33. Limita posloupnosti, nekonečné řady

Teoretická část

- Limita posloupnosti - definice, věty o limitách, konvergentní a divergentní posloupnosti
- Nekonečná řada – definice, součet nekonečné řady (limita posloupnosti částečných součtů, součet nekonečné konvergentní geometrické řády)

Praktická část

Základní poznatky:

1. Napište definici limity dané posloupnosti a dokažte tvrzení: $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{2}{n} = 0.$
2. Vypočítejte: a) $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{2n^2+3n}{n^3-2n}$ b) $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{\pi}{2^n}$

   [0; 0]
3. Rozhodněte, kdy je aritmetická posloupnost a_1 a d; divergentní.

   [$d \neq 0$]
4. Rozhodněte, kdy je geometrická posloupnost a_1 a q; konvergentní.

   [$|q| < 1$ nebo $q = 1$]

Typové příklady standardní náročnosti:

5. Vypočítejte: a) $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{(n+2)(n-3)}{(2n+1)^2}$ b) $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{2^{n+1}}{2^n+3}$ [1/4; 2]
6. Dané neryze periodické číslo převeďte na zlomek $a = 0{,}23\overline{48}$ $\left[\frac{31}{132}\right]$
7. Spirála se skládá z půlkružnic. Poloměr každé následující je roven *2/3* poloměru půlkružnice předcházející. Určete délku spirály, je-li poloměr první půlkružnice *r*. $[3\pi r]$
8. Řešte v $\mathbb{R}$: $1-\frac{2}{x}+\frac{4}{x^2}-\frac{8}{x^3}+\ldots=\frac{6}{x+5}$ $[K = \{-3; 4\}]$
9. Rozhodněte o konvergenci řady a vypočítejte $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+1)}$

   [řada není geometrická, součet je 1]
10. Prověřte konvergenci dané řady a určete její součet.

    $$\sqrt{3}-\sqrt{2}+\frac{2\sqrt{3}}{3}-\frac{2\sqrt{2}}{3}+\ldots$$

    $[3(\sqrt{3}-\sqrt{2})]$
11. Vypočítejte pro $x \in \mathbb{R}$: $\sum_{n=1}^{\infty} -(-2)^{-n+1}x^n = \frac{4}{3}x$ $[K = \{0\}]$

Rozšiřující cvičení:

12. Vypočtěte:

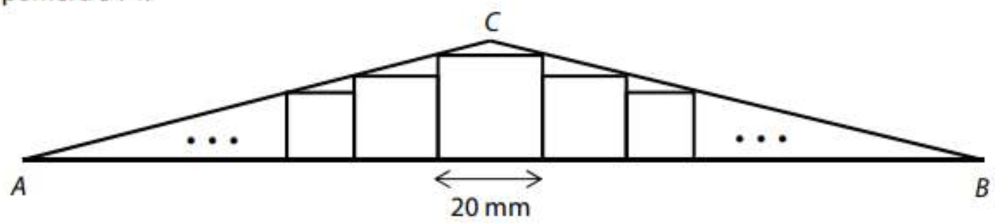
a) $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{3^n.\left(n-0{,}4^n\right)^3}{n.\left(3^n.n^2-2n\right)} =$ $[1]$

b) $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{n.\left(1-2^{-n}\right)}{(3n-2).\left(2+3^{-n}\right)} =$ $\left[\dfrac{1}{6}\right]$

13. Státní maturita 2017 - Matematika+

Do rovnoramenného trojúhelníku ABC je vepsáno nekonečně mnoho čtverců. Jedna strana každého čtverce leží na základně AB trojúhelníku. Čtverce se vzájemně dotýkají.

Největší čtverec s délkou strany 20 mm je umístěn tak, že osa trojúhelníku je současně osou čtverce. Každé dva sousední čtverce mají jeden společný vrchol a délky jejich stran jsou v poměru 5 : 4.



(CZVV)

max. 3 body

11 Vypočtěte v mm² obsah trojúhelníku *ABC*.

[S = 2025 mm^2]

14. Státní maturita 2016 - Matematika+

Jsou dány dvě nekonečné řady:

$a + a^2 + a^3 + a^4 + \cdots + a^n + \cdots$

$b - b^2 + b^3 - b^4 + \cdots + (-1)^{n+1}b^n + \cdots$

Uvažujme takové dvojice hodnot $a \in \left(0; \frac{1}{3}\right)$ a $b \in (0; 1)$, pro něž mají obě řady **stejný součet** s.

(CZVV)

max. 4 body

12

12.1 **Vypočtěte b, jestliže je $a = \frac{1}{6}$.**

12.2 **Vyjádřete b v závislosti na a.**

12.3 **Vypočtěte součet s, jestliže je $b = 2a$.**

Řešení:

12.1	$b = \frac{1}{4}$	+ postup řešení
12.2	$b = \frac{a}{1-2a}$	+ postup řešení
12.3	$s = \frac{1}{3}$	+ postup řešení