35. Derivace funkce a její užití

Teoretická část

- Definice derivace a její geometrický význam
- Derivace elementárních funkcí, pravidla pro derivování (+; - ; *; :; složené funkce; implicitní funkce)
- Rovnice tečny a normály pomocí derivací
- Průběh funkce - postup + umět vysvětlit pojmy: lokální extrém (maximum, minimum), inflexní bod, f. konvexní a konkávní, asymptota bez/se směrnicí,

Praktická část

Základní poznatky:

1. Určete derivace funkce (Realisticky.cz – 10.2.7):

   a) $\left(\dfrac{3}{3x-1}\right)'$ b) $\left[\cos(3x+\pi)\right]'$ c) $\left[\dfrac{1}{\left(x^2+2x-3\right)^6}\right]'$ d) $\left(\sqrt[3]{x^2+\cos x}\right)'$

   $\left[-\dfrac{9}{(3x-1)^2}\ ;\ -\sin(3x+\pi)\cdot 3\ ;\ -\dfrac{12(x+1)}{\left(x^2+2x-3\right)^7}\ ;\ \dfrac{1}{3}\dfrac{2x-\sin x}{\sqrt[3]{\left(x^2+\cos x\right)^2}}\right]$

2. Určete rovnici tečny a normály grafu funkce $y=\frac{1}{x}$ v bodě [-1, -1].

   [Realisticky.cz – 10.2.14, y = -x-2, y = x]

Typové příklady standardní náročnosti

3. Vypočítejte derivace funkcí:

   a. $y=\sqrt[3]{x}\cdot(2x^2+1)$ $\left[\dfrac{(14\cdot x^2+1)\cdot\sqrt[3]{x}}{3x}\right]$

   b. $y=\cos^2(\frac{x}{2})+\sqrt{1+x^2}$ $\left[\dfrac{-\sin(x)}{2}+\dfrac{x}{\sqrt{1+x^2}}\right]$

   c. $y=\ln\sqrt{\dfrac{1-\sin(x)}{1+\sin(x)}}$ $\left[\dfrac{-1}{\cos(x)}\right]$

   d. $y=\sqrt{x\cdot\sqrt{x\cdot\sqrt{x}}}$ $\left[\dfrac{7\cdot\sqrt[8]{x^7}}{8\cdot x}\right]$

4. Vypočítejte (Realisticky.cz – 10.2.8):

   a) $\left[\sin\left(e^{5x}\right)\right]'$ b) $\left[2^{\cos\left(x^2+2x\right)}\right]'$ c) $\left[e^{\sin^2 x}\right]'$

   $\left[\cos\left(e^{5x}\right)e^{5x}\cdot 5\ ;\ -2^{\cos\left(x^2+2x\right)}\cdot\ln 2\cdot\sin\left(x^2+2x\right)\cdot(2x+2)\ ;\ e^{\sin^2 x}\cdot 2\sin x\cdot\cos x\right]$

5. Určete rovnici tečny grafu funkce $f: y=x^2-2x+3$, která je rovnoběžná s přímkou $p: 3x-y+5=0$.

   $\left[T\left[\frac{5}{2},\frac{17}{4}\right], t: 12x-4y-13=0\right]$

6. Určete rovnici tečny ke křivce $y^2+3x+4y-7=0$, v bodě T[-8, 4].

   $[\ t: x+4y-8=0]$

7. Do koule o poloměru r vepište kužel maximálního objemu. Jakou bude mít kužel výšku?

   $\left[v=\frac{4}{3}r\right]$

8. Ze čtvrtky formátu A4 (210 x 297 mm) vystřihněte v rozích čtyři stejné čtverečky tak, aby složením vzniklého obrazce vznikla krabička maximálního objemu.

   [Realisticky.cz – 10.2.15, Je nutné vystřihnout čtverce o straně 40,4 mm.]

9. Určete ideální rozměry plechovky na pivo = válcové nádoby, která při objemu 0,5 l bude mít minimální povrch (minimální spotřeba plechu).

   [Realisticky.cz – 10.2.15, $r = \sqrt[3]{\frac{V}{\pi}}, r = v$]

10. Vyšetřete průběh fce:

    a) $f: y = x^4 - 2x^2$ b) $f: y = \frac{x-1}{(x-2)^2}$

Rozšiřující cvičení

11. Určete rovnice tečen křivky $x^3 \cdot y + x^2 \cdot y^2 = 1 + x$ v jejích průsečících s přímkou $x = -1$ [t_1: $x + y + 1 = 0$; t_2: $y - 1 = 0$]

12. Určete rovnice tečny křivky $x \cdot \sin(y) - \cos(y) + \cos(2 \cdot y) = 0$ v jejím bodě $T[1; \frac{\pi}{4}]$ [t: $2 \cdot (\sqrt{2}+1) \cdot x - 4y + \pi - 2 \cdot (\sqrt{2}+1) = 0$]

13. Trosečníka na voru unáší mořský proud rychlostí 7 km/h. Kolmo na směr proudu pluje obchodní loď rychlostí 30 km/h (vzhledem k povrchu Země). V jeden okamžik je námořní loď vzdálena od místa, kde se protínají jejich trajektorie 100 km a trosečník 10 km. V jaké nejmenší vzdálenosti se minou? Zachrání loď trosečníka, když předměty jeho velikosti vidí na vzdálenost 20 km?

    [Realisticky.cz – 10.2.15, Minou se v minimální vzdálenosti 13 km, nejspíše ho loď zachrání.]