším textu podstatnou, že je na lineálu M_1 pozitivní. Jinak je ovšem jedno, píšeme-li Poissonovu rovnici ve tvaru $\Delta u = g(x, y)$ nebo ve tvaru $-\Delta u = f(x, y)$ s $f(x, y) = -g(x, y)$.

do prostoru H. Dále je dán určitý prvek $f \in H$. Hledáme takový prvek $u \in D_A$, který splňuje rovnici

$$Au = f \text{ v } H. \tag{9.4}$$

Zápisem (9.4) rozumíme, že rovnice $Au = f$ je splněna v uvažovaném Hilbertově prostoru H, tj. že $Au - f$ je nulovým prvkem prostoru H. Je-li např. $H = L_2(G)$, znamená zápis (9.4), že rovnice $Au = f$ je v oblasti G splněna skoro všude, tj. popř. s výjimkou bodů tvořících množinu nulové míry.

Ukážeme, že je-li operátor A pozitivní v D_A, může mít rovnice (9.4) v H nejvýše jedno řešení $u \in D_A$. Než přikročíme k důkazu, zopakujeme některé pojmy, zavedené v předcházející kapitole.

Nechť D_A je lineál hustý v Hilbertově prostoru H. Operátor A, zobrazující lineál D_A do prostoru H, se nazývá *symetrický v* D_A, je-li v D_A lineární a platí-li

$$(Au, v) = (u, Av) \quad \text{pro každé dva prvky} \quad u \in D_A,\ v \in D_A. \tag{9.5}$$

Nazývá se *pozitivní v* D_A, je-li v D_A symetrický a platí-li

$$(Au, u) \geqq 0 \quad \text{pro každé} \quad u \in D_A, \tag{9.6}$$

přičemž

$$(Au, u) = 0 \Rightarrow u = 0 \text{ v } D_A. \tag{9.7}$$

Věta 9.1. *Je-li A pozitivní operátor v D_A, pak rovnice (9.4), kde $f \in H$, má v H nejvýše jedno řešení $u \in D_A$.*

Důkaz: Nechť existují dvě taková řešení $u_1 \in D_A$, $u_2 \in D_A$. To znamená, že v H jsou splněny rovnice

$$Au_1 = f, \tag{9.8}$$

$$Au_2 = f. \tag{9.9}$$

Odečteme-li rovnici (9.8) od rovnice (9.9) a uvážíme-li, že A je pozitivní, a tedy především lineární operátor, takže $Au_2 - Au_1 = A(u_2 - u_1)$, dostaneme

$$A(u_2 - u_1) = 0 \text{ v } H.$$

Násobíme-li tuto rovnici skalárně prvkem $u_2 - u_1 \in D_A$ zprava, dostaneme

$$(A(u_2 - u_1), u_2 - u_1) = 0,$$

odkud podle (9.7) plyne

$$u_2 - u_1 = 0 \text{ v } D_A$$

čili $u_2 = u_1$ v D_A, což jsme měli dokázat.

Základní význam bude mít pro nás tato věta:

Věta 9.2 (*o minimu kvadratického funkcionálu*). *Nechť A je pozitivní operátor v D_A, $f \in H$. Nechť rovnice (9.4) má řešení $u_0 \in D_A$, tj. nechť platí*

$$Au_0 = f \text{ v } H, \quad u_0 \in D_A. \tag{9.10}$$

Pak kvadratický[1]) *funkcionál*

$$Fu = (Au, u) - 2(f, u) \tag{9.11}$$

nabývá v D_A právě pro prvek u_0 minimální hodnoty, tj. pro všechna $u \in D_A$ platí $Fu \geqq Fu_0$, přičemž $Fu = Fu_0$ jen pro $u = u_0$.

Naopak, nechť funkcionál (9.11) nabývá pro prvek u_0 minimální hodnoty mezi všemi prvky $u \in D_A$. Pak u_0 je v H řešením rovnice (9.4), tj. platí (9.10).

Důkaz: Nejprve je zřejmé, že pro všechna $u \in D_A$ je funkcionál Fu definován.

1. Nechť pro u_0 je v H splněna rovnice (9.10), takže $f = Au_0$. Dosadíme-li za f do (9.11), dostaneme pro $u \in D_A$

$$Fu = (Au, u) - 2(Au_0, u).$$

Snadno však zjistíme, že je

$$\begin{aligned} Fu &= (Au, u) - 2(Au_0, u) = \\ &= (Au, u) - (Au_0, u) - (u, Au_0) = \\ &= (Au, u) - (Au_0, u) - (Au, u_0) = \\ &= (Au, u) - (Au_0, u) - (Au, u_0) + (Au_0, u_0) - (Au_0, u_0) = \\ &= (A(u - u_0), u - u_0) - (Au_0, u_0). \end{aligned}$$

[Použili jsme jednak symetrie skalárního součinu, z níž plyne $(Au_0, u) = (u, Au_0)$, jednak symetrie operátoru A, podle níž je $(u, Au_0) = (Au, u_0)$.]

Platí-li tedy $Au_0 = f$, pak

$$Fu = (A(u - u_0), u - u_0) - (Au_0, u_0). \tag{9.12}$$

Člen (Au_0, u_0) v (9.12) nezávisí na u a zůstává tedy s měnícím se u konstantní; dále operátor A je podle předpokladu pozitivní, takže pro první člen na pravé straně (9.12) platí

$$(A(u - u_0), u - u_0) \geqq 0 \quad \text{pro každé} \quad u \in D_A,$$

[1]) Viz pozn. 8.7, str. 117.

přičemž

$$(A(u - u_0), u - u_0) = 0 \quad \text{právě tehdy, je-li} \quad u - u_0 = 0 \text{ v } D_A .$$

Z (9.12) tedy plyne, že

$$Fu \geqq Fu_0 \quad \text{pro každé} \quad u \in D_A ,$$

přičemž

$$Fu = Fu_0$$

právě tehdy, je-li $u = u_0$ v D_A. Jestliže je tedy splněna rovnice $Au_0 = f$, nabývá funkcionál Fu nejmenší hodnoty v D_A právě pro prvek $u = u_0$. Tím je první tvrzení věty 9.2 dokázáno.

2. Nechť funkcionál Fu nabývá v D_A nejmenší hodnoty pro prvek u_0. To tedy znamená, že zvolíme-li libovolný prvek $v \in D_A$ a libovolné reálné číslo t (takže zřejmě bude také $u_0 + tv \in D_A$), bude

$$F(u_0 + tv) \geqq Fu_0 \tag{9.13}$$

čili

$$F(u_0 + tv) - Fu_0 \geqq 0 . \tag{9.14}$$

Užijeme-li opět symetrie operátoru A a symetrie skalárního součinu, dostaneme

$$\begin{aligned} F(u_0 + tv) &= (A(u_0 + tv), u_0 + tv) - 2(f, u_0 + tv) = \\ &= (Au_0 + tAv, u_0 + tv) - 2(f, u_0) - 2t(f, v) = \\ &= (Au_0, u_0) + t(Av, u_0) + t(Au_0, v) + t^2(Av, v) - 2t(f, v) - 2(f, u_0) = \\ &= (Au_0, u_0) + 2t(Au_0, v) + t^2(Av, v) - 2t(f, v) - 2(f, u_0) . \end{aligned}$$

Tedy

$$F(u_0 + tv) = (Au_0, u_0) + 2t(Au_0, v) + t^2(Av, v) - 2t(f, v) - 2(f, u_0) . \tag{9.15}$$

Protože $u_0 \in D_A$ a $f \in H$ jsou pevné prvky, je z (9.15) zřejmé, že pro pevně zvolené $v \in D_A$ je $F(u_0 + tv)$ kvadratickou funkcí proměnné t. Z (9.14) plyne, že tato funkce má mít pro $t = 0$ lokální minimum, což znamená, že její první derivace pro $t = 0$ je nutně rovna nule,

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} F(u_0 + tv)\Big|_{t=0} = 0 , \tag{9.16}$$

čili podle (9.15),

$$2(Au_0, v) - 2(f, v) = 0 . \tag{9.17}$$

Podmínku (9.17) snadno upravíme na tvar

$$(Au_0 - f, v) = 0 .^{1)} \tag{9.18}$$

Prvek $v \in D_A$ byl zvolen pevně, ale libovolně, takže k rovnosti (9.18) dospějeme z podmínky (9.14) při každé volbě prvku $v \in D_A$. Lineál D_A je podle předpokladu hustý v H. Z (9.18) tedy plyne, že prvek $Au_0 - f$ je v prostoru H ortogonální ke všem prvkům v z lineálu D_A, hustého v H, a podle věty 6.18, str. 82, je tedy

$$Au_0 - f = 0 \text{ v } H ,$$

tj. u_0 je v H řešením rovnice $Au_0 = f$, což jsme měli dokázat.

Příklad 9.1. Uvažujme diferenciální rovnici

$$(EIu'')'' = q , \tag{9.19}$$

s okrajovými podmínkami

$$u(0) = u(l) = 0 , \quad u'(0) = u'(l) = 0 . \tag{9.20}$$

Předpokládejme přitom, že funkce $E(x)$, $I(x)$ a jejich derivace do druhého řádu včetně, jakož i funkce $q(x)$ jsou spojité v intervalu $\langle 0, l\rangle$ a že platí

$$E(x) > 0 , \quad I(x) > 0 \text{ v } \langle 0, l\rangle . \tag{9.21}$$

Rovnici (9.19) můžeme interpretovat jako diferenciální rovnici pro průhyb ohybové osy prutu délky l, s modulem pružnosti $E(x)$, momentem setrvačnosti průřezu vzhledem k ohybové ose $I(x)$ a s příčným zatížením $q(x)$. Podmínky (9.20) pak znamenají, že prut je na obou koncích vetknutý.

Jsou-li E a I v intervalu $\langle 0, l\rangle$ konstantní, můžeme ovšem rovnici (9.19) zapsat ve tvaru

$$EIu^{(4)} = q .$$

Zvolme $H = L_2(0, l)$ a v něm lineál D_A funkcí $u(x)$, které jsou s derivacemi do čtvrtého řádu včetně spojité v intervalu $\langle 0, l\rangle$ a splňují podmínky (9.20). Podle věty 8.5, resp. pozn. 8.5 je tento lineál hustý v $L_2(0, l)$. Definujme na lineálu D_A operátor A předpisem

$$Au = (EIu'')'' . \tag{9.22}$$

---

[1]) Funkcionál $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} F(u + tv)|_{t=0}$ se ve variačním počtu nazývá *první variace funkcionálu F*. Prvek u_0, pro který je první variace rovna nule, se často nazývá *stacionární bod funkcionálu F*. V našem případě má první variace funkcionálu F tvar $(Au - f, v)$ a ve stacionárním bodě u_0 dosahuje funkcionál F minimální hodnoty.

Problém (9.19), (9.20) pak můžeme zapsat jedinou rovnicí

$$Au = q\,. \tag{9.23}$$

Snadno dokážeme, že operátor A je na lineálu D_A pozitivní. Nejprve dokážeme, že je v D_A symetrický: Pro každé $u \in D_A$, $v \in D_A$ totiž platí

$$(Au, v) = \int_0^l (EIu'')'' v \,dx = [(EIu'')' v]_0^l - \int_0^l (EIu'')' v' \,dx = \tag{9.24}$$

$$= -\int_0^l (EIu'')' v' \,dx = -[EIu''v']_0^l + \int_0^l EIu''v'' \,dx = \int_0^l EIu''v'' \,dx\,.$$

{Výraz $[(EIu'')' v]_0^l$, resp. $[EIu''v']_0^l$ je roven nule, neboť v důsledku (9.20) je $v(0) = v(l) = 0$, resp. $v'(0) = v'(l) = 0$.} Obdobným způsobem dojdeme k výsledku, že

$$(u, Av) = \int_0^l u(EIv'')'' \,dx = \int_0^l EIu''v'' \,dx\,. \tag{9.25}$$

Z (9.24) a (9.25) plyne symetričnost operátoru A na lineálu D_A.

Z (9.24) dostáváme dále pro každé $u \in D_A$

$$(Au, u) = \int_0^l EIu''^2 \,dx\,. \tag{9.26}$$

V důsledku (9.21) plyne z (9.26)

$$(Au, u) \geqq 0 \quad \text{pro každé} \quad u \in D_A\,.$$

Přitom je-li $(Au, u) = 0$, plyne z (9.26) a z (9.21)

$$u''(x) \equiv 0 \ \text{v} \ \langle 0, l\rangle\,,$$

odkud

$$u(x) = ax + b \ \text{v} \ \langle 0, l\rangle$$

a v důsledku (9.20)

$$u(x) \equiv 0 \ \text{v} \ \langle 0, l\rangle\,.$$

Tím je pozitivnost operátoru A na lineálu D_A dokázána.

Funkcionál $Fu = (Au, u) - 2(q, u)$ má v našem případě tvar

$$Fu = \int_0^l EIu''^2 \,dx - 2\int_0^l qu \,dx \tag{9.27}$$

a — fyzikálně řečeno — vyjadřuje při daném průhybu $u \in D_A$ dvojnásobnou celkovou potenciální energii Lu uvažovaného prutu,

$$Fu = 2Lu = 2\left(\frac{1}{2}\int_0^l EIu''^2 \,dx - \int_0^l qu \,dx\right). \tag{9.28}$$

[Jak známo, integrály

$$\frac{1}{2}\int_0^l EIu''^2 \,dx\,, \quad \text{resp.} \quad -\int_0^l qu \,dx \tag{9.29}$$

je dána elastická potenciální energie prutu, resp. potenciální energie vnějších sil, tj. daného zatížení q.]

Nechť $u_0(x)$ je řešením rovnice (9.23), tj. nechť $u_0 \in D_A$ a

$$(EIu_0'')'' = q\,. \tag{9.30}$$

Dosadíme-li za q z (9.30) do (9.27), dostaneme

$$Fu = \int_0^l EIu''^2 \,dx - 2\int_0^l (EIu_0'')'' u \,dx\,.$$

Integrováním per partes, obdobným integrování v (9.24), dostaneme (pro dané $u_0 \in D_A$ a pro každé $u \in D_A$)

$$\int_0^l (EIu_0'')'' u \,dx = \int_0^l EIu_0''u'' \,dx\,,$$

takže

$$Fu = \int_0^l EIu''^2 \,dx - 2\int_0^l EIu_0''u'' \,dx = \int_0^l EI(u'' - u_0'')^2 \,dx - \int_0^l EIu_0''^2 \,dx\,. \tag{9.31}$$

Protože $(u'' - u_0'')^2 \geqq 0$ a zároveň platí (9.21), je z (9.31) ihned vidět, že funkcionál Fu bude v D_A minimální právě tehdy, bude-li $u = u_0$ v D_A. Můžeme tedy v našem příkladě vyslovit první tvrzení, které je v souhlasu s prvním tvrzením věty 9.2: *Je-li $u_0 \in D_A$ řešením rovnice* (9.23), *pak funkcionál Fu nabývá v D_A pro toto u_0 minimální hodnoty.*

Naopak, nechť $u_0 \in D_A$ je prvek, minimalizující v D_A funkcionál (9.27). Nechť $v \in D_A$ je libovolný prvek z D_A a t libovolné reálné číslo. Podmínka minima,

$$\frac{d}{dt} F(u_0 + tv)\Big|_{t=0} = 0$$

[srov. (9.16)], má v našem případě tvar

$$\frac{d}{dt}\left[\int_0^l EI(u_0'' + tv'')^2 \,dx - 2\int_0^l q(u_0 + tv) \,dx\right]\Big|_{t=0} = 0\,,$$

čili

$$2\int_0^l EIu_0''v'' \,dx - 2\int_0^l qv \,dx = 0\,. \tag{9.32}$$

Dělením této rovnosti číslem 2 a integrováním prvního členu per partes [srov. (9.24)] uvedeme uvažovanou podmínku na tvar

$$\int_0^l [(EIu_0'')'' - q]\, v\, \mathrm{d}x = 0\,.$$

Tato rovnost má platit pro každé $v \in D_A$. Lineál D_A je však hustý v $L_2(0, l)$ odkud plyne, podobně jako v (9.18),

$$(EIu_0'')'' - q = 0 \tag{9.33}$$

v $L_2(0, l)$. Funkce vystupující v (9.33), i jejich derivace jsou však podle předpokladu spojité v $\langle 0, l\rangle$, takže rovnost (9.33) je splněna dokonce v obyčejném smyslu. Tak dospíváme k druhému tvrzení, opět ve shodě s příslušným tvrzením věty 9.2: *Jestliže funkce $u_0(x)$, patřící do D_A* [a vyhovující tedy podmínkám (9.20)] *minimalizuje v D_A funkcionál* (9.27),[1]) *pak splňuje podmínku* (9.33), *tj. je řešením diferenciální rovnice* (9.19) *pro průhyb ohybové osy uvažovaného prutu.*

Obě tvrzení, která jsme právě vyslovili, nejsou ničím jiným než principem minima potenciální energie, známým z teorie pružnosti a aplikovaným na uvažovaný prut, a ukazují těsnou souvislost věty 9.2 s variačními principy mechaniky. Věta 9.2 uvažuje ovšem rovnici $Au = f$ bez ohledu na její fyzikální interpretaci, resp. na interpretaci příslušného funkcionálu Fu.

Poznámka 9.1. K objasnění souvislosti věty 9.2 s mechanickými principy jsme uvedli příklad neobyčejně jednoduchý. Čtenář může v tomto případě namítnout, že rovnici (9.19) stačí postupně integrovat a není třeba zabývat se její souvislostí s „funkcionálem energie" (9.27), resp. (9.28). V dalším textu budeme ovšem větu 9.2 aplikovat na řešení problémů obecnějších.

Význam věty 9.2 záleží v tom, že úlohu řešit rovnici $Au = f$ převádí na úlohu najít prvek $u_0 \in D_A$, který minimalizuje v lineálu D_A funkcionál (9.11). V dalších kapitolách ukážeme účinné metody, jak najít prvek u_0 (resp. aspoň jeho dostatečně blízkou aproximaci) minimalizující funkcionál (9.11).

Uveďme však ještě jednu poznámku zásadního významu. Věta 9.2 má podmíněný charakter: Vyjadřuje ekvivalenci úlohy řešit na lineálu D_A rovnici $Au = f$ a úlohy najít v D_A minimum kvadratického funkcionálu (9.11) za toho předpokladu, že je známo, že buďto existuje řešení rovnice $Au = f$ (podrobněji, že existuje $u_0 \in D_A$ tak, že platí $Au_0 = f$ v H), nebo že funkcionál (9.11) nabývá na lineálu D_A svého minima. Avšak splnění ani jednoho z těchto předpokladů není a priori zřejmé dokonce ani ve velmi jednoduchých případech. Hledáme-li např. řešení rovnice (9.2) mezi funkcemi lineálu M_1, zmíněného na začátku této kapitoly, a je-li funkce f na pravé straně této rovnice „dostatečně" nespojitá (např. je-li na některé podoblasti

[1]) nebo funkcionál Lu, neboť je zřejmé, že funkcionál Lu nabývá v D_A minima právě tehdy, nabývá-li na tomto lineálu minima funkcionál Fu.

oblasti G rovna nule a na zbývající části této oblasti je rovna jedné), takže ji nelze vhodnou změnou funkčních hodnot na množině míry nula učinit spojitou, nemá zřejmě rovnice (9.2) na lineálu M_1 žádné řešení, neboť pro každé $u \in M_1$ je Δu funkce spojitá v $\bar{G}$. Ve shodě s větou 9.2 nemůže ani funkcionál (9.11) v takovém případě nabývat na lineálu M_1 svého minima. [Jinak by totiž podle věty 9.2 existovalo řešení $u_0 \in M_1$ rovnice (9.2).][1]) Abychom překonali tuto obtíž, zdá se velmi přirozené vhodně rozšířit (nebo přímo vhodně specifikovat) definiční obor operátoru $-\Delta u$. S podobnými problémy týkajícími se rozšíření původního definičního oboru uvažovaného operátoru se setkáváme i v obecnějších případech. Otázka, jak vhodně rozšířit základní lineál D_A, není jednoduchá. Je třeba, aby toto rozšíření bylo aspoň takové, aby funkcionál (9.11) nabýval v nějakém smyslu na tomto rozšířeném oboru svého minima: prvek realizující toto minimum pak prohlásíme za „zobecněné" řešení rovnice $Au = f$. Zároveň je třeba dbát, aby tento rozšířený obor byl ještě natolik úzký, aby byla zaručena jednoznačnost tohoto zobecněného řešení; dále, existuje-li „klasické" řešení u_0 rovnice (9.10) ve smyslu věty 9.2, je třeba, aby zobecněné řešení bylo právě tímto „klasickým" řešením. Určitý, do jisté míry jednotný postup ukážeme v kap. 34. Na tomto místě uvedeme konstrukci tzv. prostoru H_A, pro naše nejbližší cíle dostatečně obecného, v němž, jak uvidíme, bude možno snadno dokázat existenci a jednoznačnost minima vhodně rozšířeného funkcionálu (9.11) a tím i existenci a jednoznačnost zobecněného řešení naší úlohy. Tuto konstrukci provedeme za předpokladu, že uvažovaný operátor A je v D_A pozitivně definitní.

Kapitola 10
Prostor H_A

Nechť v Hilbertově prostoru H je dán lineál D_A hustý v H a na něm operátor A, zobrazující lineál D_A do prostoru H a pozitivně definitní na tomto lineálu, tedy symetrický a takový, že existuje konstanta $C > 0$ tak, že platí

$$(Au, u) \geqq C^2 \|u\|^2 \quad \text{pro každé} \quad u \in D_A\,. \tag{10.1}$$

Na lineálu D_A definujme nový skalární součin $(u, v)_A$ takto:

$$(u, v)_A = (Au, v) \quad \text{pro všechna} \quad u \in D_A,\, v \in D_A\,. \tag{10.2}$$

Snadno ověříme, že $(u, v)_A$ je skutečně skalární součin, tj. že splňuje všechny axiómy

[1]) Podobně, je-li zatížení $q(x)$ prutu, uvažovaného v příkl. 9.1, nespojité (a to je v aplikacích velmi častý případ), nemůže mít rovnice (9.23) řešení $u_0 \in D_A$ (neboť levá strana této rovnice by pak byla spojitou funkcí v intervalu $\langle 0, l\rangle$), a tedy ani funkcionál (9.27) nemůže nabývat na lineálu D_A minima.

(6.3) až (6.6), uvedené pro skalární součin na str. 69: Protože operátor A je podle předpokladu pozitivně definitní, plyne již z jeho definice, že je symetrický (a tedy také lineární). Předně tedy pro libovolné prvky u, v, u_1, u_2 z D_A a pro libovolná reálná čísla a_1, a_2 platí

$$(u, v)_A = (Au, v) = (u, Av) = (Av, u) = (v, u)_A,$$

$$(a_1u_1 + a_2u_2, v)_A = (A(a_1u_1 + a_2u_2), v) = (a_1Au_1 + a_2Au_2, v) = = a_1(Au_1, v) + a_2(Au_2, v) = a_1(u_1, v)_A + a_2(u_2, v)_A,$$

čímž je splnění prvních dvou axiómů (6.3) a (6.4) skalárního součinu ověřeno. Ale také zbývající axiómy (6.5) a (6.6) jsou zřejmě splněny, neboť z (10.1) plyne

$$(u, u)_A = (Au, u) \geqq 0, \quad \text{přičemž} \quad (u, u)_A = 0, \quad \text{jen je-li} \quad u = 0 \text{ v } D_A.$$

Tedy vztahem (10.2) je na lineálu D_A skutečně dán skalární součin.

Příklad 10.1. V prostoru $L_2(a, b)$ se skalárním součinem

$$(u, v) = \int_a^b u(x)\, v(x)\, dx$$

uvažujme lineál D_A funkcí $u(x)$ spojitých včetně derivací $u'(x)$ a $u''(x)$ v uzavřeném intervalu $\langle a, b\rangle$ a splňujících podmínky

(10.3) $$u(a) = 0, \quad u(b) = 0.$$

Na tomto lineálu definujme operátor A vztahem

(10.4) $$Au = -u''.$$

Jak jsme ukázali v příkl. 8.9, str. 111, je operátor (10.4) na lineálu D_A pozitivně definitní, přičemž, jak jsme snadným výpočtem zjistili, platí

(10.5) $$(u, v)_A = (u', v').$$

V tomto případě je tedy nový skalární součin $(u, v)_A$ funkcí $u(x)$, $v(x)$ z D_A dán původním skalárním součinem [tj. skalárním součinem v prostoru $L_2(a, b)$] jejich derivací $u'(x)$, $v'(x)$.

Protože $(u, v)_A$ má všechny vlastnosti skalárního součinu, vyplývá odtud, jak jsme ukázali v podstatě již v druhé kapitole, že veličiny

(10.6) $$\|u\|_A = \sqrt{(u, u)_A},$$

resp.

(10.7) $$\varrho_A(u, v) = \|u - v\|_A$$

splňují všechny axiómy normy, resp. vzdálenosti, a že tedy vztahy (10.6), (10.7) je na lineálu D_A definována nová norma, resp. metrika. Lineál D_A s metrikou (10.7) tvoří tedy lineární metrický prostor, a to unitární prostor (str. 72) se skalárním součinem (10.2). Tento prostor nazveme prostorem S_A. Všimněme si, že z (10.6), (10.2) a (10.1) plyne, že pro každý prvek $u \in D_A$ platí

(10.8) $$\|u\|_A^2 \geqq C^2\|u\|^2,$$

tj.

(10.9) $$\|u\| \leqq \frac{1}{C}\|u\|_A,$$

s touž konstantou $C > 0$ jako v (10.1).

Např. pro operátor (10.4) z příkl. 10.1 platí pro každé $u \in D_A$

(10.10) $$\|u\|_A^2 = \|u'\|^2 \geqq C^2\|u\|^2,$$

tj.

(10.11) $$\|u\| \leqq \frac{1}{C}\|u\|_A,$$

kde (viz příkl. 8.9, str. 111) můžeme položit $C = \sqrt{(2)}/(b - a)$.

Z (10.9) zejména plyne: Platí-li pro posloupnost $\{u_n\}$ prvků z D_A

(10.12) $$\lim_{n\to\infty} \|u_n - u_0\|_A = 0,$$

resp.

(10.13) $$\lim_{\substack{m\to\infty \\ n\to\infty}} \|u_m - u_n\|_A = 0,$$

pak také platí

(10.14) $$\lim_{n\to\infty} \|u_n - u_0\| = 0,$$

resp.

(10.15) $$\lim_{\substack{m\to\infty \\ n\to\infty}} \|u_m - u_n\| = 0,$$

tj. konverguje-li posloupnost $\{u_n\}$ k prvku u_0 v S_A, pak konverguje k tomuto prvku i v H; je-li cauchyovská v S_A, je cauchyovská i v H. Obrácená tvrzení ovšem neplatí.

Prostor S_A nemusí být v obecném případě úplný [rozumí se úplný v metrice (10.7)]. Je-li úplný, pak je Hilbertovým prostorem (def. 6.13, str. 76) a pro naše účely není třeba dále jej rozšiřovat. Nechť tedy S_A *není* úplný prostor. Jak jsme poznamenali v kap. 7, lze v takovém případě sestrojit „přidáním" tzv. ideálních elementů k prvkům prostoru S_A úplný prostor, tzv. *úplný obal* prostoru S_A. Označme jej H_A.

V této kapitole ukážeme konstrukci tohoto prostoru a zároveň ukážeme, že za předpokladu uvedeného na začátku této kapitoly, tj. za předpokladu, že operátor A je v D_A pozitivně definitní, lze všechny tyto ideální elementy vybrat z prvků původního prostoru H.[1])

K tomu účelu uvažujme množinu M všech posloupností, které jsou cauchyovské v prostoru S_A. Protože prostor S_A není podle předpokladu úplný, konvergují některé z nich k prvkům ležícím v S_A (označme množinu těchto posloupností M_1) a některé z nich limitu v S_A nemají (množinu těchto posloupností označme M_2). Tvrdíme předně, že vybereme-li z množiny M jakékoli dvě posloupnosti $\{u_n\} \in M$, $\{v_n\} \in M$, bez zřetele na to, jde-li o posloupnosti z množiny M_1 nebo z množiny M_2, pak že vždy existuje vlastní limita

$$\lim_{n \to \infty} \|u_n - v_n\|_A . \tag{10.16}$$

Podle Bolzanovy - Cauchyovy podmínky (str. 42) stačí dokázat, že příslušná posloupnost $\{\|u_n - v_n\|_A\}$ je cauchyovská, tj. že

$$\lim_{\substack{m \to \infty \\ n \to \infty}} (\|u_m - v_m\|_A - \|u_n - v_n\|_A) = 0 . \tag{10.17}$$

Ale podle (6.19) a (6.18), str. 72, je

$$\begin{aligned} \big|\|u_m - v_m\|_A - \|u_n - v_n\|_A\big| &\leq \|(u_m - v_m) - (u_n - v_n)\|_A = \\ &= \|(u_m - u_n) - (v_m - v_n)\|_A \leq \|u_m - u_n\|_A + \|v_m - v_n\|_A . \end{aligned} \tag{10.18}$$

Posloupnosti $\{u_n\}$ a $\{v_n\}$ jsou podle předpokladu v prostoru S_A cauchyovské, takže pro ně platí

$$\lim_{\substack{m \to \infty \\ n \to \infty}} \|u_m - u_n\|_A = 0 , \tag{10.19}$$

$$\lim_{\substack{m \to \infty \\ n \to \infty}} \|v_m - v_n\|_A = 0 , \tag{10.20}$$

odkud podle (10.18) plyne (10.17), což jsme měli dokázat.

Protože čísla $\|u_n - v_n\|_A$ jsou nezáporná, nemůže být záporná ani jejich limita. Tedy pro každé dvě posloupnosti $\{u_n\} \in M$, $\{v_n\} \in M$ platí buď

$$\lim_{n \to \infty} \|u_n - v_n\|_A = 0 , \tag{10.21}$$

nebo

$$\lim_{n \to \infty} \|u_n - v_n\|_A = a > 0 . \tag{10.22}$$

[1]) Čtenář, který chce postupovat rychleji, nemusí na tomto místě podrobně sledovat celou konstrukci prostoru H_A a může se zatím spokojit jen uvedeným tvrzením. Viz také stručný přehled na str. 187 a 188.

(kde ovšem číslo a je pro různé dvojice uvažovaných posloupností v obecném případě různé).

Uvažujme nyní posloupnosti z množiny M_1, tj. cauchyovské posloupnosti, které mají v S_A limitu. Označme M_{u_0} množinu všech posloupností z M_1, které konvergují v S_A k prvku u_0. Tvrdíme, že *všechny tyto posloupnosti splňují vztah* (10.21). *Naopak, je-li $\{u_n\}$ jedna z těchto posloupností, pak každá jiná posloupnost $\{v_n\}$, splňující* (10.21), *patří také do M_{u_0}* (tj. konverguje v S_A k témuž prvku u_0 jako posloupnost $\{u_n\}$).

První část tohoto tvrzení plyne z nerovnosti

$$\|u_n - v_n\|_A = \|(u_n - u_0) - (v_n - u_0)\|_A \leq \|u_n - u_0\|_A + \|v_n - u_0\|_A . \tag{10.23}$$

Patří-li totiž obě posloupnosti $\{u_n\}$ i $\{v_n\}$ do M_{u_0}, platí

$$\lim_{n \to \infty} \|u_n - u_0\|_A = 0 , \tag{10.24}$$

$$\lim_{n \to \infty} \|v_n - u_0\|_A = 0 , \tag{10.25}$$

odkud podle (10.23) vyplývá (10.21).

Druhá část tvrzení, tj. platnost vztahu

$$\lim_{n \to \infty} \|v_n - u_0\|_A = 0 \tag{10.26}$$

za předpokladu, že platí (10.24) a (10.21), plyne okamžitě z nerovnosti

$$\|v_n - u_0\|_A = \|(v_n - u_n) + (u_n - u_0)\|_A \leq \|v_n - u_n\|_A + \|u_n - u_0\|_A . \tag{10.27}$$

Odtud ovšem vyplývá tento důsledek: Je-li $\{u_n\} \in M_{u_0}$ a platí-li pro posloupnost $\{v_n\}$ (10.22), pak nemůže být $\{v_n\} \in M_{u_0}$; neboť podle toho, co jsme právě dokázali, by musel být v takovém případě splněn vztah (10.21), což vede ke sporu s (10.22).

Z právě odvozených výsledků plyne, že rozdělíme-li posloupnosti z množiny M_1 na třídy tak, že dvě posloupnosti $\{u_n\}$ a $\{v_n\}$ z M_1 patří do téže třídy právě tehdy, splňují-li (10.21), pak že *tyto třídy jsou vzájemně jednoznačně přiřazeny prvkům prostoru S_A*: Každému prvku $u_0 \in S_A$ je přiřazena třída M_{u_0} těch posloupností z M_1, které konvergují v S_A k tomuto prvku, a každé z uvažovaných tříd přísluší právě jeden prvek u_0 prostoru S_A, a to ten, k němuž v S_A konverguje některá (libovolná) posloupnost $\{u_n\}$ z této třídy (neboť jak jsme ukázali, konvergují k tomuto prvku i všechny ostatní posloupnosti z této třídy).

Uvažujme nyní posloupnosti z množiny M_2, tj. posloupnosti cauchyovské v S_A, které nemají v S_A limitu. Rozdělme tyto posloupnosti, podobně jako v předcházejícím případě, na třídy tak, že dvě posloupnosti $\{u_n\} \in M_2$, $\{v_n\} \in M_2$ patří do téže třídy právě tehdy, platí-li

$$\lim_{n \to \infty} \|u_n - v_n\|_A = 0 . \tag{10.28}$$

Těmto třídám nebudou tentokrát odpovídat prvky u_0 z prostoru S_A v dříve popsaném smyslu, neboť posloupnosti z množiny M_2 nemají v prostoru S_A limitu. Uvidíme však, že bude možno přiřadit jim vzájemně jednoznačně určité prvky z prostoru H (nepatřící do S_A). Množinu těchto prvků označíme D_I. Na tyto prvky pak přirozeným způsobem rozšíříme skalární součin $(u, v)_A$, definovaný zatím jen pro prvky z prostoru S_A, a vytvoříme tak, jak uvidíme, právě hledaný úplný prostor H_A. Prvky množiny D_I pak budou „ideálními elementy" prostoru H_A (proto jsme pro množinu těchto prvků volili označení D s indexem I), o nichž byla zmínka v předcházejícím textu [srov. text následující za (10.15)].

Prvky z množiny D_I dostaneme takto: Vezměme určitou posloupnost $\{u_n\}$ z množiny M_2. Tato posloupnost je podle předpokladu cauchyovská v S_A, takže je také cauchyovská v H [srov. (10.15)]. Protože H je úplný prostor, konverguje posloupnost $\{u_n\}$ v H k určitému (touto posloupností jednoznačně určenému) prvku, který označíme u_0. Tedy

(10.29) $$\lim_{n\to\infty} u_n = u_0 \text{ v } H .$$

Uvažujme nyní posloupnost $\{v_n\} \in M_2$ z téže třídy, do které patří posloupnost $\{u_n\}$, takže platí (10.28). Dokážeme, že tato posloupnost má v prostoru H tutéž limitu u_0 jako posloupnost $\{u_n\}$, tj. že platí

(10.30) $$\lim_{n\to\infty} v_n = u_0 \text{ v } H .$$

Máme tedy dokázat, že z (10.29) a (10.28) plyne

(10.31) $$\lim_{n\to\infty} \|v_n - u_0\| = 0 .$$

Z (10.9) však vyplývá

$$\|u_n - v_n\| \leqq \frac{1}{C} \|u_n - v_n\|_A ,$$

odkud podle (10.28) je

(10.32) $$\lim_{n\to\infty} \|u_n - v_n\| = 0 .$$

Podobně jako v (10.27) máme

$$\|v_n - u_0\| = \|(v_n - u_n) + (u_n - u_0)\| \leqq \|v_n - u_n\| + \|u_n - u_0\| ,$$

odkud, protože platí (10.32) a (10.29), plyne (10.31), což jsme měli dokázat.

Každé třídě posloupností z množiny M_2 přísluší tedy ve smyslu konstrukce (10.29) určitý prvek z prostoru H (nepatřící do S_A), touto třídou posloupností jednoznačně určený. Množinu všech těchto prvků (odpovídajících uvažovaným třídám) označíme, jak jsme již předeslali, symbolem D_I. Ukážeme, že také naopak každému

$u_0 \in D_I$ odpovídá právě jedna třída posloupností z M_2. K tomuto účelu stačí dokázat, že každým dvěma navzájem různým třídám posloupností z M_2 odpovídají [ve smyslu konstrukce (10.29)] různé prvky z D_I.[1])

Dvě posloupnosti $\{u_n\}$, $\{v_n\}$ z M_2 patří, resp. nepatří do téže třídy, splňují-li (10.21), resp. (10.22). Uvažujme tedy dvě posloupnosti $\{u_n\}$, $\{v_n\}$ z různých tříd, takže je

(10.33) $$\lim_{n\to\infty} \|u_n - v_n\|_A = a > 0 .$$

Nechť přitom mají tyto posloupnosti v prostoru H tutéž limitu, tj. nechť platí

(10.34) $$\lim_{n\to\infty} u_n = u_0 , \quad \lim_{n\to\infty} v_n = u_0 \text{ v } H .$$

Ukážeme, že tento předpoklad vede ke sporu, čímž bude dokázáno, že dvěma navzájem různým třídám posloupností z množiny M_2 nemohou odpovídat [ve smyslu konstrukce (10.29)] dva stejné prvky z H.

Označme $z_n = u_n - v_n$. Protože posloupnosti $\{u_n\}$ i $\{v_n\}$ jsou cauchyovské v S_A, je i posloupnost $\{z_n\}$ cauchyovská v S_A a podle (10.33) platí

(10.35) $$\lim_{n\to\infty} \|z_n\|_A = a > 0 ,$$

takže také

(10.36) $$\lim_{n\to\infty} (z_n, z_n)_A = a^2 > 0 ,$$

neboť $(z_n, z_n)_A = \|z_n\|_A^2$. Podle (10.34) je zároveň

(10.37) $$\lim_{n\to\infty} z_n = 0 \text{ v } H ,$$

a tedy podle věty 6.17, str. 82,

(10.38) $$\lim_{n\to\infty} \|z_n\| = 0 .$$

Protože $\{z_n\}$ je posloupnost cauchyovská v S_A, existuje podle věty 7.8, str. 88, taková konstanta $K > 0$, že pro všechna n platí

(10.39) $$\|z_n\|_A \leqq K .$$

---

[1]) Toto není tak zcela samozřejmé, jak se snad čtenáři zdá. Z (10.9) totiž plyne, že jsou-li posloupnosti $\{u_n\}$ a $\{v_n\}$ „blízké" v metrice prostoru S_A, pak že jsou také „blízké" v metrice prostoru H. Neplyne odtud ovšem, že posloupnosti „blízké" v prostoru H jsou také „blízké" v prostoru S_A. Mohlo by se tedy stát, že dvě posloupnosti z různých tříd v metrice prostoru S_A by mohly mít v H tutéž limitu.

Označme

$$\varepsilon = \frac{a^2}{2(K+1)}\,, \tag{10.40}$$

kde a je konstanta z (10.35). Protože $\varepsilon > 0$ a posloupnost $\{z_n\}$ je v S_A cauchyovská, lze k tomuto ε najít číslo n_0 takové, že platí

$$\|z_m - z_n\|_A < \varepsilon \quad \text{pro každou dvojici přirozených čísel} \quad m > n_0,\ n > n_0\,. \tag{10.41}$$

Zvolme pevně $m > n_0$. Zřejmě je

$$(z_n, z_n)_A = (z_n - z_m, z_n)_A + (z_m, z_n)_A\,. \tag{10.42}$$

Dále

$$|(z_m, z_n)_A| = |(Az_m, z_n)| \leqq \|Az_m\| \cdot \|z_n\|\,. \tag{10.43}$$

Protože m je pevné, a tedy Az_m je pevný prvek z prostoru H, plyne z (10.43) a z (10.38), že k číslu ε, danému vztahem (10.40), lze najít číslo n_0' tak, že pro všechna $n > n_0'$ je

$$|(z_m, z_n)_A| < \varepsilon\,. \tag{10.44}$$

Zároveň pro všechna $n > n_0$ platí podle (10.39) a (10.41)

$$|(z_n - z_m, z_n)_A| \leqq \|z_m - z_n\|_A \cdot \|z_n\|_A < K\varepsilon\,. \tag{10.45}$$

Označme $N = \max(n_0, n_0')$. Pro všechna $n > N$ platí tedy zároveň (10.44) i (10.45), a tedy podle (10.42) i

$$(z_n, z_n)_A\ ^{1)} < K\varepsilon + \varepsilon = (K+1)\,\varepsilon = \frac{a^2}{2} \tag{10.46}$$

podle (10.40). Nemůže tedy být

$$\lim_{n\to\infty} (z_n, z_n)_A = a^2\,,$$

což je spor s (10.36).

O třídách posloupností z množiny M_2 můžeme tedy vyslovit obdobné tvrzení, které jsme vyslovili o vzájemně jednoznačném přiřazení tříd posloupností z množiny M_1 a prvků z lineálu D_A:

Každému prvku $u_0 \in D_I$ odpovídá právě jedna třída posloupností z množiny M_2, a to třída všech těch posloupností z množiny M_2, které konvergují v prostoru H k prvku u_0. Naopak, každé z těchto tříd odpovídá v D_I právě jeden prvek u_0, a to ten, který je v prostoru H limitou některé (libovolné) posloupnosti z této třídy.

Označme D sjednocení množin D_A a D_I,

$$D = D_A \cup D_I\,. \tag{10.47}$$

[1]) Zde nemusíme psát absolutní hodnotu, neboť $(z_n, z_n)_A \geqq 0$.

Podle právě vyslovených tvrzení existuje tedy vzájemně jednoznačné přiřazení mezi prvky množiny D a jednotlivými třídami všech posloupností, cauchyovských v prostoru S_A. Přitom tyto třídy jsou, jak víme, charakterizovány tím, že dvě posloupnosti $\{u_n\}$, $\{v_n\}$, cauchyovské v S_A, patří do téže třídy právě tehdy, platí-li (10.21). Uvažované přiřazení je zřejmě lineární (odpovídá-li posloupnosti $\{u_n\}$ prvek u_0, odpovídá posloupnosti $\{au_n\}$ prvek au_0 atd.), odkud snadnou úvahou plyne, že množina D je lineál. To umožňuje definovat na D skalární součin. Tento součin označíme stejným symbolem $(u, v)_A$ jako skalární součin, definovaný vztahem (10.2) na lineálu D_A. (Z následujících řádků vyplyne, že jsme k tomu skutečně oprávněni.) Definujeme

$$(u_0, v_0)_A = \lim_{n\to\infty} (u_n, v_n)_A \quad \text{pro každou dvojici prvků} \quad u_0 \in D,\ v_0 \in D\,, \tag{10.48}$$

přičemž $\{u_n\}$, resp. $\{v_n\}$ ($u_n \in D_A$, $v_n \in D_A$) je některá posloupnost z třídy, která podle předcházejícího textu odpovídá prvku u_0, resp. v_0.

Abychom ukázali oprávněnost definice (10.48) (i zvoleného označení), je třeba ukázat, že

1. limita (10.48) vždy existuje a je konečná;

2. limita (10.48) nezávisí na výběru posloupnosti $\{u_n\}$, resp. $\{v_n\}$ z třídy, která odpovídá prvku u_0, resp. v_0;

3. (10.48) má všechny vlastnosti skalárního součinu;

4. pro $u_0 \in D_A$, $v_0 \in D_A$ je součin (10.48) roven součinu (10.2) [takže skalární součin (10.48) je rozšířením skalárního součinu (10.2) z lineálu D_A na lineál D].

K jednotlivým bodům:

1. Stačí ukázat, že posloupnost $(u_n, v_n)_A$ je cauchyovská, tj. že platí

$$\lim_{\substack{m\to\infty\\ n\to\infty}} |(u_m, v_m)_A - (u_n, v_n)_A| = 0\,. \tag{10.49}$$

Ale posloupnosti $\{u_n\}$, $\{v_n\}$ jsou v S_A cauchyovské, takže platí

$$\lim_{\substack{m\to\infty\\ n\to\infty}} \|u_m - u_n\|_A = 0\,, \tag{10.50}$$

$$\lim_{\substack{m\to\infty\\ n\to\infty}} \|v_m - v_n\|_A = 0\,; \tag{10.51}$$

mimoto podle věty 7.8, str. 88, existuje konstanta K tak, že pro všechna n je

$$\|u_n\|_A \leqq K\,, \quad \|v_n\|_A \leqq K\,. \tag{10.52}$$

Dále platí, neboť prvky posloupností $\{u_n\}$, $\{v_n\}$ patří do S_A,

$$(10.53)\qquad |(u_m, v_m)_A - (u_n, v_n)_A| = |(u_m - u_n, v_m)_A + (u_n, v_m - v_n)_A| \leq$$
$$\leq |(u_m - u_n, v_m)_A| + |(u_n, v_m - v_n)_A| \leq \|u_m - u_n\|_A \cdot \|v_m\|_A +$$
$$+ \|u_n\|_A \cdot \|v_m - v_n\|_A \leq K(\|u_m - u_n\|_A + \|v_m - v_n\|_A),$$

odkud, protože platí (10.50) a (10.51), plyne (10.49).

2. Nechť $\{\tilde{u}_n\}$, resp. $\{\tilde{v}_n\}$ je jiná cauchyovská posloupnost z třídy, která podle předcházejícího textu odpovídá prvku u_0, resp. v_0, uvažovanému v (10.48). To tedy znamená, že je

$$(10.54)\qquad \lim_{n\to\infty} \|u_n - \tilde{u}_n\|_A = 0,$$

$$(10.55)\qquad \lim_{n\to\infty} \|v_n - \tilde{v}_n\|_A = 0.$$

Nechť dále konstanta K v (10.52) je již tak velká, že mimo (10.52) platí i

$$(10.56)\qquad \|\tilde{u}_n\|_A \leq K.$$

Máme

$$(10.57)\qquad |(u_n, v_n)_A - (\tilde{u}_n, \tilde{v}_n)_A| = |(u_n - \tilde{u}_n, v_n)_A + (\tilde{u}_n, v_n - \tilde{v}_n)_A| \leq$$
$$\leq |(u_n - \tilde{u}_n, v_n)_A| + |(\tilde{u}_n, v_n - \tilde{v}_n)_A| \leq \|u_n - \tilde{u}_n\|_A \cdot \|v_n\|_A +$$
$$+ \|\tilde{u}_n\|_A \cdot \|v_n - \tilde{v}_n\|_A \leq K(\|u_n - \tilde{u}_n\|_A + \|v_n - \tilde{v}_n\|_A),$$

odkud v důsledku (10.54) a (10.55) plyne

$$\lim_{n\to\infty} |(u_n, v_n)_A - (\tilde{u}_n, \tilde{v}_n)_A| = 0$$

čili

$$\lim_{n\to\infty} (u_n, v_n)_A = \lim_{n\to\infty} (\tilde{u}_n, \tilde{v}_n)_A,$$

což potvrzuje nezávislost limity (10.48) na volbě posloupnosti z třídy, která odpovídá prvku u_0, resp. v_0.

3. Vlastnosti (6.3) až (6.6), str. 69, součinu (10.48) nebudeme podrobně dokazovat, neboť plynou přímo limitním přechodem (10.48) z vlastností skalárního součinu (10.2). Např.

$$(u_0, v_0)_A = \lim_{n\to\infty} (u_n, v_n)_A = \lim_{n\to\infty} (v_n, u_n)_A = (v_0, u_0)_A$$

atd.

4. Je-li $u_0 \in D_A$, $v_0 \in D_A$, stačí za posloupnosti $\{u_n\}$, $\{v_n\}$ v (10.48) vzít stacionární posloupnosti $\{u_0\}$, $\{v_0\}$, neboť, jak jsme dokázali v bodě 2, nezávisí hodnota součinu (10.48) na volbě posloupností z příslušných tříd.

Vztahem (10.48) je tedy na lineálu D skutečně definován skalární součin, přičemž tento skalární součin je rozšířením skalárního součinu (10.2), definovaného pro prvky lineálu D_A, na celý lineál D. Protože tedy (10.48) je skalární součin, je vztahem

$$(10.58)\qquad \|u\|_A = \sqrt{(u, u)_A}, \quad u \in D,$$

resp.

$$(10.59)\qquad \varrho_A(u, v) = \|u - v\|_A, \quad u \in D, v \in D,$$

definována na lineálu D norma, resp. metrika, přičemž je opět snadné ukázat, že (10.58), resp. (10.59) je rozšířením normy (10.6), resp. metriky (10.7) na celý lineál D. Mimoto z (10.48) plynou snadno „obvyklá pravidla", např.

$$(10.60)\qquad \|u\|_A = \lim_{n\to\infty} \|u_n\|_A,$$

je-li $u \in D$ a je-li $\{u_n\}$ některá z jemu odpovídající třídy cauchyovských posloupností v S_A, apod.

Definice 10.1. Unitární prostor, vytvořený prvky lineálu D, se skalárním součinem (10.48) a metrikou (10.59) nazveme *prostorem* H_A.

Věta 10.1. *Prostor H_A je v metrice* (10.59) *úplný, je tedy Hilbertovým prostorem. Lineál D_A je v H_A hustý.*

Důkaz:

a) *Hustota.* Nechť u je libovolný prvek z H_A. Máme dokázat, že ke každému $\varepsilon > 0$ lze najít takový prvek $v \in D_A$, že platí

$$(10.61)\qquad \varrho_A(u, v) = \|u - v\|_A \leq \varepsilon.$$

Podle předpokladu je $u \in D$. Prvku u je tedy jednoznačně přiřazena určitá třída posloupností cauchyovských v S_A (a tedy také v H_A). Vyberme jednu z nich a označme ji $\{u_n\}$. Nechť $\varepsilon > 0$ je dáno. Protože $\{u_n\}$ je cauchyovská posloupnost v H_A, existuje takové n_0, že pro každou dvojici čísel m, n, pro kterou platí $m > n_0$, $n > n_0$, je

$$(10.62)\qquad \|u_m - u_n\|_A \leq \varepsilon.$$

Nechť u_n je pevně zvolený prvek uvažované posloupnosti takový, že $n > n_0$. Protože $\{u_m\}$ je jedna z posloupností prvků z prostoru S_A, odpovídajících prvku u, je $\{u_m - u_n\}$ (při pevném u_n) jedna z posloupností prvků z prostoru S_A, odpovídajících prvku $u - u_n$. Podle (10.60) máme

$$\|u - u_n\|_A = \lim_{m\to\infty} \|u_m - u_n\|_A.$$

Ale $n > n_0$, takže pro každé $m > n_0$ platí (10.62). Uvažovaná limita tedy nemůže být větší než ε, tj.

$$\|u - u_n\|_A \leqq \varepsilon . \tag{10.63}$$

Za hledaný prvek v v (10.63) stačí tedy vzít zvolený prvek u_n.

Tím je důkaz hustoty lineálu D_A v prostoru H_A proveden.

Všimněme si ještě této okolnosti: Číslo $\varepsilon > 0$ bylo zvoleno libovolně, takže z (10.63) plyne, že posloupnost $\{u_n\}$ konverguje v prostoru H_A k prvku u. Je-li tedy u libovolný prvek z H_A a je-li $\{u_n\}$ některá z jemu odpovídající třídy cauchyovských posloupností v S_A, pak

$$\lim_{n\to\infty} u_n = u \text{ v } H_A . \tag{10.64}$$

b) *Úplnost.* Nechť $\{v_n\}$ je libovolná posloupnost cauchyovská v H_A. Máme dokázat, že tato posloupnost má v H_A limitu.

Protože lineál D_A je hustý v H_A, lze každý prvek posloupnosti $\{v_n\}$ aproximovat v tomto prostoru s libovolnou přesností některým prvkem z_n z D_A. Speciálně je tedy možno najít takovou posloupnost $\{z_n\}$ prvků z D_A, že pro každé $n = 1, 2, \ldots$ platí

$$\|z_n - v_n\|_A < \frac{1}{n} . \tag{10.65}$$

Tvrdíme, že nejen posloupnost $\{v_n\}$, ale i posloupnost $\{z_n\}$ je cauchyovská v H_A. Z trojúhelníkové nerovnosti totiž plyne

$$\|z_m - z_n\|_A = \|(z_m - v_m) + (v_n - z_n) + (v_m - v_n)\|_A \leqq \tag{10.66}$$
$$\leqq \|z_m - v_m\|_A + \|z_n - v_n\|_A + \|v_m - v_n\|_A .$$

Z (10.66), (10.65) a z okolnosti, že $\{v_n\}$ je cauchyovská posloupnost, plyne ihned uvedené tvrzení.

Protože tedy posloupnost $\{z_n\}$ je cauchyovská v H_A, a tedy i v S_A, neboť prvky z_n patří do D_A, odpovídá jí v D určitý (touto posloupností jednoznačně stanovený) prvek z. Podle (10.64) je

$$\lim_{n\to\infty} z_n = z \text{ v } H_A ,$$

tj.

$$\lim_{n\to\infty} \|z - z_n\|_A = 0 . \tag{10.67}$$

Snadno ukážeme, že platí i

$$\lim_{n\to\infty} v_n = z \text{ v } H_A . \tag{10.68}$$

Je totiž

$$\|z - v_n\|_A \leqq \|z - z_n\|_A + \|z_n - v_n\|_A .$$

Odtud a z (10.67) a (10.65) plyne ihned

$$\lim_{n\to\infty} \|z - v_n\|_A = 0 ,$$

tj. (10.68).

Tím je důkaz úplnosti prostoru H_A proveden.

Poznámka 10.1. Z (10.48) plyne snadno limitním přechodem, že vztahy (10.8), resp. (10.9), tj. vztahy

$$\|u\|_A^2 \geqq C^2 \|u\|^2 , \quad C > 0 , \tag{10.69}$$

resp.

$$\|u\| \leqq \frac{1}{C} \|u\|_A , \quad C > 0 , \tag{10.70}$$

platné v prostoru S_A, zůstávají v platnosti i v prostoru H_A.

Poznámka 10.2. Na začátku této kapitoly jsme nevyloučili případ, že S_A je úplný prostor. V takovém případě není třeba provádět jeho rozšíření a je $D = D_A$ a $H_A = S_A$. Tento případ např. nastane, je-li $D_A = H$ a je-li A identický operátor (def. 8.11, str. 99), tj. je-li $A = I$. Tento operátor je zřejmě v H pozitivně definitní, neboť je lineární a symetrický a pro každé $u \in H$ je $(Iu, u) = (u, u)$, takže v (10.1) stačí položit $C = 1$. Tento případ je ovšem málo zajímavý, neboť rovnice $Au = f$ se zde redukuje na rovnici $u = f$ a jejím řešením je zřejmě prvek f. Důležité jsou právě případy, kdy prostor S_A není úplný, a kdy tedy je $H_A \neq S_A$. Tento případ je např. typický pro diferenciální operátory, s kterými se setkáváme v inženýrských a přírodovědných problémech.

Poznámka 10.3. V příští kapitole ukážeme, že prostor H_A je již dostatečně široký, aby bylo možno dokázat v něm existenci minima funkcionálu F z kap. 9 (vhodným způsobem modifikovaného), a tím i existenci „zobecněného řešení" daného problému $Au = f$. Prostor H_A jsme zkonstruovali, nebyl-li prostor S_A úplný, tak, že jsme k prvkům lineálu D_A „přidali" určité prvky prostoru H (množinu těchto prvků jsme označili D_I); tím jsme vytvořili lineál D a na tento lineál jsme rozšířili skalární součin a metriku prostoru S_A. Čtenář si jistě položí otázku, jaká je struktura množiny D_I, tj. jak „názorně" charakterizovat ty prvky prostoru H, které patří do D_I. Na tomto místě nemáme zatím možnost dát na tuto otázku nějakou obecnější odpověď. Pokud jde o speciální případy, dává určitou představu příkl. 10.1, str. 128: V tomto případě je $H = L_2(a, b)$ a lineál D_A je vytvořen funkcemi $u(x)$, spojitými včetně derivací prvního a druhého řádu v uzavřeném intervalu $\langle a, b\rangle$ a splňujícími okrajové podmínky

(10.71) $$u(a) = u(b) = 0\,.$$

Z (10.5) plyne, že skalární součin $(u, v)_A$ je v prostoru S_A dán vztahem

(10.72) $$(u, v)_A = \int_a^b u'v'\,dx\,.$$

Zhruba řečeno lze tedy očekávat, že množina D_I bude tvořena takovými funkcemi z prostoru $H = L_2(a, b)$, které nepatří do D_A a pro které bude mít integrál (10.72) ještě smysl. [K tomu např. stačí, aby první derivace těchto funkcí byly integrovatelné s druhou mocninou v intervalu (a, b).] Mimoto je třeba, aby tyto funkce splňovaly, alespoň v nějakém „rozumném" smyslu okrajové podmínky (10.71).

V případě diferenciálních operátorů (obyčejných nebo parciálních) druhého řádu, což je v aplikacích velmi častý případ, volíme za prostor H zpravidla prostor $L_2(a, b)$ [resp. $L_2(G)$] a za lineál D_A pak volíme zpravidla lineál funkcí spojitých včetně obyčejných, resp. parciálních derivací prvního a druhého řádu v uzavřeném intervalu $\langle a, b\rangle$, resp. v uzavřené oblasti $\bar{G}$ a vyhovujících určitým podmínkám v bodech a, b, resp. na hranici Γ oblasti G. Funkce z množiny D_I pak mají (aspoň v případech, s kterými se v této knize setkáme) tzv. *zobecněné derivace* (obyčejné, resp. parciální) prvního řádu, integrovatelné s druhou mocninou v uvažovaném oboru (intervalu, resp. oblasti), v obecném případě však již nemají derivace druhého řádu. Podrobněji o tom viz v kap. 32. Protože, jak uvidíme, bude dříve zmíněný funkcionál F nabývat na lineálu D svého minima, takže „zobecněné řešení" problému $Au = f$ bude prvkem tohoto lineálu, vzniká otázka, v jakém smyslu bude toto zobecněné řešení skutečně řešením uvažovaného problému, nebude-li funkcionál F nabývat tohoto minima právě na lineálu D_A. Určitou, v jistém smyslu uspokojivou odpověď na tuto otázku bude možno dát již v závěru následující kapitoly.

Kapitola 11

Existence minima funkcionálu F v prostoru H_A. Zobecněná řešení

Uvažujme funkcionál

(11.1) $$Fu = (Au, u) - 2(f, u)\,, \quad u \in D_A\,,$$

z kap. 9 (str. 121). Za předpokladu, že operátor A je na lineálu D_A pozitivní, víme podle věty 9.2, že když rovnice $Au = f$ má řešení[1]) $u_0 \in D_A$, pak že funkcionál F nabývá pro tento prvek u_0 minimální hodnoty mezi všemi prvky $u \in D_A$, a naopak, nabývá-li funkcionál F na lineálu D_A minimální hodnoty pro určitý prvek $u_0 \in D_A$, pak že tento prvek je řešením rovnice $Au = f$. V závěru kap. 9 jsme upozornili na to, že věta 9.2 má podmíněný charakter, neboť předpokládá buď existenci řešení $u_0 \in D_A$ dané rovnice, nebo existenci prvku $u_0 \in D_A$ minimalizujícího funkcionál F na lineálu D_A. Přitom existence takového prvku u_0 není ani v prvním, ani v druhém případě předem zaručena.

Je-li operátor A navíc pozitivně definitní, lze zkonstruovat, jak jsme viděli v předcházející kapitole, Hilbertův prostor H_A se skalárním součinem $(u, v)_A$, který je rozšířením skalárního součinu, daného na původním lineálu D_A vztahem

(11.2) $$(u, v)_A = (Au, v)\,, \quad u \in D_A,\ v \in D_A\,.$$

Předně tedy lze funkcionál (11.1) zapsat ve tvaru

(11.3) $$Fu = (u, u)_A - 2(f, u)\,, \quad u \in D_A\,.$$

Skalární součin $(u, u)_A$ má však smysl pro všechny prvky prostoru H_A (nejen pro prvky lineálu D_A). Totéž platí (při pevném $f \in H$) pro skalární součin (f, u), neboť je-li $u \in H_A$, je také $u \in H$. Tedy funkcionál F lze rozšířit předpisem (11.3) na celý prostor H_A,

(11.4) $$Fu = (u, u)_A - 2(f, u)\,, \quad u \in H_A\,.$$

Ukážeme, že takto rozšířený funkcionál nabývá v prostoru H_A svého minima a že prvek u_0, pro který je tohoto minima v H_A dosaženo, je jednoznačně určen daným prvkem $f \in H$.

Funkcionál (f, u) je lineární[2]) a přitom (pro pevné $f \in H$) omezený (def. 8.19, str. 115) funkcionál v H, neboť podle Schwarzovy nerovnosti (6.17) je

(11.5) $$|(f, u)| \leq \|f\| \cdot \|u\|\,,$$

[1]) Rozumí se řešení v uvažovaném Hilbertově prostoru H se skalárním součinem (u, v).

[2]) Linearnost funkcionálu (f, u) je zřejmá, neboť $(f, a_1u_1 + a_2u_2) = a_1(f, u_1) + a_2(f, u_2)$.

takže za konstantu K v def. 8.19 lze vzít číslo $\|f\|$, tj. normu funkce f v prostoru H. Funkcionál (f, u) je však (při pevném $f \in H$) lineární omezený funkcionál i v prostoru H_A. Podle (10.70) je totiž pro každé $u \in H_A$

$$(11.6) \qquad \|u\| \leqq \frac{1}{C} \|u\|_A ,$$

odkud podle (11.5) plyne

$$|(f, u)| \leqq \frac{\|f\|}{C} \|u\|_A$$

pro každé $f \in H$ a $u \in H_A$.

V tomto případě je tedy možno volit za konstantu K v def. 8.19 číslo $\|f\|/C$. Protože dále H_A je Hilbertův prostor, existuje podle Rieszovy věty (věta 8.8, str. 116) prvek $u_0 \in H_A$, prvkem $f \in H$ jednoznačně určený, tak, že platí

$$(11.7) \qquad (u_0, u)_A = (f, u) \quad \text{pro všechna} \quad u \in H_A .$$

Píšeme-li nyní podle (11.7) v (11.4) $(u_0, u)_A$ místo (f, u), dostaneme

$$(11.8) \quad Fu = (u, u)_A - 2(u_0, u)_A = (u, u)_A - 2(u_0, u)_A + (u_0, u_0)_A - (u_0, u_0)_A =$$
$$= (u - u_0, u - u_0)_A - (u_0, u_0)_A = \|u - u_0\|_A^2 - \|u_0\|_A^2 .$$

Ale $\|u\|_A$ je norma v prostoru H_A, takže

$$(11.9) \qquad \|u - u_0\|_A = 0 , \quad \text{je-li} \quad u - u_0 = 0 \text{ v } H_A , \quad \text{tj. je-li} \quad u = u_0 \text{ v } H_A ,$$

a

$$(11.10) \qquad \|u - u_0\|_A > 0 \quad \text{pro} \quad u \neq u_0 \text{ v } H_A .$$

Z (11.8), (11.9) a (11.10) je zřejmé, že funkcionál F nabývá v H_A minima, právě je-li $u = u_0$ v H_A, tj. právě pro prvek u_0, určený (jednoznačně) vztahem (11.7). Dokázali jsme tedy tuto větu:

Věta 11.1. *Nechť operátor A je pozitivně definitní na lineálu D_A hustém v Hilbertově prostoru H. Nechť H_A je Hilbertův prostor, zkonstruovaný v kap. 10. Pak funkcionál F, daný v H_A předpisem* (11.4), *nabývá v H_A své minimální hodnoty. Prvek u_0, realizující v H_A toto minimum, je jednoznačně dán vztahem* (11.7).

Jak jsme předeslali již v kapitole 9, definujeme:

Definice 11.1. Prvek u_0, minimalizující v prostoru H_A funkcionál (11.4) a určený jednoznačně vztahem (11.7), nazýváme *zobecněným řešením rovnice $Au = f$*.

Speciální případ zobecněného řešení je ten, kdy prvek u_0, realizující v H_A minimum funkcionálu F, je prvkem lineálu D_A. Tento případ odpovídá, zejména jde-li o di-

ferenciální operátory, v jistém smyslu představě klasického řešení daného problému. Viz o tom podrobněji v pozn. 11.4.

Věta 11.1 i definice 11.1 si zaslouží několika poznámek:

Poznámka 11.1. Jak vyplývá z předcházejícího textu, je zobecněné řešení u_0 rovnice $Au = f$ jednoznačně určeno vztahem (11.7). Po praktické stránce však sám vztah (11.7) nedává návod, jak toto řešení efektivně zkonstruovat. Cestou k tomu zůstává minimalizování (v prostoru H_A) funkcionálu F. Cílem následujících kapitol bude tedy seznámit se s účinnými metodami, jak najít prvek, který realizuje toto minimum, resp. aspoň jeho dostatečně blízkou aproximaci.

Poznámka 11.2. Z (11.7) dále podle (11.6) plyne

$$(11.11) \quad |(u_0, u)_A| = |(f, u)| \leqq \|f\| \cdot \|u\| \leqq \frac{\|f\|}{C} \|u\|_A \quad \text{pro každé} \quad u \in H_A .$$

Speciálně pro $u = u_0$ dostáváme odtud

$$\|u_0\|_A^2 = (u_0, u_0)_A \leqq \frac{\|f\|}{C} \|u_0\|_A ,$$

odkud plyne[1]) důležitá nerovnost

$$(11.12) \qquad \|u_0\|_A \leqq \frac{\|f\|}{C} .$$

Tato nerovnost vyjadřuje *spojitou závislost zobecněného řešení u_0 na pravé straně f dané rovnice $Au = f$*. To předně znamená, že je-li f „malé" v normě prostoru H, pak že zobecněné řešení je „malé" v normě prostoru H_A [a tím podle (11.6) také „malé" v normě prostoru H]. Je-li dále u_0, resp. v_0 zobecněné řešení rovnice

$$(11.13) \qquad Au = f ,$$

resp.

$$(11.14) \qquad Av = g ,$$

tj. platí-li

$$(11.15) \qquad (u_0, u)_A = (f, u) \quad \text{pro všechna} \quad u \in H_A ,$$

resp.

$$(11.16) \qquad (v_0, u)_A = (g, u) \quad \text{pro všechna} \quad u \in H_A ,$$

[1]) Pro $u_0 \neq 0$; pro $u_0 = 0$ platí ovšem nerovnost (11.12) také.

pak $z_0 = v_0 - u_0$ je zobecněným řešením rovnice

$$Az = g - f\,,\tag{11.17}$$ [1]

neboť z (11.15) a (11.16) plyne

$$(z_0, u)_A = (g - f, u) \quad \text{pro všechna} \quad u \in H_A\,.\tag{11.18}$$

Z (11.18) pak dostáváme stejným způsobem, jakým jsme z (11.7) dospěli k nerovnosti (11.12),

$$\|z_0\|_A \leqq \frac{\|g - f\|}{C}\,.\tag{11.19}$$

Liší-li se tedy pravé strany rovnic (11.13), (11.14) „málo" v normě prostoru H, liší se příslušná zobecněná řešení „málo" v normě prostoru H_A [a tím také podle (11.6) v normě prostoru H]. Toho je možno využít k odhadu chyby, hledáme-li zobecněné řešení (přesněji: jeho aproximaci) některou z metod, popsaných v následujících kapitolách. Je-li totiž n-tá aproximace $u_n \in D_A$ zobecněného řešení u_0 taková, že prvek

$$f_n = Au_n\tag{11.20}$$

se liší „málo" od prvku f v normě prostoru H, pak u_n se liší od u_0 „málo" v prostoru H_A; přesněji, podle (11.19), je

$$\|u_n - u_0\|_A \leqq \frac{\|f_n - f\|}{C} = \frac{\|Au_n - f\|}{C}\,.\tag{11.21}$$

Známe-li tedy konstantu C (viz o tom podrobně v další části této knihy, zejména v kap. 18, 19 a 22; srov. také příkl. 8.9, str. 111), dovedeme podle (11.21) odhadnout v prostoru H_A [a tím také podle (11.6) v prostoru H] chybu, které se dopustíme, nahradíme-li zobecněné řešení u_0 jeho aproximací u_n. Přitom pravá strana dané rovnice má v aplikacích zpravidla jednoduchý fyzikální význam; např. v případě rovnice desky (viz kap. 23) je pravá strana této rovnice dána funkcí $f \in L_2(G)$, která charakterizuje zatížení uvažované desky. Uvážíme-li (11.20), vidíme, že v tomto případě je aproximace u_n „přesným" řešením téhož problému, avšak s jiným zatížením, daným funkcí f_n místo funkcí f. „Blízkost" funkcí f_n a f v normě prostoru $L_2(G)$ umožňuje předně usuzovat podle (11.21) na „blízkost" řešení u_0 a jeho aproximace u_n (v normě prostoru H_A). Technikovi však často stačí dokonce jen zběžné porovnání funkcí f_n a f k tomu, aby rozhodl, zda aproximace u_n je k účelu, který sleduje, již

[1]) Formálně plyne ovšem tento výsledek odečtením rovnice $Au_0 = f$ od rovnice $Av_0 = g$; formálně proto, že pokud u_0 a v_0 nepatří do D_A, nemusí mít symboly Au_0, Av_0 vůbec smysl. Proto bylo třeba ukázat, že z_0 splňuje vztah (11.18), neboť tímto vztahem je definováno, ve smyslu (11.7), zobecněné řešení rovnice (11.17).

dostatečným přiblížením řešení jeho problému; funkce f totiž bývá dána jako výsledek měření, které samo obsahuje v sobě určitou chybu, jež dokonce může způsobit větší chybu v řešení uvažovaného problému, než je chyba vzniklá nahrazením řešení u_0 jeho aproximací u_n.

Při této příležitosti je třeba upozornit čtenáře na to, že ne u každé z metod, s nimiž se seznámíme v následujících kapitolách, je vždy zaručeno, že s rostoucím n konverguje $f_n = Au_n$ k funkci f v prostoru H. O tom se na příslušných místech u jednotlivých metod zmíníme. Tato otázka souvisí těsně s vhodnou volbou báze, jejímiž prvky (přesněji: lineárními kombinacemi těchto prvků) řešení aproximujeme; viz o tom zejména v kap. 20. Viz také kap. 44, kde je uvedena metoda odhadu chyby, založená na zcela jiné myšlence.

Poznámka 11.3. Jak jsme již dříve naznačili, bude většina metod, které ukážeme v dalším textu, záležet v tom, že sestrojíme jistou posloupnost prvků $u_n \in H_A$ (zpravidla půjde o prvky z lineálu D_A), o níž dokážeme, že konverguje v prostoru H_A k hledanému zobecněnému řešení u_0, tj. pro niž bude platit

$$\lim_{n\to\infty} \|u_n - u_0\|_A = 0\,.\tag{11.22}$$

V souvislosti s tím si nejprve všimněme této skutečnosti: Jak víme, funkcionál F nabývá v prostoru H_A minimální hodnoty pro prvek u_0, definovaný rovnicí (11.7) na str. 142. Z (11.8) pak plyne, že tato minimální hodnota je rovna číslu $-\|u_0\|_A^2$, tj. že

$$\min_{u\in H_A} Fu = -\|u_0\|_A^2\,.$$

Definice 11.2. O posloupnosti $\{u_n\}$ prvků z H_A řekneme, že je *minimalizující* pro funkcionál (11.4) [a tedy také pro funkcionál (11.8)] nebo že $\{u_n\}$ je *μ-posloupnost*, platí-li

$$\lim_{n\to\infty} Fu_n = -\|u_0\|_A^2\,.\tag{11.23}$$

Tedy μ-posloupnost je taková posloupnost $\{u_n\}$ prvků z H_A, že limita příslušných hodnot Fu_n funkcionálu F je rovna minimu tohoto funkcionálu v prostoru H_A. Z (11.22), (11.23) a ze vztahu (11.8), tj. ze vztahu

$$Fu = \|u - u_0\|_A^2 - \|u_0\|_A^2\,,\tag{11.24}$$

přímo plyne:

Věta 11.2. *Je-li $\{u_n\}$ μ-posloupnost, pak platí* (11.22). *Naopak, platí-li* (11.22), *pak $\{u_n\}$ je μ-posloupnost.*

Důkaz: 1. Je-li $\{u_n\}$ μ-posloupnost, platí (11.23) a z (11.24) plyne

$$\lim_{n\to\infty} \|u_n - u_0\|_A^2 = \lim_{n\to\infty} (Fu_n + \|u_0\|_A^2) =$$
$$= \lim_{n\to\infty} Fu_n + \|u_0\|_A^2 = -\|u_0\|_A^2 + \|u_0\|_A^2 = 0\,,$$

tj.

$$\lim_{n\to\infty} \|u_n - u_0\|_A = 0\,,$$

což je vztah (11.22).

2. Platí-li (11.22), plyne z (11.24)

$$\lim_{n\to\infty} Fu_n = \lim_{n\to\infty} \|u_n - u_0\|_A^2 - \|u_0\|_A^2 = -\|u_0\|_A^2\,,$$

což je vztah (11.23).

Dokážeme-li tedy o některé posloupnosti $\{u_n\}$, že je μ-posloupnost, plyne z toho podle uvedené věty, že $\{u_n\}$ konverguje v prostoru H_A k zobecněnému řešení u_0 rovnice $Au = f$. Tato skutečnost nám bude užitečná při zkoumání konvergence některých metod, uvedených v dalších kapitolách.

Poznámka 11.4. V této kapitole jsme zavedli pojem zobecněného řešení rovnice $Au = f$. Jako o jeho speciálním případě jsme se v textu za def. 11.1 zmínili o řešení z lineálu D_A, které je zejména v případě diferenciálních operátorů jistou obdobou pojmu klasického řešení dané rovnice, známého čtenáři např. z klasické teorie parciálních diferenciálních rovnic. Patří-li prvek $u_0 \in H_A$ do D_A nebo nikoli, závisí zejména na tom, jaký je operátor A a jaký je prvek f na pravé straně rovnice $Au = f$; podrobněji o tom viz v kap. 46.

Všimněme si blíže zmíněných pojmů řešení, zejména v souvislosti s případem, který je pro nás nejzajímavější, tj. v souvislosti s diferenciálními operátory.

Poznamenejme nejprve, že i když pojmy „klasické řešení" a „řešení z lineálu D_A" jsou v těchto případech velmi příbuzné, nemusí vždy značit totéž. Uvažujme nám již dobře známý Dirichletův problém pro Poissonovu rovnici v rovinné oblasti G s hranicí Γ,

(11.25) $$-\Delta u = f \text{ v } G\,,$$

(11.26) $$u = 0 \text{ na } \Gamma\,.$$

Klasickým řešením tohoto problému rozumíme funkci u, spojitou v $\bar{G} = G + \Gamma$, rovnou nule na Γ a mající v G derivace $\partial^2 u/\partial x^2$, $\partial^2 u/\partial y^2$, které v G splňují rovnici (11.25). Za lineál $D_A = D_{-\Delta}$ jsme však zvolili lineál funkcí, spojitých včetně parciálních derivací prvního a druhého řádu v $\bar{G} = G + \Gamma$ a splňujících podmínku (11.26). Má-li funkce u být řešením našeho problému a má-li patřit do D_A, pak má mít předně všechny právě uvedené vlastnosti funkcí z D_A. Na hladkost funkcí z lineálu D_A

(a tím také na hladkost uvažovaného řešení z D_A) klademe zde tedy vyšší požadavky než na hladkost klasického řešení. Důvod (nepříliš podstatný; jde spíše o určité zjednodušení úvah, např. o snadné ověření toho, že jsou splněny předpoklady Greenovy věty 8.7 apod.) je ten, že na takto definovaném lineálu se velmi snadno dokáží charakteristické vlastnosti daného operátoru, jako je symetrie, pozitivnost atd. Nikterak nevadí, požadujeme-li od funkcí z lineálu D_A hladkost ještě větší; lze např. ukázat, že konstrukcí uvedenou v kap. 10 dospějeme k témuž prostoru H_A, zvolíme-li pro náš problém (11.25), (11.26) místo lineálu funkcí s právě uvedenými vlastnostmi lineál funkcí spojitých včetně parciálních derivací *všech* řádů v $\bar{G} = G + \Gamma$ a splňujících podmínku (11.26).

Na problému (11.25), (11.26) je názorně vidět, že pojem klasického řešení dané úlohy je v obecném případě odlišný od pojmu řešení z lineálu D_A. Přesto jsou tyto dva pojmy příbuzné a čtenář si pod pojmem „řešení z D_A" může představit jakousi modifikovanou formu klasického řešení. Zobecněné řešení, pokud neleží v D_A, má v obecném případě vlastnosti podstatně rozdílné od řešení klasického. Jak jsme se zmínili v závěru předcházející kapitoly, mají v případě diferenciálních rovnic druhého řádu s okrajovými podmínkami funkce z množiny D_I v obecném případě v uvažované oblasti jen derivace prvního řádu, a to ještě tzv. zobecněné. Zobecněné řešení nemusí tedy mít v obecném případě (nežádáme-li dostatečnou hladkost koeficientů dané rovnice apod.) ani derivace toho řádu, jakého je daná diferenciální rovnice. Čtenář zde může namítnout, že pak jde buď o „nerozumné problémy", nebo o špatně koncipovanou definici řešení. Není tomu tak. Diferenciální rovnice, které popisují určité fyzikální jevy, jsou často odvozeny z různých fyzikálních principů (princip minima potenciální energie apod., srov. str. 126) použitím variačního počtu. Matematicky řečeno, jde tedy o minimalizování určitých funkcionálů. Použitím Eulerových rovnic, známých z variačního počtu, které vyjadřují nutné podmínky pro extrém těchto funkcionálů, dospíváme k diferenciálním rovnicím, které obsahují, abychom tak řekli „zbytečně", vyšší derivace, než jsou ty, které obsahuje daný funkcionál. (Viz typický případ rovnice pro průhyb membrány v [34], str. 15.) Protože nám dobře známý funkcionál F odpovídá v těchto případech právě uvedeným funkcionálům [elastické energii, potenciální energii,[1]) apod.], je hledání zobecněného řešení daného problému z fyzikálního hlediska přirozenější cestou[2]) než hledání řešení klasického. V případě diferenciálních rovnic (zhruba řečeno) s dostatečně hladkými koeficienty a dostatečně hladkou pravou stranou f je zobecněné řešení dostatečně hladké. [Např. zobecněné řešení problému (11.25), (11.26) má v (otevřené) oblasti G spojité parciální derivace všech řádů, má-li v G spojité parciální derivace

[1]) Proto se funkcionálu F říká často i v matematické literatuře *funkcionál energie* a variačním metodám, založeným na jeho minimalizování, *energetické metody*. Ve spojitosti s tím nazýváme často skalární součin $(u, v)_A$ *energetickým součinem*, normu $\|u\|_A$ *energetickou normou* a prostor H_A *energetickým prostorem*.

[2]) Známá je Hilbertova teze, že „fyzikální zákony by měly být formulovány nikoli pomocí diferenciálních, nýbrž pomocí integrálních vztahů".

všech řádů funkce f.] Na tomto místě nemáme možnost precizovat význam slova „dostatečně" a vrátíme se k této problematice v kap. 46.

Poznámka 11.5. Je-li $u_0 \in D_A$ a jestliže přitom u_0 minimalizuje v H_A funkcionál (11.4), pak tím spíše minimalizuje v D_A funkcionál (11.3) a podle věty 9.2 je v H řešením rovnice $Au = f$. Nepatří-li však prvek u_0, minimalizující v H_A funkcionál (11.4), do D_A, pak nemůže rovnice $Au = f$ mít řešení z D_A. Důkaz tohoto tvrzení provedeme sporem. Nechť $u_0 \notin D_A$ minimalizuje v H_A funkcionál (11.4), tj. funkcionál (11.8), takže platí

$$Fu_0 = \min_{u \in H_A} (\|u - u_0\|_A^2 - \|u_0\|_A^2) = -\|u_0\|_A^2, \tag{11.27}$$

a nechť $u_1 \in D_A$ je v H řešením rovnice $Au = f$. Podle věty 9.2 minimalizuje prvek u_1 na lineálu D_A funkcionál $(Au, u) - 2(f, u)$, který je pro $u \in D_A$ totožný s funkcionálem F. Tedy

$$Fu_1 = \min_{u \in D_A} (\|u - u_0\|_A^2 - \|u_0\|_A^2) = \|u_1 - u_0\|_A^2 - \|u_0\|_A^2. \tag{11.28}$$

Protože $u_1 \neq u_0$ (neboť $u_1 \in D_A$ a $u_0 \notin D_A$) je $\|u_1 - u_0\|_A^2 > 0$, a tedy podle (11.27) a (11.28) je

$$Fu_1 > Fu_0. \tag{11.29}$$

Označme

$$Fu_1 - Fu_0 = \|u_1 - u_0\|_A^2 = a > 0. \tag{11.30}$$

Avšak D_A je hustá množina v H_A, takže existuje posloupnost $\{u_n\}$ prvků z D_A, konvergující v H_A k prvku u_0, tj.

$$\lim_{n \to \infty} \|u_n - u_0\|_A = 0.$$

Existuje tedy prvek $u_n \in D_A$ s dostatečně velkým indexem n tak, že

$$\|u_n - u_0\|_A < \sqrt{\frac{a}{2}}.$$

Pak ovšem je

$$Fu_n = \|u_n - u_0\|_A^2 - \|u_0\|_A^2 < -\|u_0\|_A^2 + \frac{a}{2} < -\|u_0\|_A^2 + a = \tag{11.31}$$
$$= Fu_0 + a = Fu_1$$

podle (11.30). Tedy funkcionál F nabývá pro prvek $u_n \in D_A$ menší hodnoty než pro prvek u_1, což je spor s předpokladem, že prvek u_1 minimalizuje funkcionál F na lineálu D_A.

Jestliže tedy prvek u_0, minimalizující v H_A funkcionál F, neleží v D_A, nemá rovnice $Au = f$ řešení z D_A. Zobecněné řešení u_0 pak pokládáme za řešení daného problému ve smyslu diskutovaném v pozn. 11.4.

Poznámka 11.6. (*Nehomogenní okrajové podmínky.*) Teorie, kterou jsme vybudovali v kap. 9 až 11, předpokládá, že definičním oborem operátoru A je lineál. Také přibližné metody, s kterými se setkáme v následujících kapitolách, budou předpokládat aproximaci řešení daného problému, tj. aproximaci zobecněného řešení u_0, ve tvaru lineární kombinace prvků z tohoto lineálu, nebo alespoň prvků z prostoru H_A, tedy opět prvků z určitého lineálu.

V případě nám již dobře známého Dirichletova problému pro Poissonovu rovnici, tj. problému

$$-\Delta u = f \text{ v } G, \tag{11.32}$$

$$u = 0 \text{ na } \Gamma, \tag{11.33}$$

jsme mohli za výchozí lineál D_A zvolit, a také jsme zvolili, lineál funkcí spojitých včetně parciálních derivací prvního a druhého řádu v $\bar{G} = G + \Gamma$ a splňujících podmínku (11.33). Naproti tomu množina M, jejíž prvky tvoří funkce, které splňují sice stejné podmínky hladkosti jako funkce z lineálu D_A, ale pro které platí

$$u = 2 \text{ na } \Gamma, \tag{11.34}$$

již není lineálem. Neboť jsou-li u a v dvě funkce z množiny M, pak na Γ platí $u + v = 4$, takže funkce $u + v$ nesplňuje podmínku $u + v = 2$ na Γ, a nepatří tedy do množiny M.

Podobně množina všech funkcí, splňujících stejné podmínky hladkosti jako funkce z lineálu D_A a vyhovujících podmínce

$$\frac{\partial u}{\partial v} = -u \text{ na } \Gamma \tag{11.35}$$

($\partial u/\partial v$ je derivace funkce u podle vnější normály), tvoří lineál, zatímco množina funkcí, které splňují tytéž podmínky hladkosti, ale vyhovují podmínce

$$\frac{\partial u}{\partial v} = -(u - 3) \text{ na } \Gamma, \tag{11.36}$$

netvoří lineál.

Je tedy otázka, jak do naší teorie zahrnout řešení diferenciálních rovnic s nehomogenními okrajovými podmínkami, jak vůbec formulovat tento problém v podobném tvaru, jako jsme to učinili v této kapitole pro případ, že definičním oborem daného operátoru je lineál, a co rozumět řešením, resp. zobecněným řešením daného problému.

Jedno z možných řešení této otázky je zcela elementární: Převést problém s nehomogenními okrajovými podmínkami na problém s homogenními okrajovými podmínkami. Uvažujme jako příklad Dirichletův problém pro Poissonovu rovnici, s předepsanou spojitou funkcí g na hranici Γ,

$$-\Delta u = f \text{ v } G, \tag{11.37}$$

$$u = g \text{ na } \Gamma. \tag{11.38}$$

Předpokládejme, že se nám podaří najít funkci w, spojitou v $\bar{G} = G + \Gamma$, splňující podmínku (11.38) a přitom takovou, že

$$-\Delta w \in L_2(G) . \tag{11.39}$$

Hledáme-li řešení problému (11.37), (11.38) ve tvaru

$$u = w + z , \tag{11.40}$$

dostaneme pro funkci z podmínky

$$-\Delta z = f + \Delta w \text{ v } G , \tag{11.41}$$

$$z = 0 \text{ na } \Gamma . \tag{11.42}$$

V (11.37) předpokládáme $f \in L_2(G)$, podle (11.39) je $\Delta w \in L_2(G)$, takže pro známou funkci $h = f + \Delta w$ platí také $h \in L_2(G)$. Problém

$$-\Delta z = h \text{ v } G , \tag{11.43}$$

$$z = 0 \text{ na } \Gamma \tag{11.44}$$

je již úloha tvaru (11.32), (11.33), tedy tvaru, o kterém jsme podrobně mluvili v předcházejícím textu.

V obecnějším případě jde tedy o tento problém: Je dána lineární diferenciální rovnice

$$Au = f \tag{11.45}$$

s lineárními, avšak nehomogenními okrajovými podmínkami. Tyto podmínky mohou být různého tvaru, např. tvaru (11.38), (11.36) apod.; v obecném případě je předepsáno těchto podmínek na hranici Γ několik, podle řádu dané diferenciální rovnice. Uvažujme pro jednoduchost případ, že za základní Hilbertův prostor zvolíme prostor $L_2(G)$, takže předpokládáme $f \in L_2(G)$. Předpokládejme dále, že se nám podaří najít funkci w, která splňuje předepsané okrajové podmínky a je přitom dostatečně hladká, takže na ni můžeme aplikovat operátor A a přitom ještě je $Aw \in L_2(G)$. Pak tedy pro funkci $h = f - Aw$ platí $h \in L_2(G)$. Předpokládáme-li řešení daného problému ve tvaru $u = w + z$, dostaneme rovnici

$$Az = h$$

s homogenními okrajovými podmínkami. Je-li dále operátor A pozitivně definitní na lineálu D_A dostatečně hladkých funkcí, splňujících dané homogenní okrajové podmínky, pak podle předcházejícího textu má tento problém zobecněné řešení z_0; zobecněným řešením původního problému s nehomogenními okrajovými podmínkami pak budeme rozumět funkci $u_0 = w + z_0$.

K těmto úvahám je třeba poznamenat, že v obecném případě není snadné najít funkci w s dříve uvedenými vlastnostmi, která umožňuje převést problém s nehomogenními okrajovými podmínkami na problém s okrajovými podmínkami homogenními. Není snadné dokázat ani její existenci, a to ani v případě, kdy jde o jisté zobecnění požadavků kladených na tuto funkci, o kterém se zmíníme v následujícím textu. K těmto otázkám se podrobně vrátíme v kap. 32 a 46.

V úlohách praktického rázu, vznikajících z technických nebo přírodovědných problémů, bývá však řešení uvažované otázky zpravidla snadné a často lze tvar hledané funkce w přímo napsat. Ukážeme jednoduchý příklad: Řešme Dirichletův problém pro Laplaceovu rovnici na obdélníku G $(0 < x < a,\ 0 < y < b)$ a nechť okrajová podmínka g na hranici Γ je dána předpisem

$$g = \sin \frac{\pi x}{a} \quad \text{pro} \quad 0 < x < a , \quad y = 0 , \tag{11.46}$$

$$g = 0 \quad \text{na zbývající části hranice } \Gamma .$$

Za funkci w zde zřejmě stačí zvolit funkci

$$w = \left(1 - \frac{y}{b}\right) \sin \frac{\pi x}{a} ,$$

která splňuje podmínky (11.46) a převádí daný problém na problém

$$-\Delta z = - \frac{\pi^2}{a^2} \left(1 - \frac{y}{b}\right) \sin \frac{\pi x}{a} \text{ v } G , \tag{11.47}$$

$$z = 0 \text{ na } \Gamma , \tag{11.48}$$

nám již dobře známý. Je-li z_0 jeho (zobecněné) řešení, pak řešení původního problému je $u_0 = w + z_0$.

Poznámka 11.7. (*Nehomogenní okrajové podmínky, druhá formulace.*) Uvedeme ještě druhou formulaci problému s nehomogenními okrajovými podmínkami, která je svou koncepcí bližší koncepci zobecněného řešení pro případ okrajových podmínek homogenních. Spokojíme se jen jednoduchým příkladem, neboť na tomto místě nemáme možnost precizovat, jaké vlastnosti má mít funkce $w(x)$, o níž byla zmínka v předcházející poznámce, a v jakém smyslu má splňovat dané nehomogenní okrajové podmínky. Otázky spojené s touto problematikou budeme, a to značně obecněji, řešit ve čtvrté části naší knihy (viz zejména kap. 34 a 35), až budeme mít k dispozici pojem prostoru $W_2^{(k)}(G)$ a pojem stop. V textu této poznámky se tedy budeme na některých místech vyjadřovat poněkud nepřesně.

Uvažujme opět Dirichletův problém pro Poissonovu rovnici,

$$-\Delta u = f \text{ v } G , \tag{11.49}$$

$$u = g \text{ na } \Gamma , \tag{11.50}$$

a nechť $w(x)$ je dostatečně hladká funkce, splňující v G podmínku $\Delta w \in L_2(G)$ a na Γ podmínku $w = g$. Položíme-li, jako v předcházející poznámce,

$$u = w + z\,, \tag{11.51}$$

dostaneme pro funkci z podmínky

$$-\Delta z = f + \Delta w \text{ v } G\,, \tag{11.52}$$

$$z = 0 \text{ na } \Gamma\,. \tag{11.53}$$

Zde tedy již jde o homogenní okrajovou podmínku. Označme, jako obvykle, D_A lineál funkcí $z(x)$ spojitých s parciálními derivacemi do druhého řádu včetně v G a rovných nule na Γ a $A = -\Delta$ operátor uvažovaný na tomto lineálu. Jak jsme ukázali již v příkl. 8.8 a 8.10, je operátor A na lineálu D_A pozitivní, přičemž

$$(Au, v) = \int_G \sum_{i=1}^N \frac{\partial u}{\partial x_i}\frac{\partial v}{\partial x_i}\,dx\,, \tag{11.54}$$

takže

$$(Au, u) = \int_G \sum_{i=1}^N \left(\frac{\partial u}{\partial x_i}\right)^2 dx\,. \tag{11.55}$$

V kap. 22 ukážeme, že tento operátor je na D_A dokonce pozitivně definitní. Příslušný prostor H_A z kap. 10 tvoří, zhruba řečeno (jak jsme řekli, precizování některých pojmů a výsledků budeme moci provést až ve tvrté části naší knihy), funkce rovné nule na Γ a mající v G parciální derivace prvního řádu, integrovatelné v G s druhou mocninou. Funkcionál

$$Gz = (z, z)_A - 2(f + \Delta w, z)\,, \tag{11.56}$$

tj. funkcionál

$$Gz = \int_G \sum_{i=1}^N \left(\frac{\partial z}{\partial x_i}\right)^2 dx - 2\int_G (f + \Delta w)\, z\,dx\,, \tag{11.57}$$

nabývá v prostoru H_A minima, a prvek $z_0 \in H_A$, realizující toto minimum, je zobecněným řešením problému (11.52), (11.53). Funkce $u_0 = w + z_0$ je pak zobecněným řešením problému (11.49), (11.50).

Protože pro $z \in H_A$ je $z = 0$ na Γ, dostaneme formálním použitím Greenovy věty, podobně jako v citovaném příkl. 8.8,

$$\int_G \Delta w \,.\, z\,dx = -\int_G \sum_{i=1}^N \frac{\partial w}{\partial x_i}\frac{\partial z}{\partial x_i}\,dx\,,$$

takže funkcionál (11.57) můžeme napsat ve tvaru

$$Gz = \int_G \sum_{i=1}^N \left(\frac{\partial z}{\partial x_i}\right)^2 dx - 2\int_G fz\,dx + 2\int_G \sum_{i=1}^N \frac{\partial w}{\partial x_i}\frac{\partial z}{\partial x_i}\,dx\,. \tag{11.58}$$

Tento zápis dovoluje předně zobecnit požadavky kladené dosud na funkci $w(x)$. Z (11.58) je vidět, že stačí volit funkci $w(x)$ tak, aby splňovala podmínku $w = g$ na Γ a aby měla parciální derivace prvního řádu integrovatelné v G s druhou mocninou[1]). Za druhé je zřejmé toto: Skalární součin

$$(v, z)_A = \int_G \sum_{i=1}^N \frac{\partial v}{\partial x_i}\frac{\partial z}{\partial x_i}\,dx \tag{11.59}$$

byl definován pro funkce v, z z prostoru H_A, tedy pro funkce, které splňují podmínku $v = 0$ a $z = 0$ na Γ. Integrál v (11.59) má však smysl pro mnohem širší třídu funkcí, které nikterak nemusí splňovat uvedenou podmínku na hranici. Označme na okamžik tento integrál, uvažovaný pro tuto obecnější třídu funkcí, symbolem $((v, z))$,

$$((v, z)) = \int_G \sum_{i=1}^N \frac{\partial v}{\partial x_i}\frac{\partial z}{\partial x_i}\,dx\,. \tag{11.60}$$

Použitím této symboliky je pak možno funkcionál Gz zapsat ve tvaru

$$Gz = ((z, z)) - 2(f, z) + 2((w, z))\,, \quad z \in H_A\,, \tag{11.61}$$

který již mnohem lépe odpovídá naší koncepci než tvar (11.57) [srov. také funkcionál (34.58), str. 434; funkcionál (11.61) je jeho speciálním případem].

Postup uvedený na tomto jednoduchém příkladě lze snadno rozšířit na případy obecnější. Jednak je však třeba určité opatrnosti při formulaci tzv. nestabilních okrajových podmínek (Neumannovy okrajové podmínky apod.), jednak je třeba zavést určité pojmy, abychom se vyhnuli poněkud nepřesnému vyjadřování, kterého jsme použili v této poznámce. Proto ponecháme řešení těchto otázek do čtvrté části knihy; v této části a v třetí části knihy uvedeme jen některé výsledky, a to s odvoláním na pozdější teorii.

Poznámka 11.8. Dosadíme-li z (11.51) do (11.61), dostaneme funkcionál

$$\begin{aligned} G(u - w) = H(u) &= ((u - w, u - w)) - 2(f, u - w) + 2((w, u - w)) = \\ &= ((u, u)) - 2((w, u)) + ((w, w)) - 2(f, u) + 2(f, w) + \\ &+ 2((w, u)) - 2((w, w)) = ((u, u)) - 2(f, u) - ((w, w)) + 2(f, w). \end{aligned} \tag{11.62}$$

Místo abychom hledali zobecněné řešení problému (11.49), (11.50) ve tvaru $u_0 = w + z_0$ a funkci z_0 našli jako prvek, minimalizující funkcionál (11.61) v prostoru H_A, můžeme tedy postupovat tak, že u_0 hledáme jako prvek minimalizující funkcionál (11.62), resp., což je totéž, funkcionál

$$Fu = ((u, u)) - 2(f, u) \tag{11.63}$$

[1]) Přesněji ve smyslu kap. 30 stačí, aby bylo $w \in W_2^{(1)}(G)$, $w = g$ na Γ ve smyslu stop.

[neboť členy $((w, w))$ a (f, w) zůstávají při měnícím se u konstantní]; tento funkcionál má tedy stejný tvar jako funkcionál (11.4), uvažovaný pro případ homogenních okrajových podmínek. Podstatný rozdíl zde je v tom, že funkcionál (11.63) neminimalizujeme v prostoru H_A, ale [jak vyplývá z (11.51)] v prostoru (dostatečně hladkých) funkcí, splňujících podmínku $u = g$ na Γ.

Poznamenejme při této příležitosti (zmínili jsme se o tom již v předmluvě), že po historické stránce byla vlastně tato úloha zkoumána jako první — a to pro Laplaceovu rovnici, tedy pro případ $f = 0$: Řešení Dirichletova problému pro Laplaceovu rovnici,

$$-\Delta u = 0 \text{ v } G\,,$$

$$u = g \text{ na } \Gamma\,,$$

hledat jako prvek minimalizující Dirichletův integrál

$$((u, u)) = \int_G \sum_{i=1}^{N} \left(\frac{\partial u}{\partial x_i}\right)^2 \mathrm{d}x \tag{11.64}$$

na množině dostatečně hladkých funkcí, splňujících podmínku $u = g$ na Γ. Zde také nastaly první obtíže v tom, jak precizovat třídu „dostatečně hladkých funkcí, splňujících podmínku $u = g$ na Γ" a jak vhodně rozšířit funkcionál (11.64), aby skutečně nabýval na této třídě minima. Tento problém vyvolal nejprve intenzívní studium problémů nehomogenních diferenciálních rovnic s homogenními okrajovými podmínkami, které vedlo ke konstrukci prostoru H_A a k pojmu zobecněného řešení a později k vybudování obecnější teorie, s kterou se setkáme ve čtvrté části této knihy.

Po podrobné diskusi věnované pojmu zobecněného řešení se nyní obrátíme k metodám, které umožňují najít toto zobecněné řešení nebo aspoň jeho dostatečně blízkou aproximaci.

Kapitola 12

Metoda ortonormálních řad. Příklad

Uvažujme, jako obvykle, Hilbertův prostor H a operátor A, pozitivně definitní na lineálu D_A, hustém v H. Nechť H_A je prostor, zkonstruovaný v kap. 10, se skalárním součinem $(u, v)_A$, který je, jak víme, rozšířením skalárního součinu $(u, v)_A$, definovaného pro prvky z původního lineálu D_A vztahem

$$(u, v)_A = (Au, v)\,, \quad u \in D_A\,, \quad v \in D_A\,, \tag{12.1}$$

na celý tento prostor H_A. V předcházející kapitole jsme ukázali, že funkcionál

$$Fu = (u, u)_A - 2(f, u)\,, \quad u \in H_A\,, \tag{12.2}$$

nabývá v prostoru H_A minima pro jistý prvek u_0, prvkem f jednoznačně určený z podmínky

$$(u_0, u)_A = (f, u) \quad \text{pro každé} \quad u \in H_A\,. \tag{12.3}$$

Prvek u_0, minimalizující v H_A funkcionál (12.2), jsme nazvali zobecněným řešením rovnice $Au = f$. Řadu vlastností tohoto řešení jsme ukázali v předcházející kapitole. V této kapitole, jakož i v následujících kapitolách ukážeme některé metody, jak toto zobecněné řešení dané rovnice efektivně najít, resp. vhodně aproximovat.

K tomu účelu budeme předpokládat, že *prostor H_A je separabilní*. K tomu je postačující, jak je možno očekávat a jak je podrobně dokázáno např. v [30], *je-li separabilní prostor H*. Zvolíme-li speciálně za prostor H prostor $L_2(G)$, což bude častý případ, bude tím zaručena i separabilnost prostoru H_A, neboť prostor $L_2(G)$ je (viz větu 4.7, str. 47) separabilní.

Připomeňme, že o metrickém prostoru P říkáme, že je separabilní, lze-li najít nejvýše spočetnou množinu jeho prvků, hustou v tomto prostoru. Podle věty 6.11, str. 80, existuje v každém separabilním Hilbertově prostoru tzv. báze, tj. nejvýše spočetný lineárně nezávislý systém

$$\varphi_1, \varphi_2, \ldots, \varphi_n, \ldots\,, \tag{12.4}$$

úplný v tomto prostoru [tedy takový, že ke každému $u \in H$ a ke každému $\varepsilon > 0$ lze najít čísla $a_k^{(i)}$ tak, že platí

$$\varrho(u, \sum_{k=1}^{i} a_k^{(i)} \varphi_k) < \varepsilon]\,. \tag{12.5}$$

Je-li mimoto M některá množina prvků hustá v tomto prostoru, lze v něm vytvořit bázi právě z prvků této množiny (viz str. 81). Podle věty 6.12 lze navíc dosáhnout toho, aby báze (12.4) byla v uvažovaném prostoru ortonormální.

Nechť tedy (12.4) je ortonormální báze v H_A, vytvořená, chceme-li, z prvků lineálu D_A. Pro prvky této báze tedy platí

$$(\varphi_i, \varphi_k)_A = \begin{cases} 0 & \text{pro} \quad k \neq i\,, \\ 1 & \text{pro} \quad k = i\,. \end{cases} \tag{12.6}$$

Vyjádřeme v H_A hledané zobecněné řešení u_0 našeho problému příslušnou Fourierovou řadou (def. 6.19, str. 78),

$$u_0 = \sum_{k=1}^{\infty} a_k \varphi_k\,, \text{[1]} \tag{12.7}$$

kde

$$a_k = (u_0, \varphi_k)_A\,, \quad k = 1, 2, \ldots, \tag{12.8}$$

což lze, neboť systém (12.4) je podle předpokladu v H_A úplný.

Pro každé $u \in H_A$, a tedy také pro každé φ_k $(k = 1, 2, \ldots)$ však platí (12.3), takže

$$a_k = (u_0, \varphi_k)_A = (f, \varphi_k)\,. \tag{12.9}$$

Koeficienty Fourierovy řady (12.7) jsou tedy velmi jednoduchým způsobem dány jako skalární součiny (v prostoru H) pravé strany f dané rovnice a bázových funkcí φ_k.

Tím je problém řešen.

Poznamenejme, že z konvergence řady (12.7) v prostoru H_A plyne její konvergence i v prostoru H. Jestliže totiž s_n je n-tý částečný součet řady (12.7), plyne z (10.70), str. 139,

$$\|s_n - u_0\| \leq \frac{1}{C} \|s_n - u_0\|_A\,; \tag{12.10}$$

protože $\{\varphi_n\}$ je v H_A báze, platí

$$\lim_{n\to\infty} s_n = u_0 \text{ v } H_A\,,$$

odkud podle (12.10)

$$\lim_{n\to\infty} s_n = u_0 \text{ v } H\,. \tag{12.11}$$

[Srov. také text za rovnicí (10.15), str. 129.]

Získaný výsledek shrneme do této věty:

Věta 12.1. *Nechť A je pozitivně definitní operátor na lineálu D_A, hustém v separabilním Hilbertově prostoru H, a nechť $f \in H$. Nechť dále $\varphi_1, \varphi_2, \ldots$ je ortonormální báze v prostoru H_A, zkonstruovaném v kap. 10. Pak zobecněné řešení u_0 rovnice $Au = f$ je dáno řadou*

$$u_0 = \sum_{k=1}^{\infty} a_k \varphi_k\,, \tag{12.12}$$

---

[1]) Má-li systém (12.4) jen konečný počet prvků, je ovšem v sumaci (12.7) a dále jen konečný počet členů.

kde

$$a_k = (f, \varphi_k) \tag{12.13}$$

[(f, φ_k) je skalární součin v prostoru H]. Tato řada konverguje k zobecněnému řešení u_0 v prostoru H_A i v prostoru H.

Podle (12.12) je tedy řešení našeho problému velmi jednoduché: Stačí vypočítat koeficienty

$$a_k = (f, \varphi_k)$$

Fourierovy řady (12.12). Zejména je-li $H = L_2(G)$, redukuje se daná úloha na výpočet integrálů tvaru

$$\int_G f(x)\, \varphi_k(x)\, \mathrm{d}x\,. \tag{12.14}$$

Čtenář k tomu asi poznamená, že tím jsme hotovi s úlohou najít efektivně zobecněné řešení uvažované rovnice $Au = f$ a že je zbytečné rozvíjet o tom nějakou další teorii. Problém je v tom, že v obecném případě není nikterak snadné zkonstruovat v H_A ortonormální bázi. Tato úloha není snadná ani tehdy, ustoupíme-li od požadavku ortonormálnosti. (Obtížné je zejména splnit požadavek úplnosti, který je v definici báze obsažen; těmto otázkám jsou věnovány zejména kap. 20 a 25.) Avšak i když je báze nalezena, bývá v obecném případě proces její ortogonalizace, resp. ortonormalizace (srov. str. 61 a 80) velmi pracný a z hlediska numerického výpočtu zpravidla neúnosný. Proto byly vypracovány další metody, které nevyžadují ortonormálnost báze, a o nichž pojednáme v dalších kapitolách.

Přesto u některých jednoduchých operátorů (např. v případě velmi jednoduchých obyčejných diferenciálních rovnic, resp. parciálních diferenciálních rovnic na jednoduchých oblastech) je nalezení ortonormální báze poměrně jednoduché.

Ukážeme příklad.

Příklad 12.1. Řešme Dirichletův problém pro Poissonovu rovnici na obdélníku G $(0 < x < a,\ 0 < y < b)$,

$$-\Delta u = f \text{ v } G\,, \tag{12.15}$$

$$u = 0 \text{ na } \Gamma\,. \tag{12.16}$$

Zvolme $H = L_2(G)$ a dále zvolme, jako obvykle, za lineál $D_A = D_{-\Delta}$ množinu funkcí, které jsou spojité včetně parciálních derivací prvního a druhého řádu v $\bar{G} = G + \Gamma$ a splňují podmínku (12.16). Jak víme, je tento lineál hustý v $L_2(G)$ (věta 8.6, str. 106). Jak dále uvidíme (kap. 22, str. 271), je operátor A, daný na tomto lineálu předpisem $A = -\Delta$, na tomto lineálu pozitivně definitní, takže lze obvyklým způsobem (viz kap. 10) zkonstruovat Hilbertův prostor $H_A = H_{-\Delta}$. V tomto případě lze [viz kap. 20, text za rovnicí (20.20), str. 238], zvolit za bázi v tomto prostoru systém funkcí

(12.17) $$\sin\frac{m\pi x}{a}\sin\frac{n\pi y}{b}\,,\quad m = 1, 2, \ldots, n = 1, 2, \ldots .$$

Označme tyto funkce takto:

(12.18) $$\psi_1 = \sin\frac{\pi x}{a}\sin\frac{\pi y}{b}\,,$$

$$\psi_2 = \sin\frac{2\pi x}{a}\sin\frac{\pi y}{b}\,,\quad \psi_3 = \sin\frac{\pi x}{a}\sin\frac{2\pi y}{b}\,,$$

$$\psi_4 = \sin\frac{3\pi x}{a}\sin\frac{\pi y}{b}\,,\quad \psi_5 = \sin\frac{2\pi x}{a}\sin\frac{2\pi y}{b}\,,\quad \psi_6 = \sin\frac{\pi x}{a}\sin\frac{3\pi y}{b}\,,$$

....

Postup při očíslování funkcí systému (12.18) je zřejmý: Z funkcí (12.17) vytváříme skupiny, pro něž je $m + n = i$, kde i nabývá postupně hodnot $2, 3, \ldots$, a v každé skupině seřazujeme tyto funkce podle sestupných hodnot prvního indexu m, který tedy v každé skupině nabývá postupně hodnot $i - 1, i - 2, \ldots, 1$. Tím dostáváme systém funkcí $\psi_s(x, y)$, $s = 1, 2, \ldots$.

Jak víme, je

(12.19) $$\int_0^a \sin\frac{j\pi x}{a}\sin\frac{m\pi x}{a}\,dx = \begin{cases} 0\,, & \text{je-li} \quad m \neq j\,, \\ \dfrac{a}{2}\,, & \text{je-li} \quad m = j\,, \end{cases}$$

a obdobně

(12.20) $$\int_0^b \sin\frac{k\pi y}{b}\sin\frac{n\pi y}{b}\,dy = \begin{cases} 0\,, & \text{je-li} \quad n \neq k\,, \\ \dfrac{b}{2}\,, & \text{je-li} \quad n = k\,. \end{cases}$$

Proto je také

(12.21) $$\left(\sin\frac{j\pi x}{a}\sin\frac{k\pi y}{b}\,,\ \sin\frac{m\pi x}{a}\sin\frac{n\pi y}{b}\right) =$$

$$= \int_0^a\int_0^b \sin\frac{j\pi x}{a}\sin\frac{k\pi y}{b}\sin\frac{m\pi x}{a}\sin\frac{n\pi y}{b}\,dx\,dy =$$

$$= \int_0^a \sin\frac{j\pi x}{a}\sin\frac{m\pi x}{a}\,dx \,.\int_0^b \sin\frac{k\pi y}{b}\sin\frac{n\pi y}{b}\,dy =$$

$$= \begin{cases} \dfrac{ab}{4}\,, & \text{je-li} \quad m = j \quad \text{a zároveň} \quad n = k\,, \\ 0 & \text{v ostatních případech}\,. \end{cases}$$

Funkce ψ_s zřejmě patří do lineálu $D_{-\Delta}$, takže je

$$(\psi_s, \psi_t)_{-\Delta} = (-\Delta\psi_s, \psi_t) = \left(-\frac{\partial^2\psi_s}{\partial x^2} - \frac{\partial^2\psi_s}{\partial y^2}\,, \psi_t\right).$$

Protože

$$-\frac{\partial^2}{\partial x^2}\left(\sin\frac{j\pi x}{a}\sin\frac{k\pi y}{b}\right) = \frac{j^2\pi^2}{a^2}\sin\frac{j\pi x}{a}\sin\frac{k\pi y}{b}\,,$$

$$-\frac{\partial^2}{\partial y^2}\left(\sin\frac{j\pi x}{a}\sin\frac{k\pi y}{b}\right) = \frac{k^2\pi^2}{b^2}\sin\frac{j\pi x}{a}\sin\frac{k\pi y}{b}\,,$$

je

(12.22) $$\left(\sin\frac{j\pi x}{a}\sin\frac{k\pi y}{b}\,,\ \sin\frac{m\pi x}{a}\sin\frac{n\pi y}{b}\right)_{-\Delta} =$$

$$= \int_0^a\int_0^b \left(\frac{j^2\pi^2}{a^2} + \frac{k^2\pi^2}{b^2}\right)\sin\frac{j\pi x}{a}\sin\frac{k\pi y}{b}\sin\frac{m\pi x}{a}\sin\frac{n\pi y}{b}\,dx\,dy =$$

$$= \begin{cases} \dfrac{ab}{4}\left(\dfrac{j^2\pi^2}{a^2} + \dfrac{k^2\pi^2}{b^2}\right), & \text{je-li} \quad m = j \quad \text{a zároveň} \quad n = k\,, \\ 0 & \text{v ostatních případech}\,. \end{cases}$$

Funkce (12.18) jsou tedy v prostoru $H_{-\Delta}$ ortogonální, neboť pro dvě navzájem různé funkce tohoto systému je přinejmenším buď $j \neq m$, nebo $k \neq n$. Podle (12.22) budou tedy funkce

(12.23) $$\varphi_1 = \frac{1}{\sqrt{\left[\dfrac{ab}{4}\left(\dfrac{\pi^2}{a^2} + \dfrac{\pi^2}{b^2}\right)\right]}}\sin\frac{\pi x}{a}\sin\frac{\pi y}{b}\,,$$

$$\varphi_2 = \frac{1}{\sqrt{\left[\dfrac{ab}{4}\left(\dfrac{4\pi^2}{a^2} + \dfrac{\pi^2}{b^2}\right)\right]}}\sin\frac{2\pi x}{a}\sin\frac{\pi y}{b}\,,$$

$$\varphi_3 = \frac{1}{\sqrt{\left[\dfrac{ab}{4}\left(\dfrac{\pi^2}{a^2} + \dfrac{4\pi^2}{b^2}\right)\right]}}\sin\frac{\pi x}{a}\sin\frac{2\pi y}{b}\,,$$

$$\varphi_4 = \frac{1}{\sqrt{\left[\dfrac{ab}{4}\left(\dfrac{9\pi^2}{a^2} + \dfrac{\pi^2}{b^2}\right)\right]}}\sin\frac{3\pi x}{a}\sin\frac{\pi y}{b}\,,$$

$$\varphi_5 = \frac{1}{\sqrt{\left[\frac{ab}{4}\left(\frac{4\pi^2}{a^2} + \frac{4\pi^2}{b^2}\right)\right]}} \sin\frac{2\pi x}{a} \sin\frac{2\pi y}{b},$$

$$\varphi_6 = \frac{1}{\sqrt{\left[\frac{ab}{4}\left(\frac{\pi^2}{a^2} + \frac{9\pi^2}{b^2}\right)\right]}} \sin\frac{\pi x}{a} \sin\frac{3\pi y}{b},$$

. . . .

v prostoru $H_{-\Delta}$ ortonormální. Systém (12.23) tvoří tedy v prostoru $H_{-\Delta}$ ortonomální bázi. Podle (12.12) a (12.13) je řešení problému (12.15), (12.16) dáno řadou

$$u = \sum_{s=1}^{\infty} a_s \varphi_s, \tag{12.24}$$

kde [viz (12.23)] je

$$a_1 = (f, \varphi_1) = \frac{1}{\sqrt{\left[\frac{ab}{4}\left(\frac{\pi^2}{a^2} + \frac{\pi^2}{b^2}\right)\right]}} \int_0^a \int_0^b f(x, y) \sin\frac{\pi x}{a} \sin\frac{\pi y}{b} \, dx \, dy, \tag{12.25}$$

$$a_2 = (f, \varphi_2) = \frac{1}{\sqrt{\left[\frac{ab}{4}\left(\frac{4\pi^2}{a^2} + \frac{\pi^2}{b^2}\right)\right]}} \int_0^a \int_0^b f(x, y) \sin\frac{2\pi x}{a} \sin\frac{\pi y}{b} \, dx \, dy$$

atd., takže vzhledem k tvaru funkcí (12.18) a (12.23) lze psát

$$u = \sum_{s=1}^{\infty} b_s \psi_s, \tag{12.26}$$

kde

$$b_1 = \frac{1}{\frac{ab}{4}\left(\frac{\pi^2}{a^2} + \frac{\pi^2}{b^2}\right)} \int_0^a \int_0^b f(x, y) \sin\frac{\pi x}{a} \sin\frac{\pi y}{b} \, dx \, dy, \tag{12.27}$$

$$b_2 = \frac{1}{\frac{ab}{4}\left(\frac{4\pi^2}{a^2} + \frac{\pi^2}{b^2}\right)} \int_0^a \int_0^b f(x, y) \sin\frac{2\pi x}{a} \sin\frac{\pi y}{b} \, dx \, dy$$

atd. Tento výsledek lze také vzhledem k tvaru funkcí (12.17) zapsat ve tvaru

$$u = \sum_{m,n=1}^{\infty} c_{mn} \sin\frac{m\pi x}{a} \sin\frac{n\pi y}{b}, \tag{12.28}$$

kde

$$c_{mn} = \frac{1}{\frac{ab}{4}\left(\frac{m^2\pi^2}{a^2} + \frac{n^2\pi^2}{b^2}\right)} \int_0^a \int_0^b f(x, y) \sin\frac{m\pi x}{a} \sin\frac{n\pi y}{b} \, dx \, dy =$$

$$= \frac{4}{ab\pi^2\left(\frac{m^2}{a^2} + \frac{n^2}{b^2}\right)} \int_0^a \int_0^b f(x, y) \sin\frac{m\pi x}{a} \sin\frac{n\pi y}{b} \, dx \, dy .$$

Podle věty 12.1 konverguje řada (12.28) pro $f \in L_2(G)$ v prostoru $H_{-\Delta}$ i v prostoru $L_2(G)$. Tím je problém (12.15), (12.16) řešen.

Je-li speciálně $f(x, y) = k =$ konst, je

$$c_{mn} = \frac{4}{ab\pi^2\left(\frac{m^2}{a^2} + \frac{n^2}{b^2}\right)} \int_0^a \int_0^b k \sin\frac{m\pi x}{a} \sin\frac{n\pi y}{b} \, dx \, dy =$$

$$= \frac{4}{ab\pi^2\left(\frac{m^2}{a^2} + \frac{n^2}{b^2}\right)} \frac{kab}{mn\pi^2} \left[\cos\frac{m\pi x}{a}\right]_0^a \left[\cos\frac{n\pi y}{b}\right]_0^b =$$

$$= \begin{cases} \dfrac{4}{ab\pi^2\left(\frac{m^2}{a^2} + \frac{n^2}{b^2}\right)} \dfrac{4kab}{mn\pi^2} = \dfrac{16a^2b^2k}{\pi^4 mn(b^2m^2 + a^2n^2)}, & \text{je-li } m \text{ i } n \text{ liché,} \\ 0 \text{ v ostatních případech} . \end{cases}$$

Řešení má tedy v tomto případě tvar

$$u = \frac{16a^2b^2k}{\pi^4} \sum_{\substack{m=1,3,\ldots \\ n=1,3,\ldots}} \frac{1}{mn(b^2m^2 + a^2n^2)} \sin\frac{m\pi x}{a} \sin\frac{n\pi y}{b}. \tag{12.29}$$

K řešení problému (12.15), (12.16) vede řada úloh, např. některé úlohy o *potenciálu*, úloha o *stacionárním rozložení teploty* v nekonečném kvádru s nulovou předepsanou teplotou na hranici a s intenzitou vnitřních zdrojů tepla, charakterizovanou funkcí $f(x, y)$, úloha o *kroucení prutu* obdélníkového průřezu apod.

Kapitola 13

Ritzova metoda

Budiž stejně jako dříve A pozitivně definitní operátor na lineálu D_A, hustém v separabilním Hilbertově prostoru H a $f \in H$. Nechť H_A je Hilbertův prostor z kap. 10 (tedy také separabilní, neboť H je separabilní, viz str. 155). Uvažujme v prostoru H_A bázi (tedy nejvýše spočetný lineárně nezávislý úplný systém)

$$\varphi_1, \varphi_2, \ldots \tag{13.1}$$

Na rozdíl od předcházející kapitoly však nebudeme předpokládat, že tato báze je v H_A ortogonální (a tedy tím méně, že je ortonormální).

V předcházející kapitole jsme poznamenali, že proces ortogonalizace báze (13.1) a s ním spojené normování vzniklé ortogonální báze, abychom získali bázi ortonormální, je v obecném případě velmi pracný, takže metody ortonormálních řad, uvedené v kap. 12, lze k hledání, resp. aproximování zobecněného řešení našeho problému efektivně použít jen ve velmi speciálních případech, i když myšlenková jednoduchost této metody je jistě její velkou předností. V této kapitole uvedeme proto další metodu, tzv. Ritzovu, která je zejména v technických aplikacích jednou z nejčastěji používaných metod. Ritzova metoda je založena na této myšlence:

Zobecněným řešením uvažované rovnice $Au = f$ je podle definice ten prvek $u_0 \in H_A$, který v H_A minimalizuje funkcionál

$$Fu = (u, u)_A - 2(f, u)\,, \tag{13.2}$$

tj. pro který platí

$$Fu_0 = \min_{u \in H_A} Fu\,. \tag{13.3}$$

Zvolme přirozené číslo n a hledejme aproximaci u_n prvku u_0 ve tvaru

$$u_n = \sum_{k=1}^{n} a_k \varphi_k\,, \tag{13.4}$$

kde φ_k jsou prvky báze (13.1) a a_k jsou zatím neznámé reálné konstanty, které určíme z podmínky

$$Fu_n = \min\,, \tag{13.5}$$

podrobněji, aby mezi všemi aproximacemi tvaru

$$v_n = \sum_{k=1}^{n} b_k \varphi_k\,, \tag{13.6}$$

kde b_k jsou libovolné reálné konstanty (tedy na n-dimenzionálním podprostoru, vytvořeném prvky $\varphi_1, \ldots, \varphi_n$) nabýval funkcionál F nejmenší hodnoty právě pro aproximaci (13.4). Podle předpokladu je (13.1) báze v H_A, takže zobecněné řešení u_0 lze s libovolnou přesností aproximovat vhodnými lineárními kombinacemi jejích prvků. Mimoto podmínka (13.5) je analogická podmínce (13.3). Lze tedy intuitivně očekávat (a ve větě 13.1 to potvrdíme), že pro dostatečně velké n se bude (13.4) s konstantami, určenými podle (13.5), dostatečně málo lišit v H_A od hledaného řešení u_0.

Určení konstant a_k v (13.4) je poměrně snadné (to je také podstatnou předností Ritzovy metody), viz soustavu (13.11). Dosadíme-li totiž (13.6) za u do (13.2), dostaneme nejprve

$$\begin{aligned} Fv_n &= (b_1\varphi_1 + \ldots + b_n\varphi_n, b_1\varphi_1 + \ldots + b_n\varphi_n)_A - 2(f, b_1\varphi_1 + \ldots + b_n\varphi_n) = \\ &= (\varphi_1, \varphi_1)_A\, b_1^2 + (\varphi_1, \varphi_2)_A\, b_1 b_2 + \ldots + (\varphi_1, \varphi_n)_A\, b_1 b_n + \\ &\quad + (\varphi_2, \varphi_1)_A\, b_2 b_1 + (\varphi_2, \varphi_2)_A\, b_2^2 + \ldots + (\varphi_2, \varphi_n)_A\, b_2 b_n + \\ &\quad \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ &\quad + (\varphi_n, \varphi_1)_A\, b_n b_1 + (\varphi_n, \varphi_2)_A\, b_n b_2 + \ldots + (\varphi_n, \varphi_n)_A\, b_n^2 - \\ &\quad - 2(f, \varphi_1)\, b_1 - 2(f, \varphi_2) b_2 - \ldots - 2(f, \varphi_n)\, b_n\,, \end{aligned} \tag{13.7}$$

nebo, uvážíme-li, že vzhledem k symetrii skalárního součinu je

$$(\varphi_2, \varphi_1)_A\, b_2 b_1 = (\varphi_1, \varphi_2)_A\, b_1 b_2 \text{ atd.}\,,$$

$$\begin{aligned} Fv_n = (\varphi_1, \varphi_1)_A\, b_1^2 &+ 2(\varphi_1, \varphi_2)_A\, b_1 b_2 + \ldots + 2(\varphi_1, \varphi_n)_A\, b_1 b_n + \\ &+ (\varphi_2, \varphi_2)_A\, b_2^2 + \ldots + 2(\varphi_2, \varphi_n)_A\, b_2 b_n + \\ &\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ &\qquad\qquad + (\varphi_n, \varphi_n)_A\, b_n^2 - \\ - 2(f, \varphi_1)\, b_1 &- 2(f, \varphi_2)\, b_2 - \ldots - 2(f, \varphi_n)\, b_n\,. \end{aligned} \tag{13.8}$$

Protože skalární součiny $(\varphi_i, \varphi_k)_A$ jsou pevná čísla, určená prvky dané báze, je funkcionál F po dosazení (13.6) za u do (13.2) kvadratickou funkcí proměnných $b_1, \ldots, b_n$. Aby tato funkce nabývala v bodě $(a_1, \ldots, a_n)$ minima, je nutné, aby byly splněny rovnice

$$\left.\frac{\partial Fv_n}{\partial b_1}\right|_{b_1 = a_1, \ldots, b_n = a_n} = 0, \ldots, \quad \left.\frac{\partial Fv_n}{\partial b_n}\right|_{b_1 = a_1, \ldots, b_n = a_n} = 0\,, \tag{13.9}$$

tj. rovnice

$$\begin{aligned} 2(\varphi_1, \varphi_1)_A\, a_1 + 2(\varphi_1, \varphi_2)_A\, a_2 + \ldots + 2(\varphi_1, \varphi_n)_A\, a_n - 2(f, \varphi_1) &= 0\,, \\ 2(\varphi_1, \varphi_2)_A\, a_1 + 2(\varphi_2, \varphi_2)_A\, a_2 + \ldots + 2(\varphi_2, \varphi_n)_A\, a_n - 2(f, \varphi_2) &= 0\,, \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots & \\ 2(\varphi_1, \varphi_n)_A\, a_1 + 2(\varphi_2, \varphi_n)_A\, a_2 + \ldots + 2(\varphi_n, \varphi_n)_A\, a_n - 2(f, \varphi_n) &= 0\,, \end{aligned} \tag{13.10}$$

a po úpravě

$$(13.11)\quad \begin{aligned}
&(\varphi_1, \varphi_1)_A\, a_1 + (\varphi_1, \varphi_2)_A\, a_2 + \ldots + (\varphi_1, \varphi_n)_A\, a_n = (f, \varphi_1)\,,\\
&(\varphi_1, \varphi_2)_A\, a_1 + (\varphi_2, \varphi_2)_A\, a_2 + \ldots + (\varphi_2, \varphi_n)_A\, a_n = (f, \varphi_2)\,,\\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\
&(\varphi_1, \varphi_n)_A\, a_1 + (\varphi_2, \varphi_n)_A\, a_2 + \ldots + (\varphi_n, \varphi_n)_A\, a_n = (f, \varphi_n)\,.
\end{aligned}$$

Soustava (13.11) je soustavou n rovnic pro n hledaných konstant $a_1, \ldots, a_n$. Protože prvky $\varphi_1, \ldots, \varphi_n$ jsou podle předpokladu lineárně nezávislé, je determinant soustavy (13.11), který je jejich Gramovým determinantem (věta 6.5, str. 77), různý od nuly. Soustava (13.11) je tedy jednoznačně řešitelná. Není těžké ukázat (forma

$$\sum_{i,j=1}^{n} (\varphi_i, \varphi_j)_A\, b_i b_j$$

je totiž za uvažovaných předpokladů pozitivně definitní), že takto [tj. na základě rovnic (13.9)] získaný extrém je ostrým minimem. [Intuitivně je tento závěr geometricky názorný, neboť (13.8) lze interpretovat jako rovnici paraboloidu v $(n + 1)$-rozměrném prostoru, přičemž je $(\varphi_1, \varphi_1)_A > 0$, atd.]

Poznámka 13.1. Je-li speciálně báze (13.1) ortonormální v H_A – její prvky pro tento případ označme

$$(13.12)\qquad \tilde\varphi_1, \tilde\varphi_2, \ldots\ –$$

pak je

$$(\tilde\varphi_i, \tilde\varphi_k)_A = \begin{cases} 0 & \text{pro} \quad i \neq k\,,\\ 1 & \text{pro} \quad i = k \end{cases}$$

a soustava (13.11) má tvar

$$(13.13)\qquad \begin{aligned}
a_1 &= (f, \tilde\varphi_1)\,,\\
a_2 &= (f, \tilde\varphi_2)\,,\\
&\ldots\ldots\ldots\\
a_n &= (f, \tilde\varphi_n)\,.
\end{aligned}$$

V tomto případě dává tedy Ritzova metoda aproximaci u_n ve tvaru součtu

$$(13.14)\qquad u_n = \sum_{k=1}^{n} (f, \tilde\varphi_k)\, \tilde\varphi_k$$

prvních n členů řady (12.12) [s koeficienty (12.13)], s kterou jsme se seznámili při použití metody ortonormálních řad v předcházející kapitole. Této skutečnosti lze jednoduchým způsobem využít k důkazu toho, že tzv. *Ritzova posloupnost*, tj. posloupnost aproximací u_n, daných vztahem (13.4), s konstantami a_k, určenými soustavou (13.11), konverguje v prostoru H_A (a tím také v prostoru H) k zobecněnému řešení u_0 rovnice $Au = f$:

Předpokládejme, že na bázi (13.1) aplikujeme v prostoru H_A proces ortonormalizace, popsaný v kap. 5, str. 61, takže dostaneme ortonormální bázi, kterou podobně jako dříve označíme

$$(13.15)\qquad \tilde\varphi_1, \tilde\varphi_2, \ldots.$$

Z procesu ortonormalizace, popsaného v citované kapitole, plyne, že prvky báze (13.15) jsou (jednoznačně určenými) lineárními kombinacemi prvků báze (13.1), a naopak, podrobněji, že platí

$$(13.16)\qquad \begin{aligned}
\tilde\varphi_1 &= d_{11}\varphi_1\,,\\
\tilde\varphi_2 &= d_{21}\varphi_1 + d_{22}\varphi_2\,,\\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\
\tilde\varphi_n &= d_{n1}\varphi_1 + d_{n2}\varphi_2 + \ldots + d_{nn}\varphi_n\,,\\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots
\end{aligned}$$

a

$$(13.17)\qquad \begin{aligned}
\varphi_1 &= d'_{11}\tilde\varphi_1\,,\\
\varphi_2 &= d'_{21}\tilde\varphi_1 + d'_{22}\tilde\varphi_2\,,\\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\
\varphi_n &= d'_{n1}\tilde\varphi_1 + d'_{n2}\tilde\varphi_2 + \ldots + d'_{nn}\tilde\varphi_n\,,
\end{aligned}$$

přičemž d_{kk} i d'_{kk} $(k = 1, \ldots, n)$ jsou čísla různá od nuly. Dosadíme-li do (13.2) za u lineární kombinaci (13.6) a položíme podmínku (13.5), dostaneme aproximaci u_n, danou výrazem (13.4), s konstantami, které jsou určeny soustavou (13.11). Podobně, dosadíme-li do (13.2) za u lineární kombinaci

$$(13.18)\qquad w_n = \sum_{k=1}^{n} \beta_k \tilde\varphi_k$$

prvků ortonormální báze (13.15) a položíme podmínku, aby bylo

$$(13.19)\qquad Fw_n = \min$$

na množině všech lineárních kombinací typu (13.18) (s reálnými koeficienty β_k), dostaneme aproximaci

$$(13.20)\qquad z_n = \sum_{k=1}^{n} \alpha_k \tilde\varphi_k$$

s konstantami [viz (13.13)]

$$(13.21)\qquad \begin{aligned}
\alpha_1 &= (f, \tilde\varphi_1)\,,\\
\alpha_2 &= (f, \tilde\varphi_2)\,,\\
&\ldots\ldots\ldots\\
\alpha_n &= (f, \tilde\varphi_n)\,.
\end{aligned}$$

Snadno však ukážeme, že je

$$u_n = \sum_{k=1}^{n} a_k\varphi_k = \sum_{k=1}^{n} \alpha_k\tilde{\varphi}_k = z_n . \tag{13.22}$$

Všechny lineární kombinace prvků $\varphi_1, \ldots, \varphi_n$, tj. všechny prvky tvaru (13.6), kde b_k jsou libovolné reálné konstanty, tvoří určitý lineál – označme jej M. Protože prvky $\tilde{\varphi}_1, \ldots, \tilde{\varphi}_n$ jsou vzájemně jednoznačně přiřazeny prvkům $\varphi_1, \ldots, \varphi_n$ podle (13.16), resp. (13.17), tvoří však tentýž lineál všechny lineární kombinace prvků $\tilde{\varphi}_1, \ldots, \tilde{\varphi}_n$, tj. všechny prvky tvaru (13.18), kde β_k jsou libovolné reálné konstanty. Podmínkou (13.5) je dána úloha najít ten prvek u_n z lineálu M, pro který funkcionál F nabývá na tomto lineálu svého minima. Tato úloha má, jak jsme viděli, jediné řešení – konstanty a_k z (13.4) jsou soustavou (13.11) jednoznačně určeny. Také podmínkou (13.19) je dána úloha najít prvek z_n, minimalizující funkcionál F na lineálu M. Protože i tato úloha má jediné řešení, nemůže být $z_n \neq u_n$. Tedy platí (13.22). Posloupnost (13.20) je však posloupností částečných součtů řady

$$u_0 = \sum_{n=1}^{\infty} \alpha_k\tilde{\varphi}_k , \tag{13.23}$$

která je nám známa (s poněkud jiným označením) z předcházející kapitoly a která má v H_A součet u_0, takže také posloupnost (13.4) s konstantami, které jsou určeny soustavou (13.11), konverguje v prostoru H_A k prvku u_0. Platí tedy:

Věta 13.1. *Nechť A je pozitivně definitní operátor na lineálu D_A hustém v separabilním Hilbertově prostoru H a nechť $f \in H$. Nechť dále $\varphi_1, \varphi_2, \ldots$ je báze (nikoli nutně ortogonální) v H_A. Pak Ritzova posloupnost $\{u_n\}$ s konstantami $a_1, \ldots, a_n$, danými pro každé pevné n jednoznačně soustavou (13.11)[1]), konverguje v H_A (a tedy také v H) k zobecněnému řešení u_0 rovnice $Au = f$.*

Poznámka 13.2. Z poznámky 13.1 vyplývá, že Ritzova metoda vede k témuž výsledku jako metoda ortonormálních řad; vyhýbá se pracnému procesu ortonormování dané báze, vyžaduje však sestavení a řešení určité soustavy n lineárních rovnic pro n neznámých konstant $a_1, \ldots, a_n$. K řešení této soustavy je možno použít běžných numerických metod, využít přitom např. symetric matice soustavy apod. Viz také numerické příklady v kap. 21 a 26.

Poznámka 13.3. Lze ukázat, že i když pro Ritzovu posloupnost $\{u_n\}$ platí $u_n \to u_0$ v H_A, nemusí v obecném případě platit $Au_n \to f$ v H. V obecném případě tedy nelze k odhadu chyby použít postupu uvedeného v pozn. 11.2, str. 144. V kap. 20 a 25 ukážeme, jak důležitá je u Ritzovy metody vhodná volba báze, a mezi jiným také,

[1]) Konstanty v (13.4) závisejí v obecném případě na n, měli bychom je tedy značit $a_1^{(n)}, \ldots, a_n^{(n)}$. Pokud nemůže dojít k omylu, píšeme $a_1, \ldots, a_n$, abychom nekomplikovali značení.

jak její vhodnou volbou dosáhnout toho, že platí nejen $u_n \to u_0$ v H_A, ale také $Au_n \to f$ v H, což umožňuje právě zmíněný odhad chyby. O odhadu chyby u Ritzovy metody, založeném na jiné myšlence, než která byla uvedena v pozn. 11.2, viz v kap. 44, str. 561.

Poznámka 13.4. Z pozn. 13.1 plyne i tento důsledek: S rostoucím n jsou Ritzovy aproximace u_n stále lepším přiblížením (v prostoru H_A) zobecněného řešení u_0. Podrobněji: Je-li $n > m$, pak

$$\|u_n - u_0\|_A \leq \|u_m - u_0\|_A . \tag{13.24}$$

Jak jsme totiž v pozn. 13.1 ukázali, je $u_n = z_n$ [viz (13.22)]. Ale podle kap. 12 je (s označením použitým v pozn. 13.1)

$$u_0 = \sum_{k=1}^{\infty} \alpha_k\tilde{\varphi}_k \tag{13.25}$$

a podle (13.22) je

$$u_n = z_n = \sum_{k=1}^{n} \alpha_k\tilde{\varphi}_k , \tag{13.26}$$

kde $\alpha_k = (f, \tilde{\varphi}_k)$. Z (13.25) a (13.26) plyne

$$u_0 - u_n = \sum_{k=n+1}^{\infty} \alpha_k\tilde{\varphi}_k . \tag{13.27}$$

Protože $\tilde{\varphi}_1, \tilde{\varphi}_2, \ldots$ je ortonormální systém v H_A, takže platí

$$(\tilde{\varphi}_i, \tilde{\varphi}_k)_A = \begin{cases} 0 & \text{pro } i \neq k , \\ 1 & \text{pro } i = k , \end{cases}$$

plyne z (13.27)

$$\|u_0 - u_n\|_A^2 = \sum_{k=n+1}^{\infty} \alpha_k^2 . \tag{13.28}$$

S rostoucím n tedy norma $\|u_0 - u_n\|_A$ klesá nebo aspoň neroste, odkud ihned plyne (13.24) pro $n > m$.

Zvětšíme-li tedy v Ritzově metodě n, zlepšíme (nebo alespoň nezhoršíme) tím v metrice prostoru H_A přiblížení zobecněného řešení u_0 uvažované rovnice aproximací (13.4). Všimněme si, že při volbě vyššího n se původně vytvořená soustava (13.11) jen rozšíří, dříve vypočítané skalární součiny na levých i pravých stranách uvažovaných rovnic zůstanou použitelné i u rozšířené soustavy, k jejíž matici tedy jen přidáme další řádky a sloupce, a na pravé straně vypočteme další skalární součiny. Stejně tak, spokojíme-li se z nějakého důvodu nižší aproximací, než kterou jsme původně zamýšleli, stačí v soustavě (13.11) jen vyškrtat příslušné neznámé a příslušné rovnice. To je další vlastnost Ritzovy metody, významná po numerické stránce.

Poznámka 13.5. Jak jsme se zmínili již v předcházející kapitole, je bázi v prostoru H_A možno volit z prvků lineálu D_A, neboť tento lineál je v H_A hustý. Pak ovšem $(\varphi_i, \varphi_k)_A = (A\varphi_i, \varphi_k)$ pro všechna $i, k = 1, \ldots, n$ a soustavu (13.11) je možno, chceme-li, psát ve tvaru

$$(13.29)\qquad \begin{aligned} &(A\varphi_1, \varphi_1)\, a_1 + (A\varphi_1, \varphi_2)\, a_2 + \ldots + (A\varphi_1, \varphi_n)\, a_n = (f, \varphi_1)\,,\\ &(A\varphi_1, \varphi_2)\, a_1 + (A\varphi_2, \varphi_2)\, a_2 + \ldots + (A\varphi_2, \varphi_n)\, a_n = (f, \varphi_2)\,,\\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\ &(A\varphi_1, \varphi_n)\, a_1 + (A\varphi_2, \varphi_n)\, a_2 + \ldots + (A\varphi_n, \varphi_n)\, a_n = (f, \varphi_n)\,. \end{aligned}$$

Poznámka 13.6. (*Nehomogenní okrajové podmínky.*) Použití Ritzovy metody pro dostatečně obecný případ nehomogenních okrajových podmínek vysvětlíme podrobně v kap. 34. Na tomto místě se omezíme jen na jednoduchý problém uvažovaný v pozn. 11.7, str. 151. Hledáme-li zobecněné řešení u_0 tohoto problému ve tvaru

$$(13.30)\qquad u_0 = w + z_0\,,$$

kde $w(x)$ je funkce splňující danou nehomogenní okrajovou podmínku na hranici, pak, použijeme-li symboliky zavedené v citované pozn. 11.7, minimalizuje funkce z_0 v prostoru H_A funkcionál

$$(13.31)\qquad \begin{aligned} Gz &= ((z, z)) - 2(f, z) + 2((w, z)) =\\ &= (z, z)_A - 2(f, z) + 2((w, z)) =\\ &= \int_G \sum_{i=1}^N \left(\frac{\partial z}{\partial x_i}\right)^2 \mathrm{d}x - 2\int_G fz\, \mathrm{d}x + 2\int_G \sum_{i=1}^N \frac{\partial w}{\partial x_i}\frac{\partial z}{\partial x_i}\, \mathrm{d}x\,. \end{aligned}$$

Minimalizujeme-li tento funkcionál Ritzovou metodou, takže předpokládáme opět aproximaci $z_n(x)$ funkce $z_0(x)$ ve tvaru

$$z_n = \sum_{k=1}^n a_k \varphi_k\,,$$

kde $\varphi_1, \varphi_2, \ldots$ je báze v prostoru H_A, dostaneme pro neznámé konstanty a_k snadným výpočtem soustavu

$$(13.32)\qquad \begin{aligned} &(\varphi_1, \varphi_1)_A\, a_1 + (\varphi_1, \varphi_2)_A\, a_2 + \ldots + (\varphi_1, \varphi_n)_A\, a_n = (f, \varphi_1) - ((w, \varphi_1))\,,\\ &(\varphi_1, \varphi_2)_A\, a_1 + (\varphi_2, \varphi_2)_A\, a_2 + \ldots + (\varphi_2, \varphi_n)_A\, a_n = (f, \varphi_2) - ((w, \varphi_2))\,,\\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\ &(\varphi_1, \varphi_n)_A\, a_1 + (\varphi_2, \varphi_n)_A\, a_2 + \ldots + (\varphi_n, \varphi_n)_A\, a_n = (f, \varphi_n) - ((w, \varphi_n))\,, \end{aligned}$$

lišící se od soustavy (13.11) jen členy $((w, \varphi_k))$ na pravých stranách rovnic.

K téže soustavě dospějeme, minimalizujeme-li funkcionál (11.63) na množině funkcí tvaru

$$u_n = w + \sum_{k=1}^n a_k \varphi_k\,.$$

Poznámka 13.7. Úplnost posloupnosti (13.1) v prostoru H_A není u uvažované metody vždy nevyhnutelným požadavkem. Uvažujme pro ilustraci problém

$$(13.33)\qquad -u'' + u = f(x)\,,$$

$$(13.34)\qquad u(-1) = 0\,,\quad u(1) = 0\,,$$

$f \in L_2(-1, 1)$. Příslušný operátor A, daný předpisem $Au = -u'' + u$ na lineálu D_A [zřejmě hustém v $L_2(-1, 1)$] funkcí spojitých včetně derivací prvního a druhého řádu v uzavřeném intervalu $\langle -1, 1\rangle$ a splňujících podmínky (13.34), je na tomto lineálu pozitivně definitní. Podle kap. 20, str. 239 a 237, je možno za prvky báze zvolit funkce

$$(13.35)\qquad \varphi_1 = 1 - x^2,\ \varphi_2 = x(1 - x^2),\ \varphi_3 = x^2(1 - x^2), \ldots, \varphi_n = x^{n-1}(1 - x^2), \ldots$$

Je-li $f(x)$ sudá funkce v proměnné x, je problém symetrický podle počátku souřadnic a jeho (zobecněným) řešením $u_0(x)$ bude sudá[1]) funkce. [Jinak by totiž funkce $v(x) = u_0(-x)$ byla různá od funkce $u_0(x)$ a přitom by byla, jak lze snadno ověřit, také řešením problému (13.33), (13.34), čímž bychom byli ve sporu s větou o jednoznačnosti řešení.] V tomto případě stačí ponechat v (13.35) jen sudé funkce, tj. funkce

$$(13.36)\qquad 1 - x^2\,,\quad x^2(1 - x^2)\,,\quad x^4(1 - x^2), \ldots.$$

Každou lineární kombinaci

$$(13.37)\qquad u(x) = \sum_{k=1}^n b_n\, \varphi_n(x)$$

funkcí (13.35) lze totiž napsat ve tvaru

$$(13.38)\qquad u(x) = v(x) + z(x)\,,$$

kde $v(x)$, resp. $z(x)$ obsahuje jen liché, resp. sudé funkce z (13.35). V daném případě je zbytečné uvažovat v Ritzově posloupnosti $\{u_n(x)\}$ členy s nenulovou lichou částí $v_n(x)$, neboť o limitě posloupnosti $\{v_n(x)\}$ v prostoru H_A [i v prostoru $L_2(-1, 1)$] víme předem, že bude nulová, protože řešení je sudá funkce. V tomto případě tedy potřebujeme jen „bázi vzhledem k sudým funkcím".

[1]) Rozumíme tím sudá v intervalu $\langle -1, 1\rangle$, popř. až na množinu bodů míry nula.

Obdobnou úvahu lze provést i v případě problémů z parciálních diferenciálních rovnic. Jde-li např. o rovinný problém a je-li zřejmé, že řešení bude funkce sudá v proměnné x a lichá v proměnné y, stačí bázi vytvořit jen z funkcí týchž vlastností.

Numerické příklady na použití Ritzovy metody uvedeme zejména v kap. 21 a 26. Pokud jde o použití Ritzovy metody při řešení problému vlastních čísel, viz zejména kap. 40, 41.

O metodě konečných prvků, která úzce souvisí s Ritzovou metodou, viz v kap. 42.

Kapitola 14

Galerkinova metoda

Uvažujme separabilní Hilbertův prostor H a množinu M jeho prvků, hustou v H. Podle věty 6.18, str. 82, víme, že platí-li pro některý prvek u

(14.1) $$(u, v) = 0 \quad \text{pro každé} \quad v \in M\,,$$

pak že odtud plyne $u = 0$ v H. Budiž nyní

(14.2) $$\varphi_1, \varphi_2, \ldots$$

některá báze v H. Tvrdíme, že platí-li $(u, \varphi_k) = 0$ pro všechna $k = 1, 2, \ldots$, pak že opět odtud plyne $u = 0$ v H. Stručným zápisem

(14.3) $$(u, \varphi_k) = 0 \quad \text{pro} \quad k = 1, 2, \ldots \Rightarrow u = 0 \text{ v } H\,.$$

Podle předpokladu je totiž (14.2) báze v H, takže množina N všech prvků tvaru

(14.4) $$\sum_{k=1}^{n} a_k \varphi_k\,,$$

kde n je libovolné přirozené číslo a a_k jsou libovolná reálná čísla, je hustá v H. Protože platí $(u, \varphi_k) = 0$ pro každé k, platí také pro každý prvek (14.4) množiny N

$$\left(u, \sum_{k=1}^{n} a_k \varphi_k\right) = 0\,,$$

odkud plyne (14.3).

Nechť je v H dána rovnice

(14.5) $$Au = f\,.$$

Najdeme-li takové $u_0 \in D_A$, že platí

(14.6) $$(Au_0 - f, \varphi_k) = 0 \quad \text{pro každé} \quad k = 1, 2, \ldots,$$

pak podle (14.3) je

(14.7) $$Au_0 - f = 0 \text{ v } H\,,$$

takže $u_0 \in D_A$ je řešením rovnice (14.5) v H.

Tato jednoduchá úvaha, podle níž z (14.6) plyne (14.7), tvoří základní myšlenku Galerkinovy metody:

Předpokládejme ještě, že báze (14.2) a definiční obor D_A operátoru A jsou takové, že každá lineární kombinace (14.4) prvků této báze patří do D_A, a hledejme přibližné řešení u_n rovnice (14.5) ve tvaru

(14.8) $$u_n = \sum_{k=1}^{n} a_k \varphi_k\,,$$

kde n je libovolné, ale pevně zvolené přirozené číslo a a_k jsou zatím neznámé konstanty, které určíme z podmínky

(14.9) $$(Au_n - f, \varphi_k) = 0\,, \quad k = 1, \ldots, n\,,$$

analogické podmínce (14.6). Podmínka (14.9) představuje n rovnic pro n neznámých konstant $a_1, \ldots, a_n$.[1])

V případě, že operátor A je lineární, nabude podmínka (14.9) tvaru

(14.10) $$(a_1 A\varphi_1 + \ldots + a_n A\varphi_n - f, \varphi_k) = 0\,, \quad k = 1, \ldots, n\,,$$

podrobněji

(14.11) $$\begin{aligned}
&(A\varphi_1, \varphi_1)\, a_1 + (A\varphi_2, \varphi_1)\, a_2 + \ldots + (A\varphi_n, \varphi_1)\, a_n = (f, \varphi_1)\,,\\
&(A\varphi_1, \varphi_2)\, a_1 + (A\varphi_2, \varphi_2)\, a_2 + \ldots + (A\varphi_n, \varphi_2)\, a_n = (f, \varphi_2)\,,\\
&\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\\
&(A\varphi_1, \varphi_n)\, a_1 + (A\varphi_2, \varphi_n)\, a_2 + \ldots + (A\varphi_n, \varphi_n)\, a_n = (f, \varphi_n)\,.
\end{aligned}$$

Je-li navíc operátor A pozitivní [a tedy také symetrický, takže $(A\varphi_i, \varphi_j) = (A\varphi_j, \varphi_i)$] a použijeme-li dříve zavedeného skalárního součinu $(u, v)_A = (Au, v)$, můžeme soustavu (14.11) zapsat ve tvaru

(14.12) $$\begin{aligned}
&(\varphi_1, \varphi_1)_A\, a_1 + (\varphi_1, \varphi_2)_A\, a_2 + \ldots + (\varphi_1, \varphi_n)_A\, a_n = (f, \varphi_1)\,,\\
&(\varphi_1, \varphi_2)_A\, a_1 + (\varphi_2, \varphi_2)_A\, a_2 + \ldots + (\varphi_2, \varphi_n)_A\, a_n = (f, \varphi_2)\,,\\
&\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\\
&(\varphi_1, \varphi_n)_A\, a_1 + (\varphi_2, \varphi_n)_A\, a_2 + \ldots + (\varphi_n, \varphi_n)_A\, a_n = (f, \varphi_n)\,,
\end{aligned}$$

shodném s tvarem soustavy (13.11), str. 164, k němuž jsme dospěli Ritzovou metodou. Jsou-li tedy splněny předpoklady pro konvergenci Ritzovy posloupnosti, uvedené ve větě 13.1, str. 166, jsou splněny i předpoklady pro konvergenci Galerkinovy posloupnosti (14.8). Můžeme tedy vyslovit větu:

[1]) Srov. pozn. 1 pod čarou na str. 166; také zde bychom měli psát $a_1^{(n)}, \ldots, a_n^{(n)}$.

Věta 14.1. *Nechť A je pozitivně definitní operátor na lineálu D_A, hustém v separabilním Hilbertově prostoru H, a nechť $f \in H$. Nechť prvky $\varphi_1 \in D_A$, $\varphi_2 \in D_A$, ... tvoří bázi v H_A. Pak Galerkinova posloupnost (14.8) s konstantami $a_1, \ldots, a_n$, jednoznačně určenými podmínkou (14.9), konverguje v H_A (a tedy také v H) k zobecněnému řešení u_0 rovnice $Au = f$.*

Numerické příklady viz v kap. 21 a 26.

Poznámka 14.1. V případě pozitivně definitních operátorů nepřináší Galerkinova metoda v porovnání s Ritzovou metodou nic nového; obě metody vedou k řešení týchž soustav lineárních rovnic a týmž posloupnostem přibližných řešení. Možnost použití Galerkinovy metody je však mnohem širší než metody Ritzovy. Galerkinova metoda, charakterizovaná podmínkou (14.9), neklade předem žádné podstatně omezující podmínky na operátor A; není nikterak třeba, aby operátor A byl pozitivně definitní, nemusí být ani symetrický, dokonce nemusí být ani lineární. Formálně můžeme tedy Galerkinovy metody použít i v případě velmi obecných operátorů. Jak ovšem lze očekávat, jsou příslušné úvahy týkající se řešitelnosti soustavy (14.9) (která popř. není ani lineární) a konvergence Galerkinovy posloupnosti (v některém vhodném prostoru) v obecném případě obtížné. (Viz také Michlinovu knihu [28].)

Poznámka 14.2. I když Ritzova a Galerkinova metoda vedou pro případ lineárních pozitivně definitních operátorů k týmž výsledkům, jsou přece jen základní myšlenky těchto metod zcela různé a formálně jsou různé i soustavy rovnic (13.11) a (14.11), k nimž tyto metody vedou. Zřetelně je rozdíl v celé koncepci vidět např. na běžném inženýrském přístupu k řešení klasických problémů pružnosti. Uveďme jednoduchý příklad:

Řešme úlohu o *průhybu $u(x)$ nehomogenního prutu proměnného průřezu*, délky l, na obou koncích vetknutého a namáhaného příčným zatížením $q(x)$ (viz příkl. 9.1, str. 123). K řešení této úlohy přistupují inženýři zpravidla dvojím způsobem. Buďto vyjdou z příslušné diferenciální rovnice

$$[E(x)\,I(x)\,u'']'' = q(x) \tag{14.13}$$

s okrajovými podmínkami

$$u(0) = u'(0) = 0\,, \quad u(l) = u'(l) = 0\,, \tag{14.14}$$

nebo na třídě dostatečně hladkých funkcí, splňujících podmínky (14.14), minimalizují „funkcionál energie"

$$\frac{1}{2}\int_0^l EIu''^2\,dx - \int_0^l qu\,dx\,, \tag{14.15}$$

vyjadřující celkovou potenciální energii deformace namáhaného prutu (srov. citovaný příkl. 9.1).

Hledáme-li přibližné řešení daného problému ve tvaru

$$u_n = \sum_{k=1}^{n} a_k\varphi_k\,, \tag{14.16}$$

kde funkce $\varphi_k(x)$ splňují podmínky (14.14), a použijeme-li k řešení problému (14.13), (14.14) Galerkinovy metody, dostaneme soustavu rovnic (14.11),

(14.17)

$$\begin{aligned}
a_1\int_0^l (EI\varphi_1'')''\,\varphi_1\,dx + a_2\int_0^l (EI\varphi_2'')''\,\varphi_1\,dx + \ldots + a_n\int_0^l (EI\varphi_n'')''\,\varphi_1\,dx &= \int_0^l q\varphi_1\,dx\,,\\
a_1\int_0^l (EI\varphi_1'')''\,\varphi_2\,dx + a_2\int_0^l (EI\varphi_2'')''\,\varphi_2\,dx + \ldots + a_n\int_0^l (EI\varphi_n'')''\,\varphi_2\,dx &= \int_0^l q\varphi_2\,dx\,,\\
\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots&\cdots\cdots\\
a_1\int_0^l (EI\varphi_1'')''\,\varphi_n\,dx + a_2\int_0^l (EI\varphi_2'')''\,\varphi_n\,dx + \ldots + a_n\int_0^l (EI\varphi_n'')''\,\varphi_n\,dx &= \int_0^l q\varphi_n\,dx\,.
\end{aligned}$$

Minimalizujeme-li Ritzovou metodou funkcionál (14.15), do něhož za u dosadíme výraz (14.16), dostaneme soustavu

$$\begin{aligned}
a_1\int_0^l EI\varphi_1''^2\,dx + a_2\int_0^l EI\varphi_1''\varphi_2''\,dx + \ldots + a_n\int_0^l EI\varphi_1''\varphi_n''\,dx &= \int_0^l q\varphi_1\,dx\,,\\
a_1\int_0^l EI\varphi_1''\varphi_2''\,dx + a_2\int_0^l EI\varphi_2''^2\,dx + \ldots + a_n\int_0^l EI\varphi_2''\varphi_n''\,dx &= \int_0^l q\varphi_2\,dx\,,\\
\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots&\cdots\cdots\\
a_1\int_0^l EI\varphi_1''\varphi_n''\,dx + a_2\int_0^l EI\varphi_2''\varphi_n''\,dx + \ldots + a_n\int_0^l EI\varphi_n''^2\,dx &= \int_0^l q\varphi_n\,dx\,.
\end{aligned} \tag{14.18}$$

První rozdíl mezi Galerkinovou a Ritzovou metodou je zde patrný – soustavy (14.17) a (14.18) jsou formálně různé. (Ve skutečnosti jsou totožné, viz závěr této poznámky.) Základní rozdíl však je ve zcela rozdílném pojetí řešení téhož problému. Používá-li inženýr Ritzovy metody, vychází zpravidla přímo z funkcionálu energie, aniž předem zkoumá odpovídající diferenciální rovnici a vlastnosti příslušného diferenciálního operátoru. Zde je tedy třeba určité opatrnosti. Zpravidla však jsou otázky s tím spojené velmi jednoduché. Zejména v právě uvedeném příkladě se za jednoduchých předpokladů o funkcích $E(x)$, $I(x)$ snadno ukáže (viz kap. 19, str. 230), že příslušný operátor A je na odpovídajícím lineálu pozitivně definitní, takže jsme oprávněni hledat přibližně zobecněné řešení problému (14.13), (14.14) jak Ritzovou, tak Galerkinovou metodou. Úloha najít toto zobecněné řešení je ekvivalentní úloze minimalizovat funkcionál

$$Fu = \int_0^l EIu''^2\,dx - 2\int_0^l qu\,dx \tag{14.19}$$

v příslušném prostoru H_A. Přitom je tento funkcionál zřejmě roven, až na faktor $\frac{1}{2}$, funkcionálu energie (14.15). Oba uvedené postupy řešení daného problému jsou tedy v pořádku, pokud ovšem báze, kterou zvolíme, splňuje předpoklady, uvedené v této, resp. v předcházející kapitole. (O vhodné volbě báze viz v kap. 20, str. 234.)

Protože funkce φ_i splňují podle předpokladu podmínky (14.14), vede integrování per partes

$$\int_0^l (EI\varphi_i'')'' \varphi_k \,dx = [(EI\varphi_i'')' \varphi_k]_0^l - \int_0^l (EI\varphi_i'')' \varphi_k' \,dx = - [EI\varphi_i''\varphi_k']_0^l +$$

$$+ \int_0^l EI\varphi_i''\varphi_k'' \,dx = \int_0^l EI\varphi_i''\varphi_k'' \,dx$$

k snadnému závěru, že koeficienty soustav (14.17) a (14.18) jsou totožné.

Celý příklad je ovšem ilustrativní, neboť úlohu (14.13), (14.14) zde snadno vyřešíme postupným integrováním rovnice (14.13).

Poznámka 14.3. O modifikaci Galerkinovy metody pro případ, že některé prvky báze nepatří do D_A (případ, že nerespektujeme některou okrajovou podmínku apod.), viz zejména v pozn. 19.5, str. 225, v příkl. 21.2, str. 255, a v pozn. 34.3, str. 429.

Poznámka 14.4. Při formulaci Galerkinovy metody jsme jak ke konstrukci přibližného řešení (14.8), tak k formulaci podmínky (14.9) použili téže báze (14.2). V modifikované Galerkinově metodě, tzv. *Galerkinově - Petrovově metodě*, se používá dvou bází, v obecném případě různých. Ke konstrukci přibližného řešení (14.8) použijeme báze (14.2) a k formulaci podmínky (14.9) jiné báze

$$\psi_1, \psi_2, \ldots .$$

Podmínky (14.9) mají pak tvar

$$(Au_n - f, \psi_k) = 0\,, \quad k = 1, \ldots, n\,.$$

Podrobně o této modifikaci Galerkinovy metody a o některých jejích přednostech viz např. v [10].

Poznamenejme ještě, že zatímco rovnice (13.11) Ritzovy metody vyjadřují podmínku stacionární hodnoty funkcionálu na podprostoru, vytvořeném prvky $\varphi_1, \ldots, \varphi_n$, mohou být rovnice, k nimž vede Galerkinova metoda, zcela formální, bez tohoto variačního významu. Tam, kde jim lze přisoudit fyzikální význam, ztotožňují se s rovnicemi Ritzovy metody pro jistý funkcionál — potenciál energie apod. Srov. také str. 147.

Kapitola 15

Metoda nejmenších čtverců. Courantova metoda

Stejně jako v předcházející kapitolách uvažujme operátor A, pozitivně definitní na lineálu D_A, hustém v separabilním Hilbertově prostoru H, a rovnici

$$Au = f \tag{15.1}$$

s $f \in H$. Nechť

$$\varphi_1, \varphi_2, \ldots, \quad \varphi_k \in D_A\,, \quad k = 1, 2, \ldots, \tag{15.2}$$

je tzv. *A-báze* v prostoru H, tj. taková posloupnost (popř. konečná, jde-li o prostor konečné dimenze), že

$$A\varphi_1, A\varphi_2, \ldots \tag{15.3}$$

tvoří bázi v H. Zejména tedy k danému $f \in H$ a ke každému $\eta > 0$ lze najít přirozené číslo m a konstanty $c_1, \ldots, c_m$ tak, že platí

$$\Big\| \sum_{k=1}^m c_k A\varphi_k - f \Big\| < \eta\,, \tag{15.4}$$

čili, protože operátor A je lineární,

$$\Big\| \sum_{k=1}^m A(c_k\varphi_k) - f \Big\| < \eta\,.^1) \tag{15.5}$$

Metoda nejmenších čtverců záleží v tom, že uvažujeme přibližné řešení u_n (tj. aproximaci zobecněného řešení) rovnice $Au = f$ ve tvaru

$$u_n = \sum_{k=1}^n a_k\varphi_k\,, \tag{15.6}$$

přičemž konstanty a_k[2]) určíme z podmínky

$$\|Au_n - f\|^2 = \min\,, \tag{15.7}$$

podrobněji, aby na n-dimenzionálním podprostoru, vytvořeném prvky tvaru

$$v_n = \sum_{k=1}^n b_k\varphi_k\,, \tag{15.8}$$

[1]) Srov. pozn. 1 pod čarou na str. 166. Také zde bychom měli konstanty c_k označit $c_1^{(m)}, \ldots, c_m^{(m)}$.

[2]) Srov. předcházející poznámku pod čarou.

kde b_k jsou libovolné konstanty, byl výraz $\|Av_n - f\|^2$ minimální právě pro prvek (15.6).

Dosadíme-li do výrazu $\|Av_n - f\|^2$ za v_n podle (15.8), stane se tento výraz kvadratickou funkcí proměnných b_k. Nutná podmínka k tomu, aby byla splněna podmínka (15.7), je, aby v bodě $(a_1, \ldots, a_n)$ platilo

$$\frac{\partial\|Av_n - f\|^2}{\partial b_1} = 0, \ldots, \quad \frac{\partial\|Av_n - f\|^2}{\partial b_n} = 0\,.$$

Podobným způsobem, jakým jsme v případě Ritzovy metody dospěli z podmínek (13.9), str. 163, k soustavě (13.11), dospějeme v našem případě k soustavě (podrobný výpočet zde již nebudeme provádět)

$$(15.9)\quad \begin{aligned} &(A\varphi_1, A\varphi_1)\,a_1 + (A\varphi_1, A\varphi_2)\,a_2 + \ldots + (A\varphi_1, A\varphi_n)\,a_n = (f, A\varphi_1)\,,\\ &(A\varphi_1, A\varphi_2)\,a_1 + (A\varphi_2, A\varphi_2)\,a_2 + \ldots + (A\varphi_2, A\varphi_n)\,a_n = (f, A\varphi_2)\,,\\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\ &(A\varphi_1, A\varphi_n)\,a_1 + (A\varphi_2, A\varphi_n)\,a_2 + \ldots + (A\varphi_n, A\varphi_n)\,a_n = (f, A\varphi_n)\,. \end{aligned}$$

Soustava (15.9) je jednoznačně řešitelná, neboť její determinant je Gramův determinant vytvořený z prvních n prvků posloupnosti (15.3) a tyto prvky tvoří podle předpokladu v prostoru H bázi, takže jsou v H lineárně nezávislé.

Dokážeme, že posloupnost přibližných řešení (15.6) s konstantami, které jsou určeny podmínkou (15.7), konverguje v prostoru H_A[1]) (a tedy také v prostoru H) k zobecněnému řešení u_0 rovnice $Au = f$. Máme tedy dokázat, že ke každému $\varepsilon > 0$ lze najít přirozené číslo m takové, že pro všechna $n > m$ platí

$$\|u_n - u_0\|_A < \varepsilon\,.$$

Zvolme tedy $\varepsilon > 0$. Operátor A je podle předpokladu na lineálu D_A pozitivně definitní, existuje tedy konstanta $C > 0$ tak, že je

$$(15.10)\qquad \|u\|_A \geqq C\|u\| \quad \text{pro každé} \quad u \in H_A\,.$$

Přitom pro každou aproximaci $u_n \in D_A$ zobecněného řešení u_0 rovnice $Au = f$ platí podle (11.21), str. 144,

$$(15.11)\qquad \|u_n - u_0\|_A \leqq \frac{\|Au_n - f\|}{C}\,.$$

Stačí tedy dokázat, že výraz $\|Au_n - f\|$ lze učinit libovolně malý, je-li n dostatečně velké.

Označme

$$(15.12)\qquad \eta = C\varepsilon\,.$$

[1]) H_A je prostor zkonstruovaný v kap. 10.

K tomuto η lze najít číslo m a konstanty $c_1, \ldots, c_m$ tak, že platí (15.5). V lineární kombinaci

$$(15.13)\qquad u_m = \sum_{k=1}^{m} b_k\varphi_k$$

určeme konstanty b_k tak, aby bylo

$$\|Au_m - f\|^2 = \min\,,$$

čili, což je totéž, aby bylo

$$(15.14)\qquad \Big\|\sum_{k=1}^{m} A(b_k\varphi_k) - f\Big\| = \min\,.$$

Protože pro uvažované m existují konstanty $c_1, \ldots, c_m$ tak, že platí (15.5), bude pro konstanty b_k určené podmínkou (15.14) tím spíše platit

$$(15.15)\qquad \Big\|\sum_{k=1}^{m} A(b_k\varphi_k) - f\Big\| < \eta\,.$$

Je-li však $n > m$ a určíme-li konstanty a_k v (15.6) tak, aby bylo splněno (15.7), bude též

$$(15.16)\qquad \Big\|\sum_{k=1}^{n} A(a_k\varphi_k) - f\Big\| < \eta\,.$$

Neboť pro $a_1 = b_1, \ldots, a_m = b_m$ a $a_{m+1} = \ldots = a_n = 0$ je výraz na levé straně nerovnosti (15.16) stejný jako výraz na levé straně nerovnosti (15.15); budou-li však konstanty a_k $(k = 1, \ldots, n)$ navíc určeny tak, aby byla splněna podmínka (15.7), může se norma v (15.16) jedině zmenšit. Tedy k zvolenému $\varepsilon > 0$ existuje m tak, že pro každé $n > m$ platí pro (15.6) s konstantami, které jsou určeny podmínkou (15.7),

$$(15.17)\qquad \|Au_n - f\| < \eta = C\varepsilon\,,$$

a tedy podle (15.11)

$$\|u_n - u_0\|_A < \varepsilon\,,$$

což jsme měli dokázat. Mimoto z (15.17) plyne

$$\lim_{n\to\infty} Au_n = f \ \text{v}\ H\,.$$

Tím jsme dokázali tuto větu:

Věta 15.1. *Nechť A je pozitivně definitní operátor na lineálu D_A, hustém v separabilním Hilbertově prostoru H, $f \in H$. Nechť posloupnost* (15.3) *tvoří bázi v H. Pak posloupnost prvků u_n, daných předpisem* (15.6), *s konstantami a_k, jednoznačně* *určenými podmínkou* (15.7) [*viz soustavu* (15.9)], *konverguje v* H_A, *a tedy také v* H, *k zobecněnému řešení* u_0 *rovnice* $Au = f$. *Mimoto platí*

$$\lim_{n\to\infty} Au_n = f \text{ v } H .$$

Poznámka 15.1 Zmiňme se stručně o některých přednostech a nevýhodách metody nejmenších čtverců, zejména v porovnání s Ritzovou metodou.

Protože posloupnost $\{u_n\}$, získaná metodou nejmenších čtverců, konverguje v H_A k zobecněnému řešení u_0 rovnice $Au = f$, je podle věty 11.2, str. 145, μ-posloupností pro funkcionál

$$Fu = (u, u)_A - 2(f, u)\,, \tag{15.18}$$

tj. platí

$$\lim_{n\to\infty} Fu_n = \min_{u\in H_A} Fu = -\|u_0\|_A^2 .$$

Označme $\{v_n\}$ Ritzovu posloupnost (kap. 13), sestrojenou při stejné volbě báze (15.2), při které byla sestrojena posloupnost $\{u_n\}$. [Podle věty 20.1 je (15.2) báze i v H_A.] Jak víme, Ritzova posloupnost $\{v_n\}$ je také posloupnost prvků tvaru (15.6), avšak na rozdíl od posloupnosti $\{u_n\}$, získané metodou nejmenších čtverců, jsou příslušné koeficienty určeny podmínkou

$$Fv_n = \min$$

(srov. kap. 13). Odtud přímo vyplývá, že pro každé n je

$$Fv_n \leqq Fu_n\,,$$

čili, píšeme-li funkcionál (15.18) ve tvaru

$$Fu = \|u - u_0\|_A^2 - \|u_0\|^2\,,$$

viz (11.8), str. 142, že

$$\|v_n - u_0\|_A \leqq \|u_n - u_0\|_A . \tag{15.19}$$

Z (15.19) plyne, že při téže volbě báze konverguje Ritzova posloupnost v prostoru H_A rychleji (nebo přinejmenším stejně rychle) k zobecněnému řešení u_0 rovnice $Au = f$ než posloupnost $\{u_n\}$, sestrojená metodou nejmenších čtverců. Mimoto nemusí být v případě Ritzovy metody prvky báze voleny z D_A.

Na druhé straně předností metody nejmenších čtverců je, že pro ni platí jak

$$u_n \to u_0 \text{ v } H_A\,,$$

tak

$$Au_n \to f \text{ v } H\,, \tag{15.20}$$

což umožňuje provést [známe-li konstantu C z (15.10)] poměrně snadný odhad chyby podle (15.11). Je-li $H = L_2(G)$, lze mimoto v některých jednoduchých případech dokázat na základě (15.20) stejnoměrnou konvergenci na $\bar{G}$ posloupnosti $\{u_n\}$ k hledanému řešení. Viz např. [30], str. 47, kde je užitím Greenovy funkce dokázána na $\bar{G}$ stejnoměrná konvergence posloupnosti $\{u_n\}$ pro případ Dirichletova problému s nulovými okrajovými podmínkami pro Poissonovu rovnici $-\Delta u = f$ s $f \in L_2(G)$.

Poznámka 15.2. Určitou kombinací Ritzovy metody a metody nejmenších čtverců je *Courantova metoda*. Nechť je předem známo, že zobecněné řešení u_0 rovnice $Au = f$ patří do D_A. Sestrojme funkcionál

$$\tilde{F}u = Fu + \|Au - f\|^2\,, \quad u \in D_A\,, \tag{15.21}$$

kde F je funkcionál (15.18). Funkcionál $\tilde{F}$ nabývá na D_A minima právě pro $u = u_0$ neboť pro $u = u_0$ je Fu na D_A minimální podle věty 9.2, str. 121, a také $\|Au - f\|^2$ je pro $u = u_0$ minimální, neboť $\|Au_0 - f\| = 0$. Úloha najít řešení u_0 rovnice $Au = f$ je tedy ekvivalentní úloze najít v D_A prvek u_0 minimalizující funkcionál (15.21). Z tvaru funkcionálu $\tilde{F}$ je vidět, že jeho minimalizování v D_A (např. Ritzovou metodou) bude pracnější než minimalizování samotného funkcionálu F, resp. $\|Au - f\|^2$. Zároveň však Courantova metoda spojuje v sobě výhody Ritzovy metody a metody nejmenších čtverců, což má, jak lze ukázat, příznivý vliv na rychlost konvergence, popř. její typ. Speciálně, sestrojíme-li pro funkcionál $\tilde{F}$ minimalizující posloupnost, např. Ritzovou metodou, bude zřejmě opět

$$Au_n \to f \text{ v } H \quad \text{pro} \quad n \to \infty\,, \tag{15.22}$$

což umožňuje v některých jednoduchých případech provést obdobné úvahy o stejnoměrné konvergenci, o nichž jsme se zmínili dříve.

Je-li $H = L_2(G)$ a je-li známo, že u_0 a také f jsou v $\bar{G}$ dostatečně hladké funkce, je místo funkcionálu (15.21) možno uvažovat funkcionál

$$Fu + \sum_{k=0}^{m} \sum_{i_1+\ldots+i_N=k} \left\| \frac{\partial^k(Au - f)}{\partial x_1^{i_1} \ldots \partial x_N^{i_N}} \right\|^2 . \tag{15.23}$$

V tomto případě bude numerický výpočet, vedoucí k aproximaci u_n (např. Ritzovou metodou), zřejmě značně pracný, zato konvergence posloupnosti $\{u_n\}$ bude velmi rychlá. Zejména ze vztahů

$$\frac{\partial^k(Au_n - f)}{\partial x_1^{i_1} \ldots \partial x_N^{i_N}} \to 0 \text{ v } H \quad \text{pro} \quad n \to \infty\,, \tag{15.24}$$

analogických vztahu (15.22), lze pak činit odpovídající závěry pro stejnoměrnou konvergenci derivací hledaného řešení v uvažovaném oboru. Podrobně o tom viz např. v [28], str. 101.

Poznámka 15.3. Abychom mohli formálně použít metody nejmenších čtverců, není zřejmě nutné, aby operátor A byl na D_A pozitivně definitní. S podobnou poznámkou jsme se setkali již u Galerkinovy metody. Je-li operátor A obecnější, je ovšem problematika, která se týká otázek jednoznačného určení konstant a_k v (15.6) podmínkou (15.7) a konvergence příslušné posloupnosti $\{u_n\}$ (ve vhodném prostoru), značně obtížnější. Lze ukázat, viz např. [28], str. 455, že obě otázky lze zodpovědět kladně, přičemž konvergencí posloupnosti $\{u_n\}$ rozumíme konvergenci v prostoru H, jsou-li splněny tyto předpoklady:

1. Operátor A je lineární a D_A je lineál hustý v H.
2. Posloupnost (15.3) tvoří bázi v H.
3. Rovnice $Au = f$, $f \in H$, má v H řešení $u_0 \in D_A$.
4. Existuje kladná konstanta K taková, že pro každé $u \in D_A$ je

$$\|Au\| \geqq K\|u\| . \tag{15.25}$$

Poznámka 15.4. Z (15.25) plyne ovšem zároveň jednoznačnost řešení. Rovnice

$$Au = 0$$

má totiž v důsledku (15.25) jediné řešení $u = 0$ v H. [Kdyby bylo $Au = 0$ pro $u \neq 0$ v H, bylo by $\|Au\| = 0$ a $\|u\| \neq 0$, což je spor s (15.25).]

Kapitola 16

Metoda největšího spádu. Příklad

Ukážeme ještě jednu metodu přibližného řešení rovnice $Au = f$, vhodnou v případě, že A je pozitivně definitní operátor, tzv. *metodu největšího spádu*. Tato metoda je vhodná pro omezené operátory (def. 8.13, str. 100), tedy nikoli pro diferenciální operátory. Typickým příkladem rovnic, k jejichž řešení je výhodné aplikovat tuto metodu, jsou integrální rovnice.

Nechť A je pozitivně definitní operátor v Hilbertově prostoru H.[1]) Nechť $f \in H$ a nechť u_0 je v H řešením rovnice

$$Au = f . \tag{16.1}$$

[1]) Je-li operátor A omezený a pozitivně definitní jen na lineálu D_A, hustém v H, lze jej snadno rozšířit (viz např. [26]) na celý prostor H se zachováním normy i pozitivní definitnosti.

Jak víme z věty 9.2, str. 121, minimalizuje prvek u_0 v H funkcionál

$$Fu = (Au, u) - 2(f, u) . \tag{16.2}$$

Tato skutečnost umožňuje následující geometrickou představu, na níž je založena metoda popsaná v této kapitole:

Funkcionál F nabývá pro každé $u \in H$ určité hodnoty. Geometricky si tedy můžeme tento funkcionál představit jako určitou „plochu" nad prostorem H, která nabývá „nejmenší souřadnice" právě pro $u = u_0$. Po této ploše se budeme chtít od výchozího bodu pokud možno nejrychleji, a to ve „směru jejího největšího spádu", přiblížit bodu, který má tuto souřadnici „nejmenší".

Zvolme určitý prvek $u_1 \in H$. Je-li $Au_1 = f$, je daný problém řešen. V opačném případě je $Au_1 - f \neq 0$ v H a prvek u_1 budeme pokládat za první aproximaci hledaného řešení. Najděme v H takový prvek v_1, pro který platí

$$\|v_1\| = \|Au_1 - f\| \tag{16.3}$$

a

$$\frac{d}{dt} F(u_1 + tv_1)\bigg|_{t=0} = \max .^1) \tag{16.4}$$

Avšak je

$$\begin{aligned} F(u_1 + tv_1) &= (A(u_1 + tv_1), u_1 + tv_1) - 2(f, u_1 + tv_1) = \\ &= (Au_1, u_1) + 2t(Au_1, v_1) + t^2(Av_1, v_1) - 2(f, u_1) - \\ &- 2t(f, v_1) = Fu_1 + 2t(Au_1 - f, v_1) + t^2(Av_1, v_1) \end{aligned} \tag{16.6}$$

a

$$\frac{d}{dt} F(u_1 + tv_1) = 2(Au_1 - f, v_1) + 2t(Av_1, v_1) . \tag{16.7}$$

Pro $t = 0$ je

$$\frac{d}{dt} F(u_1 + tv_1)\bigg|_{t=0} = 2(Au_1 - f, v_1) . \tag{16.8}$$

Z požadavků (16.3) a (16.4) pak zřejmě plyne

$$v_1 = Au_1 - f \tag{16.9}$$

[1]) Geometrická interpretace: Prvky tvaru

$$u = u_1 + tv_1 , \tag{16.5}$$

kde t probíhá všechna reálná čísla, tvoří v H „přímku spojující body u_1 a $u_1 + v_1$". Vrátíme-li se k představě funkcionálu F jako plochy nad prostorem H, pak nad přímkou (16.5) můžeme funkcionál F interpretovat jako „křivku" na této ploše. Hledáme takový prvek $v_1 \in H$, a tím tedy takový „směr", aby v bodě $u = u_1$ měla tečna této křivky největší spád. To je geometrická interpretace podmínky (16.4). K určení prvku v_1 je ještě třeba znát jeho normu. Aby výsledek byl co nejjednodušší, předepíšeme ji podmínkou (16.3).

[neboť při předepsané normě (16.3) prvku v_1 bude skalární součin na pravé straně (16.8) největší právě pro $v_1 = Au_1 - f$]. Zároveň z (16.6) a (16.7) je vidět, že při této volbě prvku v_1 bude funkcionál F nabývat na „přímce" $u = u_1 + tv_1$ minimální hodnoty pro

(16.10) $$t = t_1 = -\frac{(Au_1 - f, v_1)}{(Av_1, v_1)} = -\frac{(v_1, v_1)}{(Av_1, v_1)}.$$

Za druhou aproximaci řešení vezměme prvek

(16.11) $$u_2 = u_1 + t_1 v_1 .$$

Je-li $Au_2 \neq f$, pokračujeme stejným způsobem dále, tj. sestrojíme podobně jako v (16.9) a (16.11) prvky

(16.12) $$v_2 = Au_2 - f$$

a

(16.13) $$u_3 = u_2 + t_2 v_2 ,$$

kde

(16.14) $$t_2 = -\frac{(v_2, v_2)}{(Av_2, v_2)}$$

atd. Tím dostaneme posloupnost prvků $u_1, u_2, u_3, \ldots$.

Nechť m a M jsou takové kladné konstanty, že

(16.15) $$m\|u^2\| \leqq (Au, u) \leqq M\|u\|^2 \quad \text{pro každé} \quad u \in H .$$

Pak lze ukázat (viz např. [28]), že posloupnost $\{u_n\}$ konverguje k řešení u_0 dané rovnice v prostoru H i v prostoru H_A se skalárním součinem $(u, v)_A = (Au, v)$ a že platí odhad

(16.16) $$\|u_{n+1} - u_0\|_A \leqq \|u_1 - u_0\|_A \left(\frac{M - m}{M + m}\right)^n .$$

Příklad 16.1. V prostoru $H = L_2(0, \pi)$ uvažujme integrální rovnici

(16.17) $$u(x) - 0{,}1 \int_0^\pi \sin(x + s)\, u(s)\, ds = h(x) ,$$

kde $h \in L_2(0, \pi)$. Operátor

(16.18) $$Au = u(x) - 0{,}1 \int_0^\pi \sin(x + s)\, u(s)\, ds$$

je předně zřejmě v $L_2(0, \pi)$ symetrický, neboť platí

(16.19) $$(Au, v) = \int_0^\pi \left[u(x) - 0{,}1 \int_0^\pi \sin(x + s)\, u(s)\, ds\right] v(x)\, dx =$$
$$= \int_0^\pi u(x)\, v(x)\, dx - 0{,}1 \int_0^\pi \int_0^\pi \sin(x + s)\, u(s)\, v(x)\, ds\, dx =$$
$$= \int_0^\pi u(x)\, v(x)\, dx - 0{,}1 \int_0^\pi \int_0^\pi \sin(x + s)\, v(s)\, u(x)\, ds\, dx =$$
$$= \int_0^\pi \left[v(x) - 0{,}1 \int_0^\pi \sin(x + s)\, v(s)\, ds\right] u(x)\, dx = (Av, u) .$$

Dále je podle (16.19)

(16.20) $$(Au, u) = \int_0^\pi u^2(x)\, dx - 0{,}1 \int_0^\pi \int_0^\pi \sin(x + s)\, u(s)\, u(x)\, ds\, dx .$$

Ale podle Schwarzovy nerovnosti (viz str. 38) platí pro každé dvě funkce $f \in L_2(0, \pi)$, $g \in L_2(0, \pi)$

(16.21) $$\left[\int_0^\pi f(x)\, g(x)\, dx\right]^2 \leqq \int_0^\pi f^2(x)\, dx \,.\, \int_0^\pi g^2(x)\, dx .$$

Odtud dostáváme, položíme-li

$$f(x) = \int_0^\pi \sin(x + s)\, u(s)\, ds , \quad g(x) = u(x) ,$$

(16.22) $$\left(\int_0^\pi \left[\int_0^\pi \sin(x + s)\, u(s)\, ds\right] . \, u(x)\, dx\right)^2 \leqq$$
$$\leqq \int_0^\pi \left[\int_0^\pi \sin(x + s)\, u(s)\, ds\right]^2 dx \,.\, \int_0^\pi u^2(x)\, dx .$$

Použijeme-li znovu Schwarzovy nerovnosti, dostaneme

(16.23) $$\left[\int_0^\pi \sin(x + s)\, u(s)\, ds\right]^2 \leqq \int_0^\pi \sin^2(x + s)\, ds \,.\, \int_0^\pi u^2(s)\, ds =$$
$$= \int_0^\pi \frac{1}{2}[1 - \cos 2(x + s)]\, ds \,.\, \int_0^\pi u^2(x) dx = \frac{\pi}{2} \int_0^\pi u^2(x)\, dx .$$

Dosadíme-li do (16.22), bude

$$\left[\int_0^\pi\int_0^\pi \sin(x+s)\,u(s)\,u(x)\,ds\,dx\right]^2 \leqq \frac{\pi^2}{2}\left[\int_0^\pi u^2(x)\,dx\right]^2$$

čili

$$(16.24)\qquad \left|\int_0^\pi\int_0^\pi \sin(x+s)\,u(s)\,u(x)\,ds\,dx\right| \leqq \frac{\pi}{\sqrt{2}}\int_0^\pi u^2(x)\,dx\,.$$

Z (16.24) a z (16.20) plyne

$$(16.25)\qquad \left(1-\frac{0{,}1\pi}{\sqrt{2}}\right)\|u\|^2 \leqq (Au, u) \leqq \left(1+\frac{0{,}1\pi}{\sqrt{2}}\right)\|u\|^2\,,$$

odkud předně vyplývá, neboť zřejmě je $1-\dfrac{0{,}1\pi}{\sqrt{2}} > 0$, pozitivní definitnost operátoru (16.18) na prostoru $L_2(0, \pi)$. Dále, nerovnosti (16.25) jsou nerovnosti typu (16.15). Jestliže tedy k řešení rovnice (16.17) použijeme metody největšího spádu, dostaneme konvergentní proces.

Jako příklad pro numerický výpočet zvolme $h(x) \equiv 1$ v intervalu $\langle 0, \pi\rangle$. Řešíme tedy rovnici

$$(16.26)\qquad u(x) - 0{,}1\int_0^\pi \sin(x+s)\,u(s)\,ds = 1\,.$$

Vzhledem k „malosti" koeficientu 0,1 u druhého členu dané rovnice bude zřejmě vhodné zvolit za první aproximaci řešení pravou stranu dané rovnice, tj. funkci

$$(16.27)\qquad u_1(x) \equiv 1 \text{ v } \langle 0, \pi\rangle\,.$$

Podle (16.9) určíme nejprve

$$(16.28)\qquad v_1 = Au_1 - f =$$

$$= 1 - 0{,}1\int_0^\pi \sin(x+s)\,.\,1\,.\,ds - 1 = 0{,}1[\cos(x+s)]_0^\pi = -0{,}2\cos x\,.$$

Dále podle (16.10) je

$$(16.29)\qquad t_1 = -\frac{(v_1, v_1)}{(Av_1, v_1)}\,.$$

Avšak

$$(16.30)\qquad (v_1, v_1) = 0{,}04\int_0^\pi \cos^2 x\,dx = 0{,}04\,.\,\frac{\pi}{2} = 0{,}02\pi\,,$$

$$(16.31)\qquad (Av_1, v_1) = \int_0^\pi\left[-0{,}2\cos x + 0{,}02\int_0^\pi \sin(x+s)\cos s\,ds\right].$$

$$.\,(-0{,}2)\cos x\,dx =$$

$$= 0{,}04\int_0^\pi \cos^2 x\,dx - 0{,}004\,.$$

$$.\int_0^\pi\left(\int_0^\pi \tfrac{1}{2}[\sin x + \sin(x+2s)]\,ds\right)\cos x\,dx =$$

$$= 0{,}04\,.\,\frac{\pi}{2} - 0{,}004\,.\,\frac{\pi}{2}\int_0^\pi \sin x\cos x\,dx = 0{,}02\pi\,,$$

neboť

$$\int_0^\pi \sin(x+2s)\,ds = 0\,.$$

Dosazením (16.30) a (16.31) do (16.29) dostaneme

$$t_1 = -\frac{0{,}02\pi}{0{,}02\pi} = -1\,.$$

Podle (16.11) je tedy druhá aproximace řešení

$$(16.32)\qquad u_2 = u_1 + t_1 v_1 = 1 + 0{,}2\cos x\,.$$

Tato aproximace je podle (16.16) v prostoru H_A nejméně $[(M+m)/(M-m)]^1$-krát, tj. nejméně čtyřikrát[1]) lepší než aproximace u_1.

Celý příklad je ovšem jen ilustrativní a zvolili jsme jej proto, abychom mohli posoudit efektivnost metody. Protože platí $\sin(x+s) = \sin x\cos s + \cos x\sin s$, je zřejmě jádro rovnice (16.17) degenerované, takže její řešení je možno hledat ve tvaru

$$u(x) = h(x) + c_1\sin x + c_2\cos x\,.$$

Hledáme-li řešení rovnice (16.26) ve tvaru

$$(16.33)\qquad u(x) = 1 + c_1\sin x + c_2\cos x\,,$$

dostaneme dosazením do (16.26) podmínku

$$c_1\sin x + c_2\cos x - 0{,}1\int_0^\pi(\sin x\cos s + \cos x\sin s)\,(1 + c_1\sin s + c_2\cos s)\,ds = 0\,.$$

---

[1]) Je totiž

$$\frac{M+m}{M-m} = \frac{2}{2\,.\,\dfrac{0{,}1\pi}{\sqrt{2}}} = \frac{\sqrt{2}}{0{,}1\pi} > \frac{1{,}41}{0{,}32} > 4\,.$$

Provedeme-li integrování a porovnáme-li koeficienty u lineárně nezávislých funkcí $\sin x$ a $\cos x$, dostaneme

$$c_1 - 0{,}1 \cdot \frac{\pi}{2} \cdot c_2 = 0\,,$$

$$c_2 - 0{,}1\left(2 + \frac{\pi}{2} \cdot c_1\right) = 0\,,$$

odkud pro neznámé koeficienty c_1 a c_2 plynou hodnoty

$$c_1 = \frac{0{,}01\pi}{1 - 0{,}002\,5\pi^2}\,, \quad c_2 = \frac{0{,}2}{1 - 0{,}002\,5\pi^2}\,.$$

Podle (16.33) je tedy řešení rovnice (16.26)

$$u(x) = 1 + \frac{0{,}01\pi}{1 - 0{,}002\,5\pi^2} \sin x + \frac{0{,}2}{1 - 0{,}002\,5\pi^2} \cos x\,. \tag{16.34}$$

Protože čísla $0{,}002\,5\pi^2$, resp. $0{,}01\pi$ jsou malá ve srovnání s čísly 1, resp. 0,2, je shoda aproximace (16.32) s řešením (16.34) zřejmě velmi dobrá.

Kapitola 17
Shrnutí kapitol 9 až 16

Obsah druhé části této knihy, tj. kap. 9 až 16, je poměrně bohatý. Pokládáme proto za účelné shrnout v této kapitole hlavní výsledky druhé části a umožnit tím čtenáři rychlejší orientaci v této problematice.

V inženýrských problémech a v problémech matematické fyziky se velmi často setkáváme s rovnicemi typu

$$Au = f\,, \tag{17.1}$$

kde f je prvek některého Hilbertova prostoru H a A je určitý operátor, nejčastěji pozitivní, resp. pozitivně definitní na některém lineálu D_A, hustém v H. V případě problémů z diferenciálních rovnic s okrajovými podmínkami (na řešení těchto problémů je především, i když ne výlučně, zaměřena tato kniha), volíme nejčastěji $H = L_2(G)$; D_A je pak lineál některých dostatečně hladkých funkcí (na něž lze tedy aplikovat operace derivování, dané uvažovaným diferenciálním operátorem),

vyhovujících daným okrajovým podmínkám (popř. jiným požadavkům). Řešením rovnice $Au = f$ v prostoru H pak rozumíme takový prvek $u_0 \in D_A$, pro který platí

$$Au_0 = f \text{ v } H\,. \tag{17.2}$$

Je-li např. $H = L_2(G)$, znamená

$$Au_0 = f \text{ v } L_2(G)\,,$$

že tato rovnost je splněna skoro všude v G.

Je-li A pozitivní operátor na lineálu D_A, pak rovnice $Au = f$ má v H nejvýše jedno řešení, tj. nemohou existovat dva různé prvky u_1, u_2 z D_A tak, aby byly splněny rovnice

$$Au_1 = f \text{ v } H \quad \text{a} \quad Au_2 = f \text{ v } H\,.$$

To je obsahem tvrzení věty 9.1. Hlavním obsahem kap. 9 je věta o minimu kvadratického funkcionálu (věta 9.2); podle ní je pro pozitivní operátor A úloha najít řešení $u_0 \in D_A$ rovnice $Au = f$ ekvivalentní úloze najít v D_A prvek u_0, minimalizující v D_A funkcionál

$$Fu = (Au, u) - 2(f, u)\,. \tag{17.3}$$

Věta 9.2 je zásadního významu, neboť úlohu řešit danou rovnici převádí na úlohu najít prvek u_0, minimalizující v D_A funkcionál (17.3), pro jejíž řešení (resp. přibližné řešení) jsou vypracovány poměrně jednoduché numerické metody. Věta 9.2 však netvrdí nic o existenci řešení u_0 dané rovnice, resp. o existenci prvku u_0, minimalizujícího v D_A funkcionál (17.3). Lze také skutečně uvést řadu dokonce jednoduchých příkladů, kdy rovnice $Au = f$ nemá řešení $u_0 \in D_A$, a kdy tedy ani problém najít v D_A prvek u_0, minimalizující funkcionál (17.3), nemá řešení. Pak ovšem úloha aproximovat např. Ritzovou metodou toto neexistující řešení, ztrácí smysl. Jednoduchou myšlenkou, jak tuto obtíž překonat, je uvažovat funkcionál F na širším oboru, než je lineál D_A. Proto jsme za předpokladu, že operátor A je na lineálu D_A pozitivně definitní, rozšířili v kap. 10 obor tohoto funkcionálu na tzv. prostor H_A. Takto rozšířený funkcionál skutečně dosahuje na tomto prostoru pro určitý prvek u_0 svého minima. Prvek $u_0 \in H_A$, jednoznačně určený pravou stranou rovnice $Au = f$, jsme nazvali zobecněným řešením této rovnice. Ve speciálních případech se ovšem může stát, že je $u_0 \in D_A$, takže pak dostáváme řešení rovnice $Au = f$ v obvyklém, dříve uvedeném smyslu.

Prostor H_A jsme zkonstruovali takto: Na lineálu D_A jsme definovali nový skalární součin

$$(u, v)_A = (Au, v)\,, \quad u, v \in D_A\,, \tag{17.4}$$

a na základě tohoto skalárního součinu jsme obvyklým způsobem definovali normu $\|u\|_A$ a vzdálenost $\varrho_A(u, v)$. Tím jsme dostali metrický, a to unitární prostor, který jsme nazvali S_A. V případě, že S_A je úplný prostor v metrice ϱ_A, položili jsme $H_A = S_A$. V opačném případě jsme uvažovali množinu M všech posloupností cauchyovských v S_A. Tyto posloupnosti (tedy prvky množiny M) jsme rozdělili na třídy, a to tak, že dvě posloupnosti $\{u_n\}$, $\{v_n\}$ z M patří do téže třídy právě tehdy, platí-li

$$\lim_{n\to\infty} \|u_n - v_n\|_A = 0\,. \tag{17.5}$$

Každé z těchto tříd jsme přiřadili (a to vzájemně jednoznačně) určitý prvek prostoru H.[1]) Množinu těchto prvků jsme označili D. Lineál D je sjednocením prvků původního lineálu D_A a množiny D_I „nových" prvků. Tyto nové prvky odpovídají třídám těch posloupností, cauchyovských v prostoru S_A, které nemají v S_A limitu.

Na lineálu D jsme zavedli skalární součin $(u, v)_A$ prvků u_0, $v_0 \in D$ vztahem

$$(u_0, v_0)_A = \lim_{n\to\infty} (u_n, v_n)_A\,, \tag{17.6}$$

kde $\{u_n\}$, resp. $\{v_n\}$ je některá posloupnost prvků z D_A, a to z třídy, která odpovídá podle popsaného přiřazení prvku u_0, resp. v_0. Limita (17.6) vždy existuje a je nezávislá na výběru posloupnosti $\{u_n\}$, resp. $\{v_n\}$ z třídy, která odpovídá prvku u_0, resp. v_0. Součin (17.6) má všechny vlastnosti skalárního součinu a je rozšířením skalárního součinu (17.4), definovaného pro prvky lineálu D_A, na celý lineál D.

Na základě skalárního součinu (17.6) jsme na lineálu D definovali obvyklým způsobem normu a vzdálenost, které jsou opět rozšířením normy $\|u\|_A$ a vzdálenosti $\varrho_A(u, v)$, definovaných na lineálu D_A pomocí skalárního součinu (17.4), na celý lineál D. Lineál D s metrikou ϱ_A jsme nazvali prostorem H_A. Tento prostor je v metrice ϱ_A úplný, je tedy Hilbertovým prostorem. Jeho prvky tvoří, jak jsme řekli, jednak prvky lineálu D_A (tento lineál je v prostoru H_A hustý), jednak prvky množiny D_I, které je podle dříve uvedené konstrukce možno charakterizovat tak, že každý prvek $u \in D_I$ je takový prvek prostoru H, který nepatří do D_A a přitom je v H limitou některé posloupnosti $\{u_n\}$, cauchyovské v prostoru S_A. Charakter prvků z D_I může být rozmanitý. Např. v případě běžných diferenciálních operátorů druhého řádu, kdy za Hilbertův prostor H volíme zpravidla prostor $L_2(G)$[2]) a za lineál D_A lineál funkcí spojitých včetně parciálních derivací prvního a druhého řádu v uzavřené oblasti $\bar{G}$ a splňujících uvažované okrajové podmínky, můžeme v obecném případě o prvcích lineálu D_I říci jen to, že mají tzv. zobecněné parciální derivace prvního řádu, integrovatelné s druhou mocninou v oblasti G. Později, až budeme mít k dispozici pojem prostoru $W_2^{(k)}(G)$, bude možno prvky prostoru H_A vhodněji charakterizovat.

[1]) Vzájemně jednoznačné přiřazení určitých prvků třídám cauchyovských posloupností je základní myšlenkou „zúplnění" i v případě obecného metrického prostoru, viz např. [26]. V obecném případě však není snadné blíže určit charakter „ideálních" prvků, tj. těch prvků, které „přidáváme" k prvkům původního prostoru.

[2]) V případě obyčejných diferenciálních operátorů je ovšem $G = (a, b)$ a místo o parciálních derivacích mluvíme o obyčejných derivacích.

Vztah

$$\|u\|_A \geq C\|u\|\,,$$

charakterizující pozitivní definitnost operátoru A na lineálu D_A, zůstává v platnosti i v prostoru H_A.

Funkcionál F, definovaný na lineálu D_A předpisem

$$Fu = (Au, u) - 2(f, u)$$

čili předpisem

$$Fu = (u, u)_A - 2(f, u)\,, \tag{17.7}$$

lze po právě popsaném rozšíření skalárního součinu $(u, u)_A$ na celý prostor H_A rozšířit předpisem (17.7) rovněž na celý prostor H_A. Na tomto prostoru nabývá funkcionál (17.7) minima, a to pro prvek u_0, daný podmínkou, aby pro všechna $u \in H_A$ byla splněna rovnost

$$(u_0, u)_A = (f, u)\,. \tag{17.8}$$

Podle Rieszovy věty je prvek u_0 touto podmínkou (tj. pravou stranou rovnice $Au = f$) jednoznačně určen. Prvek u_0 nazýváme zobecněným řešením dané rovnice. Tím je tedy v případě, že A je na lineálu D_A pozitivně definitní operátor, dokázána existence minima funkcionálu F v prostoru H_A a tím také (podle definice) existence řešení rovnice $Au = f$, v obecném případě zobecněného (neboť prvek u_0 není v obecném případě prvkem lineálu D_A; víme jen, že je $u_0 \in H_A$ a že u_0 lze s libovolnou přesností aproximovat v metrice prostoru H_A prvky z lineálu D_A).

Po dosazení za (f, u) ze (17.8) do (17.7) můžeme funkcionál F zapsat ve tvaru

$$Fu = (u - u_0, u - u_0)_A - (u_0, u_0)_A = \|u - u_0\|_A^2 - \|u_0\|^2\,, \tag{17.9}$$

z něhož je vidět, že

$$\min_{u\in H_A} Fu = -\|u_0\|^2\,. \tag{17.10}$$

V souvislosti se (17.10) jsme pro funkcionál F zavedli pojem minimalizující posloupnosti (μ-posloupnosti) jako takové posloupnosti prvků u_n z H_A, pro kterou je

$$\lim_{n\to\infty} Fu_n = \min_{u\in H_A} Fu = -\|u_0\|^2\,. \tag{17.11}$$

Ze (17.9) plyne, že posloupnost $\{u_n\}$ je μ-posloupnost právě tehdy, konverguje-li v H_A k prvku u_0 (tj. k zobecněnému řešení rovnice $Au = f$).

Zobecněné řešení u_0 rovnice $Au = f$ závisí spojitě na pravé straně $f \in H$ této rovnice. Podrobněji, platí

$$\|u_0\|_A \leq \frac{\|f\|}{C}\,. \tag{17.12}$$

Jsou-li u_0, resp. v_0 zobecněná řešení rovnic $Au = f$, resp. $Au = g$, pak ze (17.12) plyne

$$\|v_0 - u_0\|_A \leqq \frac{\|g - f\|}{C}. \tag{17.13}$$

Je-li $u_n \in D_A$ aproximace prvku u_0 v prostoru H_A, získaná např. některou z metod kap. 12 až 15, pak

$$\|u_n - u_0\|_A \leqq \frac{\|Au_n - f\|}{C}, \tag{17.14}$$

což umožňuje jednoduchý odhad chyby, tj. odhad rozdílu aproximace u_n a zobecněného řešení u_0 v prostoru H_A.

V kap. 11 jsme uvedli ještě některé poznámky týkající se speciálně řešení diferenciálních rovnic — obyčejných nebo parciálních — s okrajovými podmínkami:

Patří-li zobecněné řešení u_0 rovnice $Au = f$, tj. prvek minimalizující v H_A funkcionál (17.7), do D_A (to je zhruba řečeno, případ, kdy koeficienty diferenciálního operátoru i pravá strana dané rovnice jsou dostatečně hladké funkce), pak toto řešení odpovídá (i když v poněkud modifikovaném smyslu, viz pozn. 11.4, str. 146) pojmu klasického řešení, známého z klasické teorie obyčejných, resp. parciálních diferenciálních rovnic. Nepatří-li u_0 do D_A, patří do D_I, a je tedy zobecněným řešením daného problému, které v obecném případě nemá v uvažovaném oboru ani tolik derivací, kolik vyžaduje daná diferenciální rovnice. Přesto však zpravidla velmi dobře vystihuje po fyzikální stránce řešení daného problému, neboť minimalizuje funkcionál, z něhož bývá daná diferenciální rovnice odvozena metodami variačního počtu, čímž se v této rovnici objeví vyšší počet derivací, než vyžaduje daná úloha. Viz také kap. 46, týkající se otázek hladkosti zobecněného řešení rovnice $Au = f$.

Okolnost, že výchozím definičním oborem operátoru A je lineál (a také to, že přibližné řešení problému např. Ritzovou metodou hledáme mezi prvky určitého lineálu), vyžaduje uvažovat problémy s homogenními okrajovými podmínkami. V pozn. 11.6 až 11.8 jsme ukázali, jak daný problém s nehomogenními okrajovými podmínkami převést na problém s podmínkami homogenními, podaří-li se najít vhodnou funkci w, splňující dané okrajové podmínky. Uvedli jsme příklad ukazující, jak tuto funkci v některých jednoduchých případech najít, ale upozornili jsme na to, že z teoretického hlediska není v obecném případě jednoduché dokázat dokonce jen existenci takové funkce. Podrobněji se budeme touto problematikou zabývat v kap. 32, 34 a 46.

Úkolem kap. 9 až 11 bylo jednak ukázat, jak úlohu řešit rovnici $Au = f$ lze v případě pozitivního operátoru převést na úlohu najít v D_A prvek, minimalizující v D_A funkcionál F, jednak dokázat pro případ pozitivně definitivního operátoru existenci (a jednoznačnost) prvku $u_0 \in H_A$, minimalizujícího v H_A funkcionál F, rozšířený na celý tento prostor, a tím pro tento případ dokázat existenci (a jednoznačnost) zobecněného řešení rovnice $Au = f$. Úkolem kap. 12 až 16 bylo ukázat účinné metody, jak toto zobecněné řešení najít, resp. dostatečně přesně aproximovat. Základní předpoklad v kap. 12 až 16 tedy byl, že operátor A je na D_A pozitivně definitivní. V kap. 12 až 15 jsme dále předpokládali, že prostor H_A je separabilní (k tomu stačí, je-li prostor H separabilní), takže v něm existuje (nejvýše spočetná) báze

$$\varphi_1, \varphi_2, \ldots. \tag{17.15}$$

[V případě metody nejmenších čtverců jsme předpokládali, že (17.15) je tzv. A-báze v H, viz (17.25); pak (17.15) tvoří bázi i v H_A.] Je-li báze (17.15) ortonormální v H_A, pak (viz kap. 12) je zobecněné řešení u_0 dáno řadou

$$u_0 = \sum_{k=1}^{\infty} a_k \varphi_k, \quad \text{kde} \quad a_k = (f, \varphi_k), \tag{17.16}$$

konvergentní v prostoru H_A i v prostoru H. Jako jednoduchý příklad na použití této metody (tzv. metody ortonormálních řad) jsme uvedli řešení Dirichletova problému pro Poissonovu rovnici na obdélníku. K řešení této úlohy vede řada inženýrských i přírodovědných problémů.

Není-li báze (17.15) ortonormální v H_A, lze ji známým postupem (str. 61) ortonormalizovat. Tento proces je však v obecném případě velmi pracný. Proto jsme uvedli další metody. Zvolíme-li určité n, tvoří množina všech lineárních kombinací tvaru

$$\sum_{k=1}^{n} b_k \varphi_k, \tag{17.17}$$

kde φ_k jsou prvky báze (17.15), v prostoru H_A n-rozměrný podprostor, který označíme M. Přibližné řešení u_n našeho problému hledáme ve tvaru

$$u_n = \sum_{k=1}^{n} a_k \varphi_k, \tag{17.18}$$

kde konstanty a_k určíme

a) v případě Ritzovy metody z podmínky

$$Fu_n = \min \text{ na } M, \tag{17.19}$$

b) v případě Galerkinovy metody z podmínky, aby $Au_n - f$ bylo v H ortogonální k prvkům $\varphi_1, \ldots, \varphi_n$, tj. z podmínek

$$(Au_n - f, \varphi_1) = 0, \ldots, (Au_n - f, \varphi_n) = 0, \tag{17.20}$$

c) v případě metody nejmenších čtverců z podmínky

$$\|Au_n - f\|^2 = \min \text{ na } M. \tag{17.21}$$

Určení koeficientů a_k v (17.18) vede u Ritzovy metody k řešení soustavy

$$(17.22)\qquad \begin{aligned}&(\varphi_1, \varphi_1)_A\, a_1 + (\varphi_1, \varphi_2)_A\, a_2 + \ldots + (\varphi_1, \varphi_n)_A\, a_n = (f, \varphi_1)\,,\\ &(\varphi_1, \varphi_2)_A\, a_1 + (\varphi_2, \varphi_2)_A\, a_2 + \ldots + (\varphi_2, \varphi_n)_A\, a_n = (f, \varphi_2)\,,\\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\ &(\varphi_1, \varphi_n)_A\, a_1 + (\varphi_2, \varphi_n)_A\, a_2 + \ldots + (\varphi_n, \varphi_n)_A\, a_n = (f, \varphi_n)\,,\end{aligned}$$

resp. jsou-li prvky φ_k voleny z D_A, k řešení soustavy

$$(17.23)\qquad \begin{aligned}&(A\varphi_1, \varphi_1)\, a_1 + (A\varphi_1, \varphi_2)\, a_2 + \ldots + (A\varphi_1, \varphi_n)\, a_n = (f, \varphi_1)\,,\\ &(A\varphi_1, \varphi_2)\, a_1 + (A\varphi_2, \varphi_2)\, a_2 + \ldots + (A\varphi_2, \varphi_n)\, a_n = (f, \varphi_2)\,,\\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\ &(A\varphi_1, \varphi_n)\, a_1 + (A\varphi_2, \varphi_n)\, a_2 + \ldots + (A\varphi_n, \varphi_n)\, a_n = (f, \varphi_n)\,,\end{aligned}$$

u Galerkinovy metody k řešení soustavy (17.23) a u metody nejmenších čtverců k řešení soustavy

$$(17.24)\qquad \begin{aligned}&(A\varphi_1, A\varphi_1)\, a_1 + (A\varphi_1, A\varphi_2)\, a_2 + \ldots + (A\varphi_1, A\varphi_n)\, a_n = (f, A\varphi_1)\,,\\ &(A\varphi_1, A\varphi_2)\, a_1 + (A\varphi_2, A\varphi_2)\, a_2 + \ldots + (A\varphi_2, A\varphi_n)\, a_n = (f, A\varphi_2)\,,\\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\ &(A\varphi_1, A\varphi_n)\, a_1 + (A\varphi_2, A\varphi_n)\, a_2 + \ldots + (A\varphi_n, A\varphi_n)\, a_n = (f, A\varphi_n)\,.\end{aligned}$$

Za dříve uvedeného předpokladu (pozitivní definitnost operátoru A, separabilnost prostoru H_A) jsou uvedené soustavy jednoznačně řešitelné a příslušné posloupnosti $\{u_n\}$ konvergují v H_A (a tedy také v H) k zobecněnému řešení u_0 rovnice $Au = f$, jestliže

a) v případě Ritzovy metody je (17.15) báze v H_A, v případě použití soustavy (17.23) vytvořená mimoto z prvků lineálu D_A;

b) v případě Galerkinovy metody je (17.15) báze v H_A, vytvořená z prvků lineálu D_A;

c) v případě metody nejmenších čtverců je

$$(17.25)\qquad A\varphi_1, A\varphi_2, \ldots$$

báze v H.

V závěru kap. 13 jsme se stručně zmínili o tvaru Ritzovy soustavy v případě nehomogenních okrajových podmínek.

Pokud jde o formální stránku, tedy nikoli o otázky řešitelnosti příslušných soustav a konvergenci příslušných posloupností $\{u_n\}$, je u Ritzovy metody předpoklad o pozitivní definitnosti operátoru A celkem přirozený, neboť, jak je vidět ze (17.19), je Ritzova metoda v podstatě založena na větě o minimu kvadratického funkcionálu,

formulované pro pozitivní operátor. U Galerkinovy metody a metody nejmenších čtverců je po formální stránce předpoklad pozitivní definitnosti operátoru A zcela zbytečný. K tomu, abychom od podmínek (17.20), resp. (17.21) dospěli k soustavám (17.23), resp. (17.24), stačí, je-li operátor A jen lineární. Samotné podmínky (17.20) a (17.21) mají smysl i tenkrát, je-li operátor A nelineární. (Přitom lze poznamenat, že v nelineárních úlohách se používá i Ritzovy metody.) Otázky řešitelnosti uvažovaných soustav i konvergence příslušných posloupností jsou v těchto případech ovšem značně složitější než v uvedeném případě. Viz také závěr kap. 15, týkající se některých předpokladů, které zaručují konvergenci metody nejmenších čtverců pro případ lineárních operátorů.

U metody nejmenších čtverců jsme dále upozornili na to, že zároveň s $u_n \to u_0$ v H platí i

$$(17.26)\qquad Au_n \to f \text{ v } H\,.$$

(Např. u Ritzovy metody je tento závěr správný jen při speciální volbě báze, viz zejména kap. 20 a 25.) Ze (17.26) předně plyne, že k odhadu chyby je možno použít (17.14). Dále lze v některých jednoduchých případech, kdy je $H = L_2(G)$, učinit na základě (17.26) některé závěry, týkající se stejnoměrné konvergence posloupnosti $\{u_n\}$ na $\bar{G}$. O takové zlepšení konvergence jde i u tzv. Courantovy metody, která záleží v minimalizování funkcionálu tvaru

$$(17.27)\qquad Fu_n + \|Au_n - f\|^2\,,$$

resp. v obecnějším případě tvaru

$$(17.28)\qquad Fu_n + \sum_{k=0}^{m} \sum_{i_1+\ldots+i_N=k} \left\|\frac{\partial^k(Au_n - f)}{\partial x_1^{i_1} \ldots \partial x_N^{i_N}}\right\|^2$$

na vhodném lineálu M. Podmínka minimalizování funkcionálu (17.27) na M je tedy „kombinací" podmínek (17.19) a (17.21).

V kap. 16 jsme uvedli ještě metodu, která je vhodná pro případ pozitivně definitních omezených operátorů (tedy nikoli pro případ diferenciálních operátorů), definovaných na celém prostoru H, resp. rozšířených na celý tento prostor. Tato metoda je založena na myšlence „blížit se ve směru největšího spádu po ploše, která je reprezentována funkcionálem F nad prostorem H, k jejímu minimu". Upustíme-li od geometrické interpretace, konstruujeme posloupnost přibližných řešení $u_1, u_2, \ldots$, kde u_1 je zvolená první aproximace a

$$u_{n+1} = u_n + t_n v_n\,,$$

kde

$$v_n = Au_n - f\,,\quad t_n = -\frac{(v_n, v_n)}{(Av_n, v_n)}$$

pro $n = 1, 2, \ldots$. Je-li $0 < m \leqq M$ a platí-li pro každé $u \in H$

$$m\|u\|^2 \leqq (Au, u) \leqq M\|u\|^2 ,$$

pak pro rychlost konvergence dostaneme odhad

$$\|u_{n+1} - u_0\|_A \leqq \|u_1 - u_0\|_A \left(\frac{M - m}{M + m}\right)^n .$$

Jako typický (i když jen ilustrativní) příklad na použití této metody jsme ukázali řešení integrální rovnice (16.17).

Část III. APLIKACE VARIAČNÍCH METOD K ŘEŠENÍ OBYČEJNÝCH A PARCIÁLNÍCH DIFERENCIÁLNÍCH ROVNIC S OKRAJOVÝMI PODMÍNKAMI

V předcházejících kapitolách jsme se seznámili s nejběžnějšími variačními metodami, vhodnými k řešení lineárních operátorových rovnic typu $Au = f$ s pozitivně definitními operátory. I když jsme výsledky formulovali pro obecný případ pozitivně definitních operátorů, jsou z hlediska aplikací variačních metod v inženýrských a přírodovědných problémech nejdůležitější rovnice, které obsahují diferenciální operátory. Těmto operátorům věnujeme proto v této knize zvláštní pozornost; ukážeme v ní, že diferenciální operátory, s kterými se nejčastěji setkáváme v problémech obyčejných a parciálních diferenciálních rovnic s okrajovými podmínkami, jsou na vhodně zvolených definičních oborech pozitivně definitní, a že je tedy možno k řešení těchto problémů použít právě uvedených variačních metod. Ukážeme, jak důležitá je vhodná volba báze pro stabilitu numerického procesu i pro získání některých užitečných vlastností hledané posloupnosti přibližných řešení u_n. Zároveň na příkladech důležitých pro aplikace ukážeme numerické zpracování uvažovaných problémů (zpravidla i s numerickým odhadem chyby). Dané problémy budeme řešit různými metodami, abychom mohli porovnat pracnost a účinnost jednotlivých metod.

Nezbytným prostředkem k tomu, abychom pro vyšetřované diferenciální operátory ověřili výchozí krok této teorie, tj. dokázali nerovnost $(Au, u) \geqq C^2\|u\|^2$ a tím i pozitivní definitnost těchto operátorů, bude tzv. *Friedrichsova*, resp. *Poincaréova nerovnost*; jim je proto věnována první kapitola této části knihy.[1] Věnovali jsme značnou pozornost i numerickému aspektu těchto nerovností, neboť, jak jsme se již zmínili na několika místech v předcházejícím textu, dává jejich použití jednu z možností numerického odhadu chyby při použití právě uvedených variačních metod. Proto jsme se snažili odvodit některé jemnější nerovnosti, než s jakými se setkáváme v literatuře. Čtenář, který chce postupovat rychleji, nemusí podrobně sledovat všechna uvedená odvození a může si vybrat jen ty výsledky, které bude přímo potřebovat. Tato poznámka se týká v podstatě všech kapitol této části knihy.

Podobně jako v předcházejících kapitolách budeme i v dalším textu rozumět Hilbertovým prostorem reálný Hilbertův prostor. Zejména všechny funkce a konstanty, s kterými se v této části knihy setkáme, budou reálné.

[1]) O některých zobecněních těchto nerovností viz v kap. 30, str. 358 a 359.

Kapitola 18

Friedrichsova nerovnost
Poincaréova nerovnost

Jako obvykle označme G omezenou oblast v N-rozměrném euklidovském prostoru, s lipschitzovskou hranicí Γ (viz kap. 2, resp. 28). [Pro $N = 1$ jde o interval (a, b).] Úvahy této kapitoly budeme provádět v reálném Hilbertově prostoru $L_2(G)$, v němž, jak víme, jsou skalární součin, resp. norma, resp. metrika dány vztahy

$$(u, v) = \int_G u(x)\, v(x)\, dx\,, \quad \text{resp.} \quad \|u\| = \sqrt{\int_G u^2(x)\, dx}\,, \quad \text{resp.} \quad \varrho(u, v) = \sqrt{\int_G [u(x) - v(x)]^2\, dx}\,.$$

Označme M stručně lineál funkcí $u(x)$, spojitých včetně parciálních derivací prvního řádu v $\bar{G}$ [tedy množinu $C^{(1)}(\bar{G})$, viz str. 15].

Věta 18.1. (*Friedrichsova nerovnost.*) *Nechť G je oblast s lipschitzovskou hranicí Γ. Pak existují nezáporné konstanty c_1, c_2, závislé na uvažované oblasti, ale nezávislé na funkcích z lineálu M tak, že platí*

$$\int_G u^2(x)\, dx \leq c_1 \sum_{k=1}^N \int_G \left(\frac{\partial u}{\partial x_k}\right)^2 dx + c_2 \int_\Gamma u^2(S)\, dS \tag{18.1}$$

pro každou funkci $u \in M$.

Zejména pro $N = 2$ dostáváme při obvyklém označení proměnných

$$\iint_G u^2(x, y)\, dx\, dy \leq c_1 \iint_G \left[\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)^2\right] dx\, dy + c_2 \int_\Gamma u^2(s)\, ds\,. \tag{18.2}$$

Pro případ $N = 1$, kdy M je lineál funkcí spojitých včetně prvních derivací v uzavřeném intervalu $\langle a, b\rangle$, lze Friedrichsovu nerovnost zapsat v některém z těchto tvarů:

$$\int_a^b u^2(x)\, dx \leq c_1 \int_a^b u'^2(x)\, dx + c_2\, u^2(a)\,, \tag{18.3}$$

$$\int_a^b u^2(x)\, dx \leq c_1 \int_a^b u'^2(x)\, dx + c_2\, u^2(b)\,, \tag{18.4}$$

$$\int_a^b u^2(x)\, dx \leq c_1 \int_a^b u'^2(x)\, dx + c_2 [u^2(a) + u^2(b)]\,. \tag{18.5}$$

Konstanty v uvedených nerovnostech značíme stejnými symboly c_1 a c_2 [na rozdíl od označení c_3 a c_4, kterého budeme používat pro konstanty v Poincaréově nerovnosti (18.50)], v každé z uvedených pěti nerovností mohou ovšem být hodnoty konstant c_1, c_2 jiné [viz speciálně (18.17), (18.19), (18.21), (18.28), (18.37), (18.39), (18.46) a (18.48)].

D ů k a z provedeme nejprve podrobně pro nerovnost (18.4), a to tak, aby z něho bylo patrno, jak lze postupovat v ostatních případech.

Označme

$$g(x) = \cos \frac{\pi(x - a)}{4(b - a)} \tag{18.6}$$

a

$$v = \frac{u}{g} \quad \text{čili} \quad u = gv\,. \tag{18.7}$$

Zřejmě platí

$$u'^2 = (gv)'^2 = g^2 v'^2 + 2vv'gg' + v^2 g'^2 = g^2 v'^2 + (v^2 gg')' - v^2 gg''\,, \tag{18.8}$$

takže

$$(v^2 gg')' - v^2 gg'' \leq u'^2\,. \tag{18.9}$$

Integrujeme-li (18.9) v mezích od a do b, dostaneme

$$[v^2 gg']_a^b - \int_a^b v^2 gg''\, dx \leq \int_a^b u'^2\, dx\,. \tag{18.10}$$

Ale podle (18.6) je

$$g'' = -\frac{\pi^2}{16(b - a)^2}\, g\,, \tag{18.11}$$

takže

$$v^2 gg'' = -\frac{\pi^2}{16(b - a)^2}\, v^2 g^2 = -\frac{\pi^2}{16(b - a)^2}\, u^2 \tag{18.12}$$

a dále

$$[v^2 gg']_a^b = \left[v^2 g^2 \frac{g'}{g}\right]_a^b = \left[u^2 \frac{g'}{g}\right]_a^b = -\frac{\pi}{4(b - a)}\, u^2(b)\,, \tag{18.13}$$

neboť

$$\frac{g'}{g} = -\frac{\pi}{4(b - a)} \operatorname{tg} \frac{\pi(x - a)}{4(b - a)} \tag{18.14}$$

a

$$\frac{g'(a)}{g(a)} = 0\,, \quad \frac{g'(b)}{g(b)} = -\frac{\pi}{4(b - a)} \operatorname{tg} \frac{\pi}{4} = -\frac{\pi}{4(b - a)}\,. \tag{18.15}$$

Z (18.10), (18.12) a (18.13) plyne

$$\frac{\pi^2}{16(b-a)^2}\int_a^b u^2\,\mathrm{d}x \leqq \int_a^b u'^2\,\mathrm{d}x + \frac{\pi}{4(b-a)}\,u^2(b)$$

čili

$$\int_a^b u^2\,\mathrm{d}x \leqq \frac{16(b-a)^2}{\pi^2}\int_a^b u'^2\,\mathrm{d}x + \frac{4(b-a)}{\pi}\,u^2(b)\,. \tag{18.16}$$

V (18.4) stačí tedy položit

$$c_1 = \frac{16(b-a)^2}{\pi^2}\,,\quad c_2 = \frac{4(b-a)}{\pi}\,. \tag{18.17}$$

Zcela analogicky se provede důkaz nerovnosti (18.3). Místo funkce (18.6) stačí uvažovat funkci

$$g(x) = \cos\frac{\pi(x-b)}{4(b-a)}\,;$$

pro konstanty c_1, c_2 lze tak získat stejný odhad (18.17) jako v předcházejícím případě.

Nerovnost (18.5) je důsledkem nerovnosti (18.4), resp. (18.3), za hodnoty konstant c_1, c_2 lze tedy opět zvolit výrazy (18.17). Získané odhady je však v tomto případě možno jednoduchým způsobem zlepšit[1]), provedeme-li právě popsaný důkaz s funkcí

$$g(x) = \cos\frac{\pi\left(x - \dfrac{a+b}{2}\right)}{2(b-a)}\,.$$

Snadno pak vypočteme, že v (18.5) je možno volit

$$c_1 = \frac{4(b-a)^2}{\pi^2}\,,\quad c_2 = \frac{2(b-a)}{\pi}\,. \tag{18.19}$$

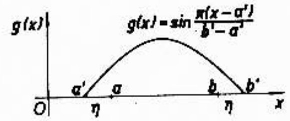
Poznámka 18.1. Je-li $b - a$ značně velké proti jedničce, tj. je-li $b - a \gg 1$, je v (18.19) $c_1 \gg c_2$. Naopak, je-li $b - a \ll 1$, je $c_1 \ll c_2$. Tato okolnost může být

[1]) Zlepšit v tomto smyslu: Pozitivně definitní operátor je charakterizován nerovností $(Au, u) \geqq C^2\|u\|^2$. Z různých důvodů je vhodné, aby konstanta C v této nerovnosti byla co možná největší. Např. při odhadu chyby v (11.21), str. 144, se tato konstanta vyskytuje ve jmenovateli. V případech, s kterými se setkáme v dalším textu, dostaneme pro C^2 odhady tvaru

$$C^2 = \frac{p}{c_1}\,,\quad C^2 = \min\left(\frac{p}{c_1}, \frac{\sigma}{c_2}\right) \tag{18.18}$$

apod. [srov. např. (19.77), str. 221, (19.43), str. 217], kde p a σ jsou kladné konstanty, dané vyšetřovanou diferenciální rovnicí a okrajovými podmínkami. Aby bylo možno uvažovat C co možná největší, potřebujeme získat pro c_1 a c_2 odhady co možná nejmenší.

v odhadech typu (18.18) (viz pozn. 1 pod čarou) nepříjemná, zejména v druhém z nich. Je proto vhodné mít určitou možnost „regulace" poměru čísel c_1 a c_2, abychom např. mohli dosáhnout toho, že čísla p/c_1 a σ/c_2 v (18.18) budou (aspoň přibližně) stejně velká. Toho lze dosáhnout takto:



Obr. 8.

Zvolme $\eta > 0$, označme $a' = a - \eta$, $b' = b + \eta$ (obr. 8), takže interval $\langle a, b\rangle$ „vložíme" do intervalu $\langle a', b'\rangle$, a v uvedeném důkazu položme

$$g(x) = \sin\frac{\pi(x-a')}{b'-a'} \tag{18.20}$$

(viz graf této funkce na obr. 8). V tomto případě dostaneme pro c_1 a c_2 z nerovnosti (18.5) stejným postupem jako dříve (podrobný výpočet si čtenář snadno provede sám) odhady

$$c_1 = \frac{(b'-a')^2}{\pi^2} = \frac{(b-a+2\eta)^2}{\pi^2}\,, \tag{18.21}$$

$$c_2 = \frac{b'-a'}{\pi}\,\frac{\cos\dfrac{\pi(a-a')}{b'-a'}}{\sin\dfrac{\pi(a-a')}{b'-a'}} = \frac{b-a+2\eta}{\pi}\cot\!g\,\frac{\pi\eta}{b-a+2\eta}\,.$$

Takto získáme nerovnost platnou pro každé $u \in M$,

$$\int_a^b u^2(x)\,\mathrm{d}x \leqq \frac{(b-a+2\eta)^2}{\pi^2}\int_a^b u'^2(x)\,\mathrm{d}x + \frac{b-a+2\eta}{\pi}\cot\!g\,\frac{\pi\eta}{b-a+2\eta}\,[u^2(a) + u^2(b)]\,. \tag{18.22}$$

Vhodnou volbou čísel a', b', tj. čísla η, lze pak dosáhnout vhodného poměru čísel c_1 a c_2.

Příklad 18.1. Nechť je dáno $b - a = 5$, $p = 1$, $\sigma = 8$. Máme určit $\eta > 0$ tak, aby čísla

$$\frac{p}{c_1}\,,\quad \frac{\sigma}{c_2}$$

byla přibližně stejně velká.

Podle (18.21) máme tedy zvolit $\eta > 0$ tak, aby se přibližně sobě rovnala čísla (je $b' - a' = b - a + 2\eta = 5 + 2\eta$)

$$\frac{\pi^2}{(5 + 2\eta)^2} \quad \text{a} \quad \frac{8\pi}{5 + 2\eta} \operatorname{tg} \frac{\pi\eta}{5 + 2\eta} . \tag{18.23}$$

Protože $\pi^2/(5 + 2\eta)^2$ je značně menší než $8\pi/(5 + 2\eta)$, zvolíme η malé; pak můžeme položit

$$\operatorname{tg} \frac{\pi\eta}{5 + 2\eta} \approx \frac{\pi\eta}{5 + 2\eta} .$$

Uvedená podmínka má pak tvar

$$\frac{\pi^2}{(5 + 2\eta)^2} \doteq \frac{8\pi}{5 + 2\eta} \cdot \frac{\pi\eta}{5 + 2\eta} . \tag{18.24}$$

Zřejmě stačí zvolit $\eta = 1/8$.

Poznámka 18.2. Splňují-li funkce z lineálu M další podmínky, např. podmínky $u(a) = 0$ nebo $u(b) = 0$ nebo $u(a) = 0$ i $u(b) = 0$, dostaneme pro tyto speciální případy odpovídající speciální případy právě získaných odhadů. Speciálně, jestliže označíme M_1 lineál těch funkcí z M, pro které platí

$$u(a) = 0 , \quad u(b) = 0 , \tag{18.25}$$

dostaneme podle (18.5) odhad

$$\int_a^b u^2(x) \, dx \leqq c_1 \int_a^b u'^2(x) \, dx , \quad u \in M_1 , \tag{18.26}$$

kde za c_1 můžeme zvolit některý z odhadů (18.19) nebo (18.21). Zvolíme-li odhad (18.21), dostaneme tedy

$$\int_a^b u^2(x) \, dx \leqq \frac{(b' - a')^2}{\pi^2} \int_a^b u'^2(x) \, dx = \frac{(b - a + 2\eta)^2}{\pi^2} \int_a^b u'^2(x) \, dx . \tag{18.27}$$

Protože však nerovnost (18.27) platí pro každé kladné η, dostáváme odtud snadnou úvahou nerovnost

$$\int_a^b u^2(x) \, dx \leqq \frac{(b - a)^2}{\pi^2} \int_a^b u'^2(x) \, dx , \tag{18.28}$$

platnou pro každé $u \in M_1$, tj. pro každé $u \in M$, splňující podmínky (18.25).

Poznámka 18.3. Nerovnost typu (18.26) lze odvodit pro funkce z lineálu M_1 i tímto jednoduchým způsobem (srov. str. 112): Protože platí první z podmínek (18.25), dostaneme

$$u(x) = \int_a^x u'(t) \, dt ,$$

takže je

$$u^2(x) = \left[\int_a^x u'(t) \, dt \right]^2 .$$

Užijeme-li na pravou stranu této rovnice Schwarzovy nerovnosti (str. 38) dostaneme

$$u^2(x) \leqq \int_a^x 1^2 \, dx \, . \int_a^x u'^2(t) \, dt .$$

Protože $u'^2(t)$ je v intervalu $\langle a, b \rangle$ nezáporné, je tím spíše

$$u^2(x) \leqq \int_a^x 1^2 \, dx \, . \int_a^b u'^2(t) \, dt = (x - a) \int_a^b u'^2(t) \, dt .$$

Integrujeme-li tuto nerovnost v mezích od a do b a přejdeme-li opět k označení x místo t pro integrační proměnnou, dostaneme

$$\int_a^b u^2(x) \, dx \leqq \frac{(b - a)^2}{2} \int_a^b u'^2(x) \, dx , \tag{18.29}$$

tedy nerovnost (18.26) s

$$c_1 = \frac{(b - a)^2}{2} , \tag{18.30}$$

což je odhad běžně uváděný v literatuře.

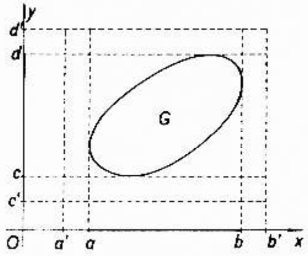
Porovnáme-li tento výsledek s nerovností (18.28), vidíme, že odhad (18.28) je přibližně pětkrát lepší než odhad (18.30).

Myšlenky důkazu nerovností (18.3) až (18.5) lze použít i pro vícerozměrný případ. Je-li např. $N = 2$ a je-li interval $\langle a, b \rangle$, resp. $\langle c, d \rangle$ průmětem uzavřené oblasti $\bar{G}$ do osy x, resp. y, takže $\bar{G}$ leží v obdélníku $\bar{O} = \langle a, b \rangle \times \langle c, d \rangle$ (obr. 9), lze např. položit

$$g(x, y) = \cos \frac{\pi \left(x - \dfrac{a + b}{2} \right)}{2(b - a)} \cos \frac{\pi \left(y - \dfrac{c + d}{2} \right)}{2(d - c)} \tag{18.31}$$

a provést téměř doslovnou analogii důkazu nerovnosti (18.4). Přitom místo identity (18.8) použijeme identity (je opět $u = gv$; místo $\partial^2 g/\partial x^2 + \partial^2 g/\partial y^2$ píšeme stručně Δg)

$$\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)^2 = g^2\left[\left(\frac{\partial v}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial v}{\partial y}\right)^2\right] + \frac{\partial}{\partial x}\left(v^2 g \frac{\partial g}{\partial x}\right) + \frac{\partial}{\partial y}\left(v^2 g \frac{\partial g}{\partial y}\right) - v^2 g\, \Delta g\,. \tag{18.32}$$



Obr. 9.

Vynecháme-li na pravé straně této identity první člen, který je zřejmě nezáporný, dostaneme nerovnost obdobnou nerovnosti (18.9) a jejím integrováním přes oblast G dospějeme k nerovnosti

$$-\iint_G v^2 g\, \Delta g \, dx\, dy \leqq \iint_G \left[\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)^2\right] dx\, dy - \int_\Gamma v^2 g \frac{\partial g}{\partial \nu}\, ds\,; \tag{18.33}$$

v posledním členu je ν vnější normála k hranici Γ; použili jsme (8.31), str. 108, kde jsme psali

$$v^2 g \frac{\partial g}{\partial x}, \quad \text{resp.} \quad v^2 g \frac{\partial g}{\partial y}$$

za f a 1 za g a uvážili, že

$$\frac{\partial g}{\partial x} \nu_x + \frac{\partial g}{\partial y} \nu_y = \frac{\partial g}{\partial x} \cos\alpha + \frac{\partial g}{\partial y} \cos\beta = \frac{\partial g}{\partial \nu}\,.$$

Ale podle (18.31) je

$$\Delta g = -\left(\frac{\pi^2}{4(b-a)^2} + \frac{\pi^2}{4(d-c)^2}\right) g\,,$$

takže

$$-\iint_G v^2 g\, \Delta g\, dx\, dy = \frac{\pi^2}{4}\left[\frac{1}{(b-a)^2} + \frac{1}{(d-c)^2}\right] \iint_G v^2 g^2\, dx\, dy = \tag{18.34}$$
$$= \frac{\pi^2}{4}\left[\frac{1}{(b-a)^2} + \frac{1}{(d-c)^2}\right] \iint_G u^2\, dx\, dy\,.$$

Dále

$$\left|\frac{1}{g}\frac{\partial g}{\partial \nu}\right|_\Gamma = \left|\frac{1}{g}\left(\frac{\partial g}{\partial x}\cos\alpha + \frac{\partial g}{\partial y}\cos\beta\right)\right|_\Gamma \leqq \left|\frac{1}{g}\frac{\partial g}{\partial x}\right|_\Gamma + \left|\frac{1}{g}\frac{\partial g}{\partial y}\right|_\Gamma \leqq$$

$$\leqq \frac{\pi}{2(b-a)} \frac{\max\limits_{\langle a,b\rangle}\left|\sin \dfrac{\pi\left(x - \dfrac{a+b}{2}\right)}{2(b-a)}\right|}{\min\limits_{\langle a,b\rangle}\left|\cos \dfrac{\pi\left(x - \dfrac{a+b}{2}\right)}{2(b-a)}\right|} + \frac{\pi}{2(d-c)} \frac{\max\limits_{\langle c,d\rangle}\left|\sin \dfrac{\pi\left(y - \dfrac{c+d}{2}\right)}{2(d-c)}\right|}{\min\limits_{\langle c,d\rangle}\left|\cos \dfrac{\pi\left(y - \dfrac{c+d}{2}\right)}{2(d-c)}\right|} =$$

$$= \frac{\pi}{2(b-a)} \frac{\sin\dfrac{\pi}{4}}{\cos\dfrac{\pi}{4}} + \frac{\pi}{2(d-c)} \frac{\sin\dfrac{\pi}{4}}{\cos\dfrac{\pi}{4}} = \frac{\pi}{2(b-a)} + \frac{\pi}{2(d-c)}\,,$$

a tedy

$$\left|-\int_\Gamma v^2 g \frac{\partial g}{\partial \nu}\, ds\right| \leqq \left|\int_\Gamma v^2 g^2 \frac{\dfrac{\partial g}{\partial \nu}}{g}\, ds\right| \leqq \int_\Gamma u^2 \left|\frac{1}{g}\frac{\partial g}{\partial \nu}\right| ds \leqq \tag{18.35}$$
$$\leqq \left[\frac{\pi}{2(b-a)} + \frac{\pi}{2(d-c)}\right] \int_\Gamma u^2\, ds\,.$$

Z (18.33), (18.34) a (18.35) pak plyne

$$\frac{\pi^2}{4}\left[\frac{1}{(b-a)^2} + \frac{1}{(d-c)^2}\right] \iint_G u^2\, dx\, dy \leqq \iint_G \left[\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)^2\right] dx\, dy +$$
$$+ \frac{\pi}{2}\left(\frac{1}{b-a} + \frac{1}{d-c}\right) \int_\Gamma u^2\, ds$$

čili, označíme-li

$$A = \frac{1}{(b-a)^2} + \frac{1}{(d-c)^2}\,, \quad B = \frac{1}{b-a} + \frac{1}{d-c}\,,$$

$$\int_G u^2(x, y)\, dx\, dy \leqq \frac{4}{\pi^2 A} \iint_G \left[\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)^2\right] dx\, dy + \frac{2B}{\pi A} \int_\Gamma u^2(s)\, ds\,. \tag{18.36}$$

V (18.2) tedy stačí položit

$$c_1 = \frac{4}{\pi^2 A}\,, \quad c_2 = \frac{2B}{\pi A}\,. \tag{18.37}$$

Potřebujeme-li získat určitou možnost, jak měnit poměr odhadů c_1 a c_2, můžeme postupovat podobně jako v pozn. 18.1: Zvolíme opět $\eta > 0$, označíme

$$a' = a - \eta\,, \quad b' = b + \eta\,, \quad c' = c - \eta\,, \quad d' = d + \eta$$

a místo funkce (18.31) použijeme funkce

$$g(x, y) = \sin\frac{\pi(x - a')}{b' - a'}\sin\frac{\pi(y - c')}{d' - c'}\,. \tag{18.38}$$

Pro c_1 a c_2 tak zcela analogickým postupem dostaneme odhady

$$c_1 = \frac{1}{\pi^2 A'}\,, \quad c_2 = \frac{B'}{\pi A'}\,, \tag{18.39}$$

kde

$$A' = \frac{1}{(b' - a')^2} + \frac{1}{(d' - c')^2} = \frac{1}{(b - a + 2\eta)^2} + \frac{1}{(d - c + 2\eta)^2}\,,$$

$$B' = \frac{1}{(b' - a')\sin\dfrac{\pi(a - a')}{b' - a'}} + \frac{1}{(d' - c')\sin\dfrac{\pi(c - c')}{d' - c'}} =$$

$$= \frac{1}{(b - a + 2\eta)\sin\dfrac{\pi\eta}{b - a + 2\eta}} + \frac{1}{(d - c + 2\eta)\sin\dfrac{\pi\eta}{d - c + 2\eta}}\,,$$

takže je

$$\iint_G u^2(x, y)\,dx\,dy \leqq \frac{1}{\pi^2 A'}\iint_G\left[\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)^2\right]dx\,dy + \frac{B'}{\pi A'}\int_\Gamma u^2(s)\,ds\,. \tag{18.40}$$

Vhodnou volbou čísla η je možno získat žádoucí odhady pro čísla c_1 a c_2, podobně jako v příkl. 18.1.

Je-li oblast G speciálního tvaru, lze ukázaným postupem uvedené odhady dále zlepšit. Analogicky postupujeme v případě $N > 2$.

Poznámka 18.4. Splňují-li funkce z lineálu M navíc podmínku

$$u = 0 \text{ na } \Gamma\,, \tag{18.41}$$

plynou z (18.1), resp. (18.2) nerovnosti

$$\int_G u^2(x)\,dx \leqq c_1 \sum_{k=1}^{N}\int_G\left(\frac{\partial u}{\partial x_k}\right)^2 dx\,, \tag{18.42}$$

resp.

$$\int_G u^2(x, y)\,dx\,dy \leqq c_1\iint_G\left[\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)^2\right]dx\,dy\,. \tag{18.43}$$

Zejména použijeme-li odhadu (18.39), plyne z (18.40)

$$\iint_G u^2(x, y)\,dx\,dy \leqq \frac{1}{\pi^2 A'}\iint_G\left[\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)^2\right]dx\,dy\,, \tag{18.44}$$

kde

$$A' = \frac{1}{(b' - a')^2} + \frac{1}{(d' - c')^2} = \frac{1}{(b - a + 2\eta)^2} + \frac{1}{(d - c + 2\eta)^2}\,. \tag{18.45}$$

Protože nerovnost (18.44) je správná pro každé $\eta > 0$, dojdeme podobně jako v pozn. 18.2 k závěru, že platí

$$\iint_G u^2(x, y)\,dx\,dy \leqq \frac{1}{\pi^2 A}\iint_G\left[\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)^2\right]dx\,dy\,, \tag{18.46}$$

kde

$$A = \frac{1}{(b - a)^2} + \frac{1}{(d - c)^2}\,. \tag{18.47}$$

Je-li speciálně G čtverec s délkou strany l, takže

$$A = \frac{2}{l^2}\,,$$

plyne z (18.46) odhad

$$\iint_G u^2(x, y)\,dx\,dy \leqq \frac{l^2}{2\pi^2}\iint_G\left[\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)^2\right]dx\,dy\,, \tag{18.48}$$

který je tedy asi dvacetkrát lepší než odhad

$$\iint_G u^2(x, y)\,dx\,dy \leqq l^2\iint_G\left[\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)^2\right]dx\,dy\,, \tag{18.49}$$

běžně uváděný v literatuře (viz např. [28], str. 129).

Další důležitý typ nerovnosti uvádí tato věta:

Věta 18.2. (*Poincaréova nerovnost.*) *Nechť G je oblast s lipschitzovskou hranicí, M lineál funkcí spojitých včetně parciálních derivací prvního řádu v $\overline{G}$ (uvažujeme-li*

$N = 1$, jde o interval $\langle a, b\rangle$ a o obyčejné derivace). Pak existují konstanty c_3 a c_4, závislé na dané oblasti, ale nezávislé na funkcích $u(x)$ z lineálu M, tak, že platí

$$\int_G u^2(x)\,dx \leqq c_3 \sum_{k=1}^{N} \int_G \left(\frac{\partial u}{\partial x_k}\right)^2 dx + c_4 \left[\int_G u(x)\,dx\right]^2 \quad \textit{pro každé} \quad u \in M\,. \tag{18.50}$$

Jako speciální případy této nerovnosti dostáváme pro $N = 2$ nerovnost

$$\iint_G u^2(x, y)\,dx\,dy \leqq c_3 \iint_G \left[\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)^2\right] dx\,dy + c_4 \left[\iint_G u(x, y)\,dx\,dy\right]^2, \tag{18.51}$$

pro $N = 1$ nerovnost

$$\int_a^b u^2(x)\,dx \leqq c_3 \int_a^b u'^2(x)\,dx + c_4 \left[\int_a^b u(x)\,dx\right]^2. \tag{18.52}$$

Hodnoty konstant c_3 a c_4 mohou ovšem být v každé z nerovností (18.50) až (18.52) různé, i když pro ně používáme stejného označení [viz obdobnou poznámku k nerovnostem (18.1) až (18.5)].

D ů k a z provedeme podrobně pro případ $N = 1$, tj. pro nerovnost (18.52). Myšlenka důkazu je obdobná i pro $N > 1$.

Budiž tedy $u(x)$ libovolná funkce definovaná v intervalu $\langle a, b\rangle$ a patřící do M [takže $u(x)$ a $u'(x)$ jsou spojité funkce v $\langle a, b\rangle$]. Pro každé dva body x_1, x_2 z intervalu $\langle a, b\rangle$ platí

$$u(x_2) - u(x_1) = \int_{x_1}^{x_2} u'(x)\,dx\,,$$

a tedy

$$u^2(x_2) + u^2(x_1) - 2u(x_1)\,u(x_2) = \left[\int_{x_1}^{x_2} u'(x)\,dx\right]^2. \tag{18.53}$$

Podle Schwarzovy nerovnosti (str. 38) je

$$\left[\int_{x_1}^{x_2} u'(x)\,dx\right]^2 \leqq \left|\int_{x_1}^{x_2} 1^2\,dx\right| . \left|\int_{x_1}^{x_2} u'^2(x)\,dx\right| \tag{18.54}$$

(přičemž značky absolutní hodnoty jsou zbytečné, je-li $x_2 > x_1$). Z (18.53) a (18.54) plyne

$$u^2(x_2) + u^2(x_1) - 2u(x_1)\,u(x_2) \leqq (b - a) \int_a^b u'^2(x)\,dx\,. \tag{18.55}$$

Integrujeme-li tuto nerovnost v intervalu $\langle a, b\rangle$ nejprve podle x_1 při konstantním x_2 a pak podle x_2, dostaneme

$$(b - a) \int_a^b u^2(x_1)\,dx_1 + (b - a) \int_a^b u^2(x_2)\,dx_2 - 2 \int_a^b u(x_1)\,dx_1 . \int_a^b u(x_2)\,dx_2 \leqq$$
$$\leqq (b - a)^3 \int_a^b u'^2(x)\,dx$$

čili

$$\int_a^b u^2(x)\,dx \leqq \frac{(b - a)^2}{2} \int_a^b u'^2(x)\,dx + \frac{1}{b - a} \left(\int_a^b u(x)\,dx\right)^2, \tag{18.56}$$

což je nerovnost (18.52) s

$$c_3 = \frac{(b - a)^2}{2}\,, \quad c_4 = \frac{1}{b - a}\,. \tag{18.57}$$

Důkaz nerovnosti (18.50), resp. (18.51) může být proveden obdobným postupem. Je-li speciálně daná oblast obdélník s délkami stran l_1 a l_2, je možno téměř doslovnou analogií právě provedených úvah dospět k nerovnosti (18.51) s

$$c_3 = \max\,(l_1^2, l_2^2)\,, \quad c_4 = \frac{1}{l_1 l_2}\,. \tag{18.58}$$

Také v případě Poincaréovy nerovnosti je možno speciálními obraty dospět k lepším odhadům než k těm, které jsme uvedli, podobně jako v případě Friedrichsovy nerovnosti. Zde však nejsou tyto jemnější odhady zdaleka tak cenné pro numerické výpočty jako v předcházejícím případě.

O určitých zobecněních nerovností, uvedených v této kapitole, viz v kap. 30, str. 358 a 359.

Kapitola 19

Obyčejné diferenciální rovnice s okrajovými podmínkami

a) Rovnice druhého řádu

Uvažujme nejprve obyčejnou diferenciální rovnici druhého řádu

$$-(pu')' + ru = f, \tag{19.1}$$

kde

$$f \in L_2(a, b),$$

$p(x)$, $p'(x)$ a $r(x)$ jsou funkce spojité[1]) v $\langle a, b\rangle$,

$$p(x) \geqq p_0 > 0, \quad r(x) \geqq 0 \ \text{ v } \langle a, b\rangle; \tag{19.2}$$

p_0 je konstanta.

Okrajové podmínky pro rovnici (19.1) uvažujme ve tvaru

$$\alpha u'(a) - \beta u(a) = 0, \quad \gamma u'(b) + \delta u(b) = 0, \tag{19.3}$$

kde α, β, γ, δ jsou *nezáporná* čísla taková, že v žádné z dvojic α, β; γ, δ nejsou obě čísla zároveň rovna nule, tedy taková, že je

$$\alpha + \beta > 0, \quad \gamma + \delta > 0. \tag{19.4}$$

Příkladem okrajových podmínek (19.3) jsou podmínky tvaru

$$u(a) = 0, \qquad u(b) = 0, \tag{19.5}$$

$$u'(a) = 0, \qquad u'(b) = 0, \tag{19.6}$$

$$u'(a) - \beta u(a) = 0, \quad u'(b) + \delta u(b) = 0, \quad \beta > 0, \delta > 0, \tag{19.7}$$

$$u(a) = 0, \qquad u'(b) = 0 \tag{19.8}$$

apod.

Poznámka 19.1. Okrajové podmínky (19.3) předpokládáme tedy homogenní. Nejsou-li dané okrajové podmínky homogenní, převedeme daný problém snadno

[1]) O zobecnění podmínek kladených na koeficienty rovnice (19.1), popř. rovnic vyšších řádů, viz v kap. 31, str. 372.
O případech, kdy funkce $p(x)$ může být v některých bodech intervalu $\langle a, b\rangle$ rovna nule, kap. 47, str. 581. Příkladem takové rovnice je rovnice $-(xu')' + u = f$ v intervalu $\langle 0,1\rangle$ apod.

na problém s homogenními okrajovými podmínkami (srov. pozn. 11.6, str. 149). Stačí najít dostatečně hladkou funkci $w(x)$, splňující dané nehomogenní okrajové podmínky, a hledat řešení ve tvaru

$$u(x) = w(x) + z(x). \tag{19.9}$$

Funkce $z(x)$ pak bude splňovat rovnici (19.1) s pravou stranou

$$g = f + (pw')' - rw$$

(místo s původní pravou stranou f) a s příslušnými homogenními okrajovými podmínkami.

Příklad 19.1. Uvažujme rovnici

$$-[(1 + x^2)\, u']' + u = \sin \pi x$$

s okrajovými podmínkami

$$u(0) = 1, \quad u'(1) = 3. \tag{19.10}$$

Substitucí (19.9), kde stačí zvolit $w(x) = 1 + 3x$ [tato funkce zřejmě vyhovuje podmínkám (19.10)], dostaneme pro funkci $z(x)$ rovnici

$$-[(1 + x^2)\, z']' + z = \sin \pi x + 3x - 1$$

s homogenními okrajovými podmínkami

$$z(0) = 0, \quad z'(1) = 0.$$

Poznámka 19.2. V dalším textu ukážeme, že diferenciální operátor daný rovnicí (19.1) a uvažovaný na vhodně zvoleném lineálu (resp. vhodně zvolených lineálech) funkcí, které splňují podmínky (19.3), je pozitivně definitní. Nejprve však vyšetříme speciální případy okrajových podmínek (19.3), a to případy (19.5) až (19.8). Jedním z hlavních důvodů je ten, že každá z okrajových podmínek (19.5) až (19.8) má svůj specifický charakter, který, jak uvidíme, má svou velmi blízkou analogii i v případě parciálních diferenciálních rovnic. [Podmínky (19.5) až (19.8) odpovídají po řadě Dirichletovým, Neumannovým, Newtonovým a smíšeným okrajovým podmínkám pro parciální rovnice druhého řádu.] Přitom zde, tj. v případě obyčejných diferenciálních rovnic, je celá problematika značně průzračnější.

Příslušné úvahy provedeme v reálném Hilbertově prostoru $L_2(a, b)$ funkcí integrovatelných s druhou mocninou v intervalu $\langle a, b\rangle$, tedy v prostoru se skalárním součinem, resp. normou

$$(u, v) = \int_a^b u(x)\, v(x)\, dx, \quad \text{resp.} \quad \|u\| = \sqrt{\int_a^b u^2(x)\, dx}.$$

Jen v případě okrajových podmínek $u'(a) = 0$, $u'(b) = 0$ budeme pracovat s prostorem $\tilde{L}_2(a, b)$, což je podprostor prostoru $L_2(a, b)$ těch funkcí $u \in L_2(a, b)$, které splňují podmínku $\int_a^b u(x)\,dx = 0$. Z věty 8.5, str. 105, a z pozn. 8.5 a 8.6, str. 107, plyne, že všechny lineály, na nichž budeme v této kapitole vyšetřovat uvažovaný operátor, jsou husté v $L_2(a, b)$, resp. v $\tilde{L}_2(a, b)$. *Tuto okolnost nebudeme stále v dalším textu zdůrazňovat.* Budeme-li proto dokazovat např. symetričnost operátoru A_1 na lineálu M_1, dokážeme jen platnost vztahu $(A_1u, v) = (A_1v, u)$ pro u, $v \in M_1$, aniž se zvláště zmíníme o hustotě lineálu M_1 v $L_2(a, b)$, vyplývající z citované věty 8.5.

Obraťme se tedy k vyšetřování uvažovaných problémů.

1. *Okrajové podmínky* $u(a) = 0$, $u(b) = 0$.

Označme M_1 lineál všech funkcí spojitých včetně derivací prvního a druhého řádu v uzavřeném intervalu $\langle a, b\rangle$ a splňujících okrajové podmínky

$$u(a) = 0\,, \quad u(b) = 0 \tag{19.11}$$

a A_1 označme (lineární) operátor, který je definován na tomto lineálu a přiřazuje každé funkci $u \in M_1$ funkci

$$A_1u = -(pu')' + ru\,, \tag{19.12}$$

kde $p(x)$ a $r(x)$ jsou funkce z rovnice (19.1), a tedy funkce mající vlastnosti uvedené v textu za touto rovnicí.

Dokážeme, že operátor A_1 je na lineálu M_1 pozitivně definitní. K tomu účelu stačí dokázat, že A_1 je na M_1 symetrický a že existuje konstanta $C > 0$ taková, že platí

$$(A_1u, u) \geqq C^2\|u\|^2 \quad \text{pro každé} \quad u \in M_1\,.$$

Zřejmě však pro každé $u \in M_1$, $v \in M_1$ je

$$(A_1u, v) = \int_a^b [-(pu')' + ru]\, v\,dx = -\int_a^b (pu')'\, v\,dx + \int_a^b ruv\,dx = \tag{19.13}$$

$$= -[pu'v]_a^b + \int_a^b pu'v'\,dx + \int_a^b ruv\,dx = \int_a^b pu'v'\,dx + \int_a^b ruv\,dx\,,$$

neboť $v \in M_1$, a tedy

$$[pu'v]_a^b = 0 \tag{19.14}$$

v důsledku (19.11). Tím je symetričnost operátoru A_1 na lineálu M_1 dokázána, neboť pravá strana rovnosti (19.13) je symetrická v u a v. Z (19.13) dále plyne

$$(A_1u, u) = \int_a^b pu'^2\,dx + \int_a^b ru^2\,dx\,,$$

odkud vzhledem k předpokladům (19.2) dostáváme

$$(A_1u, u) \geqq p_0 \int_a^b u'^2\,dx\,.$$

Protože $u \in M_1$, platí $u(a) = 0$, $u(b) = 0$. Můžeme tedy použít např. nerovnosti (18.28), str. 200,

$$\int_a^b u'^2\,dx \geqq \frac{\pi^2}{(b-a)^2}\int_a^b u^2\,dx = \frac{\pi^2}{(b-a)^2}\|u\|^2\,, \quad u \in M_1\,,$$

takže

$$(A_1u, u) \geqq C^2\|u\|^2\,, \quad u \in M_1 \tag{19.15}$$

s

$$C = \frac{\pi\sqrt{p_0}}{b-a}\,, \tag{19.16}$$

čímž je pozitivní definitnost operátoru A_1 na lineálu M_1 dokázána.

2. *Okrajové podmínky* $u'(a) = 0$, $u'(b) = 0$.

Tento případ je na rozdíl od ostatních případů poněkud složitější. Označme M_2 lineál všech funkcí spojitých včetně derivací prvního a druhého řádu v uzavřeném intervalu $\langle a, b\rangle$ a splňujících okrajové podmínky

$$u'(a) = 0\,, \quad u'(b) = 0 \tag{19.17}$$

a A_2 operátor, který je definován na tomto lineálu a přiřazuje každé funkci $u \in M_2$ funkci

$$A_2u = -(pu')' + ru\,, \tag{19.18}$$

kde $p(x)$ a $r(x)$ jsou dříve uvažované funkce na levé straně rovnice (19.1).

Zcela stejným způsobem jako v (19.13) dokážeme, že operátor A_2 je na lineálu M_2 symetrický, neboť z (19.17) plyne pro $u \in M_2$, $v \in M_2$ opět (19.14). Jak však vyplyne z následujícího textu, není operátor A_2 za uvedených předpokladů o funkcích $p(x)$ a $r(x)$ v obecném případě na lineálu M_2 pozitivně definitní. [Všimněme si, že funkce z lineálu M_2 splňují podmínku (19.17), a že tedy nelze použít odhadu (18.28), jak jsme to učinili v předcházejícím případě, nebo některého z odhadů (18.3) až (18.5), neboť tyto odhady obsahují hodnoty $u(a)$, $u(b)$ funkce $u(x)$ v krajních bodech intervalu $\langle a, b\rangle$ a pro tyto hodnoty neposkytují podmínky (19.17) žádné informace.]

Učiňme nejprve dodatečný předpoklad, že existuje kladné číslo r_0 takové, že v intervalu $\langle a, b\rangle$ je

$$r(x) \geqq r_0 > 0\,. \tag{19.19}$$

Pak z rovnosti

$$(A_2u, u) = \int_a^b pu'^2 \, dx + \int_a^b ru^2 \, dx$$

[plynoucí z (19.13) pro $u = v$] vyplývá [neboť $p(x) \geqq 0$]

$$(A_2u, u) \geqq r_0 \int_a^b u^2 \, dx ,$$

což znamená, že za předpokladu (19.19) je operátor A_2 na lineálu M_2 pozitivně definitní, přičemž je možno položit $C = \sqrt{r_0}$.

Poznámka 19.3. Pozitivní definitnost operátoru A_2 na lineálu M_2 lze dokázat za slabšího předpokladu o koeficientu $r(x)$, než je předpoklad (19.19). Stačí předpokládat, že funkce $r(x)$ je spojitá a nezáporná v $\langle a, b \rangle$ a že $r(x) > 0$ aspoň v jednom bodě $x_1 \in \langle a, b \rangle$. Je-li totiž $\langle c, d \rangle$ libovolný, ale pevný interval kladné délky, ležící v $\langle a, b \rangle$, lze ukázat (tento výsledek je speciálním případem obecnější nerovnosti, uvedené v [33], str. 22), že existuje takové číslo $\varkappa > 0$, nezávislé na funkcích z lineálu M_2, že pro každé $u \in M_2$ platí

$$\|u\|^2 \leqq \varkappa \left(\int_a^b u'^2 \, dx + \int_c^d u^2 \, dx \right) . \qquad (19.20)$$

Nechť tedy $r(x_1) > 0$. Protože funkce $r(x)$ je podle předpokladu v $\langle a, b \rangle$ spojitá, je v některém intervalu $\langle c, d \rangle$, ležícím v $\langle a, b \rangle$ a obsahujícím bod x_1, větší než některá kladná konstanta m,

$$r(x) \geqq m > 0 \text{ v } \langle c, d \rangle .$$

Z (19.20) a z rovnosti

$$(A_2u, u) = \int_a^b pu'^2 \, dx + \int_a^b ru^2 \, dx$$

pak plyne [neboť je $p(x) \geqq p_0 > 0$ v $\langle a, b \rangle$]

$$(A_2u, u) \geqq p_0 \int_a^b u'^2 \, dx + m \int_c^d u^2 \, dx \geqq C^2 \|u\|^2 ,$$

kde zřejmě stačí položit

$$C^2 = \min \left(\frac{p_0}{\varkappa}, \frac{m}{\varkappa} \right) .$$

I v tomto případě je tedy operátor A_2 na lineálu M_2 pozitivně definitní.

V dalším textu ukážeme, že je-li $r(x) \equiv 0$, není operátor A_2 na lineálu M_2 ani pozitivní (a tím méně pozitivně definitní).

Budiž tedy $r(x) \equiv 0$, takže uvažujeme rovnici

$$-(pu')' = f(x) \qquad (19.21)$$

s okrajovými podmínkami

$$u'(a) = 0 , \quad u'(b) = 0 .\text{[1]} \qquad (19.22)$$

V našem případě tedy je

$$(A_2u, u) = \int_a^b pu'^2 \, dx \quad \text{pro každé} \quad u \in M_2 . \qquad (19.23)$$

Podle definice je symetrický operátor A_2 na M_2 pozitivní, jestliže jsou splněny podmínky

$$(A_2u, u) \geqq 0 \quad \text{pro každé} \quad u \in M_2 , \qquad (19.24)$$

$$(A_2u, u) = 0 \Rightarrow u = 0 \text{ v } M_2 , \quad \text{tj.} \quad u(x) \equiv 0 \text{ v } \langle a, b \rangle . \qquad (19.25)$$

Vzhledem k předpokladům o funkci $p(x)$ plyne z (19.23) nerovnost (19.24). Podmínka (19.25) však není splněna: Jak je vidět z (19.23), může být (A_2u, u) rovno nule i pro funkci $u \neq 0$ v M_2, např. pro funkci $u(x) \equiv 7$ v $\langle a, b \rangle$, která anuluje výraz $(A_2u, u) = \int_a^b pu'^2 \, dx$ a přitom zřejmě patří do M_2, neboť splňuje podmínky (19.22). Operátor A_2 není tedy v případě $r(x) \equiv 0$ na lineálu M_2 pozitivní (a tím méně pozitivně definitní).

Všimněme si ještě další zajímavé okolnosti: Předpokládejme, že problém (19.21), (19.22) má řešení $u \in M_2$. Integrováním rovnice (19.21) v mezích od a do b dostaneme

$$-\int_a^b (pu')' \, dx = \int_a^b f(x) \, dx .$$

Podle (19.22) však je

$$-\int_a^b (pu')' \, dx = -[pu']_a^b = 0 ,$$

takže má-li daný problém řešení, je nutně

$$\int_a^b f(x) \, dx = 0 . \qquad (19.26)$$

V našem případě je tedy (19.26) nutnou podmínkou k existenci řešení.

[1]) Rovnici (19.21) je ovšem možno integrovat přímo a dospět tak k uvedeným závěrům mnohem jednodušším způsobem. My zde však chceme získat určitý ucelený pohled na celou problematiku, dokonale analogickou, jak uvidíme, problematice eliptických parciálních diferenciálních rovnic druhého řádu.

Je-li tedy $r(x) \equiv 0$ v $\langle a, b\rangle$, není operátor A na lineálu M_2 pozitivně definitní, a nelze tedy tvrdit, že rovnice $A_2u = f$ je řešitelná (ve smyslu kap. 11) pro každou pravou stranu $f \in L_2(a, b)$. To je také velmi dobře vidět z právě získaného výsledku. Podmínka (19.26) však poskytuje jistou představu, jak postupovat, abychom dospěli k určitému kladnému závěru:

Označme $\tilde{L}_2(a, b)$ prostor všech funkcí $u(x)$ z $L_2(a, b)$, vyhovujících podmínce

$$\int_a^b u(x)\,\mathrm{d}x = 0\,, \tag{19.27}$$

se skalárním součinem prostoru $L_2(a, b)$, tj.

$$(u, v)_{\tilde{L}_2(a,b)} = \int_a^b u(x)\,v(x)\,\mathrm{d}x\,, \quad u \in \tilde{L}_2(a, b)\,, \quad v \in \tilde{L}_2(a, b)\,. \tag{19.28}$$

Není těžké dokázat, že $\tilde{L}_2(a, b)$ je lineární podprostor v $L_2(a, b)$,[1]) takže je sám Hilbertovým prostorem. Budiž dále $\tilde{M}_2$ lineál těch funkcí $u(x)$ z M_2, které splňují podmínku (19.27). Tento lineál je podle pozn. 8.6, str. 107, hustý v $\tilde{L}_2(a, b)$. Označme $\tilde{A}_2$ operátor s definičním oborem $\tilde{M}_2$, daný předpisem

$$\tilde{A}_2u = -(pu')'\,, \quad u \in \tilde{M}_2\,. \tag{19.29}$$

Ukážeme, že operátor $\tilde{A}_2$ je na lineálu $\tilde{M}_2$ pozitivně definitní:

Předně stejným postupem jako v (19.13) dospějeme k závěru, že operátor $\tilde{A}_2$ je na lineálu $\tilde{M}_2$ symetrický. (19.13) totiž platí, jak jsme ukázali již v případě operátoru (19.18), pro každou dvojici funkcí u, v z M_2, platí tedy tím spíše pro každou dvojici funkcí u, v z $\tilde{M}_2$. Dále z (19.13) plyne

$$(\tilde{A}_2u, u)_{\tilde{L}_2(a,b)} = (\tilde{A}_2u, u) = \int_a^b pu'^2\,\mathrm{d}x \quad \text{pro každé} \quad u \in \tilde{M}_2\,,$$

a tedy, protože platí (19.2),

$$(\tilde{A}_2u, u) \geqq p_0 \int_a^b u'^2(x)\,\mathrm{d}x\,, \quad u \in \tilde{M}_2\,. \tag{19.30}$$

Avšak pro funkce $u(x)$ z lineálu $\tilde{M}_2$, které tedy splňují podmínku (19.27), platí podle Poincaréovy nerovnosti (18.52), str. 206,

$$\int_a^b u^2\,\mathrm{d}x \leqq c_3 \int_a^b u'^2\,\mathrm{d}x$$

[1]) $\tilde{L}_2(a, b)$ je totiž ortogonálním doplňkem v prostoru $L_2(a, b)$ k podprostoru, jehož prvky tvoří všechny funkce konstantní v $\langle a, b\rangle$ (nebo funkce jim ekvivalentní), takže je (srov. str. 81) úplným prostorem.

čili

$$\|u\|^2_{\tilde{L}_2(a,b)} \leqq c_3 \int_a^b u'^2\,\mathrm{d}x\,, \tag{19.31}$$

kde podle (18.57) lze položit

$$c_3 = \frac{(b-a)^2}{2}\,. \tag{19.32}$$

Z (19.30) a (19.31) plyne

$$(\tilde{A}_2u, u)_{\tilde{L}_2(a,b)} \geqq C^2\|u\|^2_{\tilde{L}_2(a,b)}\,, \tag{19.33}$$

čímž je pozitivní definitnost operátoru $\tilde{A}_2$ na lineálu $\tilde{M}_2$ dokázána. Přitom z (19.32) plyne, že lze zvolit

$$C = \frac{\sqrt{(2p_0)}}{b-a}\,. \tag{19.34}$$

Je dobře znovu upozornit čtenáře, že v uvažovaném případě $r(x) \equiv 0$ pracujeme stále s operátorem $\tilde{A}_2$ na lineálu $\tilde{M}_2$, tedy stále v Hilbertově prostoru $H = \tilde{L}_2(a, b)$. Proto z právě dokázané pozitivní definitnosti operátoru $\tilde{A}_2$ na lineálu $\tilde{M}_2$ plyne existence zobecněného řešení $u_0(x)$ (ve smyslu kap. 11) rovnice $\tilde{A}_2u = f$ [tedy rovnice (19.21) s okrajovými podmínkami (19.22)] jen pro pravé strany $f \in \tilde{L}_2(a, b)$, tj. jen pro taková $f \in L_2(a, b)$, která splňují podmínku (19.26).

Z (19.21), (19.22) je dále vidět, že je-li přitom $u_0 \in D_{\tilde{A}_2}$, pak že i každá funkce tvaru $u_0(x) + k$, kde k je libovolná konstanta, je řešením problému (19.21), (19.22). Není-li $u_0 \in D_{\tilde{A}_2}$, můžeme funkci $u_0(x) + k$ pokládat za řešení v určitém zobecněném smyslu. (Srov. str. 447.)

3. *Okrajové podmínky*

$$u'(a) - \beta u(a) = 0\,, \quad u'(b) + \delta u(b) = 0\,, \quad \beta > 0, \delta > 0\,.$$

V $L_2(a, b)$ uvažujme lineál M_3 všech funkcí $u(x)$ spojitých včetně derivací prvního a druhého řádu v uzavřeném intervalu $\langle a, b\rangle$ a splňujících okrajové podmínky

$$u'(a) - \beta u(a) = 0\,, \quad u'(b) + \delta u(b) = 0\,, \quad \beta > 0, \delta > 0\,, \tag{19.35}$$

a operátor A_3, definovaný na M_3 předpisem

$$A_3u = -(pu')' + ru\,, \tag{19.36}$$

kde $p(x)$ a $r(x)$ jsou funkce z rovnice (19.1).

Pro každou dvojici funkcí $u(x)$, $v(x)$ z lineálu M_3 platí

$$(19.37)\quad (A_3u, v) = \int_a^b [-(pu')' + ru]\, v\,dx = -\int_a^b (pu')'\, v\,dx + \int_a^b ruv\,dx =$$
$$= -[pu'v]_a^b + \int_a^b pu'v'\,dx + \int_a^b ruv\,dx =$$
$$= \int_a^b pu'v'\,dx + \int_a^b ruv\,dx + \delta p(b)\,u(b)\,v(b) + \beta p(a)\,u(a)\,v(a)\,,$$

což ukazuje, že operátor A_3 je na lineálu M_3 symetrický. Podle (19.37) je dále

$$(A_3u, u) = \int_a^b pu'^2\,dx + \int_a^b ru^2\,dx + \delta p(b)\,u^2(b) + \beta p(a)\,u^2(a)\,.$$

Uvážíme-li (19.2) a označíme-li

$$k = \min(\beta, \delta)\,,$$

můžeme psát

$$(19.38)\quad (A_3u, u) \geqq p_0\left\{\int_a^b u'^2\,dx + k[u^2(a) + u^2(b)]\right\}.$$

Ale podle Friedrichsovy nerovnosti (18.5), str. 196, je

$$(19.39)\quad \|u\|^2 = \int_a^b u^2\,dx \leqq c_1 \int_a^b u'^2\,dx + c_2[u^2(a) + u^2(b)]\,,$$

kde je možno podle (18.19) nebo (18.21) volit

$$(19.40)\quad c_1 = \frac{4(b-a)^2}{\pi^2}\,,\quad c_2 = \frac{2(b-a)}{\pi}$$

nebo

$$(19.41)\quad c_1 = \frac{(b-a+2\eta)^2}{\pi^2}\,,\quad c_2 = \frac{b-a+2\eta}{\pi}\cot\!g\,\frac{\pi\eta}{b-a+2\eta}\,,$$

$\eta > 0$. Z (19.38) a (19.39) pak plyne

$$(A_3u, u) \geqq \frac{p_0}{c_1}\,c_1\int_a^b u'^2\,dx + \frac{p_0k}{c_2}\,c_2[u^2(a) + u^2(b)] \geqq$$
$$\geqq C^2\left\{c_1\int_a^b u'^2\,dx + c_2[u^2(a) + u^2(b)]\right\}$$

a podle (19.39)

$$(19.42)\quad (A_3u, u) \geqq C^2\|u\|^2\,,$$

kde

$$(19.43)\quad C^2 = \min\left(\frac{p_0}{c_1}, \frac{p_0k}{c_2}\right).$$

Tím je pozitivní definitnost operátoru A_3 na lineálu M_3 dokázána.

Zvolíme-li pro c_1 a c_2 odhady (19.41), lze vhodnou volbou čísla η dosáhnout toho, aby hodnoty c_1 a c_2 byly „optimální", tj. aby čísla p_0/c_1 a p_0k/c_2 byla – aspoň přibližně – stejně veliká. (Srov. příkl. 18.1, str. 199.)

4. *Okrajové podmínky*

$$u(a) = 0\,,\quad u'(b) = 0\,.$$

Označme M_4 lineál funkcí spojitých včetně derivací prvního a druhého řádu v $\langle a, b\rangle$ a splňujících podmínky

$$(19.44)\quad u(a) = 0\,,\quad u'(b) = 0$$

a A_4 operátor definovaný na M_4 předpisem

$$(19.45)\quad A_4u = -(pu')' + ru\,,$$

kde $p(x)$ a $r(x)$ jsou funkce z rovnice (19.1). Zcela stejně jako v předcházejících případech zjistíme, že operátor A_4 je na lineálu M_4 symetrický a že platí

$$(19.46)\quad (A_4u, u) = \int_a^b pu'^2\,dx + \int_a^b ru^2\,dx \geqq p_0\int_a^b u'^2\,dx \quad \text{pro všechna} \quad u \in M_4\,,$$

kde $p_0 > 0$ je konstanta z podmínek (19.2). Všimněme si nyní, že vzhledem k první podmínce (19.44), které vyhovují funkce z lineálu M_4, můžeme psát

$$(19.47)\quad u(x) = \int_a^x u'(t)\,dt$$

a téměř doslova stejným způsobem, jako jsme v kap. 18 dospěli k nerovnosti (18.29), str. 201, dostaneme

$$(19.48)\quad \|u\|^2 = \int_a^b u^2\,dx \leqq \frac{(b-a)^2}{2}\int_a^b u'^2\,dx\,,\quad u \in M_4\,.$$

Z (19.46) a (19.48) pak plyne

$$(19.49)\quad (A_4u, u) \geqq C^2\|u\|^2 \quad \text{pro všechna} \quad u \in M_4$$

s

$$(19.50)\quad C = \frac{\sqrt{(2p_0)}}{b-a}\,,$$

čímž je pozitivní definitnost operátoru A_4 na lineálu M_4 dokázána.

Odhad (19.48) je lepší než odhad

$$\|u\|^2 \leqq \frac{16(b-a)^2}{\pi^2} \int_a^b u'^2 \, dx ,$$

vyplývající z (18.3) a (18.17), použijeme-li první z podmínek (19.44), neboť $1/2 < 16/\pi^2$.

K výsledku (19.49), (19.50) dospějeme i v případě okrajových podmínek

$$u'(a) = 0 , \quad u(b) = 0 ; \tag{19.51}$$

místo (19.47) stačí uvažovat integrál

$$u(x) = -\int_x^b u'(t) \, dt . \tag{19.52}$$

Jak jsme se již dříve zmínili, setkáme se s téměř doslovnou analogií výsledků, získaných pro okrajové podmínky (19.5) až (19.8), v případě Dirichletových, Neumannových, Newtonových a smíšených okrajových podmínek u parciálních diferenciálních rovnic (srov. kap. 22). V případě obyčejných diferenciálních rovnic je ovšem studium těchto problémů značně jednodušší; proto jsme se snažili připravit tuto problematiku již na tomto místě.

Obraťme se k obecnému případu okrajových podmínek (19.3).

5. *Okrajové podmínky* (19.3)

$$\alpha u'(a) - \beta u(a) = 0 , \quad \gamma u'(b) + \delta u(b) = 0 . \tag{19.53}$$

Přitom α, β, γ, δ jsou nezáporná čísla a

$$\alpha + \beta > 0 , \quad \gamma + \delta > 0 , \tag{19.54}$$

takže v žádné z dvojic α, β; γ, δ nejsou obě čísla zároveň rovna nule.

Nechť M je lineál funkcí spojitých včetně derivací prvního a druhého řádu v $\langle a, b\rangle$ a splňujících podmínky (19.53). Ukážeme, že diferenciální operátor A, daný na lineálu M předpisem

$$Au = -(pu')' + ru , \quad u \in M , \tag{19.55}$$

je [za uvažovaných předpokladů o funkcích $p(x)$, $r(x)$] s výjimkou případu, kdy podmínky (19.53) přejdou v podmínky (19.17) a zároveň $r(x) \equiv 0$, pozitivně definitní. K důkazu tohoto tvrzení podstatně využijeme předcházejících výsledků.

Nejprve obdobným způsobem jako dříve dokážeme, že operátor A je na lineálu M symetrický, a to i v případě okrajových podmínek (19.17): Pro každou dvojici funkcí $u(x)$, $v(x)$ z lineálu M totiž platí

$$\begin{aligned} (Au, v) &= -\int_a^b (pu')'v \, dx + \int_a^b ruv \, dx = \\ &= -p(b)\, u'(b)\, v(b) + p(a)\, u'(a)\, v(a) + \int_a^b pu'v' \, dx + \int_a^b ruv \, dx . \end{aligned} \tag{19.56}$$

Uvažujme nyní tyto čtyři případy, vyčerpávající zřejmě všechny možnosti:

$$\text{a)} \quad \alpha = 0 , \quad \gamma = 0 ; \tag{19.57}$$

$$\text{b)} \quad \alpha = 0 , \quad \gamma > 0 ; \tag{19.58}$$

$$\text{c)} \quad \alpha > 0 , \quad \gamma = 0 ; \tag{19.59}$$

$$\text{d)} \quad \alpha > 0 , \quad \gamma > 0 . \tag{19.60}$$

Uvážíme-li, že z podmínek (19.54) plyne

$$\begin{aligned} &\alpha = 0 \Rightarrow \beta > 0 , \quad \text{a tedy} \quad u(a) = 0 , \quad \text{resp.} \quad v(a) = 0 , \\ &\gamma = 0 \Rightarrow \delta > 0 , \quad \text{a tedy} \quad u(b) = 0 , \quad \text{resp.} \quad v(b) = 0 , \end{aligned} \tag{19.61}$$

dostaneme z (19.56) [popř. ještě použitím podmínek (19.53)] v jednotlivých případech

$$\text{a)} \quad (Au, v) = \int_a^b pu'v' \, dx + \int_a^b ruv \, dx ; \tag{19.62}$$

$$\text{b)} \quad (Au, v) = \int_a^b pu'v' \, dx + \int_a^b ruv \, dx + \frac{\delta}{\gamma}\, p(b)\, u(b)\, v(b) ; \tag{19.63}$$

$$\text{c)} \quad (Au, v) = \int_a^b pu'v' \, dx + \int_a^b ruv \, dx + \frac{\beta}{\alpha}\, p(a)\, u(a)\, v(a) ; \tag{19.64}$$

$$\text{d)} \quad (Au, v) = \int_a^b pu'v' \, dx + \int_a^b ruv \, dx + \frac{\beta}{\alpha}\, p(a)\, u(a)\, v(a) + \frac{\delta}{\gamma}\, p(b)\, u(b)\, v(b) . \tag{19.65}$$

V každém z těchto čtyř případů se vyskytují tedy funkce $u(x)$ i $v(x)$ symetricky (zaměníme-li je mezi sebou, dostaneme tentýž výsledek), což potvrzuje symetrii operátoru A na lineálu M.

Z (19.62) až (19.65) plyne, položíme-li $v(x) = u(x)$ a uvážíme podmínky (19.2) [$r(x) \geqq 0$, $p(x) \geqq p_0 > 0$ v $\langle a, b\rangle$],

$$\text{(19.66)} \qquad \text{a)} \quad (Au, u) \geqq p_0 \int_a^b u'^2 \, dx ;$$

$$\text{(19.67)} \qquad \text{b)} \quad (Au, u) \geqq p_0 \int_a^b u'^2 \, dx ;$$

$$\text{(19.68)} \qquad \text{c)} \quad (Au, u) \geqq p_0 \int_a^b u'^2 \, dx ;$$

$$\text{(19.69)} \qquad \text{d)} \quad (Au, u) \geqq p_0 \left\{ \int_a^b u'^2 \, dx + k[u^2(a) + u^2(b)] \right\},$$

kde

$$k = \min\left(\frac{\beta}{\alpha}, \frac{\delta}{\gamma}\right).$$

V případě a) plyne z (19.54) a (19.57)

$$u(a) = 0, \quad u(b) = 0,$$

takže podle (19.66) a kap. 18 je

$$\text{(19.70)} \qquad \text{a)} \quad (Au, u) \geqq \frac{p_0}{c_1} \|u\|^2,$$

kde za c_1 je možno zvolit $(b - a)^2/\pi^2$ podle (18.28), str. 200 [srov. (19.15), (19.16), str. 211].

V případech b) a c) můžeme použít odhadu (19.48), neboť vzhledem k (19.54) a (19.58), resp. (19.59) je $u(a) = 0$, resp. $u(b) = 0$, takže platí (19.47), resp. (19.52). Je tedy

$$\text{(19.71)} \qquad \text{b), c)} \quad (Au, u) \geqq \frac{p_0}{c_1} \|u\|^2,$$

kde

$$\text{(19.72)} \qquad c_1 = \frac{(b - a)^2}{2}.$$

Je-li přitom $\delta > 0$, resp. $\beta > 0$, můžeme použít i odhadů (18.4), resp. (18.3) s konstantami [podle (18.17), str. 198]

$$\text{(19.73)} \qquad c_1 = \frac{16(b - a)^2}{\pi^2}, \quad c_2 = \frac{4(b - a)}{\pi},$$

neboť z (19.63), resp. (19.64) plyne

$$\text{(19.74)} \qquad \text{b)} \quad (Au, u) \geqq p_0 \left[\int_a^b u'^2 \, dx + \frac{\delta}{\gamma} u^2(b) \right],$$

resp.

$$\text{(19.75)} \qquad \text{c)} \quad (Au, u) \geqq p_0 \left[\int_a^b u'^2 \, dx + \frac{\beta}{\alpha} u^2(a) \right].$$

Dostaneme tak

$$\text{(19.76)} \qquad (Au, u) \geqq C^2 \|u\|^2,$$

kde

$$\text{(19.77)} \qquad \text{b)} \quad C^2 = \min\left(\frac{p_0}{c_1}, \frac{p_0 \delta}{c_2 \gamma}\right),$$

resp.

$$\text{(19.78)} \qquad \text{c)} \quad C^2 = \min\left(\frac{p_0}{c_1}, \frac{p_0 \beta}{c_2 \alpha}\right).$$

Odhad (19.71), (19.72) je ovšem lepší, neboť dává větší hodnotu konstanty C^2 (srov. pozn. 1 pod čarou na str. 198).

Je-li v případě d) $\beta > 0$ a $\delta > 0$, lze použít nerovnosti (18.5), str. 196, kde lze volit

$$\text{(19.79)} \qquad c_1 = \frac{4(b - a)^2}{\pi^2}, \quad c_2 = \frac{2(b - a)}{\pi}$$

nebo

$$\text{(19.80)} \qquad c_1 = \frac{(b - a + 2\eta)^2}{\pi^2}, \quad c_2 = \frac{b - a + 2\eta}{\pi} \operatorname{cotg} \frac{\pi\eta}{b - a + 2\eta}$$

[viz (18.19) a (18.21), str. 198, 199]. Z (19.69) pak plyne

$$\text{(19.81)} \qquad \text{d)} \quad (Au, u) \geqq C^2 \|u\|^2,$$

kde

$$\text{(19.82)} \qquad C^2 = \min\left(\frac{p_0}{c_1}, \frac{p_0 k}{c_2}\right).$$

Je-li v případě d) $\beta = 0$, ale $\delta > 0$, resp. $\delta = 0$, ale $\beta > 0$, dostáváme pro (Au, u) nerovnosti (19.74), resp. (19.75) a odtud nerovnost (19.76),

$$\text{(19.83)} \qquad (Au, u) \geqq C^2 \|u\|^2,$$

kde C^2 je dáno výrazem (19.77), resp. (19.78).

[Všimněme si, že v žádném z tří posledních případů nelze použít analogie s odhadem (19.71), (19.72), neboť zde v obecném případě není ani $u(a) = 0$, ani $u(b) = 0$, takže neplatí ani (19.47), ani (19.52), a tedy ani odhad (19.48).]

Pro $\beta = 0$ a $\delta = 0$ přejdou podmínky (19.53) v podmínky (19.17),

$$u'(a) = 0 , \quad u'(b) = 0 , \tag{19.84}$$

které jsme vyšetřovali v bodě 2 (str. 211). V případě, že bylo $r(x) \geqq r_0 > 0$ v $\langle a, b\rangle$ [nebo bylo-li $r(x) > 0$ aspoň v jednom bodě $x_1 \in \langle a, b\rangle$, viz pozn. 19.3], dokázali jsme pozitivní definitnost daného operátoru; v případě $r(x) \equiv 0$ v $\langle a, b\rangle$ jsme dokázali pozitivní definitnost uvažovaného operátoru na lineálu $\tilde{M}_2$ funkcí vyhovujících podmínce (19.27).

Ponecháme-li stranou případ okrajových podmínek (19.84), který má speciální charakter (k tomuto případu se ještě později vrátíme), můžeme závěrem říci, že operátor A, definovaný předpisem (19.55), je na lineálu M funkcí spojitých včetně derivací prvního a druhého řádu v uzavřeném intervalu $\langle a, b\rangle$ a splňujících podmínky (19.53) pozitivně definitní. Vlastnosti funkcí lineálu M a tím i vlastnosti operátoru A závisejí ovšem na konstantách $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ z podmínek (19.53); proto i „konstanta pozitivní definitnosti" C je v různých případech různá [viz příslušné nerovnosti (19.70), (19.71), (19.76), (19.81), (19.83)]. Lze tedy vždy zkonstruovat příslušný prostor H_A (viz kap. 10) a získat zobecněné řešení rovnice $Au = f$ [tedy dané diferenciální rovnice (19.1) s okrajovými podmínkami (19.2)] jako prvek u_0 minimalizující v H_A příslušný funkcionál F, tj. v jednotlivých případech a), b), c), d) funkcionál

$$F_1 u = \int_a^b p u'^2 \, dx + \int_a^b r u^2 \, dx - 2 \int_a^b f u \, dx , \tag{19.85}$$

$$F_2 u = \int_a^b p u'^2 \, dx + \int_a^b r u^2 \, dx - 2 \int_a^b f u \, dx + \frac{\delta}{\gamma} p(b) \, u^2(b) , \tag{19.86}$$

$$F_3 u = \int_a^b p u'^2 \, dx + \int_a^b r u^2 \, dx - 2 \int_a^b f u \, dx + \frac{\beta}{\alpha} p(a) \, u^2(a) , \tag{19.87}$$

$$F_4 u = \int_a^b p u'^2 \, dx + \int_a^b r u^2 \, dx - 2 \int_a^b f u \, dx + \frac{\beta}{\alpha} p(a) \, u^2(a) + \frac{\delta}{\gamma} p(b) \, u^2(b) . \tag{19.88}$$

[V případě $r(x) \equiv 0$ a $\beta = \delta = 0$ minimalizuje zobecněné řešení u_0 funkcionál (19.88), v němž ovšem klademe $r(x) \equiv 0$, $\beta = 0$, $\delta = 0$, tedy funkcionál

$$\tilde{F}_4 u = \int_a^b p u'^2 \, dx - 2 \int_a^b f u \, dx ,$$

v prostoru $H_{\tilde{A}_2}$; viz pozn. 19.5 o stabilních a nestabilních okrajových podmínkách.]

Poznámka 19.4. K hledání zobecněného řešení $u_0(x)$ uvažovaných problémů lze použít metod uvedených v kap. 12 až 15. Zvolme jednu z těchto metod, např. Ritzovu, a označme $\{\varphi_n(x)\}$ příslušnou bázi, která splňuje předpoklady uvedené v citovaných kapitolách. Protože lineál M je hustý v H_A, lze prvky $\varphi_n(x)$ této báze volit z M. Označme dále $\{u_n(x)\}$ posloupnost přibližných řešení, sestrojených zvolenou metodou a konvergující, jak víme, v H_A k zobecněnému řešení $u_0(x)$ dané úlohy,

$$\lim_{n \to \infty} \|u_n - u_0\|_A = 0 . \tag{19.89}$$

Jsou-li prvky báze voleny z lineálu M, je i $u_n \in M$ pro každé n.

Ukážeme, že v tomto případě konverguje posloupnost $\{u_n(x)\}$ k zobecněnému řešení $u_0(x)$ stejnoměrně v intervalu $\langle a, b\rangle$ a že mimoto limitní funkce $u_0(x)$ má v intervalu $\langle a, b\rangle$ skoro všude derivaci $u_0' \in L_2(a, b)$, přičemž posloupnost $\{u_n'(x)\}$ konverguje k této funkci v $L_2(a, b)$ (tedy v průměru).

Uvedená tvrzení dokážeme pro nejjednodušší z uvažovaných případů, tj. pro případ funkcionálu (19.85), který odpovídá okrajovým podmínkám

$$u(a) = 0 , \quad u(b) = 0 . \tag{19.90}$$

V ostatních případech lze důkaz snadno modifikovat. (Srov. [28], str. 115, 116.)

V případě podmínek (19.90) je [srov. (19.62)]

$$\|u\|_A^2 = (Au, u) = \int_a^b p u'^2 \, dx + \int_a^b r u^2 \, dx ,$$

a tedy

$$\|u_m - u_n\|_A^2 = \int_a^b p(u_m' - u_n')^2 \, dx + \int_a^b r(u_m - u_n)^2 \, dx . \tag{19.91}$$

Protože posloupnost $\{u_n(x)\}$ je v H_A konvergentní [viz (19.89)], je v H_A cauchyovská, a tedy platí

$$\lim_{\substack{m \to \infty \\ n \to \infty}} \|u_m - u_n\|_A = 0 . \tag{19.92}$$

Z (19.92) a (19.91) vzhledem k nezápornosti integrandů plyne

$$\lim_{\substack{m \to \infty \\ n \to \infty}} \int_a^b p(u_m' - u_n')^2 \, dx = 0$$

a dále, protože $p(x) \geqq p_0 > 0$ v $\langle a, b\rangle$,

$$\lim_{\substack{m \to \infty \\ n \to \infty}} \int_a^b (u_m' - u_n')^2 \, dx = 0 . \tag{19.93}$$

To však znamená, že posloupnost $\{u_n'(x)\}$ je cauchyovská v $L_2(a, b)$. Prostor $L_2(a, b)$ je však úplný, takže tato posloupnost konverguje v tomto prostoru k určité funkci, kterou označíme $v_0(x)$,

$$\lim_{n\to\infty} u_n'(x) = v_0(x) \text{ v } L_2(a, b)\,. \tag{19.94}$$

Dále je vzhledem k první z podmínek (19.90)

$$u_n(x) = \int_a^x u_n'(t)\,\mathrm{d}t \quad \text{pro každé} \quad n = 1, 2, \ldots,$$

odkud obvyklým způsobem (použitím Schwarzovy nerovnosti) dostaneme

$$[u_m(x) - u_n(x)]^2 = \left[\int_a^x (u_m' - u_n')\,\mathrm{d}t\right]^2 \leqq \tag{19.95}$$

$$\leqq \int_a^x 1^2\,\mathrm{d}t \,.\int_a^x (u_m' - u_n')^2\,\mathrm{d}t \leqq (b - a)\int_a^b (u_m' - u_n')^2\,\mathrm{d}x\,.$$

Protože platí (19.93), není (19.95) nic jiného než známá Bolzanova–Cauchyova podmínka pro stejnoměrnou konvergenci posloupnosti $\{u_n(x)\}$ v intervalu $\langle a, b\rangle$. [Odhad pro rozdíl $|u_m(x) - u_n(x)|$ nezávisí podle (19.95) na x a podle (19.93) je možno učinit jej libovolně malým, bude-li m i n dostatečně velké.] Tím je dokázáno, že posloupnost $\{u_n(x)\}$ konverguje v intervalu $\langle a, b\rangle$ stejnoměrně. Limitní funkce $u(x)$ je tedy v $\langle a, b\rangle$ spojitá [$u_n(x)$ jsou funkce z M a konvergence je stejnoměrná]. Mimoto v $L_2(a, b)$ platí $u(x) = u_0(x)$, kde $u_0(x)$ je hledané zobecněné řešení našeho problému. Posloupnost $\{u_n(x)\}$ konverguje totiž v $\langle a, b\rangle$ stejnoměrně k funkci $u(x)$, a tedy konverguje v $\langle a, b\rangle$ k téže funkci i v průměru, srov. str. 42; protože však podle (19.89) konverguje $\{u_n(x)\}$ k $u_0(x)$ v H_A, a tedy tím spíše v $L_2(a, b)$, nemůže být v $L_2(a, b)$ $u \neq u_0$, neboť pak by posloupnost $\{u_n(x)\}$ měla v $L_2(a, b)$ dvě různé limity a to je ve sporu s větou 4.1, str. 41. Protože $u(x)$ je spojitá funkce v intervalu $\langle a, b\rangle$ a $u_0(x) = u(x)$ v $L_2(a, b)$, můžeme i funkci $u_0(x)$ pokládat za spojitou v $\langle a, b\rangle$ (v opačném případě bychom změnili její hodnoty na množině nulové míry tak, aby tato funkce byla v $\langle a, b\rangle$ spojitá). V tomto případě pak ze stejnoměrné konvergence posloupnosti $\{u_n(x)\}$ k funkci $u(x)$ plyne i stejnoměrná konvergence této posloupnosti k funkci $u_0(x)$,

$$\lim_{n\to\infty} u_n(x) = u_0(x) \quad \text{stejnoměrně v} \quad \langle a, b\rangle\,. \tag{19.96}$$

Označme dále

$$V_0(x) = \int_a^x v_0(t)\,\mathrm{d}t\,, \tag{19.97}$$

kde $v_0(x)$ je limitní funkce posloupnosti $\{u_n'(x)\}$ v $L_2(a, b)$ [viz (19.94)], takže je $V_0'(x) = v_0(x)$ skoro všude v $\langle a, b\rangle$. Protože je

$$u_n(x) = \int_a^x u_n'(t)\,\mathrm{d}t\,,$$

platí

$$u_n(x) - V_0(x) = \int_a^x [u_n'(t) - v_0(t)]\,\mathrm{d}t\,,$$

odkud známým způsobem (použitím Schwarzovy nerovnosti) dostaneme

$$[u_n(x) - V_0(x)]^2 \leqq (b - a)\int_a^b [u_n'(t) - v_0(t)]^2\,\mathrm{d}t$$

pro každé $x \in \langle a, b\rangle$. Z (19.94) pak plyne

$$\lim_{n\to\infty} u_n(x) = V_0(x)$$

stejnoměrně v $\langle a, b\rangle$, takže $V_0(x) = u_0(x)$ v $\langle a, b\rangle$. Podle (19.97) je tedy skoro všude v $\langle a, b\rangle$

$$u_0'(x) = v_0(x)\,.$$

Shrneme-li předcházející výsledky, týkající se uvažovaných problémů pro rovnici (19.1), můžeme tvrdit: *Zobecněné řešení $u_0(x)$ je funkce spojitá v $\langle a, b\rangle$, mající skoro všude v $\langle a, b\rangle$ derivaci $u_0'(x) \in L_2(a, b)$. Minimalizující posloupnost $\{u_n(x)\}$, kde $u_n \in M$, sestrojená některou z metod uvedených v kap. 12 až 15, konverguje k $u_0(x)$ stejnoměrně v $\langle a, b\rangle$ a posloupnost $\{u_n'(x)\}$ konverguje k $u_0'(x)$ v (a, b) v průměru.*

Lze ukázat, že položíme-li na hladkost funkcí $p(x)$, $r(x)$ v rovnici (19.1) další požadavky, vyplývají odtud další vlastnosti týkající se hladkosti funkce $u_0(x)$. Srov. kap. 46, str. 575.

Poznámka 19.5. (*Stabilní a nestabilní okrajové podmínky, některé poznámky týkající se struktury prostoru H_A.*) Jak jsme v této kapitole viděli, mají okrajové podmínky

$$u(a) = 0\,, \quad u(b) = 0 \tag{19.98}$$

a

$$u'(a) = 0\,, \quad u'(b) = 0 \tag{19.99}$$

zcela rozdílný charakter. Zatímco podmínky (19.98) v našich úvahách „nečinily potíže", bylo třeba v případě podmínek (19.99) buď vyslovit další předpoklady o funkci $r(x)$, týkající se její kladnosti, nebo v případě $r(x) \equiv 0$ zavést speciální prostor $\tilde{L}_2(a, b)$ těch funkcí z $L_2(a, b)$, pro které platí

$$\int_a^b u(x)\,\mathrm{d}x = 0\,, \tag{19.100}$$

a vyšetřovat daný problém v tomto prostoru. Upozorníme čtenáře na další důležitý rozdíl mezi podmínkami typu (19.98) a (19.99), který má i značný význam pro numerické řešení uvažovaných problémů. Pro jednoduchost uvažujme případ $r(x) \equiv 0$ v $\langle a, b\rangle$.

V případě podmínek (19.98) je operátor A_1, daný na lineálu M_1 [tj. na lineálu funkcí spojitých včetně derivací prvního a druhého řádu v $\langle a, b\rangle$ a splňujících podmínky (19.98)] vztahem

$$A_1 u = -(pu')'\,, \tag{19.101}$$

na tomto lineálu pozitivně definitní, viz nerovnost (19.15), str. 211. Můžeme tedy zkonstruovat příslušný prostor H_{A_1}, jehož prvky patří, jak jsme viděli v kap. 10, do $L_2(a, b)$. Ovšem ne každý prvek z $L_2(a, b)$ patří do H_{A_1}. Jak uvidíme ve čtvrté části naší knihy, patří prvky prostoru H_{A_1} do tzv. prostoru $\mathring{W}_2^{(1)}(a, b)$. O prostorech tohoto typu je podrobně pojednáno v kap. 29 a 30. Jde zhruba řečeno o prostor těch funkcí z $L_2(a, b)$, které mají první derivaci (v určitém zobecněném smyslu) integrovatelnou s druhou mocninou v intervalu $\langle a, b\rangle$ a splňují (rovněž v určitém zobecněném smyslu, v tzv. smyslu stop) podmínky (19.98)[1]. Proto podmínky (19.98) nazýváme *stabilními*: Všechny funkce z prostoru H_{A_1} splňují (v uvedeném zobecněném smyslu) tyto podmínky, tak jako je splňovaly funkce z původního lineálu M_1.

V případě operátoru

$$\tilde{A}_2 u = -(pu')'\,, \tag{19.102}$$

definovaného na lineálu $\tilde{M}_2$ funkcí spojitých včetně derivací do druhého řádu v $\langle a, b\rangle$, splňujících podmínku (19.100) a okrajové podmínky (19.99), se setkáváme s jevem značně odlišným. Jak jsme ukázali, je operátor $\tilde{A}_2$ na lineálu $\tilde{M}_2$ pozitivně definitní. Avšak zdaleka ne všechny funkce z příslušného prostoru $H_{\tilde{A}_2}$ splňují (dokonce ani v některém zobecněném smyslu) podmínky (19.99). [Srov. příklad funkcí (32.3), (32.4) na str. 375.] Proto podmínky (19.99) nazýváme *nestabilními*.[2]) [Podmínky (19.99) jsou nestabilní i v tom případě, že příslušný diferenciální operátor je pozitivně definitní již na lineálu M_2 funkcí nesplňujících v obecném případě podmínku (19.100), což nastane např. je-li $r(x) \geq r_0 > 0$ v $\langle a, b\rangle$.]

---

[1]) Skalární součin v tomto prostoru je dán vztahem $(u, v)_{\mathring{W}_2^{(1)}(a,b)} = \int_a^b uv\,\mathrm{d}x + \int_a^b u'v'\,\mathrm{d}x$.

[2]) Místo *stabilní*, resp. *nestabilní* okrajové podmínky se v literatuře setkáváme často s názvem *hlavní*, resp. *přirozené* okrajové podmínky.

Odtud vyplývá tento praktický důsledek (viz o tom podrobně v kap. 34, str. 429): Jak víme, zobecněným řešením rovnice

$$A_1 u = f$$

s podmínkami (19.98) nazýváme funkci u_0, minimalizující v prostoru H_{A_1} funkcionál

$$F_1 u = \int_a^b pu'^2\,\mathrm{d}x - 2\int_a^b fu\,\mathrm{d}x\,.$$

K minimalizování tohoto funkcionálu používáme nejčastěji Ritzovy metody: V prostoru H_{A_1} zvolíme určitou bázi a vytváříme posloupnost $\{u_n(x)\}$ vhodných lineárních kombinací funkcí této báze tak, aby při daném pevném n byl funkcionál $F_1 u_n$ minimální. Protože bázi volíme v prostoru H_{A_1} a všechny prvky tohoto prostoru splňují (v zobecněném smyslu) podmínky (19.98), splňují prvky báze automaticky stabilní okrajové podmínky (19.98).

Také v případě problému

$$\tilde{A}_2 u = f$$

s podmínkami (19.99) je hledaným zobecněným řešením funkce minimalizující funkcionál

$$\tilde{F}_2 u = \int_a^b pu'^2\,\mathrm{d}x - 2\int_a^b fu\,\mathrm{d}x$$

(který zde co do formy splývá s funkcionálem $F_1 u$) v prostoru $H_{\tilde{A}_2}$. Funkce tohoto prostoru však obecně nesplňují (ani v zobecněném smyslu) podmínky (19.99). Při volbě báze $\{\varphi_i(x)\}$ v tomto prostoru je třeba dbát, aby prvky báze splňovaly podmínku (19.100), není však třeba přihlížet k tomu, splňují-li tyto prvky podmínky (19.99), či nikoli. Věta o konvergenci zaručuje totiž konvergenci Ritzovy posloupnosti k hledanému řešení $u_0(x)$ za jediného předpokladu, že $\{\varphi_i(x)\}$ je báze v $H_{\tilde{A}_2}$,[1]) a to bez jakýchkoli dalších požadavků, týkajících se splnění okrajových podmínek. Limitní funkce jakožto zobecněné řešení pak tyto podmínky automaticky splňuje (popř. opět v určitém zobecněném smyslu). Je ovšem vhodné volit bázi v $H_{\tilde{A}_2}$ tak, aby prvky báze splňovaly okrajové podmínky (19.99); pak totiž splňuje tyto okrajové podmínky i každá lineární kombinace prvků báze, tedy také každá z Ritzových aproximací $u_n(x)$, takže přibližně zůstává splněna jen daná diferenciální rovnice.

Tyto jednoduché úvahy, provedené na speciálním příkladě, lze snadno rozšířit na případ obyčejných diferenciálních rovnic vyšších řádů i na parciální diferenciální rovnice. Rovněž v těchto případech není třeba při volbě báze přihlížet ke splnění nestabilních okrajových podmínek, tj. podmínek obsahujících derivace vyššího

---

[1]) Totéž se ovšem týká i metody ortonormálních řad, která vlastně je, jak jsme viděli, speciálním případem Ritzovy metody, kdy báze $\{\varphi_i(x)\}$ je ortonormální v H_A.

než $(k - 1)$-ního řádu, kde $2k$ je řád dané rovnice.[1]) V této kapitole zatím nemáme vybudovány prostředky k hlubší analýze této problematiky, proto tvrzení zde uvedená ani neformulujeme dostatečně ostře a předkládáme je zde čtenáři bez důkazu. Podrobně se těmito otázkami zabýváme v kap. 34 a 35. Mimoto v kap. 21, str. 255, uvedeme velmi jednoduchý, ale instruktivní příklad, na němž budeme moci tuto problematiku velmi dobře sledovat.

Poznamenejme, že otázky související s eventuálním nesplněním nestabilních okrajových podmínek se týkají metod založených na minimalizování příslušného funkcionálu, zejména tedy Ritzovy metody. Pokud jde např. o *Galerkinovu* metodu, je situace poněkud jiná. Při formulaci Galerkinovy metody (kap. 14, str. 170) jsme předpokládali, že funkce φ_i patří do definičního oboru D_A daného operátoru, takže a priori splňují všechny (i nestabilní) dané (homogenní) okrajové podmínky. Za tohoto předpokladu jsme dospěli k soustavě rovnic pro neznámé koeficienty, která byla shodná s obdobnou soustavou, získanou Ritzovou metodou, pokud jsme i v případě Ritzovy metody vybrali bázi z definičního oboru D_A daného operátoru, [takže koeficienty uvažované soustavy byly v obou případech čísla $(A\varphi_i, \varphi_j)$, srov. (14.11), str. 171, a (13.29), str. 168]. Z dříve dokázané konvergence Ritzovy metody a ze shodnosti takto sestrojené Galerkinovy a Ritzovy posloupnosti jsme pak usoudili na konvergenci Galerkinovy metody. Jestliže některé z daných okrajových podmínek jsou nestabilní, obsahuje příslušný prostor H_A, jak jsme již řekli, i funkce, které nesplňují tyto podmínky. Píšeme-li pak v případě Ritzovy metody uvedenou soustavu rovnic ve tvaru (13.11), str. 164, nikoli ve tvaru (13.29), str. 168 [tedy s koeficienty $(\varphi_i, \varphi_j)_A$ místo $(A\varphi_i, \varphi_j)$], nemusíme volit bázi z D_A, ale z H_A, takže prvky báze nemusí nutně splňovat nestabilní okrajové podmínky.[2]) Chceme-li také u Galerkinovy metody pracovat s bází, která nepřihlíží k nestabilním okrajovým podmínkám, je třeba napsat rovněž soustavu rovnic pro neznámé konstanty s koeficienty ve tvaru $(\varphi_i, \varphi_j)_A$,

[1]) V našem příkladě šlo o rovnici druhého řádu, tedy $2k = 2$, takže $k - 1 = 0$. Podmínky (19.98), obsahující derivace nultého řádu, jsou stabilní, podmínky (19.99), obsahující derivace prvního řádu, jsou nestabilní.

[2]) Čtenáři se možná zdá, že se nám takto tyto nestabilní okrajové podmínky z našeho problému nějak „ztratí". Tyto podmínky se objeví v obecném případě ve tvaru skalárního součinu $(u, v)_A$ a tím i ve tvaru funkcionálu, který minimalizujeme. Např. pro rovnici (19.1) s okrajovými podmínkami

$$u(a) = 0\,, \quad \gamma u'(b) + \delta u(b) = 0 \quad (\gamma \neq 0,\ \delta \neq 0)\,, \tag{19.103}$$

z nichž druhá obsahuje derivaci prvního řádu, a je tedy nestabilní, je

$$(u, v)_A = \int_a^b pu'^2\,dx + \int_a^b ru^2\,dx + \frac{\delta}{\gamma}\,p(b)\,u^2(b)\,,$$

takže se zde vyskytuje člen $(\delta/\gamma)\,p(b)\,u^2(b)$, který by se zde nevyskytoval v případě stabilní okrajové podmínky $u(b) = 0$. Mimoto se projeví vliv nestabilních okrajových podmínek při konstrukci prostoru H_A.

tedy provést předem integrování per partes, kterým součin (Au, v) „převedeme" na tvar $(u, v)_A$, a to pro funkce $u \in D_A$, $v \in D_A$, tedy při použití všech okrajových podmínek. [Tím dosáhneme toho, aby se nám „neztratily" takové členy, jako je např. člen $(\delta/\gamma)\,p(b)\,u^2(b)$ v případě okrajových podmínek (19.103).] Tak dostaneme vlastně Ritzovu soustavu ve tvaru (13.11), str. 164. V případě, že bychom použili Galerkinovy metody v klasické formulaci a za bázové funkce $\varphi_i(x)$ bychom zvolili funkce, které nevyhovují daným nestabilním okrajovým podmínkám, pak by se nám tyto podmínky skutečně z uvažovaného problému „ztratily" a řešili bychom vlastně problém poněkud jiný. Celá problematika je velmi průzračná v citovaném příkl. 21.2 na str. 255.

Poznámka 19.6. (*Nehomogenní okrajové podmínky.*) V případě, že místo homogenních okrajových podmínek (19.3) jsou dány nehomogenní okrajové podmínky

$$\alpha u'(a) - \beta u(a) = K_1\,, \quad \gamma u'(b) + \delta u(b) = K_2\,, \tag{19.104}$$

kde K_1, K_2 jsou daná reálná čísla, a nechceme-li daný problém předem převést na problém s okrajovými podmínkami homogenními (viz pozn. 19.1 a příkl. 19.1), pak (srov. pozn. 11.8, str. 153) místo funkcionálů (19.85) až (19.88) minimalizujeme funkcionály

$$F_1 u = \int_a^b pu'^2\,dx + \int_a^b ru^2\,dx - 2\int_a^b fu\,dx\,, \tag{19.105}$$

$$F_2 u = \int_a^b pu'^2\,dx + \int_a^b ru^2\,dx - 2\int_a^b fu\,dx + \frac{\delta}{\gamma}\,p(b)\,u^2(b) - \frac{2K_2}{\gamma}\,p(b)\,u(b)\,, \tag{19.106}$$

$$F_3 u = \int_a^b pu'^2\,dx + \int_a^b ru^2\,dx - 2\int_a^b fu\,dx + \frac{\beta}{\alpha}\,p(a)\,u^2(a) + \frac{2K_1}{\alpha}\,p(a)\,u(a)\,, \tag{19.107}$$

$$F_4 u = \int_a^b pu'^2\,dx + \int_a^b ru^2\,dx - 2\int_a^b fu\,dx + \frac{\beta}{\alpha}\,p(a)\,u^2(a) + \frac{\delta}{\gamma}\,p(b)\,u^2(b) + \frac{2K_1}{\alpha}\,p(a)\,u(a) - \frac{2K_2}{\gamma}\,p(b)\,u(b)\,, \tag{19.108}$$

na množině dostatečně hladkých funkcí,[1]) splňujících dané stabilní nehomogenní okrajové podmínky [a podmínku $\int_a^b f(x)\,dx = 0$ v případě, že je $r(x) \equiv 0$ a $\beta = \delta = 0$]. Např. v případě podmínek $u(a) = 2$, $u(b) = 3$ hledáme minimum funkcionálu (19.105) na množině funkcí splňujících obě podmínky $u(a) = 2$, $u(b) = 3$, v případě podmínek $u(a) = 2$, $u'(b) - 4u(b) = 3$ na množině funkcí splňujících jen první z těchto podmínek atd. Podrobně o těchto otázkách i o vytvoření funkcionálů (19.105) až (19.108) viz v kap. 34 a 35. Viz tabulku funkcionálů na konci knihy.

[1]) Ve smyslu čtvrté části naší knihy jde o funkce z prostoru $W_2^{(1)}(a, b)$.

Ukažme ještě, jaká je podmínka pro řešitelnost problému

$$-(pu')' = f\,, \tag{19.109}$$

$$u'(a) = K_1\,, \quad u'(b) = K_2\,. \tag{19.110}$$

Předpokládejme, že existuje řešení této úlohy, a integrujme rovnici (19.109) v intervalu $\langle a, b\rangle$. Dostaneme

$$\int_a^b f(x)\,dx = -\int_a^b (pu')'\,dx = -[pu']_a^b = -p(b)\,u'(b) + p(a)\,u'(a) =$$
$$= -K_2 p(b) + K_1 p(a)\,.$$

Nutná, a jak později uvidíme, i postačující podmínka pro existenci řešení tedy je

$$\int_a^b f(x)\,dx + K_2 p(b) - K_1 p(a) = 0\,. \tag{19.111}$$

b) Rovnice vyšších řádů. Uvažujme diferenciální rovnici $2k$-tého řádu

$$(-1)^k (p_k u^{(k)})^{(k)} + (-1)^{k-1} (p_{k-1} u^{(k-1)})^{(k-1)} + \ldots + p_0 u = f\,, \tag{19.112}$$

stručným zápisem

$$\sum_{i=0}^{k} (-1)^i (p_i u^{(i)})^{(i)} = f\,, \tag{19.113}$$

kde $f \in L_2(a, b)$, $p_i(x)$, $i = 0, 1, \ldots, k$, jsou včetně derivací do i-tého řádu spojité funkce v uzavřeném intervalu $\langle a, b\rangle$ a

$$p_i(x) \geqq 0 \text{ v } \langle a, b\rangle\,, \quad i = 0, 1, \ldots, k-1\,, \tag{19.114}$$

$$p_k(x) \geqq p > 0 \text{ v } \langle a, b\rangle\,, \quad p = \text{konst}\,, \tag{19.115}$$

s okrajovými podmínkami

$$u(a) = u'(a) = \ldots = u^{(k-1)}(a) = 0\,, \tag{19.116}$$

$$u(b) = u'(b) = \ldots = u^{(k-1)}(b) = 0\,. \tag{19.117}$$

Označme M lineál [hustý v $L_2(a, b)$, viz větu 8.5 a pozn. 8.5, str. 105 a 107) funkcí spojitých s derivacemi do k-tého řádu včetně v $\langle a, b\rangle$ a splňujících podmínky (19.116) a (19.117) a označme A operátor s definičním oborem M, daný předpisem

$$Au = \sum_{i=0}^{k} (-1)^i (p_i u^{(i)})^{(i)}\,, \quad u \in M\,. \tag{19.118}$$

Opakovaným integrováním per partes a použitím podmínek (19.116), (19.117) dostaneme

$$(Au, v) = \sum_{i=0}^{k} \int_a^b p_i u^{(i)} v^{(i)}\,dx\,, \tag{19.119}$$

odkud okamžitě plyne symetričnost operátoru A. Dále z (19.119) plyne

$$(Au, u) = \sum_{i=0}^{k} \int_a^b p_i (u^{(i)})^2\,dx \geqq p \int_a^b (u^{(k)})^2\,dx \tag{19.120}$$

v důsledku (19.114) a (19.115). Podle (19.116), (19.117) je však $u(a) = u(b) = 0$, takže [viz (18.28), str. 200]

$$\int_a^b u^2\,dx \leqq c_1 \int_a^b u'^2\,dx\,, \tag{19.121}$$

kde pro c_1 je možno volit odhad

$$c_1 = \frac{(b-a)^2}{\pi^2}\,; \tag{19.122}$$

obdobně platí, neboť je $u'(a) = u'(b) = 0$,

$$\int_a^b u'^2\,dx \leqq c_1 \int_a^b u''^2\,dx \tag{19.123}$$

atd. až

$$\int_a^b (u^{(k-1)})^2\,dx \leqq c_1 \int_a^b (u^{(k)})^2\,dx\,. \tag{19.124}$$

Z (19.120), (19.121), (19.123) a (19.124) plyne

$$(Au, u) \geqq \frac{p}{c_1^k} \|u\|^2\,, \tag{19.125}$$

kde pro c_1 můžeme volit odhad (19.122). Nerovnost (19.125) ukazuje, že operátor A je na lineálu M pozitivně definitní. Zobecněné řešení u_0 dané úlohy lze tedy hledat jako prvek minimalizující v prostoru H_A, popsaném v kap. 10, funkcionál

$$Fu = \sum_{i=0}^{k} \int_a^b p_i (u^{(i)})^2\,dx - 2\int_a^b fu\,dx\,. \tag{19.126}$$

Jestliže k hledání tohoto zobecněného řešení použijeme některé z metod uvedených v předcházející části knihy a zvolíme-li bázi z prvků lineálu M, dokážeme obdobně jako v pozn. 19.4, že posloupnost $\{u_n^{(k)}(x)\}$ je konvergentní v $L_2(a, b)$ a posloupnost $\{u_n^{(k-1)}(x)\}$ stejnoměrně konvergentní v $\langle a, b\rangle$. Odtud pak již lze snadno dospět k závěru, že zobecněné řešení $u_0(x)$ má v $\langle a, b\rangle$ spojité derivace do řádu $(k-1)$-ního včetně a skoro všude v $\langle a, b\rangle$ derivaci $u_0^{(k)} \in L_2(a, b)$; posloupnosti $\{u_n^{(i)}(x)\}$, $i = 0, 1, \ldots, k-1$, konvergují v $\langle a, b\rangle$ stejnoměrně k funkcím $u_0(x)$, $u_0'(x)$, ..., $u_0^{(k-1)}(x)$ a posloupnost $\{u_n^{(k)}(x)\}$ konverguje k funkci $u_0^{(k)}(x)$ v průměru.

Poznámka 19.7. Úplný rozbor, který jsme provedli v této kapitole pro diferenciální rovnici (19.1) s okrajovými podmínkami (19.3), je pro analogický případ rovnice (19.113) velmi pracný. Ukážeme však alespoň na příkladě, jak postupovat v případě jiných okrajových podmínek, než jsou podmínky (19.116) a (19.117).

Uvažujme rovnici čtvrtého řádu

$$(p_2u'')'' - (p_1u')' + p_0u = f, \tag{19.127}$$

s koeficienty splňujícími požadavky vyslovené dříve [tedy p_0, p_1, p_1', p_2, p_2', p_2'' jsou spojité funkce v $\langle a, b\rangle$,

$$p_0(x) \geqq 0, \quad p_1(x) \geqq 0, \quad p_2(x) \geqq p > 0 \text{ v } \langle a, b\rangle], \tag{19.128}$$

s okrajovými podmínkami

$$u(a) = 0, \quad u(b) = 0, \tag{19.129}$$

$$u''(a) = 0, \quad u''(b) = 0. \tag{19.130}$$

Jako dříve označme M lineál funkcí spojitých s derivacemi do čtvrtého řádu včetně v $\langle a, b\rangle$ a splňujících podmínky (19.129), (19.130) a označme A operátor definovaný na tomto lineálu předpisem

$$Au = (p_2u'')'' - (p_1u')' + p_0u. \tag{19.131}$$

Integrováním per partes dostaneme vzhledem k podmínkám (19.129), (19.130)

(19.132)
$$(Au, v) = [(p_2u'')'v]_a^b - \int_a^b (p_2u'')'v' \, dx - [p_1u'v]_a^b + \int_a^b p_1u'v' \, dx + \int_a^b p_0uv \, dx =$$
$$= -[p_2u''v']_a^b + \int_a^b p_2u''v'' \, dx + \int_a^b p_1u'v' \, dx + \int_a^b p_0uv \, dx =$$
$$= \int_a^b p_2u''v'' \, dx + \int_a^b p_1u'v' \, dx + \int_a^b p_0uv \, dx,$$

odkud plyne symetričnost operátoru A na lineálu M. Dále podle (19.132) je

$$(Au, u) = \int_a^b p_2u''^2 \, dx + \int_a^b p_1u'^2 \, dx + \int_a^b p_0u^2 \, dx \geqq p \int_a^b u''^2 \, dx. \tag{19.133}$$

Napíšeme-li nyní Poincaréovu nerovnost (18.52), str. 206, pro funkci $u'(x)$ ($u \in M$), dostaneme

$$\int_a^b u'^2 \, dx \leqq c_3 \int_a^b u''^2 \, dx + c_4 \left(\int_a^b u' \, dx \right)^2 = c_3 \int_a^b u''^2 \, dx, \tag{19.134}$$

neboť

$$\int_a^b u' \, dx = u(b) - u(a) = 0$$

v důsledku podmínek (19.129). Dále vzhledem k týmž podmínkám platí nerovnost (18.28), str. 200,

$$\|u\|^2 = \int_a^b u^2 \, dx \leqq c_1 \int_a^b u'^2 \, dx. \tag{19.135}$$

Z (19.133), (19.134) a (19.135) plyne

$$(Au, u) \geqq \frac{p}{c_1c_3} \|u\|^2, \tag{19.136}$$

kde pro c_1, resp. c_3 lze použít odhadů

$$c_1 = \frac{(b-a)^2}{\pi^2}, \quad c_3 = \frac{(b-a)^2}{2}. \tag{19.137}$$

Tím je pozitivní definitnost operátoru A dokázána. Úloha (19.127), (19.129), (19.130) se tedy redukuje na hledání minima funkcionálu

$$Fu = \int_a^b p_2u''^2 \, dx + \int_a^b p_1u'^2 \, dx + \int_a^b p_0u^2 \, dx - 2\int_a^b fu \, dx \tag{19.138}$$

v příslušném prostoru H_A. Viz numerický příklad na str. 261.

Kapitola 20
Otázka volby báze

a) Obecné zásady

Úvahy uvedené v této kapitole se budou týkat převážně — i když nikoli výhradně — Ritzovy metody, která je z variačních metod nejpoužívanější. Proto také budeme většinou mluvit přímo o Ritzově metodě a jen na některých místech upozorníme na možnost, resp. vhodnost aplikace uvedených výsledků i v jiných případech. Ostatně čtenář dovede jistě sám posoudit, který z těchto výsledků je v příslušném případě užitečný.

Jestliže k minimalizování funkcionálu

$$Fu = (u, u)_A - 2(f, u),$$

příslušného danému pozitivně definitnímu operátoru A a definovaného pro $u \in H_A$, kde H_A je prostor, o němž jsme podrobně hovořili v kap. 10, používáme Ritzovy metody, potřebujeme nejprve zkonstruovat vhodnou posloupnost funkcí[1])

$$\varphi_1(x), \ldots, \varphi_n(x), \ldots, \tag{20.1}$$

z nichž pak tvoříme Ritzovu posloupnost

$$u_1(x), \ldots, u_n(x), \ldots. \tag{20.2}$$

Přitom n-tý člen Ritzovy posloupnosti je lineární kombinací funkcí (20.1),

$$u_n = a_1\varphi_1 + \ldots + a_n\varphi_n.$$

Koeficienty a_n v této lineární kombinaci jsou určeny soustavou rovnic (13.11), tj. soustavou

$$\begin{aligned} (\varphi_1, \varphi_1)_A\, a_1 + (\varphi_1, \varphi_2)_A\, a_2 + \ldots + (\varphi_1, \varphi_n)_A\, a_n &= (f, \varphi_1), \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots& \\ (\varphi_1, \varphi_n)_A\, a_1 + (\varphi_2, \varphi_n)_A\, a_2 + \ldots + (\varphi_n, \varphi_n)_A\, a_n &= (f, \varphi_n). \end{aligned} \tag{20.3}$$

Od posloupnosti (20.1) žádáme, aby měla určité vlastnosti, srov. kap. 13, především aby v prostoru H_A tvořila bázi, tj.

a) aby byla v tomto prostoru úplná;

b) aby byla v H_A lineárně nezávislá.

[1]) Protože v této části knihy se zabýváme diferenciálními rovnicemi, zajímají nás jen ty prostory, jejichž prvky jsou funkce.

Vlastnost b) zaručuje, jak víme, jednoznačnou řešitelnost soustavy (20.3). Vlastnost a) pak zaručuje konvergenci Ritzovy posloupnosti $\{u_n\}$ v prostoru H_A, a tím také v prostoru $L_2(G)$, k zobecněnému řešení u_0 uvažovaného problému, stručně řečeno zaručuje konvergenci Ritzovy metody.

Zatímco úloha najít posloupnost (20.1) tak, aby byla úplná v H_A, není v obecném případě snadná — otázka volby *úplné* posloupnosti je jednou z hlavních otázek této kapitoly —, bývá požadavek b) zpravidla již automaticky splněn, resp. bývá snadné jej ověřit.

Vlastnost b) zaručuje, jak jsme řekli, jednoznačnou řešitelnost soustavy (20.3), vlastnost a) konvergenci Ritzovy metody. Po teoretické stránce je tedy všechno v pořádku. Přesto při numerickém výpočtu může snadno dojít k nepředvídaným obtížím. Při splnění uvedených požadavků je totiž zaručena konvergence, což, jak víme, znamená, že n-tý člen u_n Ritzovy posloupnosti lze učinit (v metrice prostoru H_A) libovolně blízkým k hledanému zobecněnému řešení u_0 daného problému, je-li n dostatečně velké. To však představuje úlohu řešit soustavu (20.3) o velkém počtu neznámých. Zde již mají podstatný význam zaokrouhlovací chyby, a to jednak při výpočtu koeficientů soustavy (20.3), jednak při samotném řešení této soustavy. Může se totiž stát, že funkce (20.1) jsou v prostoru H_A „málo" lineárně nezávislé v tom smyslu, že determinant soustavy (20.3) je „málo" různý od nuly. Názorným dokladem toho, k jak nesmyslným výsledkům můžeme dospět, i když posloupnost (20.1) splňuje požadavky a) a b), je příklad ukázaný v [29], str. 47. Srov. i knihu [4]. Odtud vyplývají, jak hned uvidíme, další požadavky na volbu báze, které se týkají numerického procesu v Ritzově metodě.

Označme $\boldsymbol{R}_n$ matici soustavy (20.3),

$$\boldsymbol{a}_n = \begin{pmatrix} a_1 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix}^{1)} \tag{20.4}$$

vektor řešení soustavy (20.3) a $\boldsymbol{f}_n$ vektor pravých stran této soustavy. Při tomto označení má soustava (20.3) tvar

$$\boldsymbol{R}_n \boldsymbol{a}_n = \boldsymbol{f}_n. \tag{20.5}$$

Nechť vlivem zaokrouhlovacích chyb dostaneme místo matice $\boldsymbol{R}_n$ matici, kterou

[1]) Resp. přesněji

$$\boldsymbol{a}_n^{(n)} = \begin{pmatrix} a_1^{(n)} \\ \vdots \\ a_n^{(n)} \end{pmatrix},$$

chceme-li zdůraznit, že koeficienty funkcí φ_k v Ritzově posloupnosti závisejí na n, viz pozn. pod čarou na str. 166.

označíme $\boldsymbol{R}_n + \boldsymbol{Q}_n$, místo vektoru $\boldsymbol{f}_n$ nechť dostaneme vektor $\boldsymbol{f}_n + \boldsymbol{g}_n$. Místo soustavy (20.5) dostaneme tak soustavu

$$(\boldsymbol{R}_n + \boldsymbol{Q}_n)\, \boldsymbol{b}_n = (\boldsymbol{f}_n + \boldsymbol{g}_n)\,, \tag{20.6}$$

jejímž řešením je vektor

$$\boldsymbol{b}_n = \begin{pmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix}. \tag{20.7}$$

Označme

$$v_n = b_1\varphi_1 + \ldots + b_n\varphi_n\,.$$

Řekneme, že numerický proces v Ritzově metodě je *stabilní*, lze-li najít čísla p, q a r, nezávislá na n a taková, že je-li $\|\boldsymbol{Q}_n\| \leqq r$, pak

$$\|v_n - u_n\|_A \leqq p\|\boldsymbol{Q}_n\| + q\|\boldsymbol{g}_n\|\,.\text{[1]} \tag{20.8}$$

Je-li tedy dáno $\varepsilon > 0$, stačí vypočítat prvky matice $\boldsymbol{R}_n$ a vektoru $\boldsymbol{f}_n$ s dostatečnou přesností, abychom dostali $\|v_n - u_n\|_A < \varepsilon$.

Při právě řešené otázce numerické stability jsme nevzali v úvahu zaokrouhlovací chyby, vznikající při samotném řešení soustavy (20.3), např. při řešení iteracemi, ale i jinými metodami. Vliv těchto chyb je, jak známo, tím menší, čím je menší tzv. *číslo podmíněnosti* (stručně *podmíněnost*) matice dané soustavy, což je poměr největšího vlastního čísla této matice k nejmenšímu. Bude jistě přirozený požadavek, aby toto číslo zůstalo omezené stejnoměrně k n.

Jak tedy z uvedeného textu plyne, bude vhodné položit na bázi (20.1) tyto další požadavky:

Báze (20.1) je taková, aby

c) numerický proces byl stabilní;

d) čísla podmíněnosti matice $\boldsymbol{R}_n$ byla stejnoměrně omezená vzhledem k n.

Splnění těchto požadavků pak vylučuje různá „překvapení" při numerickém výpočtu.

V kap. 11, jsme se zmínili o možnosti odhadnout chybu na základě vzorce (11.21),

$$\|u_n - u\|_A \leqq \frac{\|Au_n - f\|}{C}\,, \tag{20.9}$$

kde $\|Au_n - f\|$ je norma rozdílu $Au_n - f$ v prostoru $L_2(G)$ a C je konstanta pozitivní definitnosti ze vzorce (10.1),

$$\|u\|_A^2 \geqq C^2\|u\|^2\,. \tag{20.10}$$

[1]) Normou matice zde rozumíme euklidovskou normu: Je-li $\mathbf{C} = (c_{ij})$, pak $\|\mathbf{C}\| = (\sum_{i,j=1}^{n} c_{ij}^2)^{1/2}$. Vektor $\boldsymbol{g}_n$ pokládáme za jednosloupcovou matici.

Již v diskusi o přednostech a nedostatcích Ritzovy metody jsme se zmínili o tom, že odhadu (20.9) nelze vždy s úspěchem využít, neboť ne vždy platí

$$Au_n - f \to 0 \quad \text{pro} \quad n \to \infty\,, \tag{20.11}$$

a že platnost, resp. neplatnost vztahu (20.11) závisí na vhodné volbě báze. Další požadavek, kladený na bázi (20.1), tedy bude:

e) Báze (20.1) je taková, že v případě Ritzovy metody platí (20.11).[1])

Po tomto úvodu uvedeme některá kritéria a návody, jak zkonstruovat bázi, která má vlastnosti a) až e), resp. aspoň některé z nich. Přitom podstatně využijeme Michlinových výsledků, zejména z jeho monografie [29]. Viz také [4].

Připomeňme nejprve některé klasické příklady systémů úplných v $L_2(G)$. Již v kap. 4 jsme se seznámili se systémy jednoduchých polynomů: Tak v prostoru $L_2(a, b)$ je úplný systém

$$1, x, x^2, x^3, \ldots, \tag{20.12}$$

v prostoru $L_2(G)$ odpovídající systém jednoduchých polynomů v N proměnných, např. v rovinném případě ($N = 2$) systém

$$1, x, y, x^2, xy, y^2, \ldots\,.\text{[2]} \tag{20.13}$$

Systémy typu (20.12), (20.13) ovšem nejsou vhodné jako báze v případech, které nás právě nejvíce zajímají, kdy totiž máme splnit některé homogenní okrajové podmínky. V případě funkcí jedné proměnné splňují nulové okrajové podmínky v krajních bodech intervalu $\langle a, b\rangle$ např. funkce

$$\varphi_n(x) = \sin\frac{n\pi(x - a)}{b - a}\,, \quad n = 1, 2, \ldots, \tag{20.14}$$

speciálně tedy v intervalu $\langle 0, \pi\rangle$ funkce

$$\varphi_n(x) = \sin nx\,, \quad n = 1, 2, \ldots, \tag{20.15}$$

[1]) Poznamenejme, že u některých metod, např. u metody nejmenších čtverců, je (20.11) přímým důsledkem užité metody.

[2]) Připomeňme (srov. kap. 4), že prostor $L_2(G)$ je separabilní: Spočetnou množinu hustou v metrice tohoto prostoru tvoří množina polynomů (v N proměnných) s racionálními koeficienty. Poznamenejme, že tato množina je hustá, v příslušných metrikách, i ve všech prostorech, s nimiž se v této knize setkáme, tj. v prostorech H_A i v prostorech $W_2^{(k)}(G)$, které zavedeme ve čtvrté části této knihy, takže všechny tyto prostory jsou separabilní. Tento poznatek bude v dalším textu užitečný.

přičemž je známo, že systém (20.14) je v $L_2(a, b)$ úplný. Podobně je úplný v $L_2(G)$ systém funkcí

$$\varphi_{mn}(x) = \sin\frac{m\pi(x_1 - a)}{b - a}\sin\frac{n\pi(x_2 - c)}{d - c}\,, \quad m = 1, 2, \ldots, \quad n = 1, 2, \ldots, \tag{20.16}$$

splňujících nulové okrajové podmínky na hranici obdélníka $G = (a, b) \times (c, d)$, speciálně systém funkcí

$$\varphi_{mn}(x) = \sin mx_1 \sin nx_2\,,$$

splňujících nulové okrajové podmínky na hranici čtverce $(0, \pi) \times (0, \pi)$. Obdobná tvrzení platí na příslušných kvádrech v N-rozměrném prostoru (pro $N > 2$).

Je otázka, lze-li použít těchto systémů i jako úplných systémů v prostorech H_A. Uvedeme bez důkazu tuto větu (důkaz viz např. v [29], str. 366):

Věta 20.1. *Nechť (jako obvykle) A je pozitivně definitní operátor na lineálu D_A, hustém v Hilbertově prostoru H. Je-li posloupnost*

$$A\varphi_1, A\varphi_2, \ldots, A\varphi_n, \ldots \quad (\varphi_1, \varphi_2, \ldots \in D_A) \tag{20.17}$$

úplná v H, pak posloupnost

$$\varphi_1, \varphi_2, \ldots, \varphi_n, \ldots \tag{20.18}$$

je úplná v H_A.

Odtud ihned vyplývá, že v případě Dirichletova problému pro Poissonovu rovnici na obdélníku $G = (a, b) \times (c, d)$,

$$-\Delta u = f \text{ v } G\,, \tag{20.19}$$

$$u = 0 \text{ na } \Gamma\,, \tag{20.20}$$

je systém (20.16) v příslušném prostoru H_A úplný. Operátor A, daný na lineálu D_A funkcí patřících do $C^{(2)}(\bar{G})$ a splňujících podmínku (20.20) je totiž (viz kap. 22, str. 270) na tomto lineálu pozitivně definitní. Každá z funkcí (20.16) zřejmě patří do D_A; dále je

$$A\varphi_{mn} = -\Delta\varphi_{mn} = \left(\frac{m^2\pi^2}{(b - a)^2} + \frac{n^2\pi^2}{(d - c)^2}\right)\sin\frac{m\pi(x_1 - a)}{b - a}\sin\frac{n\pi(x_2 - c)}{d - c}\,,$$

takže funkce $A\varphi_{mn}$ se liší od funkcí φ_{mn} jen (nenulovými) multiplikativními konstantami, a tvoří tedy v $L_2(G)$ úplný systém, neboť funkce φ_{mn} tvoří v $L_2(G)$ úplný systém. Podle věty 20.1 tvoří funkce φ_{mn} úplný systém i v prostoru H_A. Mimoto jsou tyto funkce zřejmě v prostoru H_A ortogonální, a tedy lineárně nezávislé, takže tvoří v tomto prostoru bázi.

Totéž platí i v obecném případě N dimenzí. Zejména pro $N = 1$ tvoří v případě problému

$$-u'' = f\,, \tag{20.21}$$

$$u(a) = 0\,, \quad u(b) = 0 \tag{20.22}$$

bázi funkce (20.14).

Další možnost, jak zachytit homogenní nulové okrajové podmínky a využít přitom úplnosti systému polynomů, je tato (zápis provádíme pro jednoduchost pro rovinný případ, $N = 2$): Nechť A je pozitivně definitní diferenciální operátor druhého řádu (např. Laplaceův operátor) na lineálu D_A funkcí spojitých s parciálními derivacemi do druhého řádu včetně v $\bar{G}$ a splňujících okrajovou podmínku

$$u = 0 \text{ na } \Gamma\,. \tag{20.23}$$

Nechť rovnice hranice Γ je

$$g(x, y) = 0\,, \tag{20.24}$$

kde g je dostatečně hladká funkce dvou proměnných,[1]) kladná v oblasti G. Pak je v H_A úplná posloupnost funkcí (20.13), násobených funkcí $g(x, y)$ [takže tyto funkce splňují podmínku (20.23)], tj. posloupnost funkcí

$$g, xg, yg, x^2g, xyg, y^2g, \ldots\,. \tag{20.25}$$

(Viz [28], str. 368, 369.) Jde-li např. o kruh se středem v počátku a poloměrem R, resp. elipsu s poloosami a, b v osách souřadnic, resp. o obdélník $(-a, a) \times (-b, b)$, resp. o obdélník $(-a, a) \times (-b, b)$ s kruhovým otvorem se středem v počátku a poloměrem R [$R < \min(a, b)$], zvolíme za funkci $g(x, y)$ funkci

$$R^2 - x^2 - y^2\,,$$

resp.

$$1 - \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2}\,,$$

resp.

$$(a^2 - x^2)(b^2 - y^2)\,,$$

resp.

$$(x^2 - a^2)(y^2 - b^2)(x^2 + y^2 - R^2)\,,$$

která je zřejmě v $\bar{G}$ dostatečně hladká, je rovna nule na hranici a kladná v (otevřené) oblasti G. Např. Ritzovu aproximaci u_6 lze pak v prvním případě volit ve tvaru

$$u_6(x, y) = (R^2 - x^2 - y^2)(a_1 + a_2x + a_3y + a_4x^2 + a_5xy + a_6y^2)\,. \tag{20.26}$$

[1]) Stačí, má-li tato funkce v $\bar{G}$ spojité parciální derivace do druhého řádu včetně.

Obdobně můžeme postupovat v případě vyššího počtu dimenzí, resp. v případě rovnic vyššího řádu. Řešíme-li např. v oblasti G problém

$$\Delta^2 u = f\,, \tag{20.27}$$

$$u = 0\,, \quad \frac{\partial u}{\partial \nu} = 0 \text{ na } \Gamma\,, \tag{20.28}$$

můžeme použít systému funkcí (20.13), násobených funkcí $g^2(x, y)$. Tento systém pak bude úplný v H_A. [Funkci $g(x, y)$ zde volíme v kvadrátu, aby byly splněny zároveň obě podmínky (20.28).] Podobně lze při řešení Dirichletova problému pro rovnice vyšších řádů použít systému funkcí (20.13), násobených dostatečně vysokou mocninou funkce g.

Uvedený způsob lze v jednotlivých případech vhodně modifikovat. Řešíme-li např. na půlkruhu

$$x^2 + y^2 < R^2\,, \quad y > 0$$

problém

$$\Delta^2 u = f\,, \tag{20.29}$$

$$u = 0\,, \quad \frac{\partial u}{\partial \nu} = 0 \quad \text{na horní půlkružnici}\,, \tag{20.30}$$

$$u = 0 \qquad \text{pro} \quad y = 0\,, \tag{20.31}$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial \nu^2} = 0 \qquad \text{pro} \quad y = 0 \tag{20.32}$$

(půlkruhová deska, vetknutá do kruhové části hranice a prostě podepřená na zbývající části hranice), můžeme za bázi zvolit posloupnost funkcí (20.13), násobených funkcí

$$y(R^2 - x^2 - y^2)^2\,. \tag{20.33}$$

Funkce (20.33) je na G kladná a dostatečně hladká a pro každou z funkcí takto vzniklé posloupnosti budou splněny podmínky (20.30) a (20.31). Podmínku (20.32) není nutno a priori splnit, neboť je nestabilní.

Uvedené systémy [tj. systémy typu (20.25), popř. vhodně modifikované] jsou sice úplné v H_A, jsou však v obecném případě „málo ortogonální“, a tedy ne vždy vhodné k numerickému výpočtu. Značného zlepšení v tomto směru lze získat užitím Legendrových polynomů, viz [29]. Často však bývá podstatně účinnější cesta, kterou popíšeme:

Čtenáři je pravděpodobně známý pojem vlastního čísla, resp. vlastní funkce některého problému. Podrobně se touto problematikou zabýváme v kap. 37 až 41. Zde stručně uvedeme jen některé výsledky a příklady.

Nechť A je lineární diferenciální operátor[1]), definovaný na lineálu D_A dostatečně hladkých funkcí (je třeba, aby tyto funkce měly potřebný počet derivací, neboť je třeba na ně aplikovat operátor A), vyhovujících daným homogenním okrajovým podmínkám. Řekneme, že číslo λ je *vlastním číslem operátoru A*, existuje-li nenulová funkce $u \in D_A$ tak, že

$$Au - \lambda u = 0\,. \tag{20.34}$$

Funkci $u(x)$ [$u(x) \not\equiv 0$] nazýváme *vlastní funkcí operátoru A*, příslušnou tomuto vlastnímu číslu.

Z homogennosti uvažovaného problému plyne, že je-li $u(x)$ vlastní funkce operátoru A, příslušná vlastnímu číslu λ, pak že funkce $ku(x)$, kde k je nenulová konstanta, je také vlastní funkcí operátoru A.

V kap. 39 ukážeme (i když příslušnou větu tam budeme formulovat v poněkud odlišném tvaru), že pro pozitivně definitní diferenciální operátory typů, s nimiž se v této knize setkáme, platí: Operátor A má spočetně mnoho vlastních čísel $\lambda_1, \lambda_2, \ldots$ $\ldots, \lambda_n, \ldots$ a spočetně mnoho příslušných vlastních funkcí

$$\varphi_1, \varphi_2, \ldots, \varphi_n, \ldots\,, \tag{20.35}$$

které lze v H_A ortonormalizovat (takže jsou zároveň v H_A lineárně nezávislé). Systém (20.35) je *úplný* v H_A.

Systém (20.35) splňuje tedy požadavky a), b), vyslovené na začátku této kapitoly. Lze ukázat (viz [29]), že je-li ortonormovaný, *splňuje i požadavky* c), d) *a* e), týkající se numerické stability procesu v Ritzově metodě, stejnoměrné podmíněnosti Ritzových matic a konvergence posloupnosti Au_n k funkci f v $L_2(G)$.

Velmi jednoduchým příkladem problému vlastního čísla je problém

$$-u'' - \lambda u = 0\,, \tag{20.36}$$

$$u(0) = 0\,, \quad u(\pi) = 0 \tag{20.37}$$

pro operátor $A = -u''$, jehož definiční obor D_A tvoří funkce dvakrát spojitě diferencovatelné v intervalu $\langle 0, \pi \rangle$ a splňující podmínky (20.37). Určení vlastních čísel i vlastních funkcí je zde neobyčejně jednoduché. Hledejme tedy nenulové řešení problému (20.36), (20.37). Snadno zjistíme, že pokud je $\lambda = 0$ nebo $\lambda < 0$, nenulové řešení neexistuje. [Je-li totiž $\lambda = 0$, redukuje se rovnice (30.36) na rovnici $-u'' = 0$ s obecným integrálem $u(x) = ax + b$; z podmínek (20.37) pak jednoduchým výpočtem plyne $a = 0$, $b = 0$, takže $u(x) \equiv 0$. K témuž výsledku dospějeme obdobným způsobem, je-li $\lambda < 0$.] Nechť tedy je

$$\lambda = n^2\,, \quad n > 0\,.$$

[1]) V této části knihy uvažujme jen diferenciální operátory s dostatečně hladkými koeficienty v $\overline{G}$.

Rovnice (20.36), tj. rovnice

$$u'' + n^2 u = 0\,,$$

má pak obecný integrál

$$u = a \cos nx + b \sin nx\,.$$

Z první podmínky (20.37) plyne $a = 0$, takže

$$u = b \sin nx\,.$$

Z druhé podmínky (20.37) plyne

$$b \sin n\pi = 0\,.$$

Nemá-li být řešení nulové, je $b \neq 0$, takže musí být $\sin n\pi = 0$. Protože $n > 0$ podle předpokladu, plynou odtud pro n hodnoty

$$n_1 = 1,\ n_2 = 2,\ n_3 = 3, \ldots\,.$$

Vlastní čísla daného problému jsou tedy

$$\lambda_1 = n_1^2 = 1,\ \lambda_2 = n_2^2 = 4,\ \lambda_3 = n_3^2 = 9, \ldots$$

a příslušné vlastní funkce jsou

(20.38) $$\sin x,\ \sin 2x,\ \sin 3x, \ldots\,.$$

Funkce (20.38) jsou v odpovídajícím prostoru H_A ortogonální, jak lze ověřit přímým výpočtem:

$$(A \sin jx, \sin kx) = \int_0^\pi j^2 \sin jx \sin kx \,\mathrm{d}x = \begin{cases} 0\,, & \text{je-li } k \neq j\,, \\ \dfrac{\pi j^2}{2}\,, & \text{je-li } k = j\,. \end{cases}$$

Protože skalární součin $(u, v)_A$ v prostoru H_A je jen rozšířením skalárního součinu (Au, v), vyplývá odtud ortogonálnost funkcí (20.38) v H_A.[1])

Ve shodě s dříve uvedeným tvrzením je mimoto systém (20.38) úplný v H_A.[2]) Normujeme-li jej v tomto prostoru, bude splňovat i požadavky c), d), e), formulované v předcházejícím textu.

Zcela analogicky se ukáže, že (20.14) je systém vlastních funkcí problému

$$-u'' - \lambda u = 0\,,$$

$$u(a) = 0\,,\quad u(b) = 0\,,$$

[1]) Je ovšem možno použít přímo skalárního součinu $\int_0^\pi u'v' \,\mathrm{d}x$, srov. příkl. 10.1, str. 128.

[2]) Úplnost systému (20.15) v H_A plyne tedy nejen z věty 20.1, ale i z právě uvedeného výsledku.

a dále, že (20.16) je systém vlastních funkcí problému

(20.39) $$-\Delta u - \lambda u = 0 \text{ v } G\,,$$

(20.40) $$u = 0 \text{ na } \Gamma$$

na obdélníku $G = (a, b) \times (c, d)$, tj. systém vlastních funkcí operátoru $-\Delta$, uvažovaného na lineálu funkcí spojitých s parciálními derivacemi do druhého řádu včetně v $\bar{G}$ a splňujících podmínku (20.40).[1]) Podobně lze sestrojit analogické systémy vlastních funkcí na kvádrech vyšších dimenzí.

Zcela obdobně jako v případě problému (20.36), (20.37) zjistíme, že

(20.41) $$\cos x\,,\quad \cos 2x\,,\quad \cos 3x, \ldots$$

je systém vlastních funkcí operátoru $-u''$, pozitivně definitního (viz str. 214) na lineálu $\tilde{M}_2$ funkcí dvakrát spojitě diferencovatelných v intervalu $\langle 0, \pi \rangle$ a splňujících podmínky

(20.42) $$\int_0^\pi u(x) \,\mathrm{d}x = 0\,,$$

(20.43) $$u'(0) = 0\,,\quad u'(\pi) = 0\,.$$

Podobně funkce

(20.44) $$\cos \frac{n\pi(x - a)}{b - a}\,,\quad n = 1, 2, \ldots$$

tvoří systém vlastních funkcí obdobného problému, uvažovaného na intervalu $\langle a, b \rangle$.

V uvedených případech jsme sestrojili systém vlastních funkcí — a tím i vhodnou bázi v H_A, splňující (po normování v tomto prostoru) požadavky a) až e) — velmi jednoduchým způsobem, neboť uvažované operátory $-u''$, $-\Delta u$ i jejich definiční obory (interval, obdélník apod.) byly velmi jednoduché. Problém by byl daleko obtížnější, kdybychom uvažovali např. operátory s nekonstantními koeficienty. Tím důležitější je proto výsledek který formulujeme ve větě 20.2 na str. 245 a který nám umožní „nahradit" systém vlastních funkcí složitějšího operátoru systémem vlastních funkcí jednoduššího operátoru. Předem však zavedeme pojem samoadjungovaného operátoru.

Uvažujme lineární operátor A s definičním oborem D_A, hustým v Hilbertově prostoru H se skalárním součinem (u, v). Pro některá $v \in H$ existuje takové $v^* \in H$, že platí

$$(Au, v) = (u, v^*) \quad \text{pro každé} \quad u \in D_A\,.$$

[1]) Vzpomeňme si, že systému (20.16), předem ještě znormovaného, jsme použili v příkl. 12.1 při užití metody ortonormálních řad.

Tuto vlastnost má např. prvek $v = 0$; příslušný prvek je $v^* = 0$: Pro každé $u \in D_A$ zřejmě platí

$$(Au, 0) = (u, 0) = 0 .$$

Je-li operátor A symetrický na lineálu D_A, mají tuto vlastnost všechny prvky $v \in D_A$; odpovídající prvky jsou $v^* = Av$, neboť pro každé $u \in D_A$, $v \in D_A$ v tomto případě platí

$$(Au, v) = (u, v^*) .$$

Množina všech $v \in H$ s touto vlastností však může být i širší.

Označme v obecném případě M množinu všech $v \in H$ s uvažovanou vlastností. Protože lineál D_A je hustý v H, je prvek v^* prvkem $v \in M$ vždy jednoznačně určen. Tím je na množině M definován určitý operátor A^*,

$$v^* = A^*v , \quad v \in M ,$$

takový, že pro každé $u \in D_A$ a pro každé $v \in M = D_{A^*}$ platí

$$(Au, v) = (u, A^*v) .$$

Operátor A^* se nazývá *adjungovaný k operátoru A*. Je-li $A^* = A$ (tj. je-li $D_{A^*} = D_A$ a $A^*u = Au$ pro každé $u \in D_A$), nazývá se operátor A *samoadjungovaný*.

Pro symetrický operátor je zřejmě $D_A \subset D_{A^*}$, přičemž, jak jsme se zmínili, může skutečně množina D_{A^*} být širší než množina D_A. Všimněme si ještě, že (zhruba řečeno) čím širší je definiční obor D_A daného operátoru, tím užší je definiční obor D_{A^*} adjungovaného operátoru [neboť definiční rovnice $(Au, v) = (u, v^*)$ má platit pro „více" prvků u]. Lze očekávat, že rozšíříme-li vhodně definiční obor symetrického operátoru, zúžíme tím definiční obor adjungovaného operátoru tak, že oba definiční obory splynou. Jak lze ukázat (viz např. [30]), mají tuto vlastnost pozitivně definitní operátory: *Každý pozitivně definitní operátor*[1]) *lze rozšířit na samoadjungovaný.* Přitom takto rozšířený operátor zůstane pozitivně definitní a systém jeho vlastních funkcí splývá se systémem vlastních funkcí původního operátoru A.

Dva pozitivně definitní samoadjungované operátory A, B se nazývají *shodné*, je-li $D_A = D_B$.[2])

Pokud jde o pozitivně definitní diferenciální operátory týchž řádů, s kterými se zabýváme v této části naší knihy a jejichž původní definiční obory se skládají z dostatečně hladkých funkcí, můžeme zhruba říci, že příslušné samoadjungované operátory $\bar{A}$, $\bar{B}$, které jsou jejich rozšířením, jsou shodné, jsou-li definiční obory

[1]) Podle definice je pozitivně definitní operátor a priori symetrický.

[2]) Upozorňujeme čtenáře, že terminologie není v literatuře ustálená. V žádném případě ze shodnosti dvou operátorů nemusí plynout jejich rovnost podle def. 8.4, str. 92.

D_A, D_B původních operátorů A, B totožné. Podrobně se touto problematikou zabývá kniha [29], kde také čtenář najde důkazy dále uvedených tvrzení. Např. operátory

$$A = -(pu')' + ru , \tag{20.45}$$

$$B = -u'' , \tag{20.46}$$

kde p, p', r jsou funkce spojité v $\langle a, b\rangle$, $p(x) \geqq p_0 > 0$, $r(x) \geqq 0$ v $\langle a, b\rangle$, jsou pozitivně definitní na společném definičním oboru $D_A = D_B$ funkcí dvakrát spojitě diferencovatelných v $\langle a, b\rangle$ a splňujících podmínku

$$u(a) = 0 , \quad u(b) = 0 . \tag{20.47}$$

Jejich samoadjungovaná rozšíření $\bar{A}$, $\bar{B}$ jsou shodné operátory.

Totéž platí pro samoadjungovaná rozšíření operátorů

$$A = -\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + k^2 \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}\right), \quad k > 0 , \tag{20.48}$$

$$B = -\Delta u , \tag{20.49}$$

pozitivně definitních na společném definičním oboru $D_A = D_B$ funkcí spojitých s parciálními derivacemi do druhého řádu včetně v uzavřené oblasti $\bar{G}$ a splňujících podmínku

$$u = 0 \text{ na } \Gamma . \tag{20.50}$$

Další příklady si jistě čtenář zkonstruuje sám.

Dva shodné operátory $\bar{A}$, $\bar{B}$ nazveme *příbuznými*, lze-li najít kladné konstanty c a k tak, že pro každé $u \in D_{\bar{A}} = D_{\bar{B}}$ platí

$$|(\bar{A}u, (\bar{B} + kI)u)| \geqq c\|\bar{A}u\|^2 ,$$

kde I je jednotkový operátor.

Lze opět ukázat ([29], str. 138 a dále), že shodné operátory, které uvažujeme v naší knize, splňují uvedenou podmínku.

Platí tato důležitá věta (viz [29], str. 369 a 371, viz též [28]):

Věta 20.2. *Nechť $\bar{A}$ a $\bar{B}$ jsou shodné příbuzné operátory. Pak ortonormální systém*[1]) *vlastních funkcí operátoru $\bar{B}$ má všechny požadované vlastnosti* a) *až* e) *kladené na bázi v prostoru H_A.*

Zhruba řečeno, při volbě báze s vlastnostmi a) až e) lze zaměnit ortonormální systém vlastních funkcí operátoru $\bar{A}$ ortonormálním systémem vlastních funkcí některého jednoduššího operátoru $\bar{B}$, shodného a příbuzného s operátorem $\bar{A}$.

[1]) Normovaný v metrice prostoru H_B nebo, což je totéž, v metrice prostoru H_B.

Například pro Ritzovu metodu řešení problému

$$-(pu')' + ru = f,$$
$$u(0) = 0, \quad u(\pi) = 0,$$

lze využít shodnosti a příbuznosti samoadjungovaného rozšíření operátorů (20.45) a (20.46) a za bázi lze zvolit systém (20.38) vlastních funkcí operátoru B, ortonormovaný v H_B, tj. v prostoru se skalárním součinem

$$(u, v)_B = \int_0^\pi u'v' \, dx,$$

tedy systém

(20.51) $$\varphi_n(x) = \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{(\pi)}\, n} \sin nx, \quad n = 1, 2, \ldots.$$

b) Volba báze pro obyčejné diferenciální rovnice

Obecné úvahy, uvedené v předcházejícím textu, dávají dostatečný základ pro volbu báze v konkrétních případech. Praktické důsledky, plynoucí z těchto úvah, lze dále zlepšit, resp. zjednodušit. V tomto směru odkazujeme čtenáře na knihy [29], [4]. Zde uvedeme jen konkrétní návody pro volbu báze při řešení obyčejných diferenciálních rovnic s nejběžnějšími okrajovými podmínkami. Odpovídající návody pro volbu báze v případě parciálních diferenciálních rovnic s okrajovými podmínkami najde čtenář v kap. 25.

Poznamenejme ještě, že multiplikativní konstanty nezávislé na n a vyskytující se při normování vlastních funkcí nemají vliv na porušení nebo neporušení vlastností a) až e) uvažované báze a že je možno je pro jednoduchost vynechat. Místo báze (20.51) lze tedy uvažovat bázi

(20.52) $$\varphi_n(x) = \frac{\sin nx}{n}, \quad n = 1, 2, \ldots,$$

apod. Obdobně lze zjednodušit některé složité výrazy závislé na n a vznikající při tomto normování, neboť v podstatě jde jen o „řád“, jak tyto výrazy závisejí na n. Např. koeficienty tvaru

(20.53) $$\sqrt{\frac{n}{a^2n^2 + b^2}}$$

lze nahradit koeficienty tvaru

(20.54) $$\sqrt{\frac{1}{n}},$$

které klesají pro $n \to \infty$ k nule „řádově“ stejně rychle jako koeficienty (20.53). Tuto řádovou závislost na n je však třeba zachovat, neboť jinak rostou v obecném případě prvky Ritzovy matice velmi rychle (v absolutní hodnotě) ve směru hlavní diagonály, což podstatně ovlivňuje stabilitu numerického procesu. Při vhodné volbě numerických procedur (programování s pohyblivou čárkou a řešení Ritzovy soustavy eliminační metodou a ovšem i tenkrát, bereme-li v úvahu malý počet členů báze) lze položit tyto koeficienty rovny jedné, a to bez zřetele na to, jak závisejí na n; viz [4].

Návody pro volbu báze uvedeme pro rovnice druhého a čtvrtého řádu, a to pro intervaly $\langle 0, l \rangle$, resp. $\langle -l, l \rangle$, s kterými se v aplikacích nejčastěji setkáme.

I. Rovnice

(20.55) $$-(pu')' + ru = f,$$

p, p', r spojité v $\langle 0, l \rangle$, $p(x) \geqq p_0 > 0$, $r(x) \geqq 0$ v $\langle 0, l \rangle$.

1. *Okrajové podmínky*

(20.56) $$u(0) = 0, \quad u(l) = 0.$$

Zvolíme bázi

(20.57) $$\varphi_n(x) = \frac{\sin \frac{n\pi x}{l}}{n}, \quad n = 1, 2, \ldots.$$

Zejména pro $l = \pi$ dostáváme bázi (20.52).

2. *Okrajové podmínky*

(20.58) $$u'(0) - \beta\, u(0) = 0, \quad u'(l) + \delta\, u(l) = 0, \quad \beta \geqq 0, \delta \geqq 0.$$

Není-li zároveň $r(x) \equiv 0$, $\beta = \delta = 0$, volíme bázi

(20.59) $$\varphi_0(x) = 1, \quad \varphi_n(x) = \frac{\cos \frac{n\pi x}{l}}{n}, \quad n = 1, 2, \ldots.$$ [1])

V případě, že je $r(x) \equiv 0$, $\beta = \delta = 0$ (str. 213), vynecháme v (20.59) funkci $\varphi_0(x)$. V tomto jednoduchém případě najdeme ovšem řešení přímým integrováním: $u(x) =$ = konst.

[1]) Je-li $\beta^2 + \delta^2 > 0$ [přičemž připouštíme $r(x) \equiv 0$], je příbuzným operátorem samoadjungované rozšíření operátoru, daného předpisem $-u''$ na lineálu (dostatečně hladkých) funkcí splňujících podmínky (20.58). Systém vlastních funkcí tohoto operátoru však není jednoduchý. Dáváme zde proto přednost systému (20.59). (Srov. [29], str. 168, 169.)

3. *Okrajové podmínky*

$$u(0) = 0\,, \quad u'(l) + \delta\, u(l) = 0\,, \quad \delta \geqq 0\,. \tag{20.60}$$

Zvolíme bázi

$$\varphi_n(x) = \frac{1}{n} \sin \frac{\pi}{2l} (2n - 1)\, x\,, \quad n = 1, 2, \ldots\,. \tag{20.61}$$

II. Rovnice

$$(p_2 u'')'' - (p_1 u')' + p_0 u = f\,, \tag{20.62}$$

p_0, p_1, p_1', p_2, p_2', p_2'' spojité funkce v intervalu $\langle 0, l\rangle$, resp. $\langle -l, l\rangle$, $p_0(x) \geqq 0$, $p_1(x) \geqq 0$, $p_2(x) \geqq p > 0$ v $\langle 0, l\rangle$, resp. $\langle -l, l\rangle$.

4. *Okrajové podmínky*

$$u(0) = 0\,, \quad u(l) = 0\,, \tag{20.63}$$

$$u''(0) = 0\,, \quad u''(l) = 0\,. \tag{20.64}$$

Zvolíme bázi

$$\varphi_n(x) = \frac{\sin \dfrac{n\pi x}{l}}{n^2}\,, \quad n = 1, 2, \ldots\,. \tag{20.65}$$

5. *Okrajové podmínky*

$$u(-l) = 0\,, \quad u(l) = 0\,, \tag{20.66}$$

$$u'(-l) = 0\,, \quad u'(l) = 0\,. \tag{20.67}$$

Zvolíme bázi

$$\varphi_{2n-1} = \frac{1}{n^2} \left(\sin \frac{\lambda_n x}{l} - \frac{x}{l} \sin \lambda_n \right), \tag{20.68}$$

$$\varphi_{2n} = \frac{1}{n^2} \left[\cos \frac{n\pi x}{l} - (-1)^n \right], \quad n = 1, 2, \ldots\,,$$

kde λ_n jsou kladné kořeny rovnice

$$\operatorname{tg} \lambda = \lambda\,,$$

uspořádané podle velikosti, takže

$$\frac{(2n - 1)\,\pi}{2} \leqq \lambda_n \leqq \frac{(2n + 1)\,\pi}{2}\,.$$

Je

$$\lambda_1 \approx 4{,}493\,2\,,$$

$$\lambda_2 \approx 7{,}725\,2\,,$$

$$\lambda_3 \approx 10{,}903\,5\,,$$

$$\vdots$$

Příklady dalších bází najde čtenář v [29], str. 163 až 178. Viz také [4], str. 153 až 157.

Poznamenejme, že ve speciálních případech (využijeme-li např. lichosti nebo sudosti daného problému) lze použít jednodušších bází (srov. text na str. 169).

Kapitola 21

Numerické příklady: Obyčejné diferenciální rovnice

V této kapitole uvedeme tři příklady na řešení obyčejných diferenciálních rovnic variačními metodami. První dva z nich budou ilustrativní, neboť jejich řešení je předem známo. Uvádíme je proto, že budou pro čtenáře po všech stránkách velmi instruktivní a že bude na nich velmi dobře vidět, jak lze a také jak nelze postupovat v případech, které zdaleka nejsou tak jasné (zejména v případě parciálních diferenciálních rovnic).

V třetím příkladě provedeme numerický výpočet rovnice (21.50) čtvrtého řádu, s proměnnými koeficienty, s okrajovými podmínkami (21.51), (21.52). (Technicky vztato jde o průhyb nehomogenního prostě podepřeného prutu spočívajícího na pružném podloží, resp. zatíženého i osovými silami.)

Příklad 21.1. Řešme problém

$$-u'' = \cos x\,, \tag{21.1}$$

$$u(0) = 0\,, \quad u(\pi) = 0\,. \tag{21.2}$$

Řešení tohoto problému je

$$u(x) = \cos x + \frac{2}{\pi} x - 1\,;$$

rovnici (21.1) stačí dvakrát integrovat a integrační konstanty určit z podmínek (21.2). Příklad je tedy zřejmě ilustrativní. Ukážeme na něm použití Ritzovy a Galerkinovy metody i metody nejmenších čtverců a zároveň užití vzorce (11.21), str. 144, pro odhad chyby. Problém je tak jednoduchý, že na něm nelze nic „zkazit“. Výsledků tohoto příkladu však použijeme v příkl. 21.2, kde, jak uvidíme, lze již „zkazit“ mnoho.

Pozitivní definitnost operátoru A, definovaného předpisem $Au = -u''$ na lineálu M [hustém v $L_2(0, \pi)$] dvakrát spojitě diferencovatelných funkcí v intervalu $\langle 0, \pi \rangle$ a vyhovujících podmínkám (21.2), vyplývá jako speciální případ z výsledků kap. 19.

1. *Řešení Ritzovou metodou*

Podle (20.57) zvolíme bázi

$$\sin x\,, \quad \frac{\sin 2x}{2}\,, \quad \frac{\sin 3x}{3}\,, \dots \tag{21.3}$$

Ritzova n-tá aproximace bude tedy mít tvar

$$u_n(x) = \sum_{j=1}^{n} c_j \frac{\sin jx}{j}\,,$$

resp. píšeme-li $c_j/j = a_j$, tvar

$$u_n(x) = \sum_{j=1}^{n} a_j \sin jx\,. \tag{21.4}$$

Používáme-li tvaru (21.4), volíme vlastně bázi

$$\sin x\,, \quad \sin 2x\,, \quad \sin 3x, \dots, \tag{21.5}$$

což, jak uvidíme, v našem případě, kdy půjde o explicitní vzorce pro koeficienty a_j, po numerické stránce nikterak nevadí.

Všimněme si ještě, že problém je „symetrický podle bodu $(\pi/2, 0)$“: Daný diferenciální operátor má konstantní koeficienty, okrajové podmínky jsou symetrické podle bodu $(\pi/2, 0)$ a graf pravé strany rovnice (21.1) je symetrický podle bodu $(\pi/2, 0)$. V souhlasu s úvahou provedenou v pozn. 13.7, str. 169, můžeme v (21.5) uvažovat jen ty funkce, jejichž grafy jsou symetrické podle bodu $(\pi/2, 0)$. Zvolíme tedy bázi

$$\varphi_j(x) = \sin 2jx\,, \quad j = 1, 2, \dots. \tag{21.6}$$

[Čtenář se může přímým výpočtem snadno přesvědčit, že vezme-li za bázi funkce (21.5), dostane v průběhu výpočtu koeficienty u členů $\varphi_1, \varphi_3, \dots$ skutečně rovné nule.]

Protože v našem případě patří prvky báze do definičního oboru D_A daného operátoru, můžeme Ritzovu soustavu pro určení konstant $a_1, \dots, a_n$ zapsat ve tvaru (13.29), str. 168,

$$\begin{aligned} &(A\varphi_1, \varphi_1)\, a_1 + (A\varphi_1, \varphi_2)\, a_2 + \dots + (A\varphi_1, \varphi_n)\, a_n = (f, \varphi_1)\,, \\ &\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ &(A\varphi_1, \varphi_n)\, a_1 + (A\varphi_2, \varphi_n)\, a_2 + \dots + (A\varphi_n, \varphi_n)\, a_n = (f, \varphi_n)\,. \end{aligned} \tag{21.7}$$

V našem případě je $Au = -u''$,

$$(A\varphi_j, \varphi_k) = \int_0^\pi 4j^2 \sin 2jx \sin 2kx \, dx = \begin{cases} 0\,, & \text{je-li } k \neq j\,, \\ 2\pi j^2\,, & \text{je-li } k = j\,. \end{cases} \tag{21.8}$$

Dále je

$$(f, \varphi_j) = \int_0^\pi \cos x \sin 2jx \, dx = \frac{1}{2}\int_0^\pi \sin (2j-1)\, x \, dx + \tag{21.9}$$

$$+ \frac{1}{2}\int_0^\pi \sin (2j+1)\, x \, dx = \frac{1}{2j-1} + \frac{1}{2j+1} = \frac{4j}{4j^2-1}\,.$$

Soustava (21.7) bude tedy mít tvar

$$\begin{aligned} 2\pi\,.\,1^2\,.\,a_1 + \quad 0\,.\,a_2 + \dots + \quad 0\,.\,a_n &= \frac{4}{4\,.\,1^2-1}\,, \\ 0\,.\,a_1 + 2\pi\,.\,2^2\,.\,a_2 + \dots + \quad 0\,.\,a_n &= \frac{4\,.\,2}{4\,.\,2^2-1}\,, \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ 0\,.\,a_1 + \quad 0\,.\,a_2 + \dots + 2\pi\,.\,n^2\,.\,a_n &= \frac{4\,.\,n}{4n^2-1}\,. \end{aligned} \tag{21.10}$$

Odtud dostaneme

$$a_j = \frac{2}{\pi j(4j^2-1)}$$

a

$$u_n = \frac{2}{\pi}\sum_{j=1}^{n} \frac{\sin 2jx}{j(4j^2-1)}\,. \tag{21.11}$$

Podle obecné teorie (kap. 13) konverguje posloupnost $\{u_n\}$ k zobecněnému řešení $u_0(x)$ v prostoru H_A i v prostoru $L_2(0, \pi)$. Podle pozn. 19.4 konverguje dokonce $\{u_n(x)\}$ k $u_0(x)$ stejnoměrně a $\{u_n'(x)\}$ k $u_0'(x)$ v průměru v intervalu $\langle 0, \pi \rangle$; viz však následující pozn. 21.1.

Odhad chyby

Proveďme odhad chyby po n-tém kroku v prostoru H_A, tj. odhadněme číslo $\|u_0 - u_n\|_A$. K tomu účelu použijeme vzorce (11.21), str. 144,

$$\|u_0 - u_n\|_A \leq \frac{\|Au_n - f\|}{C}\,. \tag{21.12}$$

Podle (18.28), str. 200, kde $a = 0$, $b = \pi$, můžeme položit $C = 1$. Dále je podle (21.11)

$$(21.13)\quad \|Au_n - f\|^2 = \left\|\sum_{j=1}^{n} \frac{8j^2 \sin 2jx}{\pi j(4j^2-1)} - \cos x\right\|^2 =$$

$$= \int_0^\pi \left[\frac{64}{\pi^2} \sum_{j=1}^{n} \frac{j^2 \sin^2 2jx}{(4j^2-1)^2} + \cos^2 x\right] dx +$$

$$+ \int_0^\pi \frac{64}{\pi^2} \sum_{\substack{j,k=1\\ j\neq k}}^{n} \frac{j \sin 2jx}{4j^2-1} \frac{\sin 2kx}{4k^2-1} dx -$$

$$- \int_0^\pi \frac{16}{\pi} \sum_{j=1}^{n} \frac{j \sin 2jx \cos x}{4j^2-1} dx =$$

$$= \frac{64}{\pi^2}\frac{\pi}{2} \sum_{j=1}^{n} \frac{j^2}{(4j^2-1)^2} + \frac{\pi}{2} - \frac{16}{\pi} \sum_{j=1}^{n} \frac{4j^2}{(4j^2-1)^2} =$$

$$= \frac{\pi}{2} - \frac{32}{\pi} \sum_{j=1}^{n} \frac{j^2}{(4j^2-1)^2},$$

neboť

$$\int_0^\pi \sin^2 2jx \, dx = \frac{\pi}{2}, \quad \int_0^\pi \cos^2 x \, dx = \frac{\pi}{2},$$

$$\int_0^\pi \sin 2jx \sin 2kx \, dx = 0 \text{ pro } j \neq k, \quad \int_0^\pi \sin 2jx \cos x \, dx = \frac{4j}{4j^2-1}$$

(viz [35], str. 482).

Zvolíme-li např. $n = 3$, pak podle (21.12) a (21.13) dostaneme

$$\|u_0 - u_3\|_A^2 \leqq \|Au_3 - f\|^2 = \frac{\pi}{2} - \frac{32}{\pi}\left(\frac{1}{9} + \frac{4}{225} + \frac{9}{1\,225}\right) < 0{,}184\,9,$$

a tedy

$$(21.14)\quad \|u_0 - u_3\|_A < 0{,}43.$$

Skutečná chyba, kterou v tomto případě snadno spočítáme, neboť řešení $u_0(x) = \cos x + (2/\pi)x - 1$ je známé, je ovšem značně menší:

$$\|u_0 - u_3\|_A^2 = \left\|\cos x + \frac{2}{\pi}x - 1 - \frac{2}{\pi}\left(\frac{\sin 2x}{1\,.\,3} + \frac{\sin 4x}{2\,.\,15} + \frac{\sin 6x}{3\,.\,35}\right)\right\|_A^2 =$$

$$= \int_0^\pi \left[\cos x + \frac{2}{\pi}x - 1 - \frac{2}{\pi}\left(\frac{\sin 2x}{1\,.\,3} + \frac{\sin 4x}{2\,.\,15} + \frac{\sin 6x}{3\,.\,35}\right)\right]'^2 dx =$$

$$= \int_0^\pi \left[-\sin x + \frac{2}{\pi} - \frac{2}{\pi}\left(\frac{2\cos 2x}{3} + \frac{4\cos 4x}{30} + \frac{6\cos 6x}{105}\right)\right]^2 dx \doteq 0{,}001\,217,$$

odkud

$$\|u_0 - u_3\|_A \doteq 0{,}035.$$

Dále

$$\|u_3\|_A^2 = \|u_3'\|^2 = \frac{4}{\pi^2}\int_0^\pi \left(\frac{2\cos 2x}{3} + \frac{4\cos 4x}{30} + \frac{6\cos 6x}{105}\right)^2 dx > 0{,}348\,1,$$

takže

$$\|u_3\|_A > 0{,}59.$$

Pro odhad relativní chyby $\|u_0 - u_3\|_A/\|u_3\|_A$ dostáváme tedy podle (21.14)

$$\frac{\|u_0 - u_3\|_A}{\|u_3\|_A} < \frac{0{,}43}{0{,}59} < 0{,}74.$$

Skutečná relativní chyba je

$$\frac{\|u_0 - u_3\|_A}{\|u_3\|_A} \doteq \frac{0{,}035}{0{,}59} \doteq 0{,}06.$$

Uvedené odhady (pro $n = 3$) nejsou ovšem příliš uspokojivé. Poznamenejme však, že je možno učinit je libovolně malé, zvolíme-li n dostatečně velké, neboť, jak víme z předcházející kapitoly, při zvolené bázi platí

$$\lim_{n\to\infty} \|Au_n - f\| = 0.$$

Poznámka 21.1. Lze snadno ukázat, že součet řady

$$(21.15)\quad s(x) = \frac{2}{\pi}\sum_{j=1}^{\infty} \frac{\sin 2jx}{j(4j^2-1)}$$

je roven funkci $\cos x + (2/\pi)x - 1$. Derivujeme-li totiž řadu (21.15) člen po členu, dostaneme řadu

$$(21.16)\quad \frac{4}{\pi}\sum_{j=1}^{\infty} \frac{\cos 2jx}{4j^2-1},$$

která je, díky druhé mocnině j ve jmenovateli, stejnoměrně konvergentní v intervalu $\langle 0, \pi\rangle$. Její součet je tedy derivací součtu řady (21.15), která je v intervalu $\langle 0, \pi\rangle$ také stejnoměrně konvergentní. Podle vzorce 10, [35], str. 591, je součet řady (21.16) v intervalu $\langle 0, \pi\rangle$ roven funkci

$$(21.17)\quad \frac{2}{\pi} - \sin x;$$

funkce $s(x)$ je tedy v intervalu $\langle 0, \pi\rangle$ primitivní k funkci (21.17), a protože je $s(0) = s(\pi) = 0$, je rovna funkci $\cos x + (2/\pi)x - 1$. Z právě provedené úvahy dále vyplývá, že v uvedeném případě konverguje nejen Ritzova posloupnost $\{u_n(x)\}$, ale i posloupnost jejích derivací $\{u_n'(x)\}$ stejnoměrně v intervalu $\langle 0, \pi \rangle$ k hledané funkci $u_0(x)$, resp. k její derivaci $u_0'(x)$. (Srov. též [25].)

2. *Řešení Galerkinovou metodou*

Zvolme opět bázi (21.6), tj. bázi

$$\varphi_j(x) = \sin 2jx\,, \quad j = 1, 2, \ldots. \tag{21.18}$$

Protože funkce báze (21.18) patří do D_A, plyne z výsledků kap. 14, že Galerkinova soustava rovnic pro neznámé konstanty b_j v Galerkinově aproximaci

$$v_n(x) = \sum_{j=1}^{n} b_j \sin 2jx \tag{21.19}$$

bude totožná s Ritzovou soustavou, takže bude $b_j = a_j, j = 1, \ldots, n$, a $v_n(x) = u_n(x)$. K tomuto výsledku ovšem dospějeme i přímo z podmínky, která charakterizuje Galerkinovu metodu, tj. z podmínky, aby funkce $Av_n - f$ byla v $L_2(0, \pi)$ ortogonální k funkcím $\varphi_1, \ldots, \varphi_n$. Napíšeme-li tyto podmínky,

$$\Big(\sum_{j=1}^{n} b_j A\varphi_j - f, \varphi_k\Big) = 0\,, \quad k = 1, \ldots, n\,,$$

dostaneme po vynásobení a využití symetrie [tj. vztahu $(A\varphi_j, \varphi_k) = (A\varphi_k, \varphi_j)$] právě soustavu (21.7). Dalším rozborem této metody se tedy nebudeme v tomto příkladě zabývat.

3. *Řešení metodou nejmenších čtverců*

Zvolme bázi (21.5). Posloupnost $\{\sin jx\}$ splňuje totiž požadavek vyslovený v kap. 15, neboť posloupnost $\{A \sin jx\} = \{j^2 \sin jx\}$ je úplná v prostoru $L_2(0, \pi)$. Vzhledem k „symetrii problému vzhledem k bodu $(\pi/2, 0)$" (viz str. 250) stačí se omezit na bázi (21.6), tj. na bázi

$$\varphi_j(x) = \sin 2jx\,, \quad j = 1, 2, \ldots. \tag{21.20}$$

Myšlenka metody nejmenších čtverců záleží, jak známo, v minimalizování výrazu

$$\|Az_n - f\|^2 \tag{21.21}$$

v metrice prostoru $L_2(0, \pi)$ na lineálu funkcí tvaru

$$z_n(x) = \sum_{j=1}^{n} c_j \varphi_j(x)\,.$$

Jak jsme ukázali v kap. 15, vede požadavek minima výrazu (21.21) k této soustavě pro určení konstant c_j:

$$\sum_{j=1}^{n} (A\varphi_j, A\varphi_k)\, c_j = (f, A\varphi_k)\,, \quad k = 1, 2, \ldots. \tag{21.22}$$

Protože $A\varphi_k = 4k^2\varphi_k$, dostaneme z rovnic (21.22) po zkrácení číslem $4k^2$ soustavu

$$\sum_{j=1}^{n} (A\varphi_j, \varphi_k)\, c_j = (f, \varphi_k)\,, \tag{21.23}$$

což je vzhledem k symetričnosti operátoru A opět soustava totožná se soustavou (21.7). Také zde je tedy další rozbor užité metody zbytečný.

Příklad 21.2. Řešme problém

$$-u'' = \cos x\,, \tag{21.24}$$

$$u'(0) = 0\,, \quad u'(\pi) = 0\,. \tag{21.25}$$

Funkce na pravé straně vyhovuje podmínce

$$\int_0^\pi \cos x \,dx = 0\,, \tag{21.26}$$

což je [viz (19.26), str. 213] nutná (i postačující) podmínka pro existenci řešení. Operátor $\tilde{A}_2 = -u''$ je na lineálu $\tilde{M}_2$ funkcí dvakrát spojitě diferencovatelných v $\langle 0, \pi \rangle$ a vyhovujících podmínce

$$\int_0^\pi u(x)\,dx = 0 \tag{21.27}$$

a okrajovým podmínkám (21.25) pozitivně definitní [nerovnost (19.33), str. 215]. Lze tedy obvyklým způsobem sestrojit prostor $H_{\tilde{A}_2}$, v němž existuje právě jedno zobecněné řešení $u_0(x)$ problému (21.24), (21.25). Toto řešení minimalizuje v $H_{\tilde{A}_2}$ funkcionál

$$Fu = \int_0^\pi u'^2(x)\,dx - 2\int_0^\pi u(x) \cos x \,dx\,. \tag{21.28}$$

Připomeňme, že každá z funkcí prostoru $H_{\tilde{A}_2}$ splňuje podmínku (21.27), v obecném případě však nikoli podmínky (21.25), které jsou pro operátor $\tilde{A}_2$ nestabilní.

Snadno ověříme, že v našem případě je $u_0(x) = \cos x$. Řešení je tedy známo a příklad je ilustrativní. Přesto najde čtenář v tomto příkladě mnoho zajímavého.

1. *Řešení Ritzovou metodou*

Podle (20.59) zvolíme bázi [funkci $\varphi_0(x) \equiv 1$ v systému (20.59) vynecháváme]

$$\cos x\,,\quad \frac{\cos 2x}{2}\,,\quad \frac{\cos 3x}{3}\,,\ \ldots\,,^{1)} \tag{21.29}$$

takže bude

$$u_n(x) = \sum_{j=1}^{n} c_j \frac{\cos jx}{j}\,.$$

Označíme-li, jako v předcházejícím textu

$$\frac{c_j}{j} = a_j\,,$$

bude

$$u_n(x) = \sum_{j=1}^{n} a_j \cos jx\,, \tag{21.30}$$

což odpovídá bázi

$$\varphi_j(x) = \cos jx\,,\quad j = 1, 2, \ldots \tag{21.31}$$

(srov. str. 250).

Vzhledem ke vztahu

$$\tilde{A}_2 \varphi_j = j^2 \cos jx$$

a k ortogonalitě funkcí (21.31) v intervalu $\langle 0, \pi \rangle$ se Ritzova soustava (21.7) redukuje na soustavu

$$\begin{aligned} \frac{\pi}{2} a_1 + 0\,.\,a_2 + \ldots + 0\,.\,a_n &= \frac{\pi}{2}\,,\\ 0\,.\,a_1 + \frac{2^2\pi}{2} a_2 + \ldots + 0\,.\,a_n &= 0\,,\\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots&\ldots\\ 0\,.\,a_1 + 0\,.\,a_2 + \ldots + \frac{n^2\pi}{2} a_n &= 0\,, \end{aligned} \tag{21.32}$$

s řešením $a_1 = 1$, $a_2 = a_3 = \ldots = 0$. Odtud ihned plyne nám již známý výsledek

$$u_n(x) = \cos x \quad \text{pro každé } n\,,$$

a tedy

$$u_0(x) = \cos x\,.$$

[1]) V této bázi bychom mohli vzhledem k symetrii problému podle bodu $(\pi/2, 0)$ vyškrtat sudé členy.

Poznámka 21.2. Funkce báze (21.31) splňují zřejmě dané nestabilní okrajové podmínky (21.25). Jak jsme upozornili v pozn. 19.4, není třeba v případě nestabilních okrajových podmínek volit u Riztovy metody bázi tak, aby funkce báze splňovaly tyto podmínky. Podívejme se tedy na způsob řešení Ritzovou metodou, zvolíme-li bázi, jejíž funkce nebudou splňovat okrajové podmínky (21.25). Zvolme za bázi funkce (21.6), tj. funkce

$$\varphi_j(x) = \sin 2jx\,,\quad j = 1, 2, \ldots\,, \tag{21.33}$$

které zřejmě nesplňují podmínky (21.25). Funkce (21.33) splňují podmínku (21.27). Protože však nepatří do definičního oboru $D_{\tilde{A}_2}$ operátoru $\tilde{A}_2$, je třeba zapsat Ritzovu soustavu pro koeficienty a_j ve tvaru (13.11), str. 164,

$$\sum_{k=1}^{n} (\varphi_j, \varphi_k)_{\tilde{A}_2} c_k = (\varphi_j, f)\,,\quad j = 1, \ldots, n\,. \tag{21.34}$$

Ale pro $u \in D_{\tilde{A}_2}$, $v \in D_{\tilde{A}_2}$ je

$$(\tilde{A}_2 u, v) = \int_0^\pi (-u'')\, v \,\mathrm{d}x = \int_0^\pi u'v' \,\mathrm{d}x \tag{21.35}$$

vzhledem k podmínkám (21.25). Skalární součin v $H_{\tilde{A}_2}$ je jen rozšířením skalárního součinu (21.35) z lineálu $\tilde{M}_2$ na celý prostor $H_{\tilde{A}_2}$, takže

$$(\varphi_j, \varphi_k)_{\tilde{A}_2} = \int_0^\pi \varphi_j' \varphi_k' \,\mathrm{d}x = \begin{cases} 0 & \text{pro } k \neq j\,,\\ 2\pi j^2 & \text{pro } k = j\,. \end{cases}$$

Protože

$$(f, \varphi_j) = \frac{4j}{4j^2 - 1}$$

jako v (21.9), bude soustava (21.34) mít tvar

$$\begin{aligned} 2\pi\,.\,1^2\,.\,a_1 + 0\,.\,a_2 + \ldots + 0\,.\,a_n &= \frac{4}{4\,.\,1^2 - 1}\,,\\ 0\,.\,a_1 + 2\pi\,.\,2^2\,.\,a_2 + \ldots + 0\,.\,a_n &= \frac{4\,.\,2}{4\,.\,2^2 - 1}\,,\\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots&\ldots\\ 0\,.\,a_1 + 0\,.\,a_2 + \ldots + 2\pi n^2\,.\,a_n &= \frac{4n}{4n^2 - 1}\,. \end{aligned} \tag{21.36}$$

To však je přesně táž soustava jako soustava (21.10), takže i v našem případě je

$$u_n(x) = \frac{2}{\pi} \sum_{j=1}^{n} \frac{\sin 2jx}{j(4j^2 - 1)}\,. \tag{21.37}$$

Posloupnost (21.37) však nemůže konvergovat k hledanému (a v našem případě známému) řešení $u_0(x) = \cos x$, neboť, jak jsme ukázali, součet řady

$$\frac{2}{\pi} \sum_{j=1}^{\infty} \frac{\sin 2jx}{j(4j^2 - 1)}$$

je v intervalu $\langle 0, \pi \rangle$ roven funkci

$$\cos x + (2/\pi)\, x - 1 . \tag{21.38}$$

Kde jsme tedy udělali chybu?

Chyba není v tom, že funkce $\sin jx$ nesplňují okrajové podmínky (21.25) — tyto podmínky jsou nestabilní —, ani v tom, že jsme ze systému funkcí $\sin jx$ vyškrtali liché členy a ponechali jen členy tvaru $\sin 2jx$; problém je skutečně symetrický vzhledem k bodu $(\pi/2, 0)$. Chyba není způsobena ani tím, že bychom u bázových funkcí nerespektovali podmínku funkcí z $H_{\tilde{A}_2}$,

$$\int_0^{\pi} u(x)\, dx = 0 ;$$

každá z funkcí $\sin 2jx$ tuto podmínku splňuje. Systém $\{\sin 2jx\}$ však *není v prostoru $H_{\tilde{A}_2}$ úplný*. Je úplný [máme-li stále na mysli symetričnost problému vzhledem k bodu $(\pi/2, 0)$] např. v prostoru $L_2(0, \pi)$ nebo v prostoru H_A, kde A je operátor z příkl. 21.1 [a kde tedy funkce z H_A splňují podmínky $u(0) = 0$, $u(\pi) = 0$]. Není však úplný v metrice prostoru $H_{\tilde{A}_2}$, který je sice „užší" než prostor H_A v tom smyslu, že funkce z $H_{\tilde{A}_2}$ splňují podmínku (21.27), je však „širší" než prostor H_A v tom smyslu, že obsahuje i funkce, které nejsou rovny nule v krajních bodech intervalu $\langle 0, \pi \rangle$. Již z názoru lze očekávat, že právě takové funkce [a tedy také hledané řešení $u_0(x) = \cos x$] nelze v metrice prostoru $H_{\tilde{A}_2}$ aproximovat funkcemi tvaru $\sin 2jx$, rovnými nule pro $x = 0$ a $x = \pi$.[1])

V případě Ritzovy metody lze ukázat, že nápravy lze dosáhnout tak, že k systému (21.6) „přidáme" vhodnou lineární funkci.[2]) Aby tato funkce zároveň splňovala podmínku $\int_0^{\pi} u(x)\, dx = 0$ i podmínku symetričnosti vzhledem k bodu $(\pi/2, 0)$, volme ji ve tvaru $x - \pi/2$. Zvolme tedy bázi

$$\varphi_0(x) = x - \frac{\pi}{2}, \quad \varphi_j(x) = \sin 2jx , \quad j = 1, 2, \ldots . \tag{21.39}$$

[1]) Přesněji v terminologii kap. 30: V podprostoru prostoru $\mathring{W}_2^{(1)}(0, \pi)$ funkcí, jejichž graf je symetrický vzhledem k bodu $(\pi/2, 0)$, tvoří funkce $\sin 2jx$, $j = 1, 2, \ldots$, bázi; v podprostoru prostoru $W_2^{(1)}(0, \pi)$ těch funkcí, jejichž graf je symetrický vzhledem k bodu $(\pi/2, 0)$ a které splňují podmínku $\int_0^{\pi} u(x)\, dx = 0$, nikoli.

[2]) Z názoru lze očekávat, že tím právě dosáhneme možnosti aproximovat i ty funkce z prostoru $H_{\tilde{A}_2}$, které nejsou rovny nule pro $x = 0$ a $x = \pi$, neboť přidáním vhodné lineární funkce k funkci $u \in H_{\tilde{A}_2}$ lze dosáhnout toho, že uvažovaná funkce nabude v těchto bodech nulových hodnot.

Snadno pak zjistíme, vypočítáme-li součiny

$$(\varphi_j, \varphi_k)_{\tilde{A}_2} = \int_0^{\pi} \varphi_j' \varphi_k'\, dx , \quad k = 0, 1, \ldots, n ,$$

a uvážíme-li, že

$$(\varphi_0, f) = \int_0^{\pi} \left(x - \frac{\pi}{2}\right) \cos x\, dx = \left[\left(x - \frac{\pi}{2}\right) \sin x\right]_0^{\pi} - \int_0^{\pi} \sin x\, dx = -2 ,$$

že Ritzova soustava nabude tvaru

$$\begin{array}{llll} \pi \,.\, a_0 + & 0 \,.\, a_1 + 0 \,.\, a_2 + \ldots + & 0 \,.\, a_n = -2 , \\ 0 \,.\, a_0 + 2\pi \,.\, 1^2 \,.\, a_1 + 0 \,.\, a_2 + \ldots + & & 0 \,.\, a_n = \dfrac{4}{4 \,.\, 1^2 - 1} , \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ 0 \,.\, a_0 + & 0 \,.\, a_1 + 0 \,.\, a_2 + \ldots + 2\pi \,.\, n^2 \,.\, a_n = \dfrac{4n}{4n^2 - 1} , \end{array} \tag{21.40}$$

který se od tvaru soustavy (21.10) liší jen první rovnicí; z ní plyne

$$a_0 = -\frac{2}{\pi} .$$

Členy Ritzovy posloupnosti $\{u_n(x)\}$ budou mít tvar

$$u_n(x) = -\frac{2}{\pi}\left(x - \frac{\pi}{2}\right) + \frac{2}{\pi} \sum_{j=1}^{n} \frac{\sin 2jx}{j(4j^2 - 1)} .$$

Tím jsme dostali do výpočtu právě funkci

$$-\frac{2}{\pi}\left(x - \frac{\pi}{2}\right) = -\frac{2}{\pi} x + 1 ,$$

která nám v (21.38) „scházela".

2. *Galerkinova metoda*

Při volbě báze (21.29),

$$\cos x , \quad \frac{\cos 2x}{2} , \quad \cos \frac{3x}{3} , \ldots , \tag{21.41}$$

hledáme tedy aproximaci $v_n(x)$ ve tvaru obdobném tvaru (21.30), tj. ve tvaru

$$v_n(x) = \sum_{j=1}^{n} b_j \cos jx , \tag{21.42}$$

a koeficienty b_j hledáme z Galerkinových podmínek

$$(\tilde{A}_2 v_n - f, \cos kx) = 0\,, \quad k = 1, \ldots, n\,. \tag{21.43}$$

Protože $\cos jx \in D_{\tilde{A}_2}$, plyne z obecné teorie [viz kap. 14; tvrzení plyne ovšem snadno i přímým výpočtem z (21.43)], že Galerkinova soustava pro určení neznámých konstant b_j $(j = 1, \ldots, n)$ splývá s Ritzovou soustavou (21.32), takže bude $b_1 = 1$, $b_2 = \ldots = b_n = 0$ a nakonec

$$v_n(x) = \cos x$$

pro každé n, odkud

$$u_0(x) = \cos x\,.$$

Volba báze (21.41) zde tedy vede okamžitě k řešení.

Podívejme se nyní, jaký bude průběh výpočtu Galerkinovou metodou, použijeme-li posloupnosti (21.33),

$$\varphi_j(x) = \sin 2jx\,, \quad j = 1, 2, \ldots\,. \tag{21.44}$$

Přibližné řešení hledáme ve tvaru

$$v_n(x) = \sum_{j=1}^{n} b_j \sin 2jx \tag{21.45}$$

a konstanty b_j určíme, jako obvykle, z podmínek

$$(\tilde{A}_2 v_n - f, \varphi_k) = 0\,, \quad k = 1, \ldots, n\,, \tag{21.46}$$

tj. z podmínek

$$\sum_{j=1}^{n} (\tilde{A}_2 \varphi_j, \varphi_k)\, b_j = (f, \varphi_k)\,, \quad k = 1, \ldots, n\,. \tag{21.47}$$

Poznamenejme, že symbol $\tilde{A}_2 \varphi_j$ zde ztrácí smysl, neboť funkce (21.44) nepatří do definičního oboru operátoru $\tilde{A}_2$ [nesplňují podmínky (21.25)]. Postupujeme-li ryze formálně a položíme-li

$$\tilde{A}_2 \varphi_j = -\varphi_j'' = 4j^2 \sin 2jx\,, \quad j = 1, \ldots, n\,,$$

dostaneme

$$(\tilde{A}_2 \varphi_j, \varphi_k) = \int_0^\pi 4j^2 \sin 2jx \sin 2kx \,\mathrm{d}x = \begin{cases} 0 & \text{pro } k \neq j\,, \\ 2\pi j^2 & \text{pro } k = j\,, \end{cases}$$

odkud je vidět, že soustava (21.47) splyne v tomto případě s Ritzovou soustavou (21.36)[1]). Tedy i posloupnost Galerkinových řešení má v tomto případě tvar (21.37)

[1]) Nepatří-li funkce φ_j do definičního oboru uvažovaného operátoru, nemusí tomu v obecném případně tak být.

a nekonverguje k (známému) řešení $u_0 = \cos x$ daného problému, ale k řešení $\cos x + (2/\pi)\, x - 1$ problému

$$-u'' = \cos x\,,$$

$$u(0) = 0\,, \quad u(\pi) = 0\,. \tag{21.48}$$

V případě Galerkinovy metody nelze situaci zachránit ani doplněním posloupnosti (21.44) členem $x - \pi/2$, tedy volbou báze ve tvaru

$$\varphi_0(x) = x - \frac{\pi}{2}\,, \quad \varphi_j(x) = \sin 2jx\,, \quad j = 1, 2, \ldots\,. \tag{21.49}$$

Napíšeme-li pak totiž Galerkinovu soustavu

$$\sum_{j=0}^{n} (\tilde{A}_2 \varphi_j, \varphi_k)\, b_j = (f, \varphi_k)\,, \quad k = 0, 1, \ldots, n\,,$$

přičemž opět položíme

$$\tilde{A}_2 \varphi_j = -\varphi_j'' \quad (j = 0, 1, \ldots, n)\,,$$

dostaneme soustavu $n + 1$ rovnic o n neznámých, neboť $\tilde{A}_2 \varphi_0 = -\varphi_0'' = 0$ a koeficienty u b_0 budou ve všech rovnicích rovny nule, takže neznámá b_0 se v této soustavě vůbec neobjeví.[1])

Oba příkl. 21.1 i 21.2 jsou, jak jsme řekli, ilustrativní. Zařadili jsme je proto, že velmi dobře demonstrují (a s problémy téhož typu se setkáváme i v případě parciálních diferenciálních rovnic), jak důležitá je správná volba báze a na co je třeba dávat dobrý pozor.

Příklad 21.3. Uvažujme problém

$$[(4 + x)\, u'']'' + 600u = 5\,000(x - x^2)\,, \tag{21.50}$$

$$u(0) = 0\,, \quad u(1) = 0\,, \tag{21.51}$$

$$u''(0) = 0\,, \quad u''(1) = 0\,. \tag{21.52}$$

Problém (21.50) až (21.52) je speciálním případem problému (19.127), (19.129), (19.130), str. 232, pro

$$p_2(x) = 4 + x\,, \quad p_1(x) \equiv 0\,, \quad p_0(x) = 600\,, \quad f(x) = 5\,000(x - x^2)\,. \tag{21.53}$$

Můžeme jej interpretovat např. jako úlohu najít *průhyb prutu proměnného průřezu* (popř. *proměnného modulu pružnosti*) *na pružném podloží, prostě podepřeného*

[1]) K této situaci nemůže dojít při volbě báze (21.41), jejíž prvky patří do definičního oboru operátoru $\tilde{A}_2$.

[podmínky (21.51) a (21.52)] *a vertikálně zatíženého*. V obecném případě je příslušná rovnice tvaru

$$[E(x)\,I(x)\,u'']'' + Q(x)\,u = f(x)\,, \tag{21.54}$$

kde E, I, Q, f jsou po řadě modul pružnosti v tahu, moment setrvačnosti průřezu k ohybové ose, koeficient poddajnosti podloží a člen charakterizující vertikální zatížení. Jsou možné ovšem i jiné interpretace.

Funkce (21.53) jsou zřejmě v intervalu $\langle 0, 1\rangle$ dostatečně hladké. Protože mimoto je v intervalu $\langle 0, 1\rangle$ $p_2(x) \geq 4 > 0$, plyne z úvah provedených pro problém (19.127), (19.129), (19.130), že operátor

$$Au = [(4 + x)\,u'']'' + 600u$$

je na lineálu funkcí čtyřikrát spojitě diferencovatelných v intervalu $\langle 0, 1\rangle$ a splňujících podmínky (21.51), (21.52) pozitivně definitní. Zobecněné řešení problému minimalizuje v příslušném prostoru H_A funkcionál [srov. (19.138)]

$$Fu = \int_0^1 (4 + x)\,u''^2\,dx + \int_0^1 600u^2\,dx - 2\int_0^1 5\,000(x - x^2)\,u\,dx\,. \tag{21.55}$$

1. *Ritzova metoda*

K numerickému výpočtu zvolme podle (20.65), str. 248, bázi

$$\varphi_j(x) = \frac{\sin j\pi x}{j^2}\,, \quad j = 1, 2, \ldots, \tag{21.56}$$

jejíž členy splňují všechny podmínky (21.51), (21.52).[1] Zvolme dále $n = 3$ [takže při tomto malém počtu členů je možno jmenovatele v (21.56) volit rovné jedničce, srov. str. 247], a hledejme tedy Ritzovu aproximaci $u_3(x)$ ve tvaru

$$u_3(x) = a_1 \sin \pi x + a_2 \sin 2\pi x + a_3 \sin 3\pi x\,. \tag{21.57}$$

Protože členy uvažované báze patří do D_A, je možno Ritzovu soustavu napsat ve tvaru (13.29), tj. ve tvaru

$$\begin{aligned}
(A\varphi_1, \varphi_1)\,a_1 + (A\varphi_1, \varphi_2)\,a_2 + (A\varphi_1, \varphi_3)\,a_3 &= (f, \varphi_1)\,,\\
(A\varphi_1, \varphi_2)\,a_1 + (A\varphi_2, \varphi_2)\,a_2 + (A\varphi_2, \varphi_3)\,a_3 &= (f, \varphi_2)\,,\\
(A\varphi_1, \varphi_3)\,a_1 + (A\varphi_2, \varphi_3)\,a_2 + (A\varphi_3, \varphi_3)\,a_3 &= (f, \varphi_3)\,.
\end{aligned} \tag{21.58}$$

[Použili jsme již symetričnosti operátoru A, $(A\varphi_j, \varphi_k) = (A\varphi_k, \varphi_j)$.]

[1]) V obecném případě není při použití Ritzovy metody nutné, aby báze splňovala i podmínky (21.52), neboť tyto podmínky jsou pro daný operátor nestabilní.

K numerickému výpočtu koeficientů $(A\varphi_j, \varphi_k)$ a pravých stran soustavy (21.58) použijeme vzorce

$$\sin\alpha \sin\beta = \tfrac{1}{2}[\cos(\alpha - \beta) - \cos(\alpha + \beta)] \tag{21.59}$$

a některých integrálních vzorců. Nejprve integrováním per partes [srov. (19.132), str. 232] dostaneme

$$\begin{aligned}
(A\varphi_j, \varphi_k) &= \int_0^1 [(4 + x)(\sin j\pi x)'']'' \sin k\pi x\,dx + \int_0^1 600 \sin j\pi x \sin k\pi x\,dx =\\
&= \pi^4 j^2 k^2 \int_0^1 (4 + x) \sin j\pi x \sin k\pi x\,dx + 600 \int_0^1 \sin j\pi x \sin k\pi x\,dx\,.
\end{aligned} \tag{21.60}$$

Dále

$$\int_0^1 \sin j\pi x \sin k\pi x\,dx = \begin{cases} 0 & \text{pro} \quad k \neq j\,,\\ \tfrac{1}{2} & \text{pro} \quad k = j\,, \end{cases} \tag{21.61}$$

$$\begin{aligned}
\int_0^1 x \sin j\pi x \sin k\pi x\,dx &= \frac{1}{2}\int_0^1 x[\cos(j - k)\pi x - \cos(j + k)\pi x]\,dx =\\
&= \frac{1}{2}\left[\frac{\cos(j - k)\pi x}{(j - k)^2\pi^2} + \frac{x \sin(j - k)\pi x}{(j - k)\pi} - \frac{\cos(j + k)\pi x}{(j + k)^2\pi^2} - \frac{x \sin(j + k)\pi x}{(j + k)\pi}\right]_0^1 =\\
&= \frac{1}{2}\left[\frac{(-1)^{j-k} - 1}{(j - k)^2\pi^2} - \frac{(-1)^{j+k} - 1}{(j + k)^2\pi^2}\right], \quad \text{je-li} \quad k \neq j
\end{aligned} \tag{21.62}$$

(viz např. [35], str. 439, vzorec 286),

$$\int_0^1 x \sin^2 j\pi x\,dx = \frac{1}{2}\int_0^1 x(1 - \cos 2j\pi x)\,dx = \frac{1}{4} - \frac{1}{2}\left[\frac{\cos 2j\pi x}{4j^2\pi^2} + \frac{x \sin 2j\pi x}{2j\pi}\right]_0^1 = \frac{1}{4} \tag{21.63}$$

(použili jsme téhož vzorce),

$$\begin{aligned}
\int_0^1 (x - x^2) \sin j\pi x\,dx &=\\
&= \left[\frac{\sin j\pi x}{j^2\pi^2} - \frac{x \cos j\pi x}{j\pi} - \frac{2x \sin j\pi x}{j^2\pi^2} + \left(\frac{x^2}{j\pi} - \frac{2}{j^3\pi^3}\right)\cos j\pi x\right]_0^1 =\\
&= -\frac{(-1)^j}{j\pi} + \left(\frac{1}{j\pi} - \frac{2}{j^3\pi^3}\right)(-1)^j + \frac{2}{j^3\pi^3} = \frac{2}{j^3\pi^3}[1 - (-1)^j]\,.
\end{aligned} \tag{21.64}$$

Použili jsme vzorců 247 a 248 z [35], str. 436.

Dosadíme-li získané výsledky do (21.60) a (21.58), dostaneme hledanou Ritzovu soustavu ve tvaru

$$\left(2\pi^4 + \frac{\pi^4}{4} + 300\right) a_1 + 4\pi^4\left(-\frac{1}{\pi^2} + \frac{1}{9\pi^2}\right) a_2 + 0\,.\,a_3 = \frac{5\,000\,.\,4}{\pi^3},$$

$$4\pi^4\left(-\frac{1}{\pi^2} + \frac{1}{9\pi^2}\right) a_1 + (32\pi^4 + 4\pi^4 + 300)\, a_2 + 36\pi^4\left(-\frac{1}{\pi^2} + \frac{1}{25\pi^2}\right) a_3 = 0\,,$$

$$0\,.\,a_1 + 36\pi^4\left(-\frac{1}{\pi^2} + \frac{1}{25\pi^2}\right) a_2 + \left(162\pi^4 + \frac{81\pi^4}{4} + 300\right) a_3 = \frac{5\,000\,.\,4}{27\pi^3}$$

a po úpravě

$$\left(\frac{9}{4}\pi^4 + 300\right) a_1 - \frac{32\pi^2}{9} a_2 + 0\,.\,a_3 = \frac{20\,000}{\pi^3},$$

$$-\frac{32\pi^2}{9} a_1 + (36\pi^4 + 300)\, a_2 - \frac{24\,.\,36\pi^2}{25} a_3 = 0\,,$$

$$0\,.\,a_1 - \frac{24\,.\,36\pi^2}{25} a_2 + \left(\frac{729\pi^4}{4} + 300\right) a_3 = \frac{20\,000}{27\pi^3},$$

tj. soustavu

(21.65)
$$\begin{aligned} 519{,}17a_1 - 35{,}09a_2 + 0\,.\,a_3 &= 645{,}05\,, \\ -\,35{,}09a_1 + 3\,806{,}76a_2 - 341{,}09a_3 &= 0\,, \\ 0\,.\,a_1 - 341{,}09a_2 + 18\,052{,}97a_3 &= 23{,}89 \end{aligned}$$

s řešením

(21.66)
$$a_1 \doteq 1{,}243\,, \quad a_2 \doteq 0{,}011\,6\,, \quad a_3 \doteq 0{,}001\,54\,.$$

Ritzova metoda pro tři uvažované členy báze dává tedy přiblížení

(21.67)
$$u_3(x) = 1{,}243 \sin \pi x + 0{,}0116 \sin 2\pi x + 0{,}00154 \sin 3\pi x\,.$$

Chybu je možno odhadnout podobně jako v příkl. 21.1 na základě vztahu

$$\|u_0 - u_3\|_A^2 \leqq \frac{\|Au_3 - f\|^2}{C^2},$$

kde je možno podle (19.136), str. 233, položit

$$C^2 = \frac{p}{c_1 c_3}$$

s $p = 4$ a

$$c_1 = \frac{1}{\pi^2}, \quad c_3 = \frac{1}{2}$$

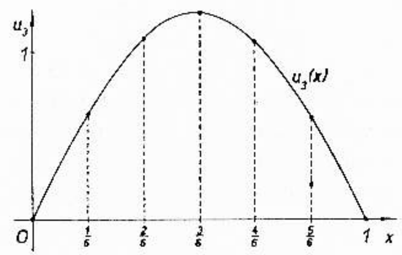
podle (19.137), takže

$$C^2 = 8\pi^2\,.$$

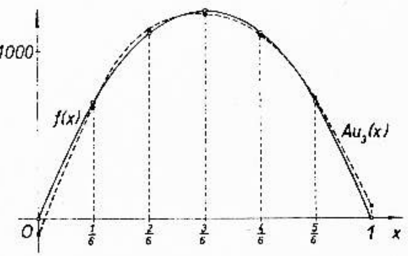
Je

$$\begin{aligned} Au_3 = [(4 + x)\, u_3'']'' + 600\, u_3 &= 1230{,}12 \sin \pi x + 79{,}28 \sin 2\pi x + 49{,}52 \sin 3\pi x \\ &+ x(121{,}08 \sin \pi x + 18{,}08 \sin 2\pi x + 12{,}15 \sin 3\pi x) \\ &- (\,77{,}08 \cos \pi x + 5{,}75 \cos 2\pi x + 2{,}58 \cos 3\pi x)\,, \end{aligned}$$

$$f(x) = 5\,000(x - x^2)\,.$$



Obr. 10.



Obr. 11.

Pro čtenářovu informaci uvádíme v tabulce hodnoty funkcí $u_3(x)$, Au_3 a $f(x)$ v bodech $x = 0, \frac{1}{6}, \frac{2}{6}, \frac{3}{6}, \frac{4}{6}, \frac{5}{6}, 1$, jakož i příslušné grafy na obr. 10 a 11.

Tab. 21.1

x	0	$\frac{1}{6}$	$\frac{2}{6}$	$\frac{3}{6}$	$\frac{4}{6}$	$\frac{5}{6}$	1
$u_3(x)$	0	0,633 1	1,086 5	1,241 5	1,066 4	0,613 0	0
Au_3	−85,41	678,33	1 138,44	1 240,82	1 094,92	707,38	73,91
$f(x)$	0	694,17	1 111,11	1 250,00	1 111,11	694,17	0

Jednoduchým výpočtem dostaneme

$$\|Au_3 - f\|^2 = \int_0^1 (Au_3 - f)^2 \, dx \doteq 15\,795{,}010\,4\,,$$

$$C^2 = 8\pi^2 \doteq 78{,}956\,8\,,$$

a tedy

$$\|u_0 - u_3\|_A \leqq \sqrt{\left(\frac{\|Au_3 - f\|^2}{C^2}\right)} < 14{,}15\,. \tag{21.68}$$

Dále je

$$\|u_3\|_A^2 = (Au_3, u_3) = \int_0^1 u_3 Au_3 \, dx \doteq 801{,}348\,4\,,$$

odkud

$$\|u_3\|_A > 28{,}30\,. \tag{21.69}$$

Z (21.68) a (21.69) plyne tedy pro relativní chybu (v prostoru H_A) odhad

$$\frac{\|u_0 - u_3\|_A}{\|u_3\|_A} < \frac{14{,}15}{28{,}30} = 0{,}5\,. \tag{21.70}$$

I když odhad (21.70) není z teoretického hlediska příliš uspokojivý (skutečná relativní chyba je ovšem menší), je funkce (21.67) po praktické stránce, zejména interpretujeme-li funkci $u_0(x)$ jako průhyb prutu, popsaného na začátku tohoto příkladu, zcela uspokojivou aproximací hledaného řešení. Funkce Au_3 se totiž od funkce $f(x)$ na pravé straně rovnice (21.50) liší relativně velmi málo, jak je zřejmé z obr. 11. Interpretujeme-li tuto okolnost technicky, znamená to, že funkce (21.67) je přesným řešením problému (21.50) až (21.52), v němž „zatížení“ $f(x)$ je zaměněno „velmi blízkým zatížením“ Au_3.

2. *Galerkinova metoda*

Zvolme opět bázi (21.56). Protože funkce báze patří do definičního oboru daného operátoru, splývá Galerkinova soustava s Ritzovou soustavou (21.65) a Galerkinovo řešení s Ritzovým řešením (21.67).

Poznámka 21.3. Ve všech třech uvedených příkladech bylo možno vyčíslit koeficienty příslušných soustav poměrně snadno, neboť všechny uvažované integrály bylo možno vypočítat pomocí primitivních funkcí (i když v třetím příkladě bylo třeba některých obratů). V obecném případě lze k vyčíslení těchto koeficientů, tj. příslušných integrálů, použít numerických metod (Simpsonova pravidla apod., viz např. [35], str. 492 až 494).

Kapitola 22

Parciální diferenciální rovnice druhého řádu s okrajovými podmínkami

V N-rozměrné oblasti G s lipschitzovskou hranicí uvažujme diferenciální rovnici

$$-\sum_{i,j=1}^{N} a_{ij} \frac{\partial^2 u}{\partial x_i \partial x_j} + \sum_{i=1}^{N} b_i \frac{\partial u}{\partial x_i} + cu = f\,, \tag{22.1}$$

kde

$$a_{ij}(x) = a_{ji}(x) \tag{22.2}$$

a $a_{ij}(x)$, $b_i(x)$, $c(x)$ jsou spojité funkce v $\bar{G}$, $f(x) \in L_2(G)$. [Používáme obvyklého označení, zavedeného na str. 21, takže místo $a_{ij}(x_1, \ldots, x_N)$ píšeme stručně $a_{ij}(x)$ apod.]

Definice 22.1. O rovnici (22.1) řekneme, že je *stejnoměrně eliptická v G*, a o příslušném diferenciálním operátoru, daném levou stranou této rovnice, že je *stejnoměrně eliptický v G*, jestliže existuje taková konstanta $p > 0$ nezávislá na $x \in G$ a na vektorech uvažovaných v (22.3) a (22.4), že pro každý reálný vektor $(\alpha_1, \ldots, \alpha_N)$ platí zároveň pro všechna $x \in G$ buď

$$\sum_{i,j=1}^{N} a_{ij}(x)\, \alpha_i \alpha_j \geqq p \sum_{i=1}^{N} \alpha_i^2\,, \tag{22.3}$$

nebo

$$\sum_{i,j=1}^{N} a_{ij}(x)\, \alpha_i \alpha_j < -p \sum_{i=1}^{N} \alpha_i^2\,. \tag{22.4}$$

Právě definovaná vlastnost rovnice (22.1) závisí tedy jen na koeficientech u nejvyšších derivací v dané rovnici.

Příklad 22.1. Poissonova rovnice

$$-\Delta u = f\,, \tag{22.5}$$

kde

$$\Delta u = \sum_{i=1}^{N} \frac{\partial^2 u}{\partial x_i^2}$$

(jejím speciálním případem je, jak víme, Laplaceova rovnice $-\Delta u = 0$), je stejnoměrně eliptická v každé oblasti, neboť zde je

$$a_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{pro } j = i\,, \\ 0 & \text{pro } j \neq i\,, \end{cases}$$

takže

$$\sum_{i,j=1}^{N} a_{ij}\alpha_i\alpha_j = \sum_{i=1}^{N} \alpha_i^2\,,$$

a v (22.3) stačí položit $p = 1$.

Příklad 22.2. Rovnice

$$(22.6) \qquad -\left(x_1 \frac{\partial^2 u}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial x_2^2}\right) = 0$$

je stejnoměrně eliptická v každé oblasti G, která leží v „pravé polorovině" $x_1 > 0$ a má od osy $x_1 = 0$ kladnou vzdálenost, tj. pro niž je $\inf\limits_{(x_1,x_2)\in G} x_1 = k > 0$, neboť pak v (22.3) stačí položit $p = \min(1, k)$. Tuto vlastnost ztrácí rovnice (22.6) v takové oblasti G, která se dotýká osy $x_1 = 0$ nebo která dokonce obsahuje body se zápornou souřadnicí x_1.

Poznámka 22.1. Násobíme-li rovnici (22.1) číslem -1, rovnice se nezmění, její koeficienty však změní znaménko. Proto je třeba v def. 22.1 uvažovat oba případy (22.3) i (22.4). Jinak by např. rovnice $-\Delta u = 0$ byla eliptická a rovnice $\Delta u = 0$ nikoli, resp. naopak. Splňuje-li ovšem daná rovnice podmínku (22.4), uvedeme ji násobením číslem -1 na rovnici splňující podmínku (22.3). *Proto se budeme v dalším textu* [srov. rovnici (22.7)] *zabývat jen podmínkou* (22.3), která nám umožní jednoduchou formulaci v otázkách pozitivní definitnosti vyšetřovaných operátorů.

Uvažujme v oblasti G rovnici[1])

$$(22.7) \qquad -\sum_{i,j=1}^{N} \frac{\partial}{\partial x_i}\left(a_{ij} \frac{\partial u}{\partial x_j}\right) + cu = f\,, \quad a_{ij} = a_{ji}\,,$$

kde $f(x) \in L_2(G)$ a funkce $a_{ij}(x)$ a jejich parciální derivace prvního řádu, jakož i funkce $c(x)$ jsou spojité v uzavřené oblasti $\bar{G}$. Dále předpokládáme, že v G platí nerovnosti

$$(22.8) \qquad \sum_{i,j=1}^{N} a_{ij}(x)\,\alpha_i\alpha_j \geqq p \sum_{i=1}^{N} \alpha_i^2\,, \quad p > 0\,,$$

kde p nezávisí na volbě bodu $x \in G$ a na uvažovaných vektorech, a

$$(22.9) \qquad c(x) \geqq 0\,.$$

Vzhledem k (22.8) je rovnice (22.7) stejnoměrně eliptická v G, neboť

$$-\sum_{i,j=1}^{N} \frac{\partial}{\partial x_i}\left(a_{ij} \frac{\partial u}{\partial x_j}\right) = -\sum_{i,j=1}^{N} a_{ij} \frac{\partial^2 u}{\partial x_i\,\partial x_j} - \sum_{i,j=1}^{N} \frac{\partial a_{ij}}{\partial x_i} \frac{\partial u}{\partial x_j}\,,$$

[1]) O rovnici (22.7) často říkáme, že je zapsána v tzv. *divergentním tvaru.*

takže (22.7) je rovnice typu (22.1) s koeficienty u nejvyšších derivací, vyhovujícími podmínce (22.3).

Pro rovnici (22.7) uvažujeme tři charakteristické typy okrajových podmínek charakterizujících po řadě tzv. *Dirichletův, Neumannův a Newtonův problém* pro danou rovnici:

$$(22.10) \qquad u = 0 \quad \text{na} \quad \Gamma\,,$$

$$(22.11) \qquad Nu = 0 \quad \text{na} \quad \Gamma\,,$$

$$(22.12) \qquad Nu + \sigma u = 0 \;\left[\sigma(S) \geqq \sigma_0 > 0\right] \quad \text{na} \quad \Gamma\,,$$

kde

$$(22.13) \qquad Nu = \sum_{i,j=1}^{N} a_{ij} \frac{\partial u}{\partial x_j} \nu_i\,;$$

$\nu_i = \cos(\nu, x_i)$ $(i = 1, \ldots, N)$ jsou směrové kosiny vnější normály ν.

Výrazu (22.13) se často říká *derivace podle konormály.* Pro Poissonovu rovnici (22.5) je

$$(22.14) \qquad a_{ij}(x) = \begin{cases} 1 & \text{pro} \quad j = i\,, \\ 0 & \text{pro} \quad j \neq i\,, \end{cases}$$

takže

$$(22.15) \qquad Nu = \sum_{i=1}^{N} \frac{\partial u}{\partial x_i} \nu_i = \frac{\partial u}{\partial \nu}\,;$$

pro tuto rovnici splývá tedy derivace podle konormály s derivací podle vnější normály.

Okrajové podmínky (22.10) až (22.12) jsou analogií okrajových podmínek (19.5) až (19.7) pro obyčejnou diferenciální rovnici (19.1), str. 208, a také výsledky, které se týkají otázek symetrie a pozitivní definitnosti, jsou, jak uvidíme, velmi podobné.

Označme M_1, resp. M_2, resp. M_3 lineál funkcí $u(x)$ spojitých včetně parciálních derivací prvního a druhého řádu v $\bar{G}$ a splňujících podmínky (22.10), resp. (22.11), resp. (22.12). [Každý z těchto lineálů je hustý v $L_2(G)$, viz větu 8.6 a pozn. 8.5, str. 106 a 107.] Nechť A_1, resp. A_2, resp. A_3 je operátor definovaný na M_1, resp. M_2, resp. M_3 předpisem, který je stejný pro všechna $k = 1, 2, 3$,

$$(22.16) \qquad A_k u = -\sum_{i,j=1}^{N} \frac{\partial}{\partial x_i}\left(a_{ij} \frac{\partial u}{\partial x_j}\right) + cu\,, \quad k = 1, 2, 3\,.$$

Ukážeme nejprve, že každý z těchto operátorů je na příslušném lineálu symetrický, a to nezávisle na tom, splňují-li koeficienty a_{ij} předpoklad (22.8), koeficient c předpoklad (22.9) a funkce σ předpoklad (22.12).

Připomeňme nejprve vzorec (8.31), str. 108, který zde zapíšeme ve tvaru

$$\int_G \frac{\partial g_1}{\partial x_i} g_2 \, dx = \int_\Gamma g_1 g_2 \nu_i \, dS - \int_G g_1 \frac{\partial g_2}{\partial x_i} \, dx . \tag{22.17}$$

Položíme-li v něm

$$g_1 = - a_{ij} \frac{\partial u}{\partial x_j}, \quad g_2 = v$$

(což lze učinit za uvažovaných předpokladů pro každé $u \in M_k$, $v \in M_k$, $k = 1, 2, 3$) a sečteme pro $i, j = 1, \ldots, N$, dostaneme

$$- \int_G \sum_{i,j=1}^N \frac{\partial}{\partial x_i} \left(a_{ij} \frac{\partial u}{\partial x_j} \right) v \, dx = - \int_\Gamma \sum_{i,j=1}^N a_{ij} \frac{\partial u}{\partial x_j} \nu_i v \, dS + \tag{22.18}$$

$$+ \int_G \sum_{i,j=1}^N a_{ij} \frac{\partial u}{\partial x_j} \frac{\partial v}{\partial x_i} \, dx = - \int_\Gamma Nu \, . \, v \, dS + \int_G \sum_{i,j=1}^N a_{ij} \frac{\partial u}{\partial x_j} \frac{\partial v}{\partial x_i} \, dx .$$

V jednotlivých případech tedy pro dvojici funkcí u, v, ležících v uvažovaných lineálech a splňujících podmínky (22.10), resp. (22.11), resp. (22.12), dostaneme

$$(A_1 u, v) = \int_G \sum_{i,j=1}^N a_{ij} \frac{\partial u}{\partial x_j} \frac{\partial v}{\partial x_i} \, dx + \int_G cuv \, dx , \tag{22.19}$$

$$(A_2 u, v) = \int_G \sum_{i,j=1}^N a_{ij} \frac{\partial u}{\partial x_j} \frac{\partial v}{\partial x_i} \, dx + \int_G cuv \, dx , \tag{22.20}$$

$$(A_3 u, v) = \int_G \sum_{i,j=1}^N a_{ij} \frac{\partial u}{\partial x_j} \frac{\partial v}{\partial x_i} \, dx + \int_G cuv \, dx + \int_\Gamma \sigma uv \, dS . \tag{22.21}$$

Protože $a_{ij} = a_{ji}$ podle (22.7), dostáváme ve všech třech případech výrazy symetrické ve funkcích u a v, čímž je symetričnost operátorů A_1, A_2 a A_3 na příslušných lineálech dokázána.

Pozitivní definitnost:

1. *Dirichletova okrajová podmínka*

$$u = 0 \text{ na } \Gamma . \tag{22.22}$$

V tomto případě je podle (22.19)

$$(A_1 u, u) = \int_G \sum_{i,j=1}^N a_{ij} \frac{\partial u}{\partial x_i} \frac{\partial u}{\partial x_j} \, dx + \int_G cu^2 \, dx . \tag{22.23}$$

Z (22.8) a (22.9) však plyne

$$\sum_{i,j=1}^N a_{ij} \frac{\partial u}{\partial x_i} \frac{\partial u}{\partial x_j} \geqq p \sum_{i=1}^N \left(\frac{\partial u}{\partial x_i} \right)^2 \text{ v } G . \tag{22.24}$$

Zároveň podle Friedrichsovy nerovnosti (18.1), str. 196, je

$$\|u\|^2 = \int_G u^2 \, dx \leqq c_1 \int_G \sum_{i=1}^N \left(\frac{\partial u}{\partial x_i} \right)^2 dx , \quad c_1 > 0 , \tag{22.25}$$

neboť $u = 0$ na Γ. [Zejména pro případ $N = 2$ je možno pro c_1 použít odhadu (18.46), str. 205.]

Z (22.23) až (22.25) pak plyne

$$(A_1 u, u) = \int_G \sum_{i,j=1}^N a_{ij} \frac{\partial u}{\partial x_i} \frac{\partial u}{\partial x_j} \, dx + \int_G cu^2 \, dx \geqq p \int_G \sum_{i=1}^N \left(\frac{\partial u}{\partial x_i} \right)^2 dx \geqq \frac{p}{c_1} \|u\|^2 , \tag{22.26}$$

čímž je pozitivní definitnost operátoru A_1 na lineálu M_1 dokázána. K přibližnému řešení problému (22.7), (22.22) lze tedy použít metod popsaných v přecházející části knihy. Zobecněné řešení u_0 tohoto problému minimalizuje v příslušném prostoru H_{A_1} funkcionál

$$F_1 u = \int_G \sum_{i,j=1}^N a_{ij} \frac{\partial u}{\partial x_i} \frac{\partial u}{\partial x_j} \, dx + \int_G cu^2 \, dx - 2 \int_G fu \, dx . \tag{22.27}$$

Než přistoupíme k případu okrajové podmínky (22.11), vyšetříme podmínku (22.12):

2. *Newtonova okrajová podmínka*

$$Nu + \sigma u = 0 \text{ na } \Gamma , \quad \sigma(S) \geqq \sigma_0 > 0 . \tag{22.28}$$

Podle (22.21) a (22.8), (22.9), (22.28) je

$$(A_3 u, u) = \int_G \sum_{i,j=1}^N a_{ij} \frac{\partial u}{\partial x_i} \frac{\partial u}{\partial x_j} \, dx + \int_G cu^2 \, dx + \int_\Gamma \sigma u^2 \, dS \geqq \tag{22.29}$$

$$\geqq p \int_G \sum_{i=1}^N \left(\frac{\partial u}{\partial x_i} \right)^2 dx + \sigma_0 \int_\Gamma u^2 \, dS .$$

Friedrichsova nerovnost (18.1), str. 108,

$$\|u\|^2 = \int_G u^2 \, dx \leqq c_1 \int_G \sum_{i=1}^N \left(\frac{\partial u}{\partial x_i} \right)^2 dx + c_2 \int_\Gamma u^2 \, dS \tag{22.30}$$

pak dává

$$(A_3u, u) \geq C^2\|u\|^2\,, \quad C > 0\,, \tag{22.31}$$

kde

$$C^2 = \min\left(\frac{p}{c_1}, \frac{\sigma_0}{c_2}\right), \tag{22.32}$$

čímž je pozitivní definitnost operátoru A_3 na lineálu M_3 dokázána. Zejména v případě $N = 2$ lze za čísla c_1, c_2 v (22.32) zvolit odhady (18.37) nebo (18.39), str. 203 a 204.

Úlohu řešit rovnici (22.7) s okrajovými podmínkami (22.28) lze tedy přibližně řešit metodami popsanými v kap. 12 až 15. Zobecněné řešení u_0 minimalizuje v příslušném prostoru H_{A_3} funkcionál

$$F_3u = \int_G \sum_{i,j=1}^N a_{ij} \frac{\partial u}{\partial x_i} \frac{\partial u}{\partial x_j} \,\mathrm{d}x + \int_G cu^2 \,\mathrm{d}x + \int_\Gamma \sigma u^2 \,\mathrm{d}S - 2\int_G fu \,\mathrm{d}x\,. \tag{22.33}$$

Protože podmínky (22.28) jsou nestabilní (viz pozn. 19.5, str. 225), není třeba (i když je to vhodné) volit bázi v prostoru H_{A_3} tak, aby její členy splňovaly podmínku (22.28). Viz též kap. 25.

3. *Neumannova okrajová podmínka*

$$Nu = 0\,. \tag{22.34}$$

V tomto případě je možno téměř doslova opakovat úvahy provedené v kap. 19 pro obyčejnou diferenciální rovnici druhého řádu s okrajovými podmínkami

$$u'(a) = 0\,, \quad u'(b) = 0\,.$$

Podle (22.20) je

$$(A_2u, u) = \int_G \sum_{i,j=1}^N a_{ij} \frac{\partial u}{\partial x_i} \frac{\partial u}{\partial x_j} \,\mathrm{d}x + \int_G cu^2 \,\mathrm{d}x\,. \tag{22.35}$$

Učiníme-li dodatečný předpoklad, že

$$c(x) \geq c_0 > 0 \text{ v } \bar{G}\,, \tag{22.36}$$

plyne z (22.35) a (22.8)

$$(A_2u, u) \geq p\int_G \sum_{i=1}^N \left(\frac{\partial u}{\partial x_i}\right)^2 \mathrm{d}x + c_0\int_G u^2 \,\mathrm{d}x \geq c_0\|u\|^2\,. \tag{22.37}$$

Za předpokladu (22.36) je operátor A_2 na lineálu M_2 pozitivně definitní, a je tedy opět možno použít metod kap. 12 až 15. Příslušný funkcionál je

$$F_2u = \int_G \sum_{i,j=1}^N a_{ij} \frac{\partial u}{\partial x_i} \frac{\partial u}{\partial x_j} \,\mathrm{d}x + \int_G cu^2 \,\mathrm{d}x - 2\int_G fu \,\mathrm{d}x\,. \tag{22.38}$$

Protože podmínka $Nu = 0$ je nestabilní (pozn. 19.5, str. 225), není nutné dbát na ni při volbě bázových funkcí.

Poznámka 22.2. K témuž závěru i k témuž funkcionálu (22.38) lze dospět, podobně jako v pozn. 19.3, str. 212, i za obecnějšího předpokladu, že totiž funkce $c(x)$ je v $\bar{G}$ spojitá a nezáporná a že $c(x) > 0$ aspoň v jednom bodě $x_0 \in \bar{G}$. Toto tvrzení plyne obdobným postupem – jako v citované poznámce – z nerovnosti

$$\|u\|^2 \leq \varkappa\left[\int_G \sum_{i=1}^N \left(\frac{\partial u}{\partial x_i}\right)^2 \mathrm{d}x + \int_K u^2 \,\mathrm{d}x\right], \quad \varkappa > 0\,, \tag{22.39}$$

která je, podobně jako nerovnost (19.20), str. 212, speciálním případem obecnější nerovnosti uvedené v [33], str. 22. Přitom K je některá N-rozměrná krychle, ležící v $\bar{G}$.

Je-li $c(x) \equiv 0$ v $\bar{G}$, není operátor A_2 na lineálu M_2 pozitivní. V tomto případě je totiž [viz (22.35)]

$$(A_2u, u) = \int_G \sum_{i,j=1}^N a_{ij} \frac{\partial u}{\partial x_i} \frac{\partial u}{\partial x_j} \,\mathrm{d}x\,. \tag{22.40}$$

Z (22.8) sice plyne

$$(A_2u, u) \geq 0$$

pro každé $u \in M_2$, ale z $(A_2u, u) = 0$ neplyne $u = 0$ v M_2 [tj. $u(x) \equiv 0$ v $\bar{G}$]: Pro $u(x) \equiv$ konst $\neq 0$ je totiž $(A_2u, u) = 0$ podle (22.40). Operátor A_2 není tedy v případě $c(x) \equiv 0$ na M_2 pozitivní (a tím méně ovšem je na M_2 pozitivně definitní).

Předpokládejme dále, že $u \in M_2$ je řešením problému

$$A_2u = -\sum_{i,j=1}^N \frac{\partial}{\partial x_i}\left(a_{ij}\frac{\partial u}{\partial x_j}\right) = f \text{ v } G\,, \tag{22.41}$$

$$Nu = 0 \text{ na } \Gamma\,. \tag{22.42}$$

Integrujeme-li rovnici (22.41) v oblasti G, dostaneme snadným výpočtem [v (22.17) položíme

$$g_1 = -a_{ij}\frac{\partial u}{\partial x_j}\,, \quad g_2 = 1$$

a použijeme (22.13)]

$$-\int_\Gamma Nu \,\mathrm{d}S = \int_G f(x) \,\mathrm{d}x\,.$$

Odtud a z (22.42) plyne nutná podmínka pro řešitelnost problému (22.41), (22.42),

$$\int_G f(x) \,\mathrm{d}x = 0\,. \tag{22.43}$$

Uvažovaný případ operátoru A_2 pro $c(x) \equiv 0$ je tedy analogický obdobnému případu pro obyčejné diferenciální rovnice (srov. str. 214) a také postup jeho řešení je analogický:

Uvažujme podprostor $\tilde{L}_2(G)$ prostoru $L_2(G)$ těch funkcí z $L_2(G)$, pro něž platí

$$\int_G u(x)\,dx = 0\,. \tag{22.44}$$

V tomto prostoru uvažujme lineál $\tilde{M}_2$ těch funkcí z lineálu M_2, které splňují podmínku (22.44). Lineál $\tilde{M}_2$ je hustý v $\tilde{L}_2(G)$, srov. pozn. 8.6, str. 107. Na tomto lineálu $\tilde{M}_2$ nechť je dán operátor $\tilde{A}_2$ předpisem

$$\tilde{A}_2 u = -\sum_{i,j=1}^{N} \frac{\partial}{\partial x_i}\left(a_{ij}\frac{\partial u}{\partial x_j}\right), \quad u \in \tilde{M}_2 \tag{22.45}$$

[srov. (22.16)]. Zcela stejným způsobem jako v případě operátoru A_2 [srov. (22.20)] dospějeme k rovnosti

$$(\tilde{A}_2 u, v) = \int_G \sum_{i,j=1}^{N} a_{ij}\frac{\partial u}{\partial x_j}\frac{\partial v}{\partial x_i}\,dx\,, \tag{22.46}$$

z níž v důsledku předpokladu $a_{ij}(x) = a_{ji}(x)$ plyne symetričnost operátoru $\tilde{A}_2$ na lineálu $\tilde{M}_2$. Z (22.46) dále vyplývá

$$(\tilde{A}_2 u, u) = \int_G \sum_{i,j=1}^{N} a_{ij}\frac{\partial u}{\partial x_i}\frac{\partial u}{\partial x_j}\,dx \geqq p\int_G \sum_{i=1}^{N}\left(\frac{\partial u}{\partial x_i}\right)^2 dx\,, \quad p > 0\,, \tag{22.47}$$

podle předpokladu (22.8). Avšak podle Poincaréovy nerovnosti (18.50), str. 206, platí pro funkce z lineálu $\tilde{M}_2$ [splňující tedy podmínku (22.44)] odhad

$$c_3\int_G \sum_{i=1}^{N}\left(\frac{\partial u}{\partial x_i}\right)^2 dx \geqq \int_G u^2(x)\,dx\,, \tag{22.48}$$

kde c_3 je kladná konstanta. [V případě obdélníka o stranách l_1, l_2 je např. možno položit

$$c_3 = \max\,(l_1^2, l_2^2)\,, \tag{22.49}$$

viz (18.58), str. 207.] Z (22.47) a (22.48) pak plyne pozitivní definitnost operátoru $\tilde{A}_2$ na lineálu $\tilde{M}_2$,

$$(\tilde{A}_2 u, u) \geqq C^2\|u\|^2\,, \quad u \in \tilde{M}_2\,, \tag{22.50}$$

s

$$C^2 = \frac{p}{c_3}\,. \tag{22.51}$$

Poznámka 22.3. K získanému výsledku lze připojit poznámku obdobnou poznámce na str. 215: Pozitivní definitnost operátoru $\tilde{A}_2$ jsme dokázali jen pro funkce z lineálu $\tilde{M}_2$. Zobecněné řešení u_0 problému (22.41), (22.42) existuje, právě když pravá strana f patří do prostoru $\tilde{L}_2(G)$, tj. vyhovuje-li podmínce

$$\int_G f(x)\,dx = 0\,. \tag{22.52}$$

Přibližné řešení lze pak hledat metodami popsanými v kap. 12 až 15. Příslušný funkcionál je

$$\tilde{F}_2 u = \int_G \sum_{i,j=1}^{N} a_{ij}\frac{\partial u}{\partial x_i}\frac{\partial u}{\partial x_j}\,dx - 2\int_G fu\,dx\,. \tag{22.53}$$

Připomeňme, že funkce z prostoru $H_{\tilde{A}_2}$ splňují podmínku (22.52), nesplňují však v obecném případě nestabilní okrajovou podmínku $Nu = 0$. Při volbě báze z prostoru $H_{\tilde{A}_2}$ není nutné přihlížet ke splnění této podmínky.

Poznamenejme ještě, že je-li $u_0 \in D_{\tilde{A}_2}$ řešením problému

$$-\sum_{i,j=1}^{N} \frac{\partial}{\partial x_i}\left(a_{ij}\frac{\partial u}{\partial x_j}\right) = f \ \text{ v } G\,,$$

$$Nu = 0 \ \text{ na } \Gamma\,,$$

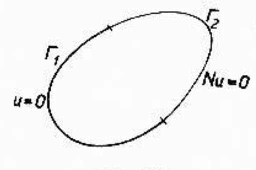
je řešením i každá funkce tvaru $u_0(x) + k$, kde k je libovolná konstanta. Nepatří-li zobecněné řešení $u_0(x)$ do $D_{\tilde{A}_2}$, můžeme fukci $u_0(x) + k$ pokládat za řešení v určitém zobecněném smyslu. (Srov. str. 447.)

Smíšené okrajové podmínky

V problémech parciálních diferenciálních rovnic se často setkáváme s případem, kdy na hranici Γ uvažované oblasti není dána podmínka téhož typu (tj. podmínka $u = 0$ nebo $Nu = 0$ nebo $Nu + \sigma u = 0$), ale kdy hranice Γ je rozdělena na několik (nejčastěji na dvě) částí $\Gamma_1, \ldots, \Gamma_r$[1]) a na každé z těchto částí je dána okrajová podmínka určitého typu. Všimněme si pro ilustraci okrajových podmínek

$$u = 0 \ \text{ na } \Gamma_1\,, \tag{22.54}$$

$$Nu = 0 \ \text{ na } \Gamma_2 \tag{22.55}$$



Obr. 12.

[1]) Rozumí se disjunktní části kladné $(N - 1)$-dimenzionální míry; neuvažujeme ovšem případy, kdy některá z částí Γ_i se redukuje na bod, apod.

(obr. 12). Označme M lineál funkcí spojitých s parciálními derivacemi do druhého řádu včetně v $\bar{G}$ a splňujících podmínky (22.54), (22.55). Tento lineál je podle pozn. 8.5, str. 107, hustý v $L_2(G)$. Označme A operátor daný na M předpisem

$$(22.56) \qquad Au = -\sum_{i,j=1}^{N} \frac{\partial}{\partial x_i}\left(a_{ij}\frac{\partial u}{\partial x_j}\right) + cu\,,$$

kde funkce $a_{ij} = a_{ji}$ a c vyhovují dříve uvedeným podmínkám hladkosti a podmínkám (22.8), (22.9). Obvyklým použitím Greenovy věty [viz (22.17)] dostaneme rovnost (22.18). Je-li $u \in M$, $v \in M$, je

$$(22.57) \qquad \int_\Gamma Nu\,.\,v\,\mathrm{d}S = \int_{\Gamma_1} Nu\,.\,v\,\mathrm{d}S + \int_{\Gamma_2} Nu\,.\,v\,\mathrm{d}S = 0\,,$$

neboť první integrál na pravé straně v (22.57) je roven nule podle (22.54), druhý podle (22.55). Tedy

$$(22.58) \qquad (Au, v) = \int_G \sum_{i,j=1}^{N} a_{ij}\frac{\partial u}{\partial x_j}\frac{\partial v}{\partial x_i}\,\mathrm{d}x + \int_G cuv\,\mathrm{d}x\,, \quad u \in M,\ v \in M\,,$$

odkud [podle předpokladu je $a_{ij} = a_{ji}$] plyne symetričnost operátoru A na lineálu M. Z (22.58) a z (22.8), (22.9) vyplývá jako dříve

$$(22.59) \qquad (Au, u) \geqq p\int_G \sum_{i=1}^{N}\left(\frac{\partial u}{\partial x_i}\right)^2 \mathrm{d}x\,.$$

Na tomto místě se musíme odvolat na nerovnost (30.6), str. 359, podle níž existuje konstanta $c > 0$, závislá jen na dané oblasti, taková, že pro každou funkci $u \in W_2^{(1)}(G)$ platí

$$(22.60) \qquad \|u\|^2_{W_2^{(1)}(G)} \leqq c\left[\int_{\Gamma_1} u^2\,\mathrm{d}S + \int_G \sum_{i=1}^{N}\left(\frac{\partial u}{\partial x_i}\right)^2 \mathrm{d}x\right].$$

Ale, jak uvidíme v citované kapitole, je

$$\|u\|^2_{W_2^{(1)}(G)} = \int_G u^2\,\mathrm{d}x + \int_G \sum_{i=1}^{N}\left(\frac{\partial u}{\partial x_i}\right)^2 \mathrm{d}x\,,$$

a podle (22.60) je tedy tím spíše

$$(22.61) \qquad \|u\|^2 \leqq c\left[\int_{\Gamma_1} u^2\,\mathrm{d}S + \int_G \sum_{i=1}^{N}\left(\frac{\partial u}{\partial x_i}\right)^2 \mathrm{d}x\right].$$

Mimoto pro každé $u \in M$ platí $u \in W_2^{(1)}(G)$. Dále v našem případě je $u = 0$ na Γ_1, takže první integrál na pravé straně nerovnosti (22.61) je roven nule a z (22.59), (22.61) pak plyne

$$(22.62) \qquad (Au, u) \geqq \frac{p}{c}\|u\|^2\,.$$

Tím je pozitivní definitnost operátoru A na lineálu M dokázána, a tím je dokázána i použitelnost metod, vypracovaných v kap. 12 až 15, k přibližnému řešení daného problému. Zobecněné řešení u_0 minimalizuje funkcionál

$$(22.63) \qquad Fu = \int_G \sum_{i,j=1}^{N} a_{ij}\frac{\partial u}{\partial x_i}\frac{\partial u}{\partial x_j}\,\mathrm{d}x + \int_G cu^2\,\mathrm{d}x - 2\int_G fu\,\mathrm{d}x$$

na příslušném prostoru H_A. Funkce tohoto prostoru nesplňují v obecném případě nestabilní okrajovou podmínku (22.55); při volbě báze v prostoru H_A není nutné ke splnění této podmínky přihlížet.

Podobně lze ukázat, že operátor daný předpisem (22.56) na lineálech funkcí spojitých s parciálními derivacemi do druhého řádu včetně na $\bar{G}$ a splňujících okrajové podmínky

$$(22.64) \qquad u = 0 \text{ na } \Gamma_1\,, \quad Nu + \sigma u = 0 \text{ na } \Gamma_2\,,$$

resp.

$$(22.65) \qquad Nu = 0 \text{ na } \Gamma_1\,, \quad Nu + \sigma u = 0 \text{ na } \Gamma_2\,,$$

kde Γ_1, Γ_2 má obdobný význam jako v (22.54), (22.55), je na těchto lineálech pozitivně definitní, jsou-li splněny podmínky $a_{ij} = a_{ji}$, (22.8), (22.9) a (22.12). Také v těchto případech lze aplikovat metody uvedené v kap. 12 až 15. Příslušné zobecněné řešení minimalizuje v obou případech funkcionál

$$(22.66) \quad Fu = \int_G \sum_{i,j=1}^{N} a_{ij}\frac{\partial u}{\partial x_i}\frac{\partial u}{\partial x_j}\,\mathrm{d}x + \int_G cu^2\,\mathrm{d}x + \int_{\Gamma_2} \sigma u^2\,\mathrm{d}S - 2\int_G fu\,\mathrm{d}x\,,$$

ovšem v odpovídajícím prostoru H_A; v případě podmínek (22.64) nesplňují v obecném případě funkce z prostoru H_A nestabilní podmínku $Nu + \sigma u = 0$ na Γ_2, v případě podmínek (22.65) nesplňují v obecném případě žádnou z těchto podmínek. Při volbě báze je tedy nutno splnit jen podmínku $u = 0$ na Γ_1.

Obdobné výsledky lze dostat i v případě, kdy hranice Γ je rozdělena na více než dvě části s různými okrajovými podmínkami.[1])

Poznámka 22.4. *Nehomogenní okrajové podmínky.* V případě nehomogenních okrajových podmínek

$$(22.67) \qquad u = g(S) \text{ na } \Gamma\,,$$

resp.

$$(22.68) \qquad Nu = h(S) \text{ na } \Gamma\,,$$

[1]) Jediný případ, kdy nastávají „obtíže" s pozitivní definitností, je tedy případ s Neumannovou okrajovou podmínkou $Nu = 0$ na celé hranici, uvažovaný na str. 272 až 274.

resp.

$$Nu + \sigma u = k(S) \text{ na } \Gamma \tag{22.69}$$

je třeba místo funkcionálů (22.27), resp. (22.38), resp. (22.33) minimalizovat funkcionály (viz o tom podrobně v kap. 34 a 35; viz také tabulku funkcionálů, uvedenou na konci knihy).

$$\int_G \sum_{i,j=1}^N a_{ij} \frac{\partial u}{\partial x_i} \frac{\partial u}{\partial x_j} \, dx + \int_G cu^2 \, dx - 2 \int_G fu \, dx , \tag{22.70}$$

resp.

$$\int_G \sum_{i,j=1}^N a_{ij} \frac{\partial u}{\partial x_i} \frac{\partial u}{\partial x_j} \, dx + \int_G cu^2 \, dx - 2 \int_G fu \, dx - 2 \int_\Gamma hu \, dS , \tag{22.71}$$

resp.

$$\int_G \sum_{i,j=1}^N a_{ij} \frac{\partial u}{\partial x_i} \frac{\partial u}{\partial x_j} \, dx + \int_G cu^2 \, dx + \int_\Gamma \sigma u^2 \, dS - 2 \int_G fu \, dx - 2 \int_\Gamma ku \, dS \tag{22.72}$$

na třídě dostatečně hladkých funkcí [v terminologii kap. 29 funkcí z prostoru $W_2^{(1)}(G)$], splňujících (v obecném případě ve smyslu stop, viz kap. 30) dané stabilní okrajové podmínky, tj. splňujících jen v případě funkcionálu (22.70) okrajovou podmínku (22.67). Je-li dána okrajová podmínka (22.68), minimalizujeme v případě, že $c(x) \equiv 0$, funkcionál (22.71) mezi funkcemi prostoru H_{λ_2}, splňujícími tedy podmínku $\int_G u \, dx = 0$. Poznamenejme, že v tomto případě je problém řešitelný jen tehdy, je-li splněna podmínka

$$\int_G f \, dx + \int_\Gamma h \, dS = 0 . \tag{22.73}$$

Funkcionály (22.27), (22.38), resp. (22.53) a (22.33) jsou ovšem speciálním případem funkcionálů (22.70), (22.71), (22.72).

Obdobně lze postupovat v případě smíšených okrajových podmínek. Např. v případě okrajových podmínek

$$u = g(S) \text{ na } \Gamma_1 , \tag{22.74}$$

$$Nu + \sigma u = h(S) \text{ na } \Gamma_2 \tag{22.75}$$

minimalizujeme funkcionál

$$\int_G \sum_{i,j=1}^N a_{ij} \frac{\partial u}{\partial x_i} \frac{\partial u}{\partial x_j} \, dx + \int_G cu^2 \, dx + \int_{\Gamma_2} \sigma u^2 \, dS - 2 \int_G fu \, dx - 2 \int_{\Gamma_2} hu \, dS \tag{22.76}$$

na třídě funkcí splňujících podmínku $u = g(S)$ na Γ_1.

Poznámka 22.5. Pro Poissonovu rovnici

$$-\Delta u = f$$

je

$$\int_G \sum_{i,j=1}^N a_{ij} \frac{\partial u}{\partial x_i} \frac{\partial u}{\partial x_j} \, dx = \int_G \sum_{i=1}^N \left(\frac{\partial u}{\partial x_i}\right)^2 dx ,$$

$c(x) \equiv 0$ a

$$Nu = \frac{\partial u}{\partial \nu} ,$$

srov. (22.15). Okrajové podmínky základních tří typů budou tedy mít tvar

$$u = g(S) \text{ na } \Gamma , \tag{22.77}$$

resp.

$$\frac{\partial u}{\partial \nu} = h(S) \text{ na } \Gamma , \tag{22.78}$$

resp.

$$\frac{\partial u}{\partial \nu} + \sigma u = k(S) \text{ na } \Gamma , \tag{22.79}$$

a tvar příslušných funkcionálů bude jednodušší. Např. funkcionál (22.72), odpovídající okrajové podmínce (22.79), bude mít tvar

$$\int_G \sum_{i=1}^N \left(\frac{\partial u}{\partial x_i}\right)^2 dx + \int_\Gamma \sigma u^2 \, dS - 2 \int_G fu \, dS - 2 \int_\Gamma ku \, dS . \tag{22.80}$$

Kapitola 23

Biharmonický operátor (rovnice desek a nosných stěn)

V této kapitole si podrobněji všimneme biharmonického operátoru pro dvě proměnné, který je ovšem speciálním případem lineárního parciálního diferenciálního operátoru čtvrtého řádu. O obecnějším případě (včetně operátorů vyšších řádů) pojednáme ve čtvrté části naší knihy.

Uvažujme lineál M, jehož prvky tvoří funkce $u(x_1, x_2)$, spojité s parciálními derivacemi do čtvrtého řádu včetně v uvažované uzavřené oblasti $\bar{G}$.

Biharmonický operátor

$$\Delta^2 = \frac{\partial^4}{\partial x_1^4} + 2 \frac{\partial^4}{\partial x_1^2 \partial x_2^2} + \frac{\partial^4}{\partial x_2^4} ,$$

aplikovaný na funkci $u \in M$, zapišme z důvodu, který ihned vysvitne, ve tvaru

$$\Delta^2 u = \frac{\partial^4 u}{\partial x_1^4} + \frac{\partial^4 u}{\partial x_1\,\partial x_2\,\partial x_1\,\partial x_2} + \frac{\partial^4 u}{\partial x_2\,\partial x_1\,\partial x_2\,\partial x_1} + \frac{\partial^4 u}{\partial x_2^4}. \tag{23.1}$$

Zvolme libovolnou funkci $v \in M$ a vyšetřujme skalární součin

$$(\Delta^2 u, v). \tag{23.2}$$

Z vyšetřování tohoto součinu vyplyne velmi přirozeným způsobem řada důsledků, zejména vhodná formulace okrajových podmínek, s kterými se setkáváme v teorii desek, apod. Příslušné výpočty budou ovšem v případě biharmonického operátoru poněkud pracnější než v případě operátorů druhého řádu, které jsme vyšetřovali v předcházející kapitole.

Dosaďme do (23.2) z (23.1) a uvažujme nejprve skalární součin

$$\left(\frac{\partial^4 u}{\partial x_1^4}, v\right) = \int_G \frac{\partial^4 u}{\partial x_1^4}\, v\, \mathrm{d}x. \tag{23.3}$$

Použijeme-li nám již dobře známého vzorce (8.31),

$$\int_G \frac{\partial g_1}{\partial x_i}\, g_2\, \mathrm{d}x = \int_\Gamma g_1 g_2 v_i\, \mathrm{d}S - \int_G g_1 \frac{\partial g_2}{\partial x_i}\, \mathrm{d}x, \tag{23.4}$$

kde v_i je i-tá souřadnice jednotkového vektoru vnější normály, dostaneme nejprve

$$\int_G \frac{\partial^4 u}{\partial x_1^4}\, v\, \mathrm{d}x = \int_\Gamma \frac{\partial^3 u}{\partial x_1^3}\, v v_1\, \mathrm{d}s^{1)} - \int_G \frac{\partial^3 u}{\partial x_1^3} \frac{\partial v}{\partial x_1}\, \mathrm{d}x. \tag{23.5}$$

Podle (23.4) je dále

$$-\int_G \frac{\partial^3 u}{\partial x_1^3} \frac{\partial v}{\partial x_1}\, \mathrm{d}x = -\int_\Gamma \frac{\partial^2 u}{\partial x_1^2} \frac{\partial v}{\partial x_1}\, v_1\, \mathrm{d}s + \int_G \frac{\partial^2 u}{\partial x_1^2} \frac{\partial^2 v}{\partial x_1^2}\, \mathrm{d}x. \tag{23.6}$$

Z (23.5) a (23.6) tedy dostáváme

$$\int_G \frac{\partial^4 u}{\partial x_1^4}\, v\, \mathrm{d}x = \int_\Gamma \frac{\partial^3 u}{\partial x_1^3}\, v v_1\, \mathrm{d}s - \int_\Gamma \frac{\partial^2 u}{\partial x_1^2} \frac{\partial v}{\partial x_1}\, v_1\, \mathrm{d}s + \int_G \frac{\partial^2 u}{\partial x_1^2} \frac{\partial^2 v}{\partial x_1^2}\, \mathrm{d}x. \tag{23.7}$$

[1]) Píšeme ds, nikoli dS, neboť uvažujeme případ dvou proměnných; ds je tedy diferenciál oblouku hranice Γ. Je-li oblast G jednoduše souvislá, takže hranici tvoří jediná uzavřená křivka c délky l, můžeme na ní zvolit určitý bod P jako výchozí bod a psát integrál $\int_\Gamma g(s)\,\mathrm{d}s$ ve tvaru $\int_0^l g(s)\,\mathrm{d}s$. V případě vícenásobně souvislé oblasti bude integrál po hranici Γ součtem integrálů tohoto typu.

Obdobně dostaneme

$$\int_G \frac{\partial^4 u}{\partial x_1\,\partial x_2\,\partial x_1\,\partial x_2}\, v\, \mathrm{d}x = \int_\Gamma \frac{\partial^3 u}{\partial x_2\,\partial x_1\,\partial x_2}\, v v_1\, \mathrm{d}s - \int_\Gamma \frac{\partial^2 u}{\partial x_1\,\partial x_2} \frac{\partial v}{\partial x_1}\, v_2\, \mathrm{d}s + \int_G \frac{\partial^2 u}{\partial x_1\,\partial x_2} \frac{\partial^2 v}{\partial x_1\,\partial x_2}\, \mathrm{d}x, \tag{23.8}$$

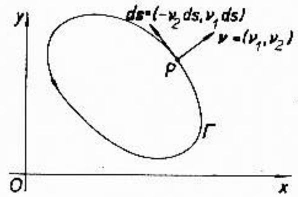
$$\int_G \frac{\partial^4 u}{\partial x_2\,\partial x_1\,\partial x_2\,\partial x_1}\, v\, \mathrm{d}x = \int_\Gamma \frac{\partial^3 u}{\partial x_1\,\partial x_2\,\partial x_1}\, v v_2\, \mathrm{d}s - \int_\Gamma \frac{\partial^2 u}{\partial x_2\,\partial x_1} \frac{\partial v}{\partial x_2}\, v_1\, \mathrm{d}s + \int_G \frac{\partial^2 u}{\partial x_1\,\partial x_2} \frac{\partial^2 v}{\partial x_1\,\partial x_2}\, \mathrm{d}x,^{1)} \tag{23.9}$$

$$\int_G \frac{\partial^4 u}{\partial x_2^4}\, v\, \mathrm{d}x = \int_\Gamma \frac{\partial^3 u}{\partial x_2^3}\, v v_2\, \mathrm{d}s - \int_\Gamma \frac{\partial^2 u}{\partial x_2^2} \frac{\partial v}{\partial x_2}\, v_2\, \mathrm{d}s + \int_G \frac{\partial^2 u}{\partial x_2^2} \frac{\partial^2 v}{\partial x_2^2}\, \mathrm{d}x. \tag{23.10}$$

Upravíme nejprve integrály na hranici Γ. Je

$$\int_\Gamma \left(\frac{\partial^3 u}{\partial x_1^3} v_1 + \frac{\partial^3 u}{\partial x_2\,\partial x_1\,\partial x_2} v_1 + \frac{\partial^3 u}{\partial x_1\,\partial x_2\,\partial x_1} v_2 + \frac{\partial^3 u}{\partial x_2^3} v_2\right) v\, \mathrm{d}s = \tag{23.11}$$

$$= \int_\Gamma v \left[\frac{\partial}{\partial x_1}(\Delta u)\, v_1 + \frac{\partial}{\partial x_2}(\Delta u)\, v_2\right] \mathrm{d}s = \int_\Gamma v \frac{\partial}{\partial v} \Delta u\, \mathrm{d}s.$$



Obr. 13.

Tím je tedy v poměrně jednoduchém tvaru vyjádřen součet prvních integrálů na pravých stranách rovností (23.7) až (23.10). Upravme součet druhých integrálů na pravých stranách těchto rovností. Ze známých vztahů

$$\frac{\partial v}{\partial \nu} = \frac{\partial v}{\partial x_1} v_1 + \frac{\partial v}{\partial x_2} v_2, \tag{23.12}$$

$$\frac{\partial v}{\partial s} = -\frac{\partial v}{\partial x_1} v_2 + \frac{\partial v}{\partial x_2} v_1$$

[1]) Používáme zde předpokladů o funkcích u a v a píšeme

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x_1\,\partial x_2} = \frac{\partial^2 u}{\partial x_2\,\partial x_1} \quad \text{apod.}$$

(obr. 13) plyne snadným výpočtem

$$\frac{\partial v}{\partial x_1} = \frac{\partial v}{\partial \nu}\,\nu_1 - \frac{\partial v}{\partial s}\,\nu_2\,, \tag{23.13}$$

$$\frac{\partial v}{\partial x_2} = \frac{\partial v}{\partial \nu}\,\nu_2 + \frac{\partial v}{\partial s}\,\nu_1\,.$$

Použijeme-li těchto vzorců, dostaneme pro součet druhých integrálů na pravých stranách rovnic (23.7) až (23.10) výraz

$$\begin{aligned}
&-\int_\Gamma \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x_1^2}\frac{\partial v}{\partial x_1}\,\nu_1 + \frac{\partial^2 u}{\partial x_1\,\partial x_2}\frac{\partial v}{\partial x_1}\,\nu_2 + \frac{\partial^2 u}{\partial x_1\,\partial x_2}\frac{\partial v}{\partial x_2}\,\nu_1 + \right.\\
&\left. + \frac{\partial^2 u}{\partial x_2^2}\frac{\partial v}{\partial x_2}\,\nu_2\right) \mathrm{d}s = -\int_\Gamma \left[\frac{\partial^2 u}{\partial x_1^2}\left(\frac{\partial v}{\partial \nu}\,\nu_1 - \frac{\partial v}{\partial s}\,\nu_2\right)\nu_1 + \right.\\
&+ \frac{\partial^2 u}{\partial x_1\,\partial x_2}\left(\frac{\partial v}{\partial \nu}\,\nu_1 - \frac{\partial v}{\partial s}\,\nu_2\right)\nu_2 + \frac{\partial^2 u}{\partial x_1\,\partial x_2}\left(\frac{\partial v}{\partial \nu}\,\nu_2 + \frac{\partial v}{\partial s}\,\nu_1\right)\nu_1 + \\
&\left. + \frac{\partial^2 u}{\partial x_2^2}\left(\frac{\partial v}{\partial \nu}\,\nu_2 + \frac{\partial v}{\partial s}\,\nu_1\right)\nu_2\right] \mathrm{d}s = -\int_\Gamma \frac{\partial v}{\partial \nu}\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x_1^2}\,\nu_1^2 + \right.\\
&\left. + 2\,\frac{\partial^2 u}{\partial x_1\,\partial x_2}\,\nu_1\nu_2 + \frac{\partial^2 u}{\partial x_2^2}\,\nu_2^2\right) \mathrm{d}s - \int_\Gamma \frac{\partial v}{\partial s}\left[-\frac{\partial^2 u}{\partial x_1^2}\,\nu_1\nu_2 + \right.\\
&\left. + \frac{\partial^2 u}{\partial x_1\,\partial x_2}\left(\nu_1^2 - \nu_2^2\right) + \frac{\partial^2 u}{\partial x_2^2}\,\nu_1\nu_2\right] \mathrm{d}s\,.
\end{aligned} \tag{23.14}$$

Nejprve je, jak známo

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x_1^2}\,\nu_1^2 + 2\,\frac{\partial^2 u}{\partial x_1\,\partial x_2}\,\nu_1\nu_2 + \frac{\partial^2 u}{\partial x_2^2}\,\nu_2^2 = \frac{\partial^2 u}{\partial \nu^2}\,. \tag{23.15}$$

Předpokládáme-li dále určitou hladkost hranice Γ, můžeme upravit poslední integrál v (23.14). Píšeme-li jej ve tvaru

$$-\int_\Gamma \frac{\partial v}{\partial s}\,F\,\mathrm{d}s\,, \tag{23.16}$$

kde

$$F(s) = -\frac{\partial^2 u}{\partial x_1^2}\,\nu_1\nu_2 + \frac{\partial^2 u}{\partial x_1\,\partial x_2}\left(\nu_1^2 - \nu_2^2\right) + \frac{\partial^2 u}{\partial x_2^2}\,\nu_1\nu_2\,, \tag{23.17}$$

a integrujeme-li jej na hranici Γ per partes (srov. pozn. 1 na str. 280), dostaneme

$$-\int_\Gamma \frac{\partial v}{\partial s}\,F\,\mathrm{d}s = -\left[vF\right] + \int_\Gamma v\,\frac{\partial F}{\partial s}\,\mathrm{d}s\,. \tag{23.18}$$

Člen v lomené závorce je nulový: Integrování probíhá totiž po hranici oblasti Γ, která je uzavřenou křivkou nebo se skládá z konečného počtu uzavřených křivek; funkce vF je na Γ spojitá,[1]) takže při oběhnutí každé z těchto uzavřených křivek se vrátíme do výchozího bodu s touže hodnotou této funkce. Tedy je

$$-\int_\Gamma \frac{\partial v}{\partial s}\,F\,\mathrm{d}s = \int_\Gamma v\,\frac{\partial F}{\partial s}\,\mathrm{d}s\,.^2) \tag{23.19}$$

Z (23.7) až (23.10) a z (23.11), (23.14), (23.15) a (23.19) tedy pro každou dvojici funkcí $u \in M$, $v \in M$ plyne

$$\begin{aligned}
(\Delta^2 u, v) = &\int_G \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x_1^2}\frac{\partial^2 v}{\partial x_1^2} + 2\,\frac{\partial^2 u}{\partial x_1\,\partial x_2}\,\frac{\partial^2 v}{\partial x_1\,\partial x_2} + \frac{\partial^2 u}{\partial x_2^2}\frac{\partial^2 v}{\partial x_2^2}\right)\mathrm{d}x + \\
&+ \int_\Gamma v\left\{\frac{\partial}{\partial \nu}(\Delta u) + \frac{\partial}{\partial s}\left[-\frac{\partial^2 u}{\partial x_1^2}\,\nu_1\nu_2 + \frac{\partial^2 u}{\partial x_1\,\partial x_2}\left(\nu_1^2 - \nu_2^2\right) + \right.\right.\\
&\left.\left. + \frac{\partial^2 u}{\partial x_2^2}\,\nu_1\nu_2\right]\right\}\mathrm{d}s - \int_\Gamma \frac{\partial v}{\partial \nu}\frac{\partial^2 u}{\partial \nu^2}\,\mathrm{d}s\,.
\end{aligned} \tag{23.20}$$

Než přistoupíme k důsledkům integrální identity (23.20), uvedeme určité zobecnění této identity, které vzniká z požadavku teorie pružnosti, aby bylo možno ve formulaci problému zachytit vhodným způsobem i vliv Poissonovy konstanty. Zapíšeme-li biharmonický operátor ve tvaru

$$\begin{aligned}
\Delta^2 u = &\frac{\partial^2}{\partial x_1^2}\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x_1^2} + \sigma\,\frac{\partial^2 u}{\partial x_2^2}\right) + 2\,\frac{\partial^2}{\partial x_1\,\partial x_2}\left[(1-\sigma)\,\frac{\partial^2 u}{\partial x_1\,\partial x_2}\right] + \\
&+ \frac{\partial^2}{\partial x_2^2}\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x_2^2} + \sigma\,\frac{\partial^2 u}{\partial x_1^2}\right),
\end{aligned} \tag{23.21}$$

---

[1]) Zde používáme hladkosti hranice Γ. Jinak totiž nemusí být funkce $\nu_1(s)$, $\nu_2(s)$ na Γ spojité. V „rozích" pak vznikají při integrování per partes bodové členy, které odpovídají v mechanice desek bodovým reakcím.

[2]) Je-li G jednoduše souvislá oblast a píšeme-li integrál

$$\int_\Gamma \frac{\partial v}{\partial s}\,F\,\mathrm{d}s$$

ve tvaru

$$\int_0^l \frac{\partial v}{\partial s}\,F\,\mathrm{d}s\,,$$

dostaneme výsledek (23.19) okamžitě:

$$-\int_0^l \frac{\partial v}{\partial s}\,F\,\mathrm{d}s = -\left[vF\right]_0^l + \int_0^l v\,\frac{\partial F}{\partial s}\,\mathrm{d}s = \int_0^l v\,\frac{\partial F}{\partial s}\,\mathrm{d}s\,,$$

neboť funkce v i F mají pro $s = 0$ a $s = l$ tutéž hodnotu. V případě vícenásobně souvislé oblasti můžeme provést integrování per partes po každé z hraničních křivek zvlášť.

kde σ je reálné číslo, dostaneme zcela obdobným výpočtem, který zde již nebudeme podrobně provádět, identitu

$$(\Delta^2 u, v) = \int_G \left[\frac{\partial^2 u}{\partial x_1^2}\left(\frac{\partial^2 v}{\partial x_1^2} + \sigma \frac{\partial^2 v}{\partial x_2^2}\right) + 2(1-\sigma)\frac{\partial^2 u}{\partial x_1 \partial x_2}\frac{\partial^2 v}{\partial x_1 \partial x_2} + \right. \tag{23.22}$$
$$\left. + \frac{\partial^2 u}{\partial x_2^2}\left(\frac{\partial^2 v}{\partial x_2^2} + \sigma \frac{\partial^2 v}{\partial x_1^2}\right)\right] dx - \int_\Gamma v N u \, ds - \int_\Gamma \frac{\partial v}{\partial \nu} M u \, ds ,$$

kde jsme použili označení

$$Nu = -\frac{\partial}{\partial \nu}(\Delta u) + (1-\sigma)\frac{\partial}{\partial s}\left[\frac{\partial^2 u}{\partial x_1^2}\nu_1 \nu_2 - \frac{\partial^2 u}{\partial x_1 \partial x_2}(\nu_1^2 - \nu_2^2) - \frac{\partial^2 u}{\partial x_2^2}\nu_1 \nu_2\right],$$

$$Mu = \sigma \Delta u + (1-\sigma)\frac{\partial^2 u}{\partial \nu^2} . \tag{23.23}$$

Identita (23.20) je zřejmě speciálním případem identity (23.22) pro $\sigma = 0$.

Uvažujme nyní rovnici

$$\Delta^2 u = f \text{ na } G \tag{23.24}$$

s okrajovými podmínkami

$$u = 0 , \tag{23.25}$$

$$\frac{\partial u}{\partial \nu} = 0 \text{ na } \Gamma , \tag{23.26}$$

resp. s podmínkami

$$u = 0 , \tag{23.27}$$

$$Mu = 0 \text{ na } \Gamma , \tag{23.28}$$

resp. s podmínkami

$$Mu = 0 , \tag{23.29}$$

$$Nu = 0 \text{ na } \Gamma .^{1)} \tag{23.30}$$

[1]) Rovnici (23.24) můžeme fyzikálně interpretovat jako rovnici *desky*, a to *pevně vetknuté*, resp. *prostě podepřené*, resp. *s volným okrajem*, podle toho, jsou-li dány podmínky (23.25), (23.26), resp. (23.27), (23.28), resp. (23.29), (23.30). Podmínky prostého podepření lze formulovat i v jiném tvaru, viz např. [28], str. 173.

Poznamenejme, že podmínky (23.25), (23.26) jsou ekvivalentní podmínkám

$$u = 0 , \tag{23.31}$$

$$\frac{\partial u}{\partial x_1} = 0 , \quad \frac{\partial u}{\partial x_2} = 0 \text{ na } \Gamma , \tag{23.32}$$

jak snadno vyplývá z (23.13), uvědomíme-li si, že z (23.31) plyne $\partial u/\partial s = 0$ na Γ.

Poznamenejme dále, že pro rovnici (23.24) lze předepsat i jiné okrajové podmínky, než jsou podmínky (23.25) až (23.30). Omezili jsme se na takové podmínky, s nimiž se nejčastěji setkáváme v aplikacích. Viz také závěr této kapitoly.

Označme M_1, resp. M_2, resp. M_3 lineál funkcí spojitých s parciálními derivacemi do čtvrtého řádu včetně v G a splňujících podmínky (23.25), (23.26), resp. (23.27), (23.28), resp. (23.29), (23.30); A_1, resp. A_2, resp. A_3 označme biharmonický operátor, uvažovaný na lineálu M_1, resp. M_2, resp. M_3.

Ukážeme nejprve, že operátor A_1 je na lineálu M_1 pozitivně definitní. Nechť tedy $u \in M_1$, $v \in M_1$. Podle (23.25), (23.26) je $v = 0$ a $\partial v/\partial \nu = 0$ na Γ, takže v (23.20)[1]) odpadnou oba integrály po hranici Γ, a dostaneme

$$(A_1 u, v) = \int_G \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x_1^2}\frac{\partial^2 v}{\partial x_1^2} + 2\frac{\partial^2 u}{\partial x_1 \partial x_2}\frac{\partial^2 v}{\partial x_1 \partial x_2} + \frac{\partial^2 u}{\partial x_2^2}\frac{\partial^2 v}{\partial x_2^2}\right) dx , \tag{23.33}$$

odkud je zřejmá symetričnost operátoru A_1 na lineálu M_1. Z (23.33) dále plyne

$$(A_1 u, u) = \int_G \left[\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x_1^2}\right)^2 + 2\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x_1 \partial x_2}\right)^2 + \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x_2^2}\right)^2\right] dx . \tag{23.34}$$

Použijme ekvivalence podmínek (23.25), (23.26) a podmínek (23.31), (23.32) a na funkce $\partial u/\partial x_1$ a $\partial u/\partial x_2$ aplikujme Friedrichsovu nerovnost. Vzhledem k (23.32) dostaneme

$$\int_G \left(\frac{\partial u}{\partial x_1}\right)^2 dx \leq c_1 \int_G \left[\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x_1^2}\right)^2 + \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x_1 \partial x_2}\right)^2\right] dx , \tag{23.35}$$

$$\int_G \left(\frac{\partial u}{\partial x_2}\right)^2 dx \leq c_1 \int_G \left[\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x_1 \partial x_2}\right)^2 + \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x_2^2}\right)^2\right] dx , \tag{23.36}$$

[1]) Můžeme použít i (23.22), volíme zde ovšem jednodušší identitu (23.20). Poznamenejme, že při odvození vzorce (23.20) [totéž platí i pro vzorec (23.22)] bylo třeba předpokládat určitou hladkost hranice. Přesto, že vycházíme ze vzorce (23.20), je zde tento požadavek zbytečný: V textu na str. 282 jsme jej totiž potřebovali k úpravě posledního z integrálů (23.14) na tvar (23.19). V našem případě však z podmínky $v = 0$ na Γ plyne i $\partial v/\partial s = 0$ na Γ, takže můžeme uvažovaného integrálu, který je tedy v tomto případě roven nule, použít v původním tvaru.

Totéž platí pro případ operátoru A_2 v dalším textu.

kde pro c_1 je možno použít např. odhadu (18.37), str. 203. Obdobně vzhledem k podmínce (23.31) je

$$\int_G u^2 \, dx \leqq c_1 \int_G \left[\left(\frac{\partial u}{\partial x_1} \right)^2 + \left(\frac{\partial u}{\partial x_2} \right)^2 \right] dx \,. \tag{23.37}$$

Z (23.35) až (23.37) tedy plyne

$$\int_G u^2 \, dx \leqq c_1^2 \int_G \left[\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x_1^2} \right)^2 + 2 \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x_1 \, \partial x_2} \right)^2 + \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x_2^2} \right)^2 \right] dx \tag{23.38}$$

čili

$$(A_1 u, u) \geqq \frac{1}{c_1^2} \|u\|^2 \,, \tag{23.39}$$

čímž je pozitivní definitnost operátoru A_1 na lineálu M_1 dokázána. K přibližnému řešení problému (23.24) až (23.26) je tedy možno použít metod uvedených v kap. 12 až 15. Zobecněné řešení $u_0(x)$ uvažovaného problému minimalizuje v odpovídajícím prostoru H_{A_1} funkcionál

$$F_1 u = \int_G \left[\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x_1^2} \right)^2 + 2 \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x_1 \, \partial x_2} \right)^2 + \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x_2^2} \right)^2 \right] dx - 2 \int_G f u \, dx \,. \tag{23.40}$$

Přitom prvky báze v prostoru H_{A_1} splňují podmínky (23.25) i (23.26), neboť obě tyto podmínky jsou pro biharmonický operátor stabilní.[1])

Uvažujme nyní operátor A_2. Použijeme integrální identity (23.22). Je-li $u \in M_2$, $v \in M_2$, odpadnou v této identitě oba integrály po hranici Γ, takže dostaneme [v prvním integrálu na pravé straně rovnosti (23.22) roznásobíme závorky]

$$\begin{aligned}(A_2 u, v) = \int_G \Bigg[& \frac{\partial^2 u}{\partial x_1^2} \frac{\partial^2 v}{\partial x_1^2} + \sigma \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x_1^2} \frac{\partial^2 v}{\partial x_2^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial x_2^2} \frac{\partial^2 v}{\partial x_1^2} \right) + \\ & + \frac{\partial^2 u}{\partial x_2^2} \frac{\partial^2 v}{\partial x_2^2} + 2(1 - \sigma) \frac{\partial^2 u}{\partial x_1 \, \partial x_2} \frac{\partial^2 v}{\partial x_1 \, \partial x_2} \Bigg] dx \,,\end{aligned} \tag{23.41}$$

odkud plyne symetričnost operátoru A_2 na lineálu M_2. Dále je

$$(A_2 u, u) = \int_G \left[\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x_1^2} \right)^2 + 2\sigma \frac{\partial^2 u}{\partial x_1^2} \frac{\partial^2 u}{\partial x_2^2} + \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x_2^2} \right)^2 + 2(1 - \sigma) \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x_1 \, \partial x_2} \right)^2 \right] dx \,. \tag{23.42}$$

Pro aplikace (zejména v teorii pružnosti) má význam uvažovat případ

$$0 \leqq \sigma < 1 \,. \tag{23.43}$$

Ukážeme, že za tohoto předpokladu je operátor A_2 na lineálu M_2 pozitivně definitní.

[1]) Lze ukázat, že Ritzova posloupnost, resp. jakákoli posloupnost minimalizující v H_{A_1} funkcionál (23.40), konverguje k $u_0(x)$ stejnoměrně v $\bar{G}$. Viz např. [28], str. 175. Tento výsledek je speciálním případem tzv. Sobolevových vět o vnoření, viz např. [33].

Ze zřejmé identity, platné pro libovolná čísla a, b, σ,

$$a^2 + 2\sigma ab + b^2 - (1 - \sigma)(a^2 + b^2) = \sigma(a + b)^2$$

pak plyne, je-li $\sigma \geqq 0$,

$$a^2 + 2\sigma ab + b^2 \geqq (1 - \sigma)(a^2 + b^2) \,. \tag{23.44}$$

Položíme-li v této nerovnosti

$$a = \frac{\partial^2 u}{\partial x_1^2} \,, \quad b = \frac{\partial^2 u}{\partial x_2^2} \,,$$

dostaneme podle (23.42)

$$(A_2 u, u) \geqq (1 - \sigma) \int_G \left[\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x_1^2} \right)^2 + 2 \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x_1 \, \partial x_2} \right)^2 + \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x_2^2} \right)^2 \right] dx \,. \tag{23.45}$$

Protože je splněna podmínka (23.27), plyne užitím Greenovy věty a (23.12)

$$\int_G \frac{\partial u}{\partial x_1} \, dx = \int_\Gamma u \, dx_2 = 0 \,,$$

$$\int_G \frac{\partial u}{\partial x_2} \, dx = - \int_\Gamma u \, dx_1 = 0 \,.$$

Použijeme-li tedy Poincaréovy nerovnosti (18.51), str. 206, na funkce $\partial u / \partial x_1$, $\partial u / \partial x_2$, dostaneme

$$\int_G \left(\frac{\partial u}{\partial x_1} \right)^2 dx \leqq c_3 \int_G \left[\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x_1^2} \right)^2 + \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x_1 \, \partial x_2} \right)^2 \right] dx \,, \tag{23.46}$$

$$\int_G \left(\frac{\partial u}{\partial x_2} \right)^2 dx \leqq c_3 \int_G \left[\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x_1 \, \partial x_2} \right)^2 + \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x_2^2} \right)^2 \right] dx \,, \tag{23.47}$$

kde např. v případě, že G je obdélník, lze pro konstantu c_3 použít odhadu (18.58). Na funkci u pak použijeme, stejně jako v předcházejícím textu, Friedrichsovy nerovnosti, která vzhledem k podmínce (23.27) má opět tvar (23.37). Odtud a z (23.46), (23.47) dostaneme

$$\int_G u^2 \, dx \leqq c_1 c_3 \int_G \left[\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x_1^2} \right)^2 + 2 \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x_1 \, \partial x_2} \right)^2 + \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x_2^2} \right)^2 \right] dx$$

čili

$$(A_2 u, u) \geqq \frac{1 - \sigma}{c_1 c_3} \|u\|^2 \,. \tag{23.48}$$

Tím je za předpokladu $0 \leqq \sigma < 1$ dokázána pozitivní definitnost operátoru A_2 na lineálu M_2 a tím i použitelnost metod, které jsou uvedeny v kap. 12 až 15, k přibližnému řešení problému (23.24), (23.27), (23.28). Zobecněné řešení $u_0(x)$ tohoto problému minimalizuje v příslušném prostoru H_{A_2} funkcionál

$$F_2 u = \int_G \left[\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x_1^2} \right)^2 + 2\sigma \frac{\partial^2 u}{\partial x_1^2} \frac{\partial^2 u}{\partial x_2^2} + \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x_2^2} \right)^2 + \right. \\ \left. + 2(1 - \sigma) \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x_1 \, \partial x_2} \right)^2 \right] \mathrm{d}x - 2 \int_G f u \, \mathrm{d}x \,. \tag{23.49}$$

Ne všechny funkce z prostoru H_{A_2} splňují nestabilní podmínku (23.28). Při volbě báze v prostoru H_{A_2} není nutné přihlížet ke splnění této podmínky.

Pokud jde o rovnici (23.24) s okrajovými podmínkami (23.29), (23.30), ponecháme otázky řešitelnosti tohoto problému (který odpovídá Neumannově problému pro Poissonovu rovnici) do kap. 35.

Poznámka 23.1. Je-li oblast G obdélník, jehož strany jsou rovnoběžné s osami souřadnic, pak funkcionály (23.40) a (23.49) v případě okrajové podmínky $u = 0$ na Γ splývají, neboť

$$\int_G \frac{\partial^2 u}{\partial x_1^2} \frac{\partial^2 u}{\partial x_2^2} \, \mathrm{d}x = \int_G \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x_1 \, \partial x_2} \right)^2 \mathrm{d}x \,.$$

Tato rovnost totiž plyne pro uvažovaný případ z Greenovy věty,

$$\int_G \left[\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x_1 \, \partial x_2} \right)^2 - \frac{\partial^2 u}{\partial x_1^2} \frac{\partial^2 u}{\partial x_2^2} \right] \mathrm{d}x = \int_\Gamma \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x_1^2} \frac{\partial u}{\partial x_2} \, \mathrm{d}x_1 + \frac{\partial^2 u}{\partial x_1 \, \partial x_2} \frac{\partial u}{\partial x_2} \, \mathrm{d}x_2 \right);$$

poslední integrál je roven nule, neboť $u = 0$ na Γ, a tedy $\partial^2 u / \partial x_1^2$, resp. $\partial u / \partial x_2$ je rovno nule na stranách obdélníka, rovnoběžných s osou x_1, resp. s osou x_2. V uvažovaném případě jsou tedy funkcionály (23.40) a (23.49) stejného tvaru.

Poznámka 23.2. Podobně jako u rovnic druhého řádu setkáváme se i v případě rovnice (23.24) se smíšenými okrajovými podmínkami. Např. na části Γ_1 hranice Γ jsou dány podmínky (23.25), (23.26), na části Γ_2 podmínky (23.27), (23.28). Zde je možno ukázat téměř doslovnou analogii se závěrem kap. 22: Pokud uvažujeme okrajové podmínky uvedených tří typů a pokud nejsou podmínky (23.29), (23.30) dány na celé hranici (tento případ tvoří určitou výjimku), lze použitím identity (23.22) ukázat ve všech těchto případech pozitivní definitnost biharmonického operátoru, uvažovaného na příslušných lineálech funkcí splňujících tyto smíšené okrajové podmínky. Viz též kap. 34, 35.

Poznámka 23.3. Nehomogenní okrajové podmínky. Problémy nosných stěn vedou, jak známo, k řešení biharmonické rovnice

$$\Delta^2 u = 0 \tag{23.50}$$

(rovnice pro tzv. *Airyovu funkci*) s nehomogenními okrajovými podmínkami. Např. tzv. *první problém teorie rovinné pružnosti* vede k řešení rovnice (23.50) s okrajovými podmínkami

$$u = g_1(s) \text{ na } \Gamma \,, \tag{23.51}$$

$$\frac{\partial u}{\partial \nu} = g_2(s) \text{ na } \Gamma \,. \tag{23.52}$$

(Viz o tom podrobně v kap. 43.) Také v těchto případech můžeme postupovat obdobně jako v přecházejících kapitolách. Např. zobecněné řešení problému (23.50) až (23.52) lze hledat jako funkci minimalizující funkcionál (23.40) [s $f(x) \equiv 0$],

$$\int_G \left[\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x_1^2} \right)^2 + 2 \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x_1 \, \partial x_2} \right)^2 + \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x_2^2} \right)^2 \right] \mathrm{d}x \,, \tag{23.53}$$

ve třídě dostatečně hladkých funkcí splňujících dané (stabilní) okrajové podmínky (23.51), (23.52).[1] Prakticky tato úloha znamená, jak víme, hledat přibližné řešení $u_n(x)$ ve tvaru

$$u_n(x) = w(x) + \sum_{k=1}^{n} a_k \varphi_k(x) \,, \tag{23.54}$$

kde $w(x)$ je funkce splňující podmínky (23.51), (23.52); $\varphi_k(x)$ jsou funkce báze v prostoru H_{A_1}, splňující homogenní okrajové podmínky (23.25), (23.26), a konstanty a_k, $k = 1, \ldots, n$, určíme z podmínky, aby funkcionál (23.53) byl pro tyto konstanty minimální. V tomto případě, kdy je třeba splnit již dvě okrajové podmínky, je hledání funkce $w(x)$ zpravidla značně obtížnější než v obdobném případě u rovnic druhého řádu[2]. Proto v kap. 43 uvedeme ještě jinou metodu řešení problému (23.50) až (23.52) („metodu nejmenších čtverců na hranici"), která nevyžaduje předběžné nalezení funkce $w(x)$ a která má i jiné přednosti.

[1]) Přesněji, v terminologii kap. 29 a 30, jde o funkce z prostoru $W_2^{(2)}(G)$, splňující podmínky (23.51), (23.52) ve smyslu stop.

[2]) Mimoto, nechceme-li na funkce $g_1(s)$, $g_2(s)$ položit příliš omezující předpoklady, které by nedovolily uvažovat dostatečně obecné zatížení hranice nosné stěny, nemusí funkce $w \in W_2^{(2)}(G)$, splňující podmínky (23.51), (23.52), vůbec existovat. Srov. kap. 43.

Kapitola 24

Operátory matematické teorie pružnosti

V této kapitole se budeme zabývat jen problémy *lineární* matematické teorie pružnosti, kde tedy vztah mezi souřadnicemi tenzoru napětí a deformace je dán zobecněným Hookeovým zákonem a kde se uvažují jen tzv. malé deformace.

Uveďme v přehledu některá známá fakta této teorie.

Nechť těleso G je omezenou (v obecném případě vícenásobně souvislou) oblastí s lipschitzovskou hranicí v trojrozměrném prostoru E_3. Označme

$$u = (u_1, u_2, u_3) \tag{24.1}$$

vektor posunutí (jeho souřadnice jsou v obecném případě funkcemi proměnných x_1, x_2, x_3 v G) a ε_{ik} složky tenzoru deformace, definované vztahy

$$\varepsilon_{ii} = \frac{\partial u_i}{\partial x_i} \quad \text{pro} \quad i = 1, 2, 3, \tag{24.2}$$

$$\varepsilon_{ik} = \frac{\partial u_i}{\partial x_k} + \frac{\partial u_k}{\partial x_i} \quad \text{pro} \quad i, k = 1, 2, 3,\ i \neq k.$$

Zřejmě je $\varepsilon_{ik} = \varepsilon_{ki}$ pro každou dvojici čísel $1 \leq i, k \leq 3$.[1]

Složky tenzoru napětí označme σ_{ik} ($\sigma_{ik} = \sigma_{ki}$).[2] Vztah mezi složkami tenzoru deformace a tenzoru napětí je dán *zobecněným Hookeovým zákonem*

---

[1]) Místo označení proměnných x_1, x_2, x_3 se v aplikacích ovšem často používá označení x, y, z. Místo $\varepsilon_{11}, \varepsilon_{22}, \varepsilon_{33}, \varepsilon_{12}, \varepsilon_{13}, \varepsilon_{23}$ pak zpravidla píšeme $\varepsilon_x, \varepsilon_y, \varepsilon_z, \gamma_{xy}, \gamma_{xz}, \gamma_{yz}$; v tomto případě pak je

$$\varepsilon_x = \frac{\partial u_1}{\partial x}, \quad \gamma_{xy} = \frac{\partial u_1}{\partial y} + \frac{\partial u_2}{\partial x} \tag{24.3}$$

atd.

V literatuře je určitá nejednotnost v definici funkcí ε_{ik} ($i \neq k$), resp. $\gamma_{xy}, \ldots$. Někteří autoři definují

$$\varepsilon_{ik} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial u_i}{\partial x_k} + \frac{\partial u_k}{\partial x_i}\right)\left[\text{tj. } \gamma_{xy} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial u_1}{\partial y} + \frac{\partial u_2}{\partial x}\right) \text{atd.}\right].$$

V tomto případě je ovšem třeba změnit vhodným způsobem koeficienty v zobecněném Hookeově zákoně (24.4). Zejména v případě izotropního tělesa je třeba druhou z rovnic (24.5) nahradit rovnicí

$$\sigma_{ik} = 2\mu\varepsilon_{ik} \quad \text{pro} \quad i \neq k\,.$$

[2]) Místo označení $\sigma_{11}, \sigma_{22}, \sigma_{33}, \sigma_{12}, \sigma_{13}, \sigma_{23}$, se často používá označení $\sigma_x, \sigma_y, \sigma_z, \tau_{xy}, \tau_{xz}, \tau_{yz}$.

$$\begin{aligned} \sigma_{11} &= a_{11}\varepsilon_{11} + a_{12}\varepsilon_{22} + a_{13}\varepsilon_{33} + a_{14}\varepsilon_{12} + a_{15}\varepsilon_{13} + a_{16}\varepsilon_{23}\,, \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ \sigma_{23} &= a_{61}\varepsilon_{11} + a_{62}\varepsilon_{22} + a_{63}\varepsilon_{33} + a_{64}\varepsilon_{12} + a_{65}\varepsilon_{13} + a_{66}\varepsilon_{23}\,, \end{aligned} \tag{24.4}$$

kde $a_{ik} = a_{ki}$ (matice koeficientů zobecněného Hookeova zákona je symetrická).[1]

Poznámka 24.1. Koeficienty a_{ik} jsou v obecném případě funkcemi proměnných x_1, x_2, x_3, tedy $a_{ik} = a_{ik}(x)$. Je-li těleso homogenní, jsou a_{ik} v G konstantní.

Je-li těleso izotropní, redukují se rovnice (24.4) na rovnice

$$\begin{aligned} \sigma_{ii} &= \lambda\vartheta + 2\mu\varepsilon_{ii}\,, \quad i = 1, 2, 3\,, \\ \sigma_{ik} &= \mu\varepsilon_{ik}\,, \quad i, k = 1, 2, 3\,, \quad i \neq k\,, \end{aligned} \tag{24.5}$$

kde

$$\vartheta = \varepsilon_{11} + \varepsilon_{22} + \varepsilon_{33}$$ [2])

a $\lambda \geq 0$ a $\mu > 0$ jsou tzv. *Laméovy koeficienty*. Je-li těleso homogenní, jsou λ a μ konstantní a nazývají se *Laméovy konstanty*. S *modulem pružnosti* E a s *Poissonovou konstantou* σ jsou λ a μ vázány vztahy

$$\lambda = \frac{E\sigma}{(1 + \sigma)(1 - 2\sigma)}, \quad \mu = \frac{E}{2(1 + \sigma)}\,.$$

V této kapitole však nebudeme nikde potřebovat předpoklad izotropnosti nebo homogennosti daného tělesa.

---

[1]) Při označení z předcházejících poznámek je

$$\sigma_x = a_{11}\varepsilon_x + a_{12}\varepsilon_y + a_{13}\varepsilon_z + a_{14}\gamma_{xy} + a_{15}\gamma_{xz} + a_{16}\gamma_{yz}$$

atd.

Zobecněný Hookeův zákon lze zapsat v kompaktnějším tvaru takto:

$$\sigma_{ik} = \sum_{l,m=1}^{3} c_{iklm}\varepsilon_{lm}\,, \quad i = 1, 2, 3,\ k = 1, 2, 3\,,$$

s

$$c_{iklm} = c_{lmik} = c_{kilm}\,.$$

Z této symetrie tenzoru c_{iklm} plyne možnost zápisu (24.4) a maximální počet 21 nezávislých složek tohoto tenzoru, což ovšem odpovídá (vzhledem ke vztahu $a_{ik} = a_{ki}$) maximálnímu počtu nezávislých koeficientů a_{ik} v rovnicích (24.4).

[2]) V klasickém označení

$$\sigma_x = \lambda(\varepsilon_x + \varepsilon_y + \varepsilon_z) + 2\mu\varepsilon_x\,, \quad \tau_{xy} = \mu\gamma_{xy}$$

atd.

Uvažujme v oblasti G dva vektory posunutí $\boldsymbol{u}$, $\boldsymbol{v}$ a nechť $\varepsilon_{ik}(\boldsymbol{u})$ jsou složky deformace příslušné vektoru $\boldsymbol{u}$, $\sigma_{ik}(\boldsymbol{v})$ složky tenzoru napětí příslušné vektoru $\boldsymbol{v}$. Tedy

$$\varepsilon_{11}(\boldsymbol{u}) = \frac{\partial u_1}{\partial x_1}$$

atd.,

$$\sigma_{11}(\boldsymbol{v}) = a_{11}\,\varepsilon_{11}(\boldsymbol{v}) + \ldots + a_{16}\,\varepsilon_{23}(\boldsymbol{v}) = a_{11}\frac{\partial v_1}{\partial x_1} + \ldots + a_{16}\left(\frac{\partial v_2}{\partial x_3} + \frac{\partial v_3}{\partial x_2}\right)$$

atd. Označme

$$W(\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v}) = \tfrac{1}{2}[\varepsilon_{11}(\boldsymbol{u})\,\sigma_{11}(\boldsymbol{v}) + \ldots + \varepsilon_{23}(\boldsymbol{u})\,\sigma_{23}(\boldsymbol{v})]\,,$$

podrobně

$$(24.6)\qquad W(\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v}) = \frac{1}{2}\left\{\frac{\partial u_1}{\partial x_1}\left[a_{11}\frac{\partial v_1}{\partial x_1} + \ldots + a_{16}\left(\frac{\partial v_2}{\partial x_3} + \frac{\partial v_3}{\partial x_2}\right)\right] + \ldots + \right.$$
$$\left. + \ldots + \left(\frac{\partial u_2}{\partial x_3} + \frac{\partial u_3}{\partial x_2}\right)\left[a_{61}\frac{\partial v_1}{\partial x_1} + \ldots + a_{66}\left(\frac{\partial v_2}{\partial x_3} + \frac{\partial v_3}{\partial x_2}\right)\right]\right\}.$$

Vzhledem k symetrii koeficientů a_{ik} je zřejmě

$$(24.7)\qquad W(\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v}) = W(\boldsymbol{v}, \boldsymbol{u})\,.$$

Píšeme-li na pravé straně v (24.6) všude $\boldsymbol{u}$ místo $\boldsymbol{v}$, dostaneme funkci $W(\boldsymbol{u}, \boldsymbol{u})$, kterou je v teorii pružnosti zvykem označovat stručně $W(\boldsymbol{u})$, tedy

$$W(\boldsymbol{u}, \boldsymbol{u}) = W(\boldsymbol{u})\,,$$

a zapisovat zkráceně ve tvaru

$$W(\boldsymbol{u}) = \tfrac{1}{2}(\varepsilon_{11}\sigma_{11} + \ldots + \varepsilon_{23}\sigma_{23})\,.$$

Funkci $W(\boldsymbol{u})$ nazýváme *elastickým potenciálem objemové jednotky. Elastický potenciál tělesa* G je pak dán integrálem

$$\int_G W(\boldsymbol{u})\,\mathrm{d}x\,.$$

Zejména v případě izotropního tělesa dostáváme podle (24.5)

$$(24.8)\qquad W(\boldsymbol{u}) = \tfrac{1}{2}\{\varepsilon_{11}(\boldsymbol{u})\,[\lambda\,\vartheta(\boldsymbol{u}) + 2\mu\,\varepsilon_{11}(\boldsymbol{u})] + \ldots + \varepsilon_{23}(\boldsymbol{u})\,\mu\,\varepsilon_{23}(\boldsymbol{u})\} =$$
$$= \tfrac{1}{2}\{\lambda\,\vartheta^2(\boldsymbol{u}) + 2\mu[\varepsilon_{11}^2(\boldsymbol{u}) + \varepsilon_{22}^2(\boldsymbol{u}) + \varepsilon_{33}^2(\boldsymbol{u})] +$$
$$+ \mu[\varepsilon_{12}^2(\boldsymbol{u}) + \varepsilon_{13}^2(\boldsymbol{u}) + \varepsilon_{23}^2(\boldsymbol{u})]\}\,.$$

Z teorie pružnosti je známo, že $W(\boldsymbol{u})$ je pozitivně definitní kvadratická forma v souřadnicích deformace ε_{ik}, tj. že lze najít takovou konstantu $k > 0$, že v $\bar{G}$ platí

$$(24.9)\qquad W(\boldsymbol{u}) \geqq k \sum_{i,k=1}^{3} \varepsilon_{ik}^2\,.$$

[V případě izotropního tělesa je tato okolnost zřejmá přímo z (24.8): Je-li μ v oblasti G konstantní, stačí položit např. $k = \frac{1}{2}\mu$; je-li $\mu(x)$ spojitá (a kladná) v $\bar{G}$, stačí položit $k = \frac{1}{2}\min_{x\in\bar{G}} \mu(x)$.]

Funkce $W(\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v})$ i $W(\boldsymbol{u})$ budou mít v našich dalších úvahách důležitý význam.

Označme dále

$$(24.10)\qquad \boldsymbol{f} = (f_1, f_2, f_3)$$

vektor objemových („vnitřních") *sil* v tělese G. Integrálem

$$(24.11)\qquad \int_G W(\boldsymbol{u})\,\mathrm{d}x - \int_G \boldsymbol{f}\boldsymbol{u}\,\mathrm{d}x\,,$$

kde $\boldsymbol{f}\boldsymbol{u}$ značí skalární součin vektorů $\boldsymbol{f}$ a $\boldsymbol{u}$, je v případě homogenních okrajových podmínek dána, jak známo, *celková potenciální energie deformace daného tělesa.*

Je-li vektor $\boldsymbol{f}$ dán, splňují složky tenzoru napjatosti v G tzv. *rovnice rovnováhy*

$$(24.12)\qquad \sum_{k=1}^{3} \frac{\partial \sigma_{ik}}{\partial x_k} + f_i = 0\,, \quad i = 1, 2, 3\,.$$

Zapíšeme-li tyto rovnice podrobně, přičemž členy f_i převedeme na pravé strany rovnic a vzniklé rovnice násobíme číslem -1, dostaneme

$$(24.13)\qquad -\left(\frac{\partial \sigma_{11}}{\partial x_1} + \frac{\partial \sigma_{12}}{\partial x_2} + \frac{\partial \sigma_{13}}{\partial x_3}\right) = f_1\,,$$
$$-\left(\frac{\partial \sigma_{21}}{\partial x_1} + \frac{\partial \sigma_{22}}{\partial x_2} + \frac{\partial \sigma_{23}}{\partial x_3}\right) = f_2\,,$$
$$-\left(\frac{\partial \sigma_{31}}{\partial x_1} + \frac{\partial \sigma_{32}}{\partial x_2} + \frac{\partial \sigma_{33}}{\partial x_3}\right) = f_3\,;$$

přitom ovšem můžeme psát σ_{12} místo σ_{21} atd.

Pravé strany rovnic (24.13) jsou souřadnice vektoru $\boldsymbol{f}$, levé strany jsou tedy také souřadnice určitého vektoru, označme jej $A\boldsymbol{u}$. Do rovnic (24.13) můžeme totiž dosadit za σ_{ik} ze zobecněného Hookeova zákona (24.4), čímž se levé strany těchto rovnic stanou určitými funkcemi složek deformace ε_{ik}; funkce ε_{ik} jsou podle (24.2) dány derivacemi funkce $\boldsymbol{u}$, přesněji řečeno jejích souřadnic. A je tedy určitý diferenciální operátor, zřejmě druhého řádu, který aplikujeme na funkci $\boldsymbol{u}$. Zejména v případě izotropního tělesa má operátor A poměrně jednoduchý tvar, jak lze snadným výpočtem zjistit:

(24.14) $$A\boldsymbol{u} = (\lambda + \mu) \operatorname{grad} \operatorname{div} \boldsymbol{u} + \mu \Delta \boldsymbol{u} .$$

Rovnice (24.13) budeme v dalším textu této kapitoly zapisovat stručně ve tvaru

(24.15) $$A\boldsymbol{u} = \boldsymbol{f} .$$

Operátor A budeme nazývat *operátorem teorie pružnosti*. Uvidíme, že tento operátor je pozitivně definitní na vhodně volených lineálech funkcí, které splňují určité okrajové podmínky, a že zobecněné řešení rovnice $A\boldsymbol{u} = \boldsymbol{f}$ minimalizuje v odpovídajících prostorech funkcionál (24.11) („princip minima potenciální energie").

Zároveň s rovnicí (24.15) uvažujme tři druhy okrajových podmínek:

1. *Okrajová podmínka*

(24.16) $$\boldsymbol{u} = \boldsymbol{0} \text{ na } \Gamma .$$

Tato podmínka je zřejmě ekvivalentní podmínkám

(24.17) $$u_1 = 0 , \quad u_2 = 0 , \quad u_3 = 0 \text{ na } \Gamma .$$

2. *Okrajová podmínka*

(24.18) $$\boldsymbol{t} = \boldsymbol{0} \text{ na } \Gamma .$$

Přitom $\boldsymbol{t} = (t_1, t_2, t_3)$,

$$t_i = \sum_{k=1}^{3} \sigma_{ik} \nu_k , \quad i = 1, 2, 3 ,$$

kde ν_k jsou, jako obvykle, směrové kosiny vnější normály a σ_{ik} [podrobněji $\sigma_{ik}(\boldsymbol{u})$] jsou složky tenzoru napětí, příslušné hledanému vektoru $\boldsymbol{u}$. Podrobněji píšeme $\boldsymbol{t}(\boldsymbol{u})$ místo $\boldsymbol{t}$.

3. *Okrajové podmínky*

(24.19) $$\boldsymbol{u} = \boldsymbol{0} \text{ na } \Gamma_1 ,$$

(24.20) $$\boldsymbol{t} = \boldsymbol{0} \text{ na } \Gamma_2 ,$$

kde Γ_1 a Γ_2 $(\bar{\Gamma}_1 + \bar{\Gamma}_2 = \Gamma)$ jsou (disjunktní) části hranice Γ (nenulové míry), na něž je hranice Γ rozdělena.

Okrajovými podmínkami (24.16), resp. (24.18), resp. (24.19), (24.20) je pro rovnici $A\boldsymbol{u} = \boldsymbol{f}$ dán tzv. *první*, resp. *druhý*[1]), resp. *smíšený problém matematické teorie pružnosti.*

Označme $\boldsymbol{L}_2(G)$ Hilbertův prostor se skalárním součinem

(24.21) $$(\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v})_{\boldsymbol{L}_2(G)} = \int_G \boldsymbol{u}\boldsymbol{v} \, dx = \int_G (u_1 v_1 + u_2 v_2 + u_3 v_3) \, dx ,$$

jehož prvky tvoří, jak víme (srov. příkl. 6.2 a 6.8, str. 70 a str. 74), vektory, jejichž souřadnice jsou v oblasti G integrovatelné s druhou mocninou. Označme dále M lineál těch vektorů z $\boldsymbol{L}_2(G)$, jejichž souřadnice jsou s parciálními derivacemi do druhého řádu včetně spojité v $\bar{G}$. Nechť M_1, resp. M_2, resp. M_3 je lineál vektorů z M, splňujících podmínky (24.16), resp. (24.18), resp. (24.19),(24.20). Z pozn. 8.5, str. 107, snadnou úvahou plyne, že každý z těchto lineálů je hustý v $\boldsymbol{L}_2(G)$.

Označme dále A_1, resp. A_2, resp. A_3 diferenciální operátor A, uvažovaný na lineálu M_1, resp. M_2, resp. M_3.

Nechť $\boldsymbol{u}$ a $\boldsymbol{v}$ jsou dva libovolné vektory z M. Obvyklou aplikací Greenovy věty na skalární součin $(A\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v})_{\boldsymbol{L}_2(G)}$, tj. na integrál

$$\int_G \boldsymbol{v} A\boldsymbol{u} \, dx ,$$

dostaneme známou *Bettiovu identitu*

(24.22) $$(A\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v})_{\boldsymbol{L}_2(G)} = 2 \int_G W(\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v}) \, dx - \int_\Gamma \boldsymbol{v} \, \boldsymbol{t}(\boldsymbol{u}) \, dS .$$

Patří-li mimoto vektory $\boldsymbol{u}$, $\boldsymbol{v}$ do M_1, resp. M_2, resp. M_3, splňují okrajové podmínky (24.16), resp. (24.18), resp. (24.19), (24.20), takže integrál po hranici Γ je roven nule. Tedy pro vektory $\boldsymbol{u}$, $\boldsymbol{v}$ z M_1, resp. z M_2, resp. z M_3 platí

(24.23) $$(A\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v})_{\boldsymbol{L}_2(G)} = 2 \int_G W(\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v}) \, dx .$$

Z této identity plyne ihned podle (24.7) *symetričnost každého z operátorů* A_1, A_2, A_3 na příslušném lineálu M_1, resp. M_2, resp. M_3.

Dokážeme, že operátor A_1 je na lineálu M_1 pozitivně definitní.

Důležitým krokem k tomu je tzv. *Kornova nerovnost*, kterou uvedeme bez důkazu:

(24.24) $$\int_G \sum_{i,k=1}^{3} \left(\frac{\partial u_i}{\partial x_k} \right)^2 dx \leq k_1 \int_G \sum_{i,k=1}^{3} \varepsilon_{ik}^2 \, dx , \quad \boldsymbol{u} \in M_1 ,$$

[1]) Názvosloví v literatuře není jednotné. Často se prvním problémem pružnosti rozumí problém charakterizovaný podmínkou (24.18).

kde k_1 je kladná konstanta. Kornova nerovnost je základním krokem i v důkazu pozitivní definitnosti operátorů A_2 a A_3. Její důkaz je poměrně obtížný a čtenáře odkazujeme v tomto směru na článek [16], resp. na Michlinovu monografii [30], str. 191 až 202.

Z (24.23), (24.9) a (24.24) vyplývá

$$(24.25)\qquad (A\boldsymbol{u}, \boldsymbol{u})_{L_2(G)} = 2\int_G W(\boldsymbol{u})\,\mathrm{d}x \geqq 2k\int_G \sum_{i,k=1}^{3} \varepsilon_{ik}^2\,\mathrm{d}x \geqq \frac{2k}{k_1}\int_G \sum_{i,k=1}^{3}\left(\frac{\partial u_i}{\partial x_k}\right)^2 \mathrm{d}x\,.$$

Každý z vektorů $\boldsymbol{u} \in M_1$ splňuje podmínku $\boldsymbol{u} = \boldsymbol{0}$ na Γ, takže tuto podmínku splňují i jeho souřadnice, tj. funkce u_1, u_2 a u_3 [srov. (24.17)]. Použijeme-li tedy na funkci u_1 Friedrichsovy nerovnosti (18.1), str. 196, dostaneme

$$\|u_1\|^2 \leqq c_1 \int_G \left[\left(\frac{\partial u_1}{\partial x_1}\right)^2 + \left(\frac{\partial u_1}{\partial x_2}\right)^2 + \left(\frac{\partial u_1}{\partial x_3}\right)^2\right] \mathrm{d}x\,.$$

Obdobné nerovnosti platí pro funkce u_2 a u_3. Z těchto nerovností a z (24.25) pak plyne

$$(24.26)\qquad (A_1\boldsymbol{u}, \boldsymbol{u})_{L_2(G)} \geqq \frac{2k}{k_1c_1}\left(\|u_1\|^2 + \|u_2\|^2 + \|u_3\|^2\right) = C^2\|\boldsymbol{u}\|^2_{L_2(G)}$$

s

$$C^2 = \frac{2k}{k_1c_1}\,,$$

čímž je pozitivní definitnost operátoru A_1 na lineálu M_1 dokázána.

Uvažujme nyní operátor A_2 na lineálu M_2 vektorů $\boldsymbol{u}$, které splňují podmínku

$$(24.27)\qquad \boldsymbol{t}(\boldsymbol{u}) = \boldsymbol{0} \text{ na } \Gamma\,.$$

Tato podmínka odpovídá Neumannově podmínce z kap. 22. Z teorie pružnosti je dobře známo (a použitím Gaussovy věty lze snadno ověřit), že v případě okrajové podmínky (24.27) je k existenci řešení třeba, aby objemová síla $\boldsymbol{f}$ splňovala určité podmínky, charakterizující statickou a momentovou rovnováhu tělesa:

$$(24.28)\qquad \int_G \boldsymbol{f}\,\mathrm{d}x = \boldsymbol{0}\,,\quad \int_G \boldsymbol{r}\times\boldsymbol{f}\,\mathrm{d}x = \boldsymbol{0}\,,$$

kde $\boldsymbol{r}$ je rádiusvektor bodu x. Mimoto lze snadno ukázat, že operátor A_2 není na lineálu M_2 pozitivní: Ze vztahu $(A_2\boldsymbol{u}, \boldsymbol{u})_{L_2(G)} = 0$ sice plyne podle (24.25) a (24.9)

$$(24.29)\qquad \varepsilon_{ik} = 0 \quad \text{pro všechna} \quad 1 \leqq i,\, k \leqq 3\,,$$

odtud ovšem neplyne, jak je známo a jak vyplývá z (24.3), $\boldsymbol{u} = \boldsymbol{0}$. K tomu, aby vektor $\boldsymbol{u}$ byl vztahy (24.29) jednoznačně určen jako nulový vektor, stačí, předepíšeme-li ještě podmínky

$$(24.30)\qquad \int_G \boldsymbol{u}\,\mathrm{d}x = \boldsymbol{0}\,,$$

$$(24.31)\qquad \int_G \boldsymbol{r}\times\boldsymbol{u}\,\mathrm{d}x = \boldsymbol{0}\,.$$

Nyní již lze očekávat, že další postup bude analogický postupu v případě Neumannova problému z kap. 22: Označme $\tilde{M}_2$ lineál těch vektorů z lineálu M_2, které splňují podmínky (24.30), (24.31), a $\tilde{A}_2$ operátor teorie pružnosti uvažovaný na lineálu $\tilde{M}_2$. Jak jsme již předeslali, lze i v tomto případě dokázat Kornovu nerovnost,

$$(24.32)\qquad \int_G \sum_{i,k=1}^{3}\left(\frac{\partial u_i}{\partial x_k}\right)^2 \mathrm{d}x \leqq k_2\int_G \sum_{i,k=1}^{3}\varepsilon_{ik}^2\,\mathrm{d}x\,,\quad \boldsymbol{u}\in\tilde{M}_2$$

(viz citovaný článek [16], resp. knihu [30]). Z (24.23), (24.9) a (24.32) pak vyplývá pro $\boldsymbol{u}\in\tilde{M}_2$

$$(24.33)\qquad (\tilde{A}_2\boldsymbol{u}, \boldsymbol{u})_{L_2(G)} = 2\int_G W(\boldsymbol{u})\,\mathrm{d}x \geqq 2k\int_G \sum_{i,k=1}^{3}\varepsilon_{ik}^2\,\mathrm{d}x \geqq \frac{2k}{k_2}\int_G \sum_{i,k=1}^{3}\left(\frac{\partial u_i}{\partial x_k}\right)^2 \mathrm{d}x\,.$$

Protože dále vektory $\boldsymbol{u}$ z lineálu $\tilde{M}_2$ splňují podmínku (24.30), platí totéž pro jejich souřadnice:

$$(24.34)\qquad \int_G u_1\,\mathrm{d}x = 0\,,\quad \int_G u_2\,\mathrm{d}x = 0\,,\quad \int_G u_3\,\mathrm{d}x = 0\,.$$

Protože platí první z rovností (24.34), plyne z Poincaréovy nerovnosti (18.50), str. 206,

$$(24.35)\qquad \|u_1\|^2 \leqq c_3\int_G \left[\left(\frac{\partial u_1}{\partial x_1}\right)^2 + \left(\frac{\partial u_1}{\partial x_2}\right)^2 + \left(\frac{\partial u_1}{\partial x_3}\right)^2\right]\mathrm{d}x\,.$$

Obdobná nerovnost platí pro u_2 a u_3. Z těchto vztahů a z (24.33) pak pro každý vektor $\boldsymbol{u}\in\tilde{M}_2$ plyne

$$(24.36)\qquad (\tilde{A}_2\boldsymbol{u}, \boldsymbol{u})_{L_2(G)} \geqq \frac{2k}{k_2c_3}\left(\|u_1\|^2 + \|u_2\|^2 + \|u_3\|^2\right) = C^2\|\boldsymbol{u}\|^2_{L_2(G)}$$

s

$$C^2 = \frac{2k}{k_1c_3}\,,$$

což znamená splnění podmínky pozitivní definitnosti operátoru $\tilde{A}_2$ na lineálu $\tilde{M}_2$.

Lze ukázat, což zde již nebudeme podrobně provádět, že i operátor A_3 je pozitivně definitní na původním lineálu M_3, pokud, jak jsme předpokládali, má část Γ_1

hranice Γ, na níž je předepsána podmínka $\boldsymbol{u} = \boldsymbol{0}$, kladnou míru (neredukuje se na bod apod.).

V každém z uvažovaných tří případů minimalizuje zobecněné řešení $\boldsymbol{u}_0$ funkcionál

$$2\int_G W(\boldsymbol{u})\,\mathrm{d}x - 2\int_G \boldsymbol{f}\boldsymbol{u}\,\mathrm{d}x\,,$$

nebo, což je totéž, funkcionál

$$\int_G W(\boldsymbol{u})\,\mathrm{d}x - \int_G \boldsymbol{f}\boldsymbol{u}\,\mathrm{d}x$$

(„*princip minima potenciální energie*"), ovšem na příslušném prostoru. Podmínka $\boldsymbol{u} = \boldsymbol{0}$ je pro operátor teorie pružnosti, který je druhého řádu, stabilní, takže funkce z prostoru H_{A_1} tuto podmínku splňují (přesněji řečeno, ve smyslu stop, viz kap. 30). Podmínka $\boldsymbol{t}(\boldsymbol{u}) = \boldsymbol{0}$ je nestabilní, funkce z prostoru $H_{\tilde{A}_2}$ tuto podmínku v obecném případě nesplňují; při volbě báze není nutno ke splnění této podmínky přihlížet. Je ovšem třeba dbát na to, že funkce z prostoru $H_{\tilde{A}_2}$ jsou podrobeny podmínkám (24.30), (24.31). V případě prostoru H_{A_3} je splněna (ve smyslu stop) první z podmínek (24.19), (24.20). Při volbě báze v prostoru H_{A_3} není nutné přihlížet ke splnění podmínky (24.20).

Poznámka 24.2. (*Nehomogenní okrajové podmínky.*) Jsou-li místo homogenních okrajových podmínek (24.16), resp. (24.18), resp. (24.19), (24.20) předepsány podmínky

$$\boldsymbol{u} = \boldsymbol{g}(S) \quad \text{na } \Gamma\,, \tag{24.37}$$

resp.

$$\boldsymbol{t}(\boldsymbol{u}) = \boldsymbol{h}(S) \quad \text{na } \Gamma\,, \tag{24.38}$$

resp.

$$\boldsymbol{u} = \boldsymbol{g}(S) \quad \text{na } \Gamma_1\,, \tag{24.39}$$

$$\boldsymbol{t}(\boldsymbol{u}) = \boldsymbol{h}(S) \quad \text{na } \Gamma_2\,, \tag{24.40}$$

hledáme zobecněné řešení daného problému jako funkci $\boldsymbol{u}(x)$, minimalizující funkcionál

$$\int_G W(\boldsymbol{u})\,\mathrm{d}x - \int_G \boldsymbol{f}\boldsymbol{u}\,\mathrm{d}x\,, \tag{24.41}$$

resp.

$$\int_G W(\boldsymbol{u})\,\mathrm{d}x - \int_G \boldsymbol{f}\boldsymbol{u}\,\mathrm{d}x - \int_\Gamma \boldsymbol{h}\boldsymbol{u}\,\mathrm{d}S\,, \tag{24.42}$$

resp.

$$\int_G W(\boldsymbol{u})\,\mathrm{d}x - \int_G \boldsymbol{f}\boldsymbol{u}\,\mathrm{d}x - \int_{\Gamma_2} \boldsymbol{h}\boldsymbol{u}\,\mathrm{d}S\,, \tag{24.43}$$

na příslušné třídě funkcí splňujících dané stabilní okrajové podmínky. Podrobněji: Funkcionál (24.41) minimalizujeme na třídě funkcí splňujících podmínku (24.37), funkcionál (24.43) na třídě funkcí splňujících podmínku (24.39). V případě funkcionálu (24.42) nemusí uvažované funkce splňovat žádnou okrajovou podmínku, je však třeba, aby splňovaly podmínky (24.30), (24.31). Poznamenejme, že v případě okrajové podmínky (24.38) je nutnou a postačující podmínkou k existenci řešení splnění rovnic

$$\int_G \boldsymbol{f}\,\mathrm{d}x + \int_\Gamma \boldsymbol{h}\,\mathrm{d}S = \boldsymbol{0}\,, \tag{24.44}$$

$$\int_G \boldsymbol{r} \times \boldsymbol{f}\,\mathrm{d}x + \int_\Gamma \boldsymbol{r} \times \boldsymbol{h}\,\mathrm{d}S = \boldsymbol{0} \tag{24.45}$$

(silová, resp. momentová podmínka rovnováhy). Některé úvahy týkající se numerických výpočtů v problémech trojdimenzionální matematické teorie pružnosti lze najít např. v [28], str. 390.

Poznámka 24.3. Čtenáře upozorňujeme na tomto místě na sérii velmi zajímavých článků I. Hlaváčka v časopisu Aplikace matematiky (viz zejména články [12], [13]), které pojednávají o řadě variačních principů (klasických i velmi moderních) v matematické teorii pružnosti.

Kapitola 25

Volba báze pro parciální diferenciální rovnice s okrajovými podmínkami

Obecné zásady pro volbu báze při použití Ritzovy metody (a nejen této metody) jsme podrobně diskutovali v kap. 20. V této kapitole připomeneme některé z uvedených výsledků a vyvodíme z nich další praktické závěry. Přitom se zaměříme zejména na parciální diferenciální operátory druhého a čtvrtého řádu ve dvou proměnných. Pokud se týká operátorů druhého řádu, půjde tedy o operátory tvaru

$$Au = -\sum_{i,j=1}^{2} \frac{\partial}{\partial x_i}\left(a_{ij}\frac{\partial u}{\partial x_j}\right) + cu\,,$$

resp. použijeme-li pro proměnné označení x, y místo x_1, x_2, tvaru

$$(25.1) \qquad Au = -\frac{\partial}{\partial x}\left(a_{11}\frac{\partial u}{\partial x} + a_{12}\frac{\partial u}{\partial y}\right) - \frac{\partial}{\partial y}\left(a_{21}\frac{\partial u}{\partial x} + a_{22}\frac{\partial u}{\partial y}\right) + cu\,,$$

kde (viz kap. 22) koeficienty $a_{ij}(x, y) = a_{ji}(x, y)$ jsou včetně parciálních derivací prvního řádu spojité v $\bar{G}$, $c(x, y) \geqq 0$ je funkce spojitá v $\bar{G}$ a je splněna podmínka (22.8) stejnoměrné eliptičnosti (viz str. 267)

$$(25.2) \qquad \sum_{i,j=1}^{2} a_{ij}(x, y)\,\xi_i\xi_j \geqq p(\xi_1^2 + \xi_2^2)\,, \quad p > 0\,.$$

Z operátorů čtvrtého řádu si všimneme zejména biharmonického operátoru.

V kap. 20 jsme upozornili na systém jednoduchých funkcí

$$(25.3) \qquad 1, x, y, x^2, xy, y^2, \ldots.$$

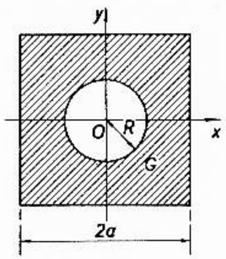
O tomto systému víme již z kap. 5, že je úplný v $L_2(G)$. Poznamenali jsme, že jde-li např. o problém

$$(25.4) \qquad -\Delta u = f \;\text{ v }\; G\,,$$

$$(25.5) \qquad u = 0 \;\text{ na }\; \Gamma\,,$$

pak že lze ukázat, že funkce

$$(25.6) \qquad g, xg, yg, x^2g, xyg, y^2g, \ldots,$$



Obr. 14.

kde $g(x, y)$ je dostatečně hladká funkce, kladná v oblasti G [1]) a rovná nule na její hranici, tvoří bázi v příslušném prostoru H_A. Je-li např. G čtverec s kruhovým otvorem, nakreslený na obr. 14, stačí za funkci $g(x, y)$ zvolit funkci

$$(25.7) \qquad (a^2 - x^2)(a^2 - y^2)(x^2 + y^2 - R^2)\,,$$

která má zřejmě všechny požadované vlastnosti.[2])

[1]) Máme stále na mysli omezené oblasti s „lipschitzovskou" hranicí.

[2]) Všimněme si, že funkce (25.7) má v rovině xy derivace všech řádů, přestože hranice oblasti G není hladká (má čtyři úhlové body).

Také v případě, že místo problému (25.4), (25.5) je dán problém $Au = f$ v G, $u = 0$ na Γ, kde A je operátor (25.1), tvoří systém (25.6) v příslušném prostoru H_A bázi.

Uvedli jsme, že obdobnou vlastnost má v odpovídajícím prostoru H_A systém funkcí

$$(25.8) \qquad g^2, xg^2, yg^2, x^2g^2, xyg^2, y^2g^2, \ldots,$$

jde-li o problém

$$\Delta^2 u = f \;\text{ v }\; G\,,$$

$$u = 0\,, \quad \frac{\partial u}{\partial \nu} = 0 \;\text{ na }\; \Gamma\,.$$

V případě problému

$$(25.9) \qquad \Delta^2 u = f \;\text{ v }\; G\,,$$

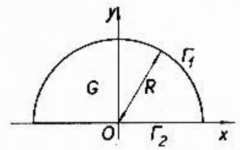
$$(25.10) \qquad u = 0 \;\text{ na }\; \Gamma\,,$$

$$(25.11) \qquad \frac{\partial u}{\partial \nu} = 0 \;\text{ na }\; \Gamma_1\,,$$

$$(25.12) \qquad \frac{\partial^2 u}{\partial \nu^2} = 0 \;\text{ na }\; \Gamma_2\,,$$

kde G je půlkruh nakreslený na obr. 15 a Γ_1 je horní půlkružnice, je možno za bázi v odpovídajícím prostoru H_A zvolit systém funkcí (25.3), násobených funkcí

$$g(x, y) = y(R^2 - x^2 - y^2)^2\,.$$



Obr. 15.

Tato funkce zaručuje splnění podmínek (25.10) a (25.11); podmínka (25.12) je nestabilní, není tedy třeba přihlížet při volbě báze k tomu, je-li splněna nebo nikoli.

Systémy typu (25.6), (25.8) mají tu výhodu, že jsou poměrně jednoduché a že jimi lze zachytit okrajové podmínky i v případě „nepříjemných" vícenásobně souvislých oblastí, např. oblastí typu znázorněného na obr. 14. Mimoto, jak jsme řekli, tvoří v H_A bázi, takže splňují požadavky a), b) formulované v úvodu kap. 20. Nevýhodou těchto systémů je malá „ortogonálnost" jejich členů v prostoru H_A a z toho plynoucí špatná numerická stabilita [viz požadavky c) a d) formulované na str. 236]. Tato nepříznivá vlastnost způsobuje, že rovnice Ritzovy soustavy jsou „téměř" lineárně závislé, a vyžaduje velkou přesnost jak při výpočtu koeficientů Ritzovy soustavy, tak při jejím řešení. Také splnění požadavku e), tj. vztahu $Au_n \to f$ pro $n \to \infty$ (str. 237), nelze v obecném případě zaručit. Proto dáváme v případě speciálních oblastí přednost systému vlastních funkcí příslušného homogenního problému, resp. systému vlastních funkcí některého jednoduchého shodného příbuzného operátoru (str. 245). Poznamenejme, že zde zejména často používáme shodnosti a příbuznosti samoadjungovaného rozšíření operátorů $-\Delta u$ a operátoru (25.1), pozitivně definitních na příslušných lineálech.[1])

Obdobného postupu lze použít i v případě operátorů vyšších řádů.

Pro Laplaceův operátor $-\Delta$ a okrajovou podmínku $u = 0$ na Γ lze pro některé jednoduché oblasti snadno napsat úplný systém vlastních funkcí, ortonormální v příslušném prostoru $H_{-\Delta}$ a tím podle předcházejícího textu získat bázi v prostoru H_A, odpovídajícím operátoru (25.1) a okrajové podmínce $u = 0$ na Γ. Je-li oblast G *kruh* K se středem v počátku a s poloměrem R, tvoří takový systém funkce

$$\varphi_{mn}(r, \varphi) = c_{mn} \, J_m(\gamma_{mn} r) \cdot \begin{cases} \cos m\varphi\,, \\ \sin m\varphi\,, \end{cases} \tag{25.13}$$

$m = 0, 1, 2, \ldots$, $n = 0, 1, 2, \ldots$, kde J_m jsou Besselovy funkce indexu m a γ_{mn} jsou kladné kořeny rovnice $J_m(\gamma R) = 0$; c_{mn} jsou takové koeficienty, aby systém (25.13) byl ortonormální v $H_{-\Delta}$, tj. aby bylo $(\varphi_{mn}, \varphi_{mn})_{-\Delta} = 1$.

Je-li G *obdélník* $0 \leqq x \leqq a$, $0 \leqq y \leqq b$, tvoří takový systém funkce

$$\varphi_{mn}(x, y) = \frac{2}{\pi \sqrt{(ab)} \left(\dfrac{m^2}{a^2} + \dfrac{n^2}{b^2}\right)} \sin \frac{m\pi x}{a} \sin \frac{n\pi y}{b}\,, \tag{25.14}$$

$m, n = 1, 2, \ldots$.

Než přikročíme ke studiu dalších systémů, vhodných i pro některé jiné okrajové podmínky, uveďme ještě tuto poznámku:

Poznámka 25.1. Často se podaří najít jednoduché a dostatečně hladké zobrazení oblasti G na kruh K, přičemž operátor (25.1), pozitivně definitní na lineálu dostatečně hladkých funkcí v G, rovných nule na Γ, přejde v eliptický operátor A' s obdobnými vlastnostmi na kruhu K. Pak lze ve shodě s předcházejícím textem pro řešení takto

[1]) Jde-li o Neumannovy okrajové podmínky a případ, kdy v (25.1) je $c(x) \equiv 0$ v G, jsou, jak víme, operátory $-\Delta u$ a (25.1) pozitivně definitivní na lineálu funkcí nejen dostatečně hladkých a splňujících Neumannovy okrajové podmínky, ale splňujících i podmínku $\int_G u \, dx = 0$.

transformovaného problému použít systému (25.13). Typickým příkladem toho je tento problém:

$$-\Delta u = f \text{ v } E\,, \tag{25.15}$$

$$u = 0 \text{ na } \Gamma\,, \tag{25.16}$$

kde E je elipsa s poloosami a, resp. b v ose x, resp. y. Transformací souřadnic

$$x' = x\,, \quad y' = \frac{a}{b} y \tag{25.17}$$

přejde problém (25.15), (25.16) v problém

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x'^2} + \frac{a^2}{b^2} \frac{\partial^2 u}{\partial y'^2} = f \text{ na } K \tag{25.18}$$

$$u = 0 \text{ na } \Gamma'\,, \tag{25.19}$$

kde K je kruh se středem v počátku a poloměrem a a Γ' jeho hranice. Samoadjungovaná rozšíření operátorů $-\Delta$ a operátoru vyskytujícího se na levé straně rovnice (25.18) jsou při dané okrajové podmínce shodné příbuzné operátory, takže pro řešení problému (25.18), (25.19) Ritzovou metodou lze použít systému (25.13), v němž píšeme x', y' místo x, y a který zaručuje splnění všech požadavků a) až e) formulovaných v kap. 20. Lze ovšem postupovat i tak, že se vrátíme k původním proměnným a problém (25.15), (25.16) řešíme na elipse E, přičemž použijeme systému (25.13), napsaného původně pro souřadnice x', y' a transformovaného zpět do souřadnic x, y podle rovnic (25.17).

Řadu obdobných obratů najde čtenář např. v knize [29], str. 179 a dále. Je však třeba poznamenat, že již sám systém (25.13) je vzhledem k přítomnosti Besselových funkcí poněkud složitější a stane se ovšem ještě složitějším, použijeme-li např. transformace, o níž jsme se právě zmínili. Přestože tedy máme v uvažovaných případech zaručeno při použití Ritzovy metody, že budou splněny všechny podmínky a) až e) z kap. 20, dáváme často přednost „méně stabilním" systémům typu (25.6), (25.8), i když vyžadují provedení příslušných numerických výpočtů s daleko větší přesností.

Častější a jednodušší bývají transformace systému (25.14). Uvedeme jednoduchý příklad (viz [4], str. 209):

Řešme problém

$$-\Delta u = f \text{ v } G\,, \tag{25.20}$$

$$u = 0 \text{ na } \Gamma\,, \tag{25.21}$$

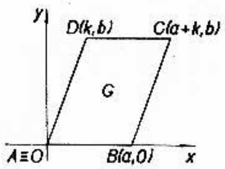
kde G je kosodélník znázorněný na obr. 16. Proveďme transformaci souřadnic

$$x' = x - \frac{k}{b} y \,, \quad y' = y \,, \tag{25.22}$$

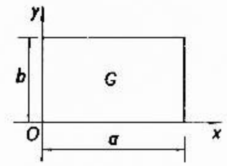
kterou kosočtverec G přejde v obdélník $Q = (0, a) \times (0, b)$ s hranicí Γ'. Rovnice (25.20) přejde transformací (25.22) v rovnici

$$-\left(1 + \frac{k^2}{b^2}\right) \frac{\partial^2 u}{\partial x'^2} - \frac{\partial^2 u}{\partial y'^2} + \frac{2k}{b} \frac{\partial^2 u}{\partial x' \, \partial y'} = f \,, \tag{25.23}$$

jejíž levá strana opět představuje pozitivně definitní operátor, tentokrát na množině funkcí dostatečně hladkých v $\bar{Q}$ a splňujících podmínku $u = 0$ na Γ'.



Obr. 16.



Obr. 17.

Obdobnou úvahou jako v předcházejícím textu dojdeme k závěru, že při použití Ritzovy metody k řešení rovnice (25.23) s podmínkou $u = 0$ na Γ' zaručuje splnění podmínek a) až e) z kap. 20 volba báze

$$\varphi_{mn}(x', y') = c_{mn} \sin \frac{m\pi x'}{a} \sin \frac{n\pi y'}{b} \,, \tag{25.24}$$

kde c_{mn} jsou konstanty ze systému (25.14). Místo toho, abychom řešili transformovaný problém s bází (25.24), můžeme ovšem řešit původní problém s bází

$$\tilde{\varphi}_{mn}(x, y) = \tilde{c}_{mn} \sin \frac{m\pi\left(x - \frac{k}{b} y\right)}{a} \sin \frac{n\pi y}{b} \,. \tag{25.25}$$

Protože obdélník a obrazce, které lze jednoduchými transformacemi [typu (25.22) apod.] snadno na obdélník převést, jsou v technických aplikacích nejčastější, uvedeme aspoň pro případy nejjednodušších okrajových podmínek příklady vhodných bází pro operátory druhého a čtvrtého řádu na obdélníku.

Volba báze pro operátory druhého řádu (str. 299 a 300) *na obdélníku* $G = (0, a) \times (0, b)$, obr. 17.

a) *Okrajová podmínka*

$$u = 0 \text{ na } \Gamma :$$

$$\varphi_{mn} = \frac{1}{\sqrt{\left(\frac{m^2}{a^2} + \frac{n^2}{b^2}\right)}} \sin \frac{m\pi x}{a} \sin \frac{n\pi y}{b} \,, \quad m, n = 1, 2, \ldots .^{1)} \tag{25.26}$$

b) *Okrajová podmínka*

$$\frac{\partial u}{\partial \nu} = 0 \,,$$

resp.

$$(a_{11}\nu_1 + a_{21}\nu_2) \frac{\partial u}{\partial x} + (a_{12}\nu_1 + a_{22}\nu_2) \frac{\partial u}{\partial y} = 0 \text{ na } \Gamma \,,$$

kde ν_1, ν_2 jsou směrové kosiny vnější normály:

$$\varphi_{mn} = \frac{1}{\sqrt{\left(\frac{m^2}{a^2} + \frac{n^2}{b^2} + 1\right)}} \cos \frac{m\pi x}{a} \cos \frac{n\pi y}{b} \,, \quad m, n = 0, 1, 2, \ldots . \tag{25.27}$$

V případě, že v (25.1) je $c(x) \equiv 0$, vynecháváme v systému (25.27) první (konstantní) člen, odpovídající hodnotám $m = 0$, $n = 0$.

c) *Okrajové podmínky*

$$u = 0 \quad \text{pro } x = 0 \,, \ x = a \quad (\text{na bočných stranách obdélníka}) \,,$$

$$\frac{\partial u}{\partial \nu} = 0 \,,$$

resp.

$$(a_{11}\nu_1 + a_{21}\nu_2) \frac{\partial u}{\partial x} + (a_{12}\nu_1 + a_{22}\nu_2) \frac{\partial u}{\partial y} = 0 \quad \text{pro } y = 0 \,, \ y = b :$$

$$\varphi_{mn} = \frac{1}{\sqrt{\left(\frac{m^2}{a^2} + \frac{n^2}{b^2}\right)}} \sin \frac{m\pi x}{a} \cos \frac{n\pi y}{b} \,, \quad m = 1, 2, \ldots, n = 0, 1, 2, \ldots . \tag{25.28}$$

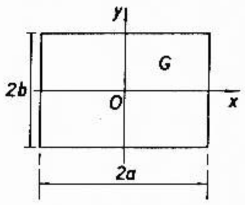
---

[1]) Multiplikativní konstanty nezávislé na m a n, např. číslo $2/[\pi\sqrt{(ab)}]$ v (25.14) lze při volbě bázových funkcí vynechat. V některých případech (použijeme-li k řešení Ritzovy soustavy eliminační metody a použijeme-li programování s pohyblivou desetinnou čárkou, resp. uvažujeme-li jen „malý" počet členů systému) lze vynechat i multiplikativní konstanty závislé na m a n, tj. položit je rovny jedničce. Viz str. 247.

Volba báze pro biharmonický operátor na obdélníku $G = (-a, a) \times (-b, b)$, obr. 18.

V obecném případě (pokud nepoužíváme speciálních postupů, srov. pozn. pod čarou na str. 305), *je třeba uvedené funkce normovat*, tj. násobit je konstantami c_{mn}, kde

$$\frac{1}{c_{mn}^2} = \iint_G \left[\left(\frac{\partial^2 \varphi_{mn}}{\partial x^2} \right)^2 + 2 \left(\frac{\partial^2 \varphi_{mn}}{\partial x \, \partial y} \right)^2 + \left(\frac{\partial^2 \varphi_{mn}}{\partial y^2} \right)^2 \right] \mathrm{d}x \, \mathrm{d}y \,,$$



Obr. 18.

nebo aspoň takovými konstantami, aby byla zachována „řádová" závislost na m a n, srov. str. 246, např. konstantami

$$c_{mn} = \frac{1}{m^2 + n^2} \,.$$

d) *Okrajové podmínky*

$$u = 0 \,, \quad \frac{\partial u}{\partial \nu} = 0 \text{ na } \Gamma :$$

$$\varphi_{2m,2n} = \left[\cos \frac{m\pi x}{a} - (-1)^m \right] \left[\cos \frac{n\pi y}{b} - (-1)^n \right], \tag{25.29}$$

$$\varphi_{2m-1,2n} = \left(\sin \frac{\lambda_m x}{a} - \frac{x}{a} \sin \lambda_m \right) \left[\cos \frac{n\pi y}{b} - (-1)^n \right],$$

$$\varphi_{2m,2n-1} = \left[\cos \frac{m\pi x}{a} - (-1)^m \right] \left(\sin \frac{\lambda_n y}{b} - \frac{y}{b} \sin \lambda_n \right),$$

$$\varphi_{2m-1,2n-1} = \left(\sin \frac{\lambda_m x}{a} - \frac{x}{a} \sin \lambda_m \right) \left(\sin \frac{\lambda_n y}{b} - \frac{y}{b} \sin \lambda_n \right),$$

$m, n = 1, 2, \ldots$, kde λ_k je takový kořen rovnice $\operatorname{tg} \lambda_k = \lambda_k$, pro který platí

$$\frac{2k - 1}{2} \pi < \lambda_k < \frac{2k + 1}{2} \pi \,.$$

Je

$$\lambda_1 \doteq 4{,}493\,2 \,, \quad \lambda_2 \doteq 7{,}725\,2 \,, \quad \lambda_3 \doteq 10{,}903\,5$$

atd.

e) *Okrajové podmínky*

$$u = 0 \,, \quad \frac{\partial^2 u}{\partial \nu^2} = 0 \text{ na } \Gamma :$$

$$\varphi_{2m-1,2n-1} = \cos \frac{(2m-1)\pi x}{2a} \cos \frac{(2n-1)\pi y}{2b} \,, \tag{25.30}$$

$$\varphi_{2m,2n-1} = \sin \frac{m\pi x}{a} \cos \frac{(2n-1)\pi y}{2b} \,,$$

$$\varphi_{2m-1,2n} = \cos \frac{(2m-1)\pi x}{2a} \sin \frac{n\pi y}{b} \,,$$

$$\varphi_{2m,2n} = \sin \frac{m\pi x}{a} \sin \frac{n\pi y}{b} \,,$$

$m, n = 1, 2, \ldots$.

[V případě e) je ovšem vhodnější uvažovat daný problém na obdélníku $(0, a) \times \times (0, b)$ a použít systému

$$\varphi_{mn} = \frac{\sin \dfrac{m\pi x}{a} \sin \dfrac{n\pi y}{b}}{m^2 + n^2} \,,$$

$m, n = 1, 2, \ldots$.]

Příklady některých dalších speciálních bází najde čtenář v [4], a zejména v [29], kde jsou uvedeny i příklady některých vhodných bází v trojrozměrném prostoru (koule, válec, sferický kužel apod.). Viz také kap. 42, str. 531 (metoda konečných prvků).

Kapitola 26

Numerické příklady: Parciální diferenciální rovnice

V této kapitole ukážeme nejprve numerické řešení Dirichletova problému pro rovnici druhého řádu s nekonstantními koeficienty Ritzovou metodou a uvedeme řešení některých modifikací tohoto problému (případ konstantních koeficientů, Neumannův problém, smíšený problém). V druhé části kapitoly provedeme – rovněž Ritzovou metodou – numerický výpočet pro případ biharmonického operátoru s Dirichletovými okrajovými podmínkami na dvojnásobně souvislé oblasti. Upozorníme na fyzikální, resp. technickou interpretaci uvedených problémů a zmíníme se o jejich řešení Galerkinovou metodou. V závěru kapitoly ukážeme na jednoduchém příkladě, jak odhadnout chybu přibližného řešení.

Příklad 26.1. Na kosodélníku K, s hranicí Γ, znázorněném na obr. 16, str. 304, řešme Ritzovou metodou problém

$$Au \equiv -(4+y)\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = y^2\,, \tag{26.1}$$

$$u = 0 \text{ na } \Gamma\,. \tag{26.2}$$

(Průhyb kosodélníkové membrány proměnné tloušťky, upevněné na hranici a zatížené vertikálním zatížením, jehož velikost roste s kvadrátem jedné souřadnice; stacionární vedení tepla v nekonečném hranolu kosodélníkového průřezu, s proměnnou vodivostí, vnitřními zdroji tepla a nulovou teplotou na povrchu apod.)

Nejprve snadno dokážeme pozitivní definitnost operátoru A na lineálu M funkcí dvakrát spojitě diferencovatelných v K, rovných nule na Γ. (Viz také kap. 22, str. 271.) Předně obvyklým použitím Greenovy věty dostaneme pro každou dvojici $u \in M$, $v \in M$

$$(u, v)_A = (Au, v) = -\iint_K \left[(4+y)\,v\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + v\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}\right] dx\,dy = \tag{26.3}$$

$$= \iint_K \left[(4+y)\frac{\partial v}{\partial x}\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y}\frac{\partial u}{\partial y}\right] dx\,dy\,,$$

odkud plyne symetričnost operátoru A na M. Dále je podle (26.3)

$$(u, u)_A = (Au, u) = \iint_K \left[(4+y)\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)^2\right] dx\,dy \geqq \tag{26.4}$$

$$\geqq \iint_K \left[\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)^2\right] dx\,dy\,,$$

odkud např. podle nerovnosti (18.46), str. 205, již snadno vyplývá pozitivní definitnost uvažovaného operátoru na M.

Pro řešení Ritzovou metodou zvolme první čtyři členy báze (25.25), str. 304 (můžeme položit $c_{mn} = 1$, srov. pozn. pod čarou na str. 305), tedy funkce

$$\varphi_{11} = \sin\frac{\pi(x-hy)}{a}\sin\frac{\pi y}{b}\,, \tag{26.5}$$

$$\varphi_{12} = \sin\frac{\pi(x-hy)}{a}\sin\frac{2\pi y}{b}\,,$$

$$\varphi_{21} = \sin\frac{2\pi(x-hy)}{a}\sin\frac{\pi y}{b}\,,$$

$$\varphi_{22} = \sin\frac{2\pi(x-hy)}{a}\sin\frac{2\pi y}{b}\,,$$

kde $h = k/b$. Hledáme-li přibližné řešení ve tvaru

$$u_{22} = \sum_{i,j=1}^{2} a_{ij}\varphi_{ij}\,, \tag{26.6}$$

bude Ritzova soustava rovnic pro neznámé konstanty a_{ij} tvaru

$$\sum_{m,n=1}^{2} (\varphi_{ij}, \varphi_{mn})_A\, a_{mn} = (\varphi_{ij}, f)\,, \quad i, j = 1, 2\,, \tag{26.7}$$

kde $f(x, y) = y^2$. Ale podle (26.3) je

$$(\varphi_{ij}, \varphi_{mn})_A = \iint_K \left[(4+y)\frac{\partial\varphi_{ij}}{\partial x}\frac{\partial\varphi_{mn}}{\partial x} + \frac{\partial\varphi_{ij}}{\partial y}\frac{\partial\varphi_{mn}}{\partial y}\right] dx\,dy = \tag{26.8}$$

$$= \iint_K (4+y)\frac{i\pi}{a}\cos\frac{i\pi(x-hy)}{a}\sin\frac{j\pi y}{b}\,.\,\frac{m\pi}{a}\cos\frac{m\pi(x-hy)}{a}\sin\frac{n\pi y}{b}\,dx\,dy\, +$$

$$+ \iint_K \left[-\frac{hi\pi}{a}\cos\frac{i\pi(x-hy)}{a}\sin\frac{j\pi y}{b} + \frac{j\pi}{b}\sin\frac{i\pi(x-hy)}{a}\cos\frac{j\pi y}{b}\right].$$

$$.\left[-\frac{hm\pi}{a}\cos\frac{m\pi(x-hy)}{a}\sin\frac{n\pi y}{b} + \frac{n\pi}{b}\sin\frac{m\pi(x-hy)}{a}\cos\frac{n\pi y}{b}\right] dx\,dy\,.$$

Zavedením nových proměnných

$$z = x - hy\,, \quad y = y \tag{26.9}$$

(s Jacobiovým determinantem zřejmě rovným jedné) převedeme výpočet integrálů (26.8) přes kosodélník K na výpočet integrálů přes obdélník

$$O = (0, a) \times (0, b)\,, \tag{26.10}$$

$$\begin{aligned}(\varphi_{ij}, \varphi_{mn})_A = {} & \frac{\pi^2 im}{a^2}\int_0^a\int_0^b \cos\frac{i\pi z}{a}\cos\frac{m\pi z}{a}\,.\,(4+y)\sin\frac{j\pi y}{b}\sin\frac{n\pi y}{b}\,\mathrm{d}z\,\mathrm{d}y\, + \\ & + \frac{h^2\pi^2 im}{a^2}\int_0^a\int_0^b \cos\frac{i\pi z}{a}\cos\frac{m\pi z}{a}\sin\frac{j\pi y}{b}\sin\frac{n\pi y}{b}\,\mathrm{d}z\,\mathrm{d}y\, + \\ & + \frac{\pi^2 jn}{b^2}\int_0^a\int_0^b \sin\frac{i\pi z}{a}\sin\frac{m\pi z}{a}\cos\frac{j\pi y}{b}\cos\frac{n\pi y}{b}\,\mathrm{d}z\,\mathrm{d}y\, - \\ & - \frac{h\pi^2 in}{ab}\int_0^a\int_0^b \cos\frac{i\pi z}{a}\sin\frac{m\pi z}{a}\sin\frac{j\pi y}{b}\cos\frac{n\pi y}{b}\,\mathrm{d}z\,\mathrm{d}y\, - \\ & - \frac{h\pi^2 jm}{ab}\int_0^a\int_0^b \sin\frac{i\pi z}{a}\cos\frac{m\pi z}{a}\cos\frac{j\pi y}{b}\sin\frac{n\pi y}{b}\,\mathrm{d}z\,\mathrm{d}y\,. \end{aligned} \tag{26.11}$$

Použitím substituce (26.9) dostaneme dále

$$(\varphi_{ij}, f) = \int_0^a\int_0^b y^2 \sin\frac{i\pi z}{a}\sin\frac{j\pi y}{b}\,\mathrm{d}z\,\mathrm{d}y\,. \tag{26.12}$$

K vyčíslení integrálů v (26.11), (26.12) uvážíme (viz [35], str. 482, 439 a 437), že

$$\int_0^a \sin\frac{i\pi z}{a}\sin\frac{m\pi z}{a}\,\mathrm{d}z = \int_0^a \cos\frac{i\pi z}{a}\cos\frac{m\pi z}{a}\,\mathrm{d}z = \begin{cases}\dfrac{a}{2}\,, & \text{je-li } i = m\,,\\ 0\,, & \text{je-li } i \neq m\,,\end{cases} \tag{26.13}$$

$$\int_0^a \sin\frac{i\pi z}{a}\cos\frac{m\pi z}{a}\,\mathrm{d}z = \begin{cases}\dfrac{a}{\pi}\cdot\dfrac{2i}{i^2 - m^2}\,, & \text{je-li } i - m \text{ liché}\,,\\ 0\,, & \text{je-li } i - m \text{ sudé}\,;\end{cases}$$

obdobné vztahy platí pro integrály vzhledem k proměnné y, píšeme-li v nich ovšem b místo a; dále je (substitucí $\pi y/b = t$)

$$\begin{aligned}&\int_0^b (4+y)\sin\frac{j\pi y}{b}\sin\frac{n\pi y}{b}\,\mathrm{d}y = \\ &= \frac{b}{2\pi}\int_0^\pi\left(4+\frac{bt}{\pi}\right)[\cos(j-n)\,t - \cos(j+n)\,t]\,\mathrm{d}t = \end{aligned} \tag{26.14}$$

$$= \begin{cases} 2b + \dfrac{b^2}{4} - \dfrac{b^2}{2\pi^2}\left[\dfrac{\cos 2jt}{4j^2} + \dfrac{t\sin 2jt}{2j}\right]_0^\pi = 2b + \dfrac{b^2}{4}\,, & \text{je-li } j = n\,,\\ \dfrac{b^2}{2\pi^2}\left[\dfrac{\cos(j-n)\,t}{(j-n)^2} + \dfrac{t\sin(j-n)\,t}{j-n} - \dfrac{\cos(j+n)\,t}{(j+n)^2} - \dfrac{t\sin(j+n)\,t}{j+n}\right]_0^\pi = & \\ \quad = \dfrac{b^2}{2\pi^2}\left[\dfrac{(-1)^{j-n}-1}{(j-n)^2} - \dfrac{(-1)^{j+n}-1}{(j+n)^2}\right], & \text{je-li } j \neq n\,,\end{cases}$$

$$\begin{aligned}\int_0^b y^2\sin\frac{j\pi y}{b}\,\mathrm{d}y &= \left[\frac{2b^2 y}{j^2\pi^2}\sin\frac{j\pi y}{b}\right]_0^b - \left[\left(\frac{by^2}{j\pi} - \frac{2b^3}{j^3\pi^3}\right)\cos\frac{j\pi y}{b}\right]_0^b = \\ &= \frac{(-1)^{j+1}\,b^3}{j\pi} + \frac{2b^3}{j^3\pi^3}\,[(-1)^j - 1]\,.\end{aligned} \tag{26.15}$$

Dosadíme-li z (26.11) až (26.15) do (26.7), dostaneme soustavu

$$\begin{aligned} &\left[\frac{\pi^2}{a^2}\cdot\frac{a}{2}\left(2b+\frac{b^2}{4}\right)+\frac{\pi^2}{4}\left(\frac{bh^2}{a}+\frac{a}{b}\right)\right]a_{11} + \frac{\pi^2}{a^2}\cdot\frac{a}{2}\cdot\frac{b^2}{2\pi^2}\left(-2+\frac{2}{9}\right)a_{12}\, + \\ &+ 0\,.\,a_{21} + \frac{2\pi^2 h}{ab}\left(\frac{4a}{3\pi}\cdot\frac{2b}{3\pi}+\frac{2a}{3\pi}\cdot\frac{4b}{3\pi}\right)a_{22} = \frac{2a}{\pi}\cdot\left(\frac{b^3}{\pi}-\frac{4b^3}{\pi^3}\right),\\ &\frac{\pi^2}{a^2}\cdot\frac{a}{2}\cdot\frac{b^2}{2\pi^2}\left(-2+\frac{2}{9}\right)a_{11} + \left[\frac{\pi^2}{a^2}\cdot\frac{a}{2}\left(2b+\frac{b^2}{4}\right)+\frac{\pi^2}{4}\left(\frac{bh^2}{a}+\frac{4a}{b}\right)\right]a_{12}\, - \\ &- \frac{\pi^2 h}{ab}\left(\frac{4a}{3\pi}\cdot\frac{4b}{3\pi}+4\,.\,\frac{2a}{3\pi}\cdot\frac{2b}{3\pi}\right)a_{21} + 0\,.\,a_{22} = -\frac{2a}{\pi}\cdot\frac{b^3}{2\pi}\,,\\ &0\,.\,a_{11} - \frac{\pi^2 h}{ab}\left(4\,.\,\frac{2a}{3\pi}\cdot\frac{2b}{3\pi}+\frac{4a}{3\pi}\cdot\frac{4b}{3\pi}\right)a_{12} + \left[\frac{4\pi^2}{a^2}\cdot\frac{a}{2}\left(2b+\frac{b^2}{4}\right)\, + \right.\\ &\left. + \frac{\pi^2}{4}\left(\frac{4bh^2}{a}+\frac{a}{b}\right)\right]a_{21} + \frac{4\pi^2}{a^2}\cdot\frac{a}{2}\cdot\frac{b^2}{2\pi^2}\cdot\left(-2+\frac{2}{9}\right)a_{22} = 0\,,\\ &\frac{2\pi^2 h}{ab}\left(\frac{2a}{3\pi}\cdot\frac{4b}{3\pi}+\frac{4a}{3\pi}\cdot\frac{2b}{3\pi}\right)a_{11} + 0\,.\,a_{12} + \frac{4\pi^2}{a^2}\cdot\frac{a}{2}\cdot\frac{b^2}{2\pi^2}\left(-2+\frac{2}{9}\right)a_{21}\, + \\ &+ \left[\frac{4\pi^2}{a^2}\cdot\frac{a}{2}\cdot\left(2b+\frac{b^2}{4}\right)+\pi^2\left(\frac{bh^2}{a}+\frac{a}{b}\right)\right]a_{22} = 0\,. \end{aligned} \tag{26.16}$$

Numerický výpočet proveďme pro kosodélník nakreslený na obr. 19. Tedy do (26.16) dosadíme

$$a = \pi\,,\quad b = \pi\,,\quad k = \pi\,,\quad h = \frac{k}{b} = 1 \tag{26.17}$$

a dostaneme tuto soustavu pro neznámé a_{ij}, $i, j = 1, 2$:

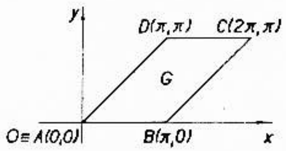
(26.18)
$$\begin{aligned}
&\left(\frac{3\pi^2}{2} + \frac{\pi^3}{8}\right) a_{11} - \frac{4\pi}{9} a_{12} + 0 \,.\, a_{21} + \frac{32}{9} a_{22} = 2(\pi^2 - 4)\\
&- \frac{4\pi}{9} a_{11} + \left(\frac{9\pi^2}{4} + \frac{\pi^3}{8}\right) a_{12} - \frac{32}{9} a_{21} + 0 \,.\, a_{22} = -\pi^2 ,\\
&0 \,.\, a_{11} - \frac{32}{9} a_{12} + \left(\frac{21\pi^2}{4} + \frac{\pi^3}{2}\right) a_{21} - \frac{16}{9} \pi a_{22} = 0 ,\\
&\frac{32}{9} a_{11} + 0 \,.\, a_{12} - \frac{16}{9} \pi a_{21} + \left(6\pi^2 + \frac{\pi^3}{2}\right) a_{22} = 0 ,
\end{aligned}$$

tj. soustavu

$$\begin{aligned}
18{,}680\,2 a_{11} - 1{,}396\,3 a_{12} + 0 . a_{21} + 3{,}555\,6 a_{22} &= 11{,}739\,2 ,\\
- 1{,}396\,3 a_{11} + 26{,}082\,4 a_{12} - 3{,}555\,6 a_{21} + 0 . a_{22} &= -9{,}869\,6 ,\\
0 . a_{11} - 3{,}555\,6 a_{12} + 67{,}318\,6 a_{21} - 5{,}585\,0 a_{22} &= 0 ,\\
3{,}555\,6 a_{11} + 0 . a_{12} - 5{,}585\,0 a_{21} + 74{,}720\,8 a_{22} &= 0 .
\end{aligned}$$

Řešení této soustavy je

(20.19) $a_{11} \doteq 0{,}608$, $a_{12} \doteq -0{,}349$, $a_{21} \doteq -0{,}021$, $a_{22} \doteq -0{,}031$.



Obr. 19.

Řešení problému (26.1), (26.2) na kosodélníku z obr. 19 je tedy dáno přibližně výrazem

(26.20)
$$\begin{aligned}
u_{22}(x) = {} & 0{,}608 \sin (x - y) \sin y - 0{,}349 \sin (x - y) \sin 2y -\\
& - 0{,}021 \sin 2(x - y) \sin y - 0{,}031 \sin 2(x - y) \sin 2y .
\end{aligned}$$

Poznámka 26.1. Výpočet v předcházejícím příkladě je poněkud zdlouhavější proto, že uvažovaný obor je kosodélník a koeficienty rovnice (26.1) i její pravá strana jsou proměnné. V případě, že oblast G je obdélník $O = (0, a) \times (0, b)$ a že místo problému (26.1), (26.2) je dán problém

(26.21)
$$-\Delta u = 1 \text{ v } O ,$$

(26.22)
$$u = 0 \text{ na } \Gamma ,$$

je výpočet velmi jednoduchý: Soustava funkcí (26.5) bude

(26.23)
$$\begin{aligned}
\varphi_{11} &= \sin \frac{\pi x}{a} \sin \frac{\pi y}{b} ,\\
\varphi_{12} &= \sin \frac{\pi x}{a} \sin \frac{2\pi y}{b} ,\\
\varphi_{21} &= \sin \frac{2\pi x}{a} \sin \frac{\pi y}{b} ,\\
\varphi_{22} &= \sin \frac{2\pi x}{a} \sin \frac{2\pi y}{b} .
\end{aligned}$$

V tomto případě dostaneme

(26.24)
$$\begin{aligned}
(\varphi_{ij}, \varphi_{mn})_A &= \iint_O \left(\frac{\partial \varphi_{ij}}{\partial x} \frac{\partial \varphi_{mn}}{\partial x} + \frac{\partial \varphi_{ij}}{\partial y} \frac{\partial \varphi_{mn}}{\partial y} \right) dx\, dy =\\
&= \int_0^a \int_0^b \left(\frac{i\pi}{a} . \frac{m\pi}{a} \cos \frac{i\pi x}{a} \sin \frac{j\pi y}{b} \cos \frac{m\pi x}{a} \sin \frac{n\pi y}{b} + \right.\\
&\left. + \frac{j\pi}{b} . \frac{n\pi}{b} \sin \frac{i\pi x}{a} \cos \frac{j\pi y}{b} \sin \frac{m\pi x}{a} \cos \frac{n\pi y}{b} \right) dx\, dy =\\
&= \begin{cases} \dfrac{\pi^2 ab}{4} \left(\dfrac{i^2}{a^2} + \dfrac{j^2}{b^2} \right) = \dfrac{\pi^2}{4ab} (a^2 j^2 + b^2 i^2) , & \text{je-li } m = i \text{ a } n = j ,\\ 0 & \text{v ostatních případech.} \end{cases}
\end{aligned}$$

Dále je

(26.25)
$$(\varphi_{ij}, f) = \int_0^a \int_0^b \sin \frac{i\pi x}{a} \sin \frac{j\pi y}{b} \, dx\, dy = \begin{cases} \dfrac{4ab}{\pi^2 ij} , & \text{je-li } i \text{ i } j \text{ liché} ,\\ 0 & \text{v ostatních případech.} \end{cases}$$

Ritzova soustava rovnic tedy v tomto případě bude

$$
\begin{aligned}
&(26.26)\quad \frac{\pi^2(a^2+b^2)}{4ab}\,a_{11} &&= \frac{4ab}{\pi^2}\,,\\
&\qquad \frac{\pi^2(4a^2+b^2)}{4ab}\,a_{12} &&= 0\,,\\
&\qquad \frac{\pi^2(a^2+4b^2)}{4ab}\,a_{21} &&= 0\,,\\
&\qquad \frac{\pi^2(a^2+b^2)}{ab}\,a_{22} &&= 0\,,
\end{aligned}
$$

odkud

$$(26.27)\qquad a_{11} = \frac{16a^2b^2}{\pi^4(a^2+b^2)}\,,\quad a_{12} = 0\,,\quad a_{21} = 0\,,\quad a_{22} = 0\,,$$

a

$$(26.28)\qquad u_{22}(x) = \frac{16a^2b^2}{\pi^4(a^2+b^2)} \sin\frac{\pi x}{a} \sin\frac{\pi y}{b}\,.$$

Viz také vzorec (12.29), str. 161. Z uvedeného výpočtu i z citovaného vzorce vyplývá, že v našem případě vede volba soustavy funkcí (26.23) k témuž výsledku jako volba jen jedné z těchto funkcí, a to první. (Symetrie problému vzhledem ke středu obdélníka jsme mohli využít již při volbě bázových funkcí, čímž by odpadl zbytečný výpočet koeficientů a_{12}, a_{21}, a_{22}.) V případě, že bychom místo systému (26.23) zvolili systém

$$(26.29)\qquad \varphi_{ij} = \sin\frac{i\pi x}{a} \sin\frac{j\pi y}{b}\,,\quad i, j = 1, 2, 3$$

(a popř. použili právě zmíněné symetrie), dostali bychom podle (26.24), (26.25) snadným výpočtem

$$
\begin{aligned}
(26.30)\quad u_{33}(x) = \frac{16a^2b^2}{\pi^4}\Bigg[&\frac{1}{a^2+b^2}\sin\frac{\pi x}{a}\sin\frac{\pi y}{b} + \frac{1}{3(9a^2+b^2)}\sin\frac{\pi x}{a}\sin\frac{3\pi y}{b} +\\
&+ \frac{1}{3(a^2+9b^2)}\sin\frac{3\pi x}{a}\sin\frac{\pi y}{b} + \frac{1}{81(a^2+b^2)}\sin\frac{3\pi x}{a}\sin\frac{3\pi y}{b}\Bigg].
\end{aligned}
$$

Speciálně, volíme-li $a = b = \pi$ jako v předcházejícím příkladě, dostaneme

$$
\begin{aligned}
(26.31)\quad u_{33}(x) = \frac{8}{\pi^2}\Bigg(&\sin x \sin y + \frac{1}{15}\sin x \sin 3y +\\
&+ \frac{1}{15}\sin 3x \sin y + \frac{1}{81}\sin 3x \sin 3y\Bigg).
\end{aligned}
$$

Poznámka 26.2. (*Neumannův problém.*) Je-li dán na obdélníku $O = (0, a) \times (0, b)$ pro rovnici (26.21) Neumannův problém, tedy problém

$$(26.32)\qquad -\Delta u = 1 \text{ v } O\,,$$

$$(26.33)\qquad \frac{\partial u}{\partial \nu} = 0 \text{ na } \Gamma\,,$$

snadno zjistíme, že tento problém nemá řešení: Není totiž splněna podmínka

$$(26.34)\qquad \iint_O f(x, y)\,dy\,dx = 0\,,$$

[viz (22.43), str. 273], neboť v našem případě je $\iint_O f(x, y)\,dx\,dy = ab > 0$.

Je-li dán problém

$$(26.35)\qquad -\Delta u = f \text{ v } O\,,$$

$$(26.36)\qquad \frac{\partial u}{\partial \nu} = 0 \text{ na } \Gamma\,,$$

kde funkce $f \in L_2(O)$ splňuje podmínku (26.34), pak, jak víme z kap. 22, má tento problém právě jedno zobecněné řešení $u(x, y)$, splňující podmínku

$$(26.37)\qquad \iint_O u(x, y)\,dx\,dy = 0\,.$$

Předpokládejme tedy, že podmínka (26.34) je splněna, a podle (25.27) [všimněme si přitom, že v (25.1) je $c(x, y) \equiv 0$, takže vynecháváme případ $m = 0$, $n = 0$; dále pokládáme $c_{mn} = 1$] zvolme prvních patnáct bázových funkcí

$$(26.38)\qquad \varphi_{ij}(x, y) = \cos\frac{i\pi x}{a}\cos\frac{j\pi y}{b}\,,\quad i, j = 0, 1, 2, 3,\ (i, j) \neq (0, 0)\,.$$

Pro koeficienty a_{ij} přibližného řešení

$$(26.39)\qquad \sum_{\substack{i,j=0\\(i,j)\neq(0,0)}}^{3} a_{ij}\,\varphi_{ij}(x, y)$$

dostaneme obdobným postupem jako v (26.24) a (26.26) soustavu rovnic

$$(26.40)\qquad \frac{\pi^2(a^2j^2 + b^2i^2)}{4ab}\,a_{ij} = \int_0^a\!\!\int_0^b f(x, y)\cos\frac{i\pi x}{a}\cos\frac{j\pi y}{b}\,dx\,dy \quad \text{pro}\quad i, j = 1, 2, 3$$

a

$$\frac{\pi^2 a j^2}{2b} a_{ij} = \int_0^a \int_0^b f(x, y) \cos \frac{j\pi y}{b} \, dx \, dy \quad \text{pro} \quad i = 0, j = 1, 2, 3, \tag{26.41}$$

$$\frac{\pi^2 b i^2}{2a} a_{ij} = \int_0^a \int_0^b f(x, y) \cos \frac{i\pi x}{a} \, dx \, dy \quad \text{pro} \quad j = 0, i = 1, 2, 3. \tag{26.42}$$

(Z uvedených vzorců je zřejmé, že zde není třeba se omezovat jen na uvažované hodnoty indexů, ale že tyto rovnice platí i pro další hodnoty přirozených čísel i, j.) Je-li např.

$$f(x, y) = \cos \frac{\pi x}{a}, \tag{26.43}$$

což je funkce vyhovující zřejmě podmínce (26.34), dostaneme

$$\int_0^a \int_0^b f(x, y) \cos \frac{i\pi x}{a} \cos \frac{j\pi y}{b} \, dx \, dy = \begin{cases} \dfrac{ab}{2} & \text{pro} \quad i = 1, j = 0, \\ 0 & \text{v ostatních případech}. \end{cases}$$

Jediný nenulový koeficient a_{10} bude v tomto případě určen rovnicí [viz (26.42)]

$$\frac{\pi^2 b}{2a} a_{10} = \frac{ab}{2},$$

odkud

$$u(x) = \frac{a^2}{\pi^2} \cos \frac{\pi x}{a}, \tag{26.44}$$

což je pro pravou stranu (26.43) klasické řešení problému (26.35), (26.36).

Na obdélníku $O = (0, a) \times (0, b)$ uvažujme ještě *smíšený problém*

$$-\Delta u = f \quad \text{v} \quad O, \tag{26.45}$$

$$u = 0 \quad \text{pro} \quad x = 0, \quad x = a, \tag{26.46}$$

$$\frac{\partial u}{\partial \nu} = 0 \quad \text{pro} \quad y = 0, \quad y = b. \tag{26.47}$$

Podle kap. 22 má tento problém právě jedno zobecněné řešení, bez zřetele na to, splňuje-li funkce $f \in L_2(O)$ podmínku (26.34) nebo nikoli. Zvolíme-li podle (25.28) bázové funkce (klademe $c_{mn} = 1$)

$$\varphi_{ij}(x, y) = \sin \frac{i\pi x}{a} \cos \frac{j\pi y}{b}, \quad i = 1, 2, 3, j = 0, 1, 2, 3,$$

dostaneme pro koeficienty a_{ij} přibližného řešení

$$\sum_{i=1}^{3} \sum_{j=0}^{3} a_{ij} \varphi_{ij}(x, y) \tag{26.48}$$

obdobným způsobem jako v předcházejícím případě soustavu rovnic

$$\frac{\pi^2(a^2 j^2 + b^2 i^2)}{4ab} a_{ij} = \int_0^a \int_0^b f(x, y) \sin \frac{i\pi x}{a} \cos \frac{j\pi y}{b} \, dx \, dy, \quad i, j = 1, 2, 3, \tag{26.49}$$

$$\frac{\pi^2 b i^2}{2a} a_{ij} = \int_0^a \int_0^b f(x, y) \sin \frac{i\pi x}{a} \, dx \, dy, \quad i = 1, 2, 3, \quad j = 0. \tag{26.50}$$

I v tomto případě je z uvedených rovnic patrno, že není třeba omezovat se jen na uvažované hodnoty indexů i, j.

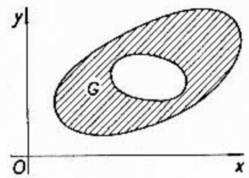
Příklad 26.2. Uvažujme problém

$$\Delta^2 u = f \quad \text{v} \quad G, \tag{26.51}$$

$$u = 0 \quad \text{na} \quad \Gamma, \tag{26.52}$$

$$\frac{\partial u}{\partial \nu} = 0 \quad \text{na} \quad \Gamma \tag{26.53}$$

na dvojnásobně souvislé oblasti G s lipschitzovskou hranicí (obr. 20); *vertikálně zatížená deska s otvorem, na hranici vetknutá*).

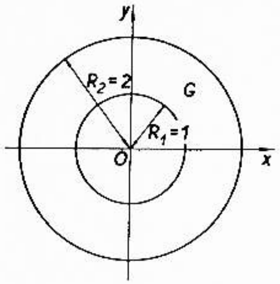


Obr. 20.

Podle kap. 23 (str. 286) je biharmonický operátor, uvažovaný na lineálu funkcí spojitých s parciálními derivacemi do čtvrtého řádu včetně v $\bar{G}$ a splňujících podmínky (26.52), (26.53), pozitivně definitní. Zobecněné řešení problému (26.51) až (26.53) minimalizuje funkcionál

$$Fu = \iint_G \left[\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \right)^2 + 2 \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x \, \partial y} \right)^2 + \left(\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \right)^2 \right] dx \, dy$$

v prostoru H_A, jehož prvky splňují – v určitém zobecněném smyslu, v tzv. smyslu stop, viz kap. 30 – podmínky (26.52), (26.53). Numerický výpočet proveďme Ritzovou metodou [k téže soustavě rovnic (26.60) vede i metoda Galerkinova] pro problém (26.51) až (26.53) na mezikruží G se středem v počátku souřadnic a s vnitřním, resp. vnějším poloměrem $R_1 = 1$, resp. $R_2 = 2$ (obr. 21), pro případ $f(x, y) = 1$ v G.



Obr. 21.

Zvolme prvních šest členů báze (25.8),

(26.54) $$g^2(x, y), \quad xg^2(x, y), \quad yg^2(x, y), \quad x^2g^2(x, y), \quad xyg^2(x, y), \quad y^2g^2(x, y),$$

kde

(26.55) $$g(x, y) = (x^2 + y^2 - 1)(4 - x^2 - y^2),$$

takže vzhledem k tomu, že funkce $g(x, y)$ se vyskytuje v (26.54) v druhé mocnině, bude každá lineární kombinace funkcí (26.54) splňovat obě podmínky (26.52), (26.53).

Protože oblast G, operátor Δ^2 i funkce f jsou symetrické vzhledem k oběma osám souřadnic, stačí v (26.54) uvažovat (viz pozn. 13.7, str. 169) jen členy se sudými mocninami x a y. Vzhledem k symetrii problému podle počátku souřadnic stačí dokonce psát Ritzovu aproximaci $u_6(x, y)$ ve tvaru

(26.56) $$u_6 = g^2(x, y)\left[a_1 + a_2(x^2 + y^2)\right],$$

resp., použijeme-li polárních souřadnic r a ψ, ve tvaru

(26.57) $$u_6 = a_1\,\varphi_1(r, \psi) + a_2\,\varphi_2(r, \psi),$$

kde

(26.58) $$\varphi_1 = g^2 = (r^2 - 1)^2(4 - r^2)^2,$$

(26.59) $$\varphi_2 = (x^2 + y^2)\,g^2 = r^2(r^2 - 1)^2(4 - r^2)^2.$$

Vzhledem k tomu, že funkce φ_1 a φ_2 zřejmě patří do definičního oboru uvažovaného operátoru, můžeme Ritzovu soustavu rovnic zapsat ve tvaru (13.29), str. 168,

(26.60) $$\begin{aligned}(\Delta^2\varphi_1, \varphi_1)\,a_1 + (\Delta^2\varphi_1, \varphi_2)\,a_2 &= (f, \varphi_1),\\ (\Delta^2\varphi_1, \varphi_2)\,a_1 + (\Delta^2\varphi_2, \varphi_2)\,a_2 &= (f, \varphi_2).\end{aligned}$$

Protože dále φ_1 i φ_2 jsou funkce závislé jen na proměnné r (nezávislé na ψ), můžeme psát

$$\Delta^2\varphi_1 = \Delta(\Delta\varphi_1) = \left(\frac{d^2}{dr^2} + \frac{1}{r}\frac{d}{dr}\right)\left(\frac{d^2\varphi_1}{dr^2} + \frac{1}{r}\frac{d\varphi_1}{dr}\right) =$$

$$= \frac{d^4\varphi_1}{dr^4} + \frac{2}{r}\frac{d^3\varphi_1}{dr^3} - \frac{1}{r^2}\frac{d^2\varphi_1}{dr^2} + \frac{1}{r^3}\frac{d\varphi_1}{dr} = 2\,304r^4 - 5\,760r^2 + 2\,112$$

a obdobně

$$\Delta^2\varphi_2 = 6\,400r^6 - 23\,040r^4 + 19\,008r^2 - 2\,560.$$

Odtud dostaneme

(26.61) $$(\Delta^2\varphi_1, \varphi_1) = \int_1^2\int_0^{2\pi}(2\,304r^4 - 5\,760r^2 + 2\,112)(r^2 - 1)^2\,.\,(4 - r^2)^2\,r\,dr\,d\psi = 72\,588{,}95$$

a dále

(26.62) $$(\Delta^2\varphi_1, \varphi_2) = 228\,434{,}71, \quad (\Delta^2\varphi_2, \varphi_2) = 805\,459{,}24.$$

Podobně vypočítáme

$$(f, \varphi_1) = \int_1^2\int_0^{2\pi} 1\,.\,(r^2 - 1)^2(4 - r^2)^2\,r\,dr\,d\psi = 25{,}447,$$

$$(f, \varphi_2) = 63{,}617.$$

Soustava (26.60) tedy je

(26.63) $$\begin{aligned}72\,588{,}95a_1 + 228\,434{,}71a_2 &= 25{,}447,\\ 228\,434{,}71a_1 + 805\,459{,}24a_2 &= 63{,}617\end{aligned}$$

s řešením

$$a_1 \doteq 0{,}000\,948\,5, \quad a_2 \doteq -0{,}000\,190\,0,$$

a přibližné řešení daného problému je

(26.64) $$u_6 = (0{,}000\,948\,5 - 0{,}000\,190\,0r^2)(r^2 - 1)^2(4 - r^2)^2.$$

Poznámka 26.3. Jak jsme se zmínili již v předcházející kapitole, jsou systémy typu (26.54) „málo ortogonální“, což je velmi dobře vidět i na soustavě (26.63), kde levá strana druhé rovnice je téměř násobkem levé strany první rovnice. Výpočet koeficientů soustavy je tedy třeba provést s velkou přesností.

Poznámka 26.4. V našem případě je možno porovnat přibližné řešení (26.64) s přesným řešením uvažované úlohy. V případě, že oblast G je mezikruží a že $f(x, y) \equiv \equiv 1$ v G, redukuje se totiž rovnice (26.51) v důsledku symetrie problému na rovnici

$$\frac{d^4u}{dr^4} + \frac{2}{r}\frac{d^3u}{dr^3} - \frac{1}{r^2}\frac{d^2u}{dr^2} + \frac{1}{r^3}\frac{du}{dr} = 1\,, \tag{26.65}$$

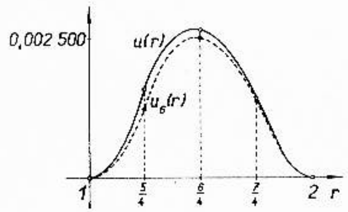
což je obyčejná diferenciální rovnice Eulerova typu ([35], str. 651). Její obecný integrál je

$$u = (C_1 + C_2r^2)\ln r + C_3 + C_4r^2 + r^4/64\,.$$

Z podmínek (26.52), (26.53) plyne pro případ uvažovaného mezikruží

$$C_1 = \frac{15\ln 2 - 9}{64\ln^2 2 - 36} \doteq -0{,}266\,104\,, \qquad C_2 = \frac{45 - 48\ln 2}{32(16\ln^2 2 - 9)} \doteq -0{,}279\,217\,,$$

$$C_3 = \tfrac{1}{64} + \tfrac{1}{2}(C_1 + C_2) \doteq -0{,}257\,036\,, \quad C_4 = -\tfrac{1}{32} - \tfrac{1}{2}(C_1 + C_2) \doteq 0{,}241\,411\,,$$



Obr. 22.

takže řešení uvažovaného problému (přesné až na zaokrouhlení v koeficientech $C_1, \ldots, C_4$) je

$$u = (-0{,}266\,104 - 0{,}279\,217r^2)\ln r - 0{,}257\,036 + 0{,}241\,411r^2 + r^4/64\,.$$

Speciálně je

$$u(1) = 0\,,\quad u(\tfrac{5}{4}) = 0{,}001\,590\,,\quad u(\tfrac{6}{4}) = 0{,}002\,612\,,\quad u(\tfrac{7}{4}) = 0{,}001\,381\,,\quad u(2) = 0\,,$$

zatímco podle (26.64) máme

$$u_6(1) = 0\,,\quad u_6(\tfrac{5}{4}) = 0{,}001\,225\,,\quad u_6(\tfrac{6}{4}) = 0{,}002\,493\,,\quad u_6(\tfrac{7}{4}) = 0{,}001\,371\,,\quad u_6(2) = 0\,.$$

Průběh přibližného, resp. přesného řešení je graficky znázorněn čárkovaně, resp. plně na obr. 22. Aproximace u_6 zřejmě vystihuje zcela uspokojivě přesné řešení.

Poznámka 26.5. (*Odhad chyby.*) Pokud jde o odhad chyby v metrice prostoru H_A lze u všech příkladů počítaných v této kapitole použít nerovnosti (11.21).

$$\|u_n - u_0\|_A = \frac{\|Au_n - f\|}{C}\,. \tag{26.66}$$

Pro ilustraci odhadněme chybu v případě problému (26.21), (26.22) pro $a = \pi$, $b = \pi$, tj. chybu výsledku u_{33}, daného vzorcem (26.31). V tomto případě můžeme pro odhad konstanty C použít vzorce (18.48), str. 205, který pro náš případ $l = \pi$ dává

$$(-\Delta u, u) = \iint_G \left[\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)^2\right] dx\,dy \geqq \frac{1}{2}\|u\|^2\,,$$

takže

$$C = \frac{\sqrt{2}}{2}\,.$$

Podle (26.66) dostaneme tedy pro odhad chyby v normě $\|u\|_A$ protoru H_A výsledek

$$\|u_{33} - u_0\|_A \leqq \sqrt{2}\,\|-\Delta u_{33} - 1\| \doteq \sqrt{2}\,.\,1{,}364 \doteq 1{,}93\,, \tag{26.67}$$

neboť

$$\begin{aligned}
\|-\Delta u_{33} - 1\|^2 &= \int_0^\pi\int_0^\pi \Big\{-\Delta\Big[\frac{8}{\pi^2}\Big(\sin x \sin y + \frac{1}{15}\sin x \sin 3y + \\
&\quad + \frac{1}{15}\sin 3x \sin y + \frac{1}{81}\sin 3x \sin 3y\Big)\Big] - 1\Big\}^2 dx\,dy = \\
&= \int_0^\pi\int_0^\pi \Big[\frac{16}{\pi^2}\Big(\sin x \sin y + \frac{1}{3}\sin x \sin 3y + \frac{1}{3}\sin 3x \sin y + \\
&\quad + \frac{1}{9}\sin 3x \sin 3y\Big) - 1\Big]^2 dx\,dy = \\
&= \frac{16^2}{\pi^4}\int_0^\pi\int_0^\pi \Big[\sin^2 x \sin^2 y + \frac{1}{9}\sin^2 x \sin^2 3x + \frac{1}{9}\sin^2 3x \sin^2 y + \\
&\quad + \frac{1}{81}\sin^2 3x \sin^2 3y + \frac{\pi^4}{256} - \frac{2\pi^2}{16}\Big(\sin x \sin y + \\
&\quad + \frac{1}{3}\sin x \sin 3y + \frac{1}{3}\sin 3x \sin y + \frac{1}{9}\sin 3x \sin 3y\Big)\Big] dx\,dy\ ^{1)} =
\end{aligned}$$

---

1) Integrály z ostatních členů jsou rovny nule vzhledem k ortogonalitě sinových funkcí v intervalu $\langle 0, \pi\rangle$.

$$= \frac{16^2}{\pi^4}\left[\frac{\pi^2}{4} + \frac{\pi^2}{36} + \frac{\pi^2}{36} + \frac{\pi^2}{324} + \frac{\pi^6}{256} - \frac{2\pi^2}{16}\left(4 + \frac{4}{9} + \frac{4}{9} + \frac{4}{81}\right)\right] =$$

$$= \frac{16}{\pi^4}\left(\frac{100\pi^2}{324} + \frac{\pi^6}{256} - \frac{2\pi^2}{16}\,\frac{400}{81}\right) = \frac{16^2}{\pi^4}\left(\frac{\pi^6}{256} - \frac{100\pi^2}{324}\right) =$$

$$= \pi^2 - \frac{6\,400}{81\pi^2} \doteq 1{,}86\,,$$

takže skutečně

(26.68) $$\|-\Delta u_{33} - 1\| \doteq \sqrt{1{,}86} \doteq 1{,}364\,.$$

Poznámka 26.6. Odhad $\|-\Delta u_{33} - 1\|^2 \doteq 1{,}86$ je sám o sobě zajímavý. Operátor $-\Delta$, aplikovaný na sinové funkce (26.29), dává opět funkce téhož typu. Tyto funkce jsou na hranici Γ rovny nule. Není-li pravá strana $f(x, y)$ dané rovnice na hranici Γ rovna nule [a to je náš případ, neboť $f(x, y) \equiv 1$], nemůže tedy přibližné řešení splňovat uvažovanou diferenciální rovnici uspokojivě v celé oblasti G – rozdíl mezi levou a pravou stranou rovnice bude značný přinejmenším v určitém okolí hranice, které ovšem bude záviset na počtu členů báze, který bereme v úvahu. Odhad $\|-\Delta u_3 - 1\|^2 \doteq 1{,}86$ skutečně není – a při poměrně malém počtu členů báze nemůže být – příliš příznivý, neboť, uvážíme-li, že obsah čtverce je π^2, připadá na „průměrný" rozdíl mezi funkcemi $-\Delta u_{33}$ a -1 hodnota

$$h = \sqrt{\frac{1{,}86}{\pi^2}} \doteq 0{,}43\,,$$

což není nikterak zanedbatelné číslo vzhledem k jedničce.

Tento nepříznivý jev je možno odstranit teprve vezmeme-li v úvahu značný počet členů báze. Jestliže nám tedy z nějakého důvodu nestačí, aby přibližné řešení uspokojivě aproximovalo přesné řešení v prostoru H_A, ale aby s dostatečnou přesností splňovalo i danou diferenciální rovnici, je v tomto případě [kdy tedy $f(x, y) \not\equiv 0$ na hranici uvažovaného čtverce, resp. původního obdélníka $(0, a) \times (0, b)$] vhodné použít místo sinové báze např. báze polynomiální, tj. hledat přibližné řešení ve tvaru

$$g(x, y)\left(a_0 + a_1x + a_2y + a_3x^2 + a_4xy + a_5y^2 + \ldots\right),$$

kde (v případě obdélníka) stačí volit

$$g(x, y) = xy(a - x)(b - y)\,.$$

Srov. také odhad chyby v příkl. 21.3, str. 264 až 266.

Kapitola 27
Shrnutí kapitol 18 až 26

V předcházející, tj. druhé části knihy jsme uvedli nejběžnější variační metody, založené na větě o minimu kvadratického funkcionálu, resp. na úvahách přímo souvisejících s touto problematikou. V této části knihy jsme se zabývali aplikací uvedených metod na řešení obyčejných a parciálních diferenciálních rovnic s okrajovými podmínkami. První krok k ověření toho, že lze s úspěchem použít těchto metod, je ověření pozitivní definitnosti uvažovaných diferenciálních operátorů na vhodných lineálech. Účinným prostředkem k tomu jsou Friedrichsova, resp. Poincaréova nerovnost (18.1), resp. (18.50), tj. nerovnost

(27.1) $$\|u\|^2_{L_2(G)} = \int_G u^2\,\mathrm{d}x \leqq c_1 \sum_{k=1}^{N} \int_G \left(\frac{\partial u}{\partial x_k}\right)^2 \mathrm{d}x + c_2 \int_\Gamma u^2(S)\,\mathrm{d}S\,,$$

resp.

(27.2) $$\|u\|^2_{L_2(G)} = \int_G u^2\,\mathrm{d}x \leqq c_3 \sum_{k=1}^{N} \int_G \left(\frac{\partial u}{\partial x_k}\right)^2 \mathrm{d}x + c_4 \left[\int_G u(x)\,\mathrm{d}x\right]^2,$$

platná pro funkce spojitě diferencovatelné v oblasti $\overline{G}$ s lipschitzovskou hranicí Γ (pro $N = 1$ spojitě diferencovatelné v intervalu $\langle a, b\rangle$).

Pro konstanty c_1, c_2, c_3, c_4 jsme se snažili získat vhodné odhady. Zejména jsme upozornili na výhodnost odhadů typu (18.22), resp. (18.40) a z nich plynoucích odhadů (18.28), (18.46), značně lepších, než jsou odhady běžně uváděné v literatuře. Tato skutečnost je důležitá zejména při odhadu chyby, založeném na nerovnosti (11.21) (viz příklady v kap. 21 a 26).

V kap. 19 jsme pak vyšetřovali obyčejnou diferenciální rovnici druhého řádu,

(27.3) $$-(pu')' + ru = f\,,$$

kde $f \in L_2(a, b)$, $p(x)$, $p'(x)$, $r(x)$ jsou funkce spojité v $\langle a, b\rangle$, $p(x) \geqq p_0 > 0$, $r(x) \geqq 0$ v $\langle a, b\rangle$, s okrajovými podmínkami

(27.4) $$\alpha\,u'(a) - \beta\,u(a) = 0\,, \quad \gamma\,u'(b) + \delta\,u(b) = 0\,,$$

α, β, γ, δ jsou nezáporné konstanty, $\alpha + \beta > 0$, $\gamma + \delta > 0$. Mezi okrajové podmínky (27.4) patří zejména podmínky (19.5) až (19.8), kterým jsme věnovali zvláštní pozornost, neboť jsou obdobou typických okrajových podmínek pro parciální diferenciální rovnice druhého řádu. Zjistili jsme, že s výjimkou případu

(27.5) $$r(x) \equiv 0\,, \quad u'(a) = 0\,, \quad u'(b) = 0$$

je příslušný diferenciální operátor A, uvažovaný na lineálu M funkcí dvakrát spojitě diferencovatelných v $\langle a, b\rangle$ a splňujících podmínky (27.4), pozitivně definitní, a uvedli jsme funkcionály (19.85) až (19.88) (pro různé případy konstant α, β, γ, δ), které zobecněné řešení problému (27.3), (27.4) minimalizuje v příslušném prostoru H_A. V případě (27.5) jsme ukázali, že daný operátor je pozitivně definitní na lineálu $\tilde{M}_2$ funkcí dvakrát spojitě diferencovatelných v $\langle a, b\rangle$ a splňujících nejen podmínky $u'(a) = u'(b) = 0$, ale také podmínku $\int_a^b u(x)\,dx = 0$. Nutná a postačující podmínka pro existenci zobecněného řešení pak je $\int_a^b f(x)\,dx = 0$. Příslušný funkcionál má přitom stejný tvar jako v případě okrajových podmínek $u(a) = u(b) = 0$. Při té příležitosti jsme upozornili na rozdíl mezi stabilními a nestabilními okrajovými podmínkami a na rozdílnou strukturu prostoru H_A. Stabilní okrajové podmínky (podmínky, v nichž se vyskytují derivace nejvýše řádu $k - 1$, je-li daná rovnice řádu $2k$) splňují — popř. v určitém zobecněném smyslu tzv. stop, viz kap. 30 — všechny funkce prostoru H_A, zatímco u nestabilních okrajových podmínek (v nichž se vyskytují derivace řádu k-tého a vyššího) tomu tak není. Při volbě báze v příslušném prostoru H_A, na němž minimalizujeme uvažovaný funkcionál, je třeba dbát na splnění stabilních okrajových podmínek. Nestabilní okrajové podmínky nemusí bázové funkce splňovat, ty jsou „obsaženy" v uvažovaném funkcionálu a jsou automaticky splněny (popř. v určitém zobecněném smyslu) zobecněným řešením, které v prostoru H_A minimalizuje tento funkcionál. Ukázali jsme v této souvislosti i na rozdíl mezi Ritzovou a Galerkinovou metodou. Podrobně se budeme těmito otázkami zabývat v kap. 32, 34 a 35 (viz zejména str. 429 až 431), kde bude také mnohem lépe vidět do struktury uvažovaných prostorů.

V kap. 19 jsme se v případě rovnic druhého řádu ještě zmínili o stejnoměrné konvergenci minimalizující posloupnosti $\{u_n(x)\}$ k zobecněnému řešení $u_0(x)$, volíme-li prvky báze z D_A [odkud ovšem ihned vyplývá spojitost funkce $u_0(x)$ v $\langle a, b\rangle$]. Dále jsme uvedli funkcionály (19.105) až (19.108) pro nehomogenní okrajové podmínky. V závěru kap. 19 jsme se zabývali rovnicí řádu $2k$ s Dirichletovými okrajovými podmínkami a ukázali jsme na rovnici čtvrtého řádu s okrajovými podmínkami $u(a) = u''(a) = u(b) = u''(b) = 0$, jak postupovat u rovnic vyšších řádů v případě jiných než Dirichletových okrajových podmínek.

S podobnou problematikou jsme se zabývali v případě parciálních diferenciálních rovnic. V kap. 22 jsme uvažovali stejnoměrně eliptickou rovnici druhého řádu,

$$Au = -\sum_{i,j=1}^{N} \frac{\partial}{\partial x_i}\left(a_{ij}\frac{\partial u}{\partial x_j}\right) + cu = f\,, \tag{27.6}$$

kde $f \in L_2(G)$, $a_{ij}(x) = a_{ji}(x)$ jsou spolu s parciálními derivacemi prvního řádu spojité v $\bar{G}$,

$$\sum_{i,j=1}^{N} a_{ij}(x)\,\alpha_i\alpha_j \geq p\sum_{i=1}^{N}\alpha_i^2\,, \quad p > 0\,, \tag{27.7}$$

$c(x)$ je funkce spojitá v $\bar{G}$, $c(x) \geq 0$, a to s Dirichletovými, Neumannovými, Newtonovými a smíšenými okrajovými podmínkami, které svým charakterem odpovídají okrajovým podmínkám (19.5) až (19.8) pro obyčejnou diferenciální rovnici. Výsledky jsou zcela obdobné. V případě, že je $c(x) \equiv 0$ v G, je třeba, jde-li o Neumannovu okrajovou podmínku $Nu = 0$, uvažovat daný diferenciální operátor na lineálu $\tilde{M}_2$ funkcí spojitých s parciálními derivacemi do druhého řádu včetně v $\bar{G}$ a splňujících nejen podmínku $Nu = 0$, ale i podmínku $\int_G u\,dx = 0$. Na tomto lineálu je daný operátor pozitivně definitní. Nutná a postačující podmínka pro existenci zobecněného řešení je $\int_G f(x)\,dx = 0$. Toto řešení pak v příslušném prostoru (funkce tohoto prostoru v obecném případě nesplňují podmínku $Nu = 0$, ale splňují podmínku $\int_G u\,dx = 0$) minimalizuje funkcionál (22.53). Ostatní případy „nečiní potíže" a snadno jsme dokázali pozitivní definitnost daného operátoru na příslušných lineálech. Odpovídající funkcionály jsou funkcionály (22.27), (22.33), (22.38), (22.63) a (22.66). V závěru kapitoly jsme pak uvedli funkcionály (22.70) až (22.72) odpovídající nehomogenním okrajovým podmínkám. (Srov. také tabulku funkcionálů, uvedenou na konci knihy.)

V kap. 23 jsme vyšetřovali biharmonický operátor s okrajovými podmínkami

$$u = 0\,, \quad \frac{\partial u}{\partial \nu} = 0 \text{ na } \Gamma\,, \tag{27.8}$$

$$u = 0\,, \quad Mu = 0 \text{ na } \Gamma\,, \tag{27.9}$$

$$Mu = 0\,, \quad Nu = 0 \text{ na } \Gamma\,, \tag{27.10}$$

kde operátory M a N jsou dány vztahy (23.23), které zachycují i Poissonovu konstantu σ, což je důležité pro aplikace v teorii pružnosti. Okrajové podmínky (27.10) jsou pro biharmonický operátor nestabilní a odpovídají zde Neumannově okrajové podmínce pro rovnice druhého řádu. Tento problém je poněkud obtížnější a vrátíme se k němu v kap. 35 (str. 448, 456). V případě okrajových podmínek (27.8), (27.9) jsme bez obtíží dokázali pozitivní definitnost biharmonického operátoru na příslušných lineálech. Odpovídající funkcionály jsou funkcionály (23.40), (23.49). V případě nehomogenních okrajových podmínek je možno ke konstrukci přibližného řešení s výhodou použít metody nejmenších čtverců na hranici (kap. 43).

Kap. 24 je věnována matematické teorii pružnosti. Rovnice rovnováhy jsme zapsali ve tvaru $\boldsymbol{Au} = \boldsymbol{f}$, kde A je tzv. operátor teorie pružnosti. [Jeho konkrétní tvar jsme ukázali v rovnici (24.14) pro případ homogenního izotropního tělesa.] Pomocí tzv. Kornovy nerovnosti jsme dokázali pozitivní definitnost tohoto operátoru na lineálech vektorových funkcí, spojitých s parciálními derivacemi do druhého řádu včetně v $\bar{G}$ a splňujících okrajové podmínky

$$\boldsymbol{u} = \boldsymbol{0} \text{ na } \Gamma \tag{27.11}$$

(nulové posunutí na hranici), resp.

(27.12) $$\mathbf{t} = \mathbf{0} \text{ na } \Gamma$$

(nulové zatížení na hranici), resp. smíšené okrajové podmínky

(27.13) $$\mathbf{u} = \mathbf{0} \text{ na } \Gamma_1\,, \quad \mathbf{t} = \mathbf{0} \text{ na } \Gamma_2\,.$$

Přitom v případě podmínky (27.12), která zde má význam Neumannovy okrajové podmínky, je třeba, aby vektorové funkce uvažovaného lineálu splňovaly podmínky statické a momentové rovnováhy

(27.14) $$\int_G \mathbf{u}\,\mathrm{d}x = 0\,, \quad \int_G \mathbf{r} \times \mathbf{u}\,\mathrm{d}x = 0\,.$$

Splnění týchž podmínek pro funkci $\mathbf{f}$ je nutnou a postačující podmínkou řešitelnosti problému $A\mathbf{u} = \mathbf{f}$ v G, $\mathbf{t} = \mathbf{0}$ na Γ.

Ve všech případech minimalizuje zobecněné řešení „funkcionál potenciální energie" $\int_G W(\mathbf{u})\,\mathrm{d}x - \int_G \mathbf{f}\mathbf{u}\,\mathrm{d}x$ v příslušném prostoru H_A, jehož prvky (vektorové funkce) splňují – popř. ve smyslu stop – odpovídající stabilní okrajové podmínky $\mathbf{u} = \mathbf{0}$ na Γ, resp. na Γ_1, v případě (27.12) nesplňují v obecném případě podmínku $\mathbf{t} = \mathbf{0}$ na Γ, splňují však podmínky (27.14). V závěru kap. 24 jsme se pak zmínili o nehomogenních okrajových podmínkách. Viz též tabulku funkcionálů na konci knihy.

Kap. 20 a 25 jsme věnovali otázkám volby báze, zejména pro Ritzovu metodu. Přímo z definice báze plyne, že báze je

a) úplná v H_A,

b) lineárně nezávislá v H_A.

Po numerické stránce je dále důležité, aby báze zaručovala

c) numerickou stabilitu procesu,

d) stejnoměrnou omezenost čísel podmíněnosti Ritzovy matice $\mathbf{R}_n$,

e) splnění podmínky $Au_n \to f$ pro $n \to \infty$.

V kap. 20 jsme uvedli dvě užitečné věty (věty 20.1 a 20.2), z nichž první tvrdí, za velmi přirozených předpokladů, že z úplnosti posloupnosti $\{A\varphi_n\}$ v prostoru H plyne úplnost posloupnosti $\{\varphi_n\}$ v prostoru H_A, a druhá, že ortonormální (v prostoru H_B) systém vlastních funkcí operátoru B tvoří v prostoru H_A bázi mající všechny vlastnosti a) až e), jsou-li samoadjungovaná rozšíření operátorů A, B shodné příbuzné operátory.

Na základě těchto vět jsme uvedli v podstatě dva typy vhodných bází:

1. Uvažujme v rovině ($N = 2$) systém funkcí

(27.15) $$1,\, x,\, y,\, x^2,\, xy,\, y^2,\, \ldots\,.$$

(Obdobné systémy s obdobnými vlastnostmi je možno uvažovat i pro $N > 2$; pro $N = 1$ dostaneme ovšem systém funkcí $1, x, x^2, \ldots$.) V případě Dirichletova problému pro rovnici (27.6) tvoří bázi v prostoru H_A systém funkcí

(27.16) $$g,\, xg,\, yg,\, x^2g,\, xyg,\, y^2g,\, \ldots\,,$$

kde $g(x, y)$ je dostatečně hladká funkce v $\bar{G}$, kladná v G a rovná nule na Γ. Příklady takových bází jsme uvedli v kap. 20 a 25 (str. 239, 300, 301 aj.). Bází podobného typu lze použít i v případě rovnic vyšších řádů a popř. jiných okrajových podmínek, než jsou Dirichletovy podmínky [srov. problém (25.9) až (25.12), str. 301]. Tyto systémy mají tu výhodu, že jsou jednoduché a lze jimi snadno zachytit okrajové podmínky i v případě vícenásobně souvislých oblastí. Jejich nevýhodou je, že nemají v obecném případě vlastnosti c), d), e). Zejména tedy levé strany rovnic v Ritzově soustavě jsou „málo nezávislé", a jak při výpočtu koeficientů této soustavy, tak při jejím řešení je třeba výpočtů s velkou přesností. Mimoto je zpravidla možno uvažovat jen několik prvních členů báze.

2. Citované věty 20.2 je možno použít s výhodou tak, že najdeme ortonormální systém vlastních funkcí některého poměrně jednoduchého operátoru (např. Laplaceova), jehož samoadjungované rozšíření a samoadjungované rozšíření daného operátoru jsou shodné příbuzné operátory. To je zejména u rovnic druhého řádu poměrně snadné, neboť s výjimkou Neumannových okrajových podmínek a případu $c(x) \equiv 0$ v G mají tuto vlastnost operátory (27.6) a $-\Delta u$; v případě Neumannových podmínek a $c(x) \equiv 0$ stačí vyšetřovat operátory (27.6) a $-\Delta u$ na lineálu dostatečně hladkých funkcí, splňujících dané okrajové podmínky a podmínku $\int_G u\,\mathrm{d}x = 0$. Zmíněný ortonormální systém vlastních funkcí má pak všechny požadované vlastnosti a) až e). V kap. 25 jsme pak uvedli příklady některých vhodných bází, zejména pro kruh a obdélník, a mimoto jsme ukázali některé obraty, jak pomocí jednoduchých transformací využít těchto systémů i v případě jiných oblastí. Koeficienty uvedených ortonormálních systémů závisejí na n. Upozornili jsme na to, že tvar těchto koeficientů je možno často zjednodušit, že však je přitom třeba dbát na to, aby byla zachována aspoň řádová závislost těchto koeficientů na n. Jinak totiž v obecném případě převažují prvky v pravé dolní části Ritzovy matice velmi výrazně (v absolutní hodnotě) nad prvky v levé horní části této matice, což se nepříznivě projeví v numerickém procesu. Poznamenali jsme však také, že koeficienty v uvedených systémech je možno položit rovny jedničce, používáme-li speciálních numerických postupů, např. programování s pohyblivou čárkou a řešení Ritzovy soustavy eliminační metodou, a ovšem i tenkrát, bereme-li při výpočtu v úvahu jen malý počet členů těchto systémů. Názorně bylo vlastnosti systémů prvního a druhého typu vidět na příkladech uvedených v kap. 21 a 26. Tyto příklady jsme volili jednak ilustrativní (viz zejména první dva příklady v kap. 20), jednak zaměřené tak, aby obsáhly značný počet problémů, s nimiž se inženýr–teoretik, resp. přírodovědec setká. Podrobně se otázkami účelné volby báze zabývají např. knihy [29] a [4].

O speciální volbě báze v tzv. metodě konečných prvků pojednáme v kap. 42.