Lineární algebra

Řešení cvičení

Petr Liška

Masarykova univerzita

6.5.–7.5.2020

7.1.B2 b)

Rozhodněte, zda $\varphi\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$, kde

$$\varphi((x_1, x_2)) = (2x_1 + x_2, x_2, x_2 - x_1)$$

je lineární zobrazení, resp. injektivní LZ, resp. surjektivní LZ.

7.1.B2 b)

Rozhodněte, zda $\varphi\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$, kde

$$\varphi((x_1, x_2)) = (2x_1 + x_2, x_2, x_2 - x_1)$$

je lineární zobrazení, resp. injektivní LZ, resp. surjektivní LZ.

Řešení: Pro každé $\vec{u} = (x_1, x_2)$, $\vec{v} = (y_1, y_2) \in \mathbb{R}^2$ platí

$$\varphi(\vec{u} + \vec{v}) =$$

7.1.B2 b)

Rozhodněte, zda $\varphi\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$, kde

$$\varphi((x_1, x_2)) = (2x_1 + x_2, x_2, x_2 - x_1)$$

je lineární zobrazení, resp. injektivní LZ, resp. surjektivní LZ.

Řešení: Pro každé $\vec{u} = (x_1, x_2)$, $\vec{v} = (y_1, y_2) \in \mathbb{R}^2$ platí

$$\varphi(\vec{u} + \vec{v}) = (2x_1 + 2y_1 + x_2 + y_2, x_2 + y_2, x_2 + y_2 - x_1 - y_1)$$

7.1.B2 b)

Rozhodněte, zda $\varphi\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$, kde

$$\varphi((x_1, x_2)) = (2x_1 + x_2, x_2, x_2 - x_1)$$

je lineární zobrazení, resp. injektivní LZ, resp. surjektivní LZ.

Řešení: Pro každé $\vec{u} = (x_1, x_2)$, $\vec{v} = (y_1, y_2) \in \mathbb{R}^2$ platí

$$\varphi(\vec{u} + \vec{v}) = (2x_1 + 2y_1 + x_2 + y_2, x_2 + y_2, x_2 + y_2 - x_1 - y_1)$$

$$\begin{aligned}\varphi(\vec{u}) + \varphi(\vec{v}) &= (2x_1 + x_2, x_2, x_2 - x_1) + (2y_1 + y_2, y_2, y_2 - y_1) = \\ &= (2x_1 + 2y_1 + x_2 + y_2, x_2 + y_2, x_2 + y_2 - x_1 - y_1)\end{aligned}$$

7.1.B2 b)

Rozhodněte, zda $\varphi\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$, kde

$$\varphi((x_1, x_2)) = (2x_1 + x_2, x_2, x_2 - x_1)$$

je lineární zobrazení, resp. injektivní LZ, resp. surjektivní LZ.

Řešení: Pro každé $\vec{u} = (x_1, x_2)$, $\vec{v} = (y_1, y_2) \in \mathbb{R}^2$ platí

$$\varphi(\vec{u} + \vec{v}) = (2x_1 + 2y_1 + x_2 + y_2, x_2 + y_2, x_2 + y_2 - x_1 - y_1)$$

$$\begin{aligned}\varphi(\vec{u}) + \varphi(\vec{v}) &= (2x_1 + x_2, x_2, x_2 - x_1) + (2y_1 + y_2, y_2, y_2 - y_1) = \\ &= (2x_1 + 2y_1 + x_2 + y_2, x_2 + y_2, x_2 + y_2 - x_1 - y_1)\end{aligned}$$

$$\varphi(t \cdot \vec{u}) = \varphi(tx_1, tx_2) = (2tx_1 + tx_2, tx_2, tx_2 - tx_1)$$

7.1.B2 b)

Rozhodněte, zda $\varphi\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$, kde

$$\varphi((x_1, x_2)) = (2x_1 + x_2, x_2, x_2 - x_1)$$

je lineární zobrazení, resp. injektivní LZ, resp. surjektivní LZ.

Řešení: Pro každé $\vec{u} = (x_1, x_2)$, $\vec{v} = (y_1, y_2) \in \mathbb{R}^2$ platí

$$\varphi(\vec{u} + \vec{v}) = (2x_1 + 2y_1 + x_2 + y_2, x_2 + y_2, x_2 + y_2 - x_1 - y_1)$$

$$\begin{aligned}\varphi(\vec{u}) + \varphi(\vec{v}) &= (2x_1 + x_2, x_2, x_2 - x_1) + (2y_1 + y_2, y_2, y_2 - y_1) = \\ &= (2x_1 + 2y_1 + x_2 + y_2, x_2 + y_2, x_2 + y_2 - x_1 - y_1)\end{aligned}$$

$$\varphi(t \cdot \vec{u}) = \varphi(tx_1, tx_2) = (2tx_1 + tx_2, tx_2, tx_2 - tx_1)$$

$$t \cdot \varphi(x_1, x_2) = (2tx_1 + tx_2, tx_2, tx_2 - tx_1)$$

Jelikož $\varphi(\vec{u} + \vec{v}) = \varphi(\vec{u}) + \varphi(\vec{v})$ a $\varphi(t \cdot \vec{u}) = t \cdot \varphi(\vec{u})$, je φ lineární zobrazení.

$$\varphi((x_1, x_2)) = (2x_1 + x_2, x_2, x_2 - x_1) = (0, 0, 0)$$

$$\varphi((x_1, x_2)) = (2x_1 + x_2, x_2, x_2 - x_1) = (0, 0, 0)$$

$$\begin{aligned} 2x_1 + x_2 &= 0 \\ x_2 &= 0 \\ x_2 - x_1 &= 0 \end{aligned}$$

$$\varphi((x_1, x_2)) = (2x_1 + x_2, x_2, x_2 - x_1) = (0, 0, 0)$$

$$\left.\begin{aligned} 2x_1 + x_2 &= 0 \\ x_2 &= 0 \\ x_2 - x_1 &= 0 \end{aligned}\right. \implies x_1 = x_2 = 0$$

$$\varphi((x_1, x_2)) = (2x_1 + x_2, x_2, x_2 - x_1) = (0, 0, 0)$$

$$\begin{aligned} 2x_1 + x_2 &= 0 \\ x_2 &= 0 \quad \Longrightarrow x_1 = x_2 = 0 \\ x_2 - x_1 &= 0 \end{aligned}$$

$\operatorname{Ker} \varphi = \{(0, 0)\} \quad \Longrightarrow \quad \varphi$ je injektivní

$$\varphi((x_1, x_2)) = (2x_1 + x_2, x_2, x_2 - x_1) = (0, 0, 0)$$

$$\begin{aligned} 2x_1 + x_2 &= 0 \\ x_2 &= 0 \quad \Longrightarrow x_1 = x_2 = 0 \\ x_2 - x_1 &= 0 \end{aligned}$$

$\operatorname{Ker} \varphi = \{(0, 0)\} \quad \Longrightarrow \quad \varphi$ je injektivní

Použijeme větu o dimenzi jádra a obrazu lineárního zobrazení, tj.

$$\dim \operatorname{Ker} \varphi + \dim \operatorname{Im} \varphi = \dim V$$

$$\varphi((x_1, x_2)) = (2x_1 + x_2, x_2, x_2 - x_1) = (0, 0, 0)$$

$$\left.\begin{aligned} 2x_1 + x_2 &= 0 \\ x_2 &= 0 \\ x_2 - x_1 &= 0 \end{aligned}\right. \implies x_1 = x_2 = 0$$

$\operatorname{Ker}\varphi = \{(0,0)\} \quad \implies \quad \varphi$ je injektivní

Použijeme větu o dimenzi jádra a obrazu lineárního zobrazení, tj.

$$\dim \operatorname{Ker}\varphi + \dim \operatorname{Im}\varphi = \dim V$$

pak $\dim \operatorname{Ker}\varphi = 0$, $\dim \mathbb{R}^2 = 2$, $\dim \operatorname{Im}\varphi = 2$ a zobrazení nemůže být surjektivní.

7.1.B4 d)

Nalezněte jádro a obraz zobrazení $\varphi\colon \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^3$, kde

$$\varphi((x_1, x_2, x_3, x_4)) = (3x_1 - x_2 + 2x_3 - x_4, 5x_1 + 2x_2 + 3x_3, 2x_1 + 3x_2 + x_3 + x_4)$$

7.1.B4 d)

Nalezněte jádro a obraz zobrazení $\varphi\colon \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^3$, kde

$$\varphi((x_1,x_2,x_3,x_4)) = (3x_1-x_2+2x_3-x_4, 5x_1+2x_2+3x_3, 2x_1+3x_2+x_3+x_4)$$

Řešení:

$$\begin{aligned} 3x_1 - x_2 + 2x_3 - x_4 &= 0 \\ 5x_1 + 2x_2 + 3x_3 &= 0 \\ 2x_1 + 3x_2 + x_3 + x_4 &= 0 \end{aligned}$$

7.1.B4 d)

Nalezněte jádro a obraz zobrazení $\varphi\colon \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^3$, kde

$$\varphi((x_1,x_2,x_3,x_4)) = (3x_1-x_2+2x_3-x_4, 5x_1+2x_2+3x_3, 2x_1+3x_2+x_3+x_4)$$

Řešení:

$$\begin{aligned} 3x_1 - x_2 + 2x_3 - x_4 &= 0 \\ 5x_1 + 2x_2 + 3x_3 \phantom{{}-x_4} &= 0 \\ 2x_1 + 3x_2 + x_3 + x_4 &= 0 \end{aligned}$$

$$\left(\begin{array}{rrrr|r} 1 & -4 & 1 & -2 & 0 \\ 3 & -1 & 2 & -1 & 0 \\ 5 & 2 & 3 & 0 & 0 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{rrrr|r} 1 & -4 & 1 & -2 & 0 \\ 0 & 11 & -1 & 5 & 0 \\ 0 & 22 & -2 & 10 & 0 \end{array}\right)$$

7.1.B4 d)

Nalezněte jádro a obraz zobrazení $\varphi\colon \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^3$, kde

$$\varphi((x_1,x_2,x_3,x_4)) = (3x_1-x_2+2x_3-x_4, 5x_1+2x_2+3x_3, 2x_1+3x_2+x_3+x_4)$$

Řešení:

$$\begin{aligned} 3x_1 - x_2 + 2x_3 - x_4 &= 0 \\ 5x_1 + 2x_2 + 3x_3 \phantom{{}-x_4} &= 0 \\ 2x_1 + 3x_2 + x_3 + x_4 &= 0 \end{aligned}$$

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & -4 & 1 & -2 & 0 \\ 3 & -1 & 2 & -1 & 0 \\ 5 & 2 & 3 & 0 & 0 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & -4 & 1 & -2 & 0 \\ 0 & 11 & -1 & 5 & 0 \\ 0 & 22 & -2 & 10 & 0 \end{array}\right)$$

$$x_4 = t, \quad x_2 = s, \quad x_3 = 11s + 5t, \quad x_1 = -3t - 7s$$

7.1.B4 d)

Nalezněte jádro a obraz zobrazení $\varphi\colon \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^3$, kde

$$\varphi((x_1,x_2,x_3,x_4)) = (3x_1-x_2+2x_3-x_4, 5x_1+2x_2+3x_3, 2x_1+3x_2+x_3+x_4)$$

Řešení:

$$\begin{aligned} 3x_1 - x_2 + 2x_3 - x_4 &= 0 \\ 5x_1 + 2x_2 + 3x_3 \phantom{{}-x_4} &= 0 \\ 2x_1 + 3x_2 + x_3 + x_4 &= 0 \end{aligned}$$

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & -4 & 1 & -2 & 0 \\ 3 & -1 & 2 & -1 & 0 \\ 5 & 2 & 3 & 0 & 0 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & -4 & 1 & -2 & 0 \\ 0 & 11 & -1 & 5 & 0 \\ 0 & 22 & -2 & 10 & 0 \end{array}\right)$$

$$x_4 = t, \quad x_2 = s, \quad x_3 = 11s + 5t, \quad x_1 = -3t - 7s$$

$$\operatorname{Ker}\varphi = [(-7,1,11,0),(-3,0,5,1)]$$

7.1.B4 d)

Nalezněte jádro a obraz zobrazení $\varphi\colon \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^3$, kde

$\varphi((x_1,x_2,x_3,x_4)) = (3x_1-x_2+2x_3-x_4, 5x_1+2x_2+3x_3, 2x_1+3x_2+x_3+x_4)$

Řešení:

$$\begin{aligned} 3x_1 - x_2 + 2x_3 - x_4 &= 0\\ 5x_1 + 2x_2 + 3x_3 \phantom{{}-x_4} &= 0\\ 2x_1 + 3x_2 + x_3 + x_4 &= 0 \end{aligned}$$

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & -4 & 1 & -2 & 0\\ 3 & -1 & 2 & -1 & 0\\ 5 & 2 & 3 & 0 & 0 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & -4 & 1 & -2 & 0\\ 0 & 11 & -1 & 5 & 0\\ 0 & 22 & -2 & 10 & 0 \end{array}\right)$$

$$x_4 = t, \quad x_2 = s, \quad x_3 = 11s + 5t, \quad x_1 = -3t - 7s$$

$$\operatorname{Ker}\varphi = [(-7,1,11,0),(-3,0,5,1)]$$

$$\dim \mathbb{R}^4 = \dim\operatorname{Ker}\varphi + \dim\operatorname{Im}\varphi \quad\Longrightarrow\quad \dim\operatorname{Im}\varphi = 2,$$

7.1.B4 d)

Nalezněte jádro a obraz zobrazení $\varphi\colon \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^3$, kde

$$\varphi((x_1, x_2, x_3, x_4)) = (3x_1 - x_2 + 2x_3 - x_4, 5x_1 + 2x_2 + 3x_3, 2x_1 + 3x_2 + x_3 + x_4)$$

Řešení:

$$\begin{aligned} 3x_1 - x_2 + 2x_3 - x_4 &= 0 \\ 5x_1 + 2x_2 + 3x_3 \phantom{{}- x_4} &= 0 \\ 2x_1 + 3x_2 + x_3 + x_4 &= 0 \end{aligned}$$

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & -4 & 1 & -2 & 0 \\ 3 & -1 & 2 & -1 & 0 \\ 5 & 2 & 3 & 0 & 0 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & -4 & 1 & -2 & 0 \\ 0 & 11 & -1 & 5 & 0 \\ 0 & 22 & -2 & 10 & 0 \end{array}\right)$$

$$x_4 = t, \quad x_2 = s, \quad x_3 = 11s + 5t, \quad x_1 = -3t - 7s$$

$$\operatorname{Ker} \varphi = [(-7, 1, 11, 0), (-3, 0, 5, 1)]$$

$$\dim \mathbb{R}^4 = \dim \operatorname{Ker} \varphi + \dim \operatorname{Im} \varphi \quad \Longrightarrow \quad \dim \operatorname{Im} \varphi = 2,$$

$$\varphi(1, 0, 0, 0) = (3, 5, 2), \varphi(0, 0, 0, 1) = (-1, 0, 1)$$

7.1.B4 e)

Nalezněte jádro a obraz zobrazení $\varphi\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^4$, kde $\varphi((1,2,1)) = (-1,1,1,1)$, $\varphi((0,1,2)) = (1,0,0,1)$, $\varphi((1,0,-1)) = (0,1,1,2)$.

7.1.B4 e)

Nalezněte jádro a obraz zobrazení $\varphi\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^4$, kde $\varphi((1,2,1)) = (-1,1,1,1)$, $\varphi((0,1,2)) = (1,0,0,1)$, $\varphi((1,0,-1)) = (0,1,1,2)$.

Řešení:

$$\vec{o} = \varphi(x) = \varphi(t_1 \cdot (1,2,1) + t_2 \cdot (0,1,2) + t_3 \cdot (1,0,-1)) = \\ = t_1 \cdot (-1,1,1,1) + t_2 \cdot (1,0,0,1) + t_3 \cdot (0,1,1,2)$$

7.1.B4 e)

Nalezněte jádro a obraz zobrazení $\varphi \colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^4$, kde $\varphi((1,2,1)) = (-1,1,1,1)$, $\varphi((0,1,2)) = (1,0,0,1)$, $\varphi((1,0,-1)) = (0,1,1,2)$.

Řešení:

$$\begin{aligned}\vec{o} = \varphi(x) = \varphi(t_1 \cdot (1,2,1) + t_2 \cdot (0,1,2) + t_3 \cdot (1,0,-1)) = \\ = t_1 \cdot (-1,1,1,1) + t_2 \cdot (1,0,0,1) + t_3 \cdot (0,1,1,2)\end{aligned}$$

$$\left(\begin{array}{rrr|r} -1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 2 & 0 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{rrr|r} -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 2 & 0 \end{array}\right) \Longrightarrow (-s, -s, s)$$

7.1.B4 e)

Nalezněte jádro a obraz zobrazení $\varphi\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^4$, kde $\varphi((1,2,1)) = (-1,1,1,1)$, $\varphi((0,1,2)) = (1,0,0,1)$, $\varphi((1,0,-1)) = (0,1,1,2)$.

Řešení:

$$\vec{o} = \varphi(x) = \varphi(t_1 \cdot (1,2,1) + t_2 \cdot (0,1,2) + t_3 \cdot (1,0,-1)) = \\ = t_1 \cdot (-1,1,1,1) + t_2 \cdot (1,0,0,1) + t_3 \cdot (0,1,1,2)$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} -1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 2 & 0 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 2 & 0 \end{array}\right) \Longrightarrow (-s,-s,s)$$

$$-(1,2,1) - (0,1,2) + (1,0-1) = (0,-3,-4)$$

7.1.B4 e)

Nalezněte jádro a obraz zobrazení $\varphi\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^4$, kde $\varphi((1,2,1)) = (-1,1,1,1)$, $\varphi((0,1,2)) = (1,0,0,1)$, $\varphi((1,0,-1)) = (0,1,1,2)$.

Řešení:

$$\vec{o} = \varphi(x) = \varphi(t_1 \cdot (1,2,1) + t_2 \cdot (0,1,2) + t_3 \cdot (1,0,-1)) = \\ = t_1 \cdot (-1,1,1,1) + t_2 \cdot (1,0,0,1) + t_3 \cdot (0,1,1,2)$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} -1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 2 & 0 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 2 & 0 \end{array}\right) \Longrightarrow (-s,-s,s)$$

$$-(1,2,1) - (0,1,2) + (1,0-1) = (0,-3,-4)$$

$$\dim \operatorname{Im} \varphi = 2 \Longrightarrow \operatorname{Im} \varphi = [(1,0,0,1),(0,1,1,2)]$$

7.1.B11

Nechť $\varphi\colon V \to V'$ je lineární zobrazení a nechť $\vec{u}_1, \dots, \vec{u}_n$ je báze prostoru V. Dokažte, že platí

$$\varphi \text{ je injektivní} \iff \varphi(\vec{u}_1), \dots, \varphi(\vec{u}_n) \text{ jsou lineárně nezávislé.}$$

7.1.B11

Nechť $\varphi\colon V \to V'$ je lineární zobrazení a nechť $\vec{u}_1, \dots, \vec{u}_n$ je báze prostoru V. Dokažte, že platí

$$\varphi \text{ je injektivní} \iff \varphi(\vec{u}_1), \dots, \varphi(\vec{u}_n) \text{ jsou lineárně nezávislé.}$$

Řešení: „$\Longrightarrow$“ Sporem.

7.1.B11

Nechť $\varphi\colon V \to V'$ je lineární zobrazení a nechť $\vec{u}_1, \dots, \vec{u}_n$ je báze prostoru V. Dokažte, že platí

$$\varphi \text{ je injektivní} \iff \varphi(\vec{u}_1), \dots, \varphi(\vec{u}_n) \text{ jsou lineárně nezávislé.}$$

Řešení: „$\Longrightarrow$“ Sporem.

$$\exists t_i \neq 0 : t_1\varphi(\vec{u}_1) + \cdots + t_n\varphi(\vec{u}_n) = \vec{o}$$

$$\overset{\varphi\,\mathrm{LZ}}{\Longrightarrow} \quad \varphi(t_1\vec{u}_1 + \cdots + t_n\vec{u}_n) = \vec{o}$$

$$\overset{\varphi\,\mathrm{inj.}}{\Longrightarrow} \quad t_1\vec{u}_1 + \cdots + t_n\vec{u}_n = \vec{o} \quad \Longrightarrow \quad \text{Spor.}$$

7.1.B11

Nechť $\varphi \colon V \to V'$ je lineární zobrazení a nechť $\vec{u}_1, \dots, \vec{u}_n$ je báze prostoru V. Dokažte, že platí

$$\varphi \text{ je injektivní} \iff \varphi(\vec{u}_1), \dots, \varphi(\vec{u}_n) \text{ jsou lineárně nezávislé.}$$

Řešení: „$\Longrightarrow$“ Sporem.

$$\exists t_i \neq 0 : t_1\varphi(\vec{u}_1) + \dots + t_n\varphi(\vec{u}_n) = \vec{o}$$
$$\overset{\varphi\,\text{LZ}}{\Longrightarrow} \quad \varphi(t_1\vec{u}_1 + \dots + t_n\vec{u}_n) = \vec{o}$$
$$\overset{\varphi\,\text{inj.}}{\Longrightarrow} \quad t_1\vec{u}_1 + \dots + t_n\vec{u}_n = \vec{o} \quad \Longrightarrow \quad \text{Spor.}$$

„$\Longleftarrow$“ Díky tomu, že $\vec{u}_1, \dots, \vec{u}_n$ je báze máme

$$\varphi(t_1\vec{u}_1 + \dots + t_n\vec{u}_n) = \vec{o}$$
$$\overset{\varphi\,\text{LZ+LN}}{\Longrightarrow} \quad t_1\varphi(\vec{u}_1) + \dots + t_n\varphi(\vec{u}_n) = \vec{o} \wedge t_1 = \dots = t_n = 0$$
$$\Longrightarrow \quad \operatorname{Ker}\varphi = \{\vec{o}\} \quad \Longrightarrow \quad \varphi \text{ je injektivní}$$

7.1.A1

U.p. injektivního lineárního zobrazení $\varphi\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$, resp. $\varphi\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$.

7.1.A1

U.p. injektivního lineárního zobrazení $\varphi\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$, resp. $\varphi\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$.

Řešení: a) $\varphi((x_1, x_2)) = (x_1, x_2, 0)$,

7.1.A1

U.p. injektivního lineárního zobrazení $\varphi\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$, resp. $\varphi\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$.

Řešení: a) $\varphi((x_1, x_2)) = (x_1, x_2, 0)$,
b) neexistuje.

7.1.A1

U.p. injektivního lineárního zobrazení $\varphi\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$, resp. $\varphi\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$.

Řešení: a) $\varphi((x_1, x_2)) = (x_1, x_2, 0)$,
b) neexistuje.

7.1.A2

U.p. surjektivního lineárního zobrazení $\varphi\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$, resp. $\varphi\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$.

7.1.A1

U.p. injektivního lineárního zobrazení $\varphi\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$, resp. $\varphi\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$.

Řešení: a) $\varphi((x_1, x_2)) = (x_1, x_2, 0)$,
b) neexistuje.

7.1.A2

U.p. surjektivního lineárního zobrazení $\varphi\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$, resp. $\varphi\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$.

Řešení: a) neexistuje,

7.1.A1

U.p. injektivního lineárního zobrazení $\varphi\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$, resp. $\varphi\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$.

Řešení: a) $\varphi((x_1, x_2)) = (x_1, x_2, 0)$,
b) neexistuje.

7.1.A2

U.p. surjektivního lineárního zobrazení $\varphi\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$, resp. $\varphi\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$.

Řešení: a) neexistuje,
b) $\varphi((x_1, x_2, x_3)) = (x_1, x_2)$

7.1.A1

U.p. injektivního lineárního zobrazení $\varphi\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$, resp. $\varphi\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$.

Řešení: a) $\varphi((x_1, x_2)) = (x_1, x_2, 0)$,
b) neexistuje.

7.1.A2

U.p. surjektivního lineárního zobrazení $\varphi\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$, resp. $\varphi\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$.

Řešení: a) neexistuje,
b) $\varphi((x_1, x_2, x_3)) = (x_1, x_2)$

7.1.A3

U.p. bijektivního zobrazení $\varphi\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$, které není lineárním zobrazením.

7.1.A1

U.p. injektivního lineárního zobrazení $\varphi\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$, resp. $\varphi\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$.

Řešení: a) $\varphi((x_1, x_2)) = (x_1, x_2, 0)$,
b) neexistuje.

7.1.A2

U.p. surjektivního lineárního zobrazení $\varphi\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$, resp. $\varphi\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$.

Řešení: a) neexistuje,
b) $\varphi((x_1, x_2, x_3)) = (x_1, x_2)$

7.1.A3

U.p. bijektivního zobrazení $\varphi\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$, které není lineárním zobrazením.

Řešení: $\varphi((x_1, x_2, x_3)) = (x_1 + 1, x_2 + 1, x_3 + 1)$

7.1.A5

U.p. lineárního zobrazení $\varphi\colon \mathbb{R}^5 \to \mathbb{R}^4$ takového, že $\dim \operatorname{Ker} \varphi = 2$.

7.1.A5

U.p. lineárního zobrazení $\varphi\colon \mathbb{R}^5 \to \mathbb{R}^4$ takového, že $\dim \operatorname{Ker} \varphi = 2$.

Řešení: $\varphi(1,0,0,0,0) = \vec{o}$, $\varphi(0,1,0,0,0) = \vec{o}$, $\varphi(0,0,1,0,0) = (1,0,0,0)$, $\varphi(0,0,0,1,0) = (0,1,0,0)$, $\varphi(0,0,0,0,1) = (0,0,1,0)$

7.1.A5

U.p. lineárního zobrazení $\varphi\colon \mathbb{R}^5 \to \mathbb{R}^4$ takového, že $\dim \operatorname{Ker} \varphi = 2$.

Řešení: $\varphi(1,0,0,0,0) = \vec{o}$, $\varphi(0,1,0,0,0) = \vec{o}$, $\varphi(0,0,1,0,0) = (1,0,0,0)$, $\varphi(0,0,0,1,0) = (0,1,0,0)$, $\varphi(0,0,0,0,1) = (0,0,1,0)$

7.1.A6

Uveďte příklad lineárního zobrazení $\varphi\colon \mathbb{R}^5 \to \mathbb{R}^4$ takového, že $\operatorname{Im} \varphi = [(1,2,3,4),(4,3,2,1)]$.

7.1.A5

U.p. lineárního zobrazení $\varphi\colon \mathbb{R}^5 \to \mathbb{R}^4$ takového, že $\dim \operatorname{Ker} \varphi = 2$.

Řešení: $\varphi(1,0,0,0,0) = \vec{o}$, $\varphi(0,1,0,0,0) = \vec{o}$, $\varphi(0,0,1,0,0) = (1,0,0,0)$, $\varphi(0,0,0,1,0) = (0,1,0,0)$, $\varphi(0,0,0,0,1) = (0,0,1,0)$

7.1.A6

Uveďte příklad lineárního zobrazení $\varphi\colon \mathbb{R}^5 \to \mathbb{R}^4$ takového, že $\operatorname{Im} \varphi = [(1,2,3,4),(4,3,2,1)]$.

Řešení: $\varphi(1,0,0,0,0) = (1,2,3,4)$, $\varphi(0,1,0,0,0) = (4,3,2,1)$, $\varphi(0,0,1,0,0) = \vec{o}$, $\varphi(0,0,0,1,0) = \vec{o}$, $\varphi(0,0,0,0,1) = \vec{o}$

7.1.A5

U.p. lineárního zobrazení $\varphi\colon \mathbb{R}^5 \to \mathbb{R}^4$ takového, že $\dim \operatorname{Ker} \varphi = 2$.

Řešení: $\varphi(1,0,0,0,0) = \vec{o}$, $\varphi(0,1,0,0,0) = \vec{o}$, $\varphi(0,0,1,0,0) = (1,0,0,0)$, $\varphi(0,0,0,1,0) = (0,1,0,0)$, $\varphi(0,0,0,0,1) = (0,0,1,0)$

7.1.A6

Uveďte příklad lineárního zobrazení $\varphi\colon \mathbb{R}^5 \to \mathbb{R}^4$ takového, že $\operatorname{Im} \varphi = [(1,2,3,4),(4,3,2,1)]$.

Řešení: $\varphi(1,0,0,0,0) = (1,2,3,4)$, $\varphi(0,1,0,0,0) = (4,3,2,1)$, $\varphi(0,0,1,0,0) = \vec{o}$, $\varphi(0,0,0,1,0) = \vec{o}$, $\varphi(0,0,0,0,1) = \vec{o}$

7.1.A7

Nechť $\varphi\colon \mathbb{R}^k \to \mathbb{R}^n$ je lineární zobrazení takové, že $\dim \operatorname{Ker} \varphi = 4$ a $\dim \operatorname{Im} \varphi = 5$. Uveďte, co všechno pak můžete říct o číslech k a n.

7.1.A5

U.p. lineárního zobrazení $\varphi\colon \mathbb{R}^5 \to \mathbb{R}^4$ takového, že $\dim \operatorname{Ker} \varphi = 2$.

Řešení: $\varphi(1,0,0,0,0) = \vec{o}$, $\varphi(0,1,0,0,0) = \vec{o}$, $\varphi(0,0,1,0,0) = (1,0,0,0)$, $\varphi(0,0,0,1,0) = (0,1,0,0)$, $\varphi(0,0,0,0,1) = (0,0,1,0)$

7.1.A6

Uveďte příklad lineárního zobrazení $\varphi\colon \mathbb{R}^5 \to \mathbb{R}^4$ takového, že $\operatorname{Im} \varphi = [(1,2,3,4),(4,3,2,1)]$.

Řešení: $\varphi(1,0,0,0,0) = (1,2,3,4)$, $\varphi(0,1,0,0,0) = (4,3,2,1)$, $\varphi(0,0,1,0,0) = \vec{o}$, $\varphi(0,0,0,1,0) = \vec{o}$, $\varphi(0,0,0,0,1) = \vec{o}$

7.1.A7

Nechť $\varphi\colon \mathbb{R}^k \to \mathbb{R}^n$ je lineární zobrazení takové, že $\dim \operatorname{Ker} \varphi = 4$ a $\dim \operatorname{Im} \varphi = 5$. Uveďte, co všechno pak můžete říct o číslech k a n.

Řešení: $k = 9$, $n \geq 5$

7.1.B9 d)

Rozhodněte, zda prostory $V = \mathbb{R}^n$ a $V' = \mathbb{R}_n[x]$ jsou izomorfní.

7.1.B9 d)

Rozhodněte, zda prostory $V = \mathbb{R}^n$ a $V' = \mathbb{R}_n[x]$ jsou izomorfní.

Řešení: Ne, jelikož

$$\dim \mathbb{R}^n = n \neq n + 1 = \dim \mathbb{R}_n[x]$$

7.1.B9 d)

Rozhodněte, zda prostory $V = \mathbb{R}^n$ a $V' = \mathbb{R}_n[x]$ jsou izomorfní.

Řešení: Ne, jelikož

$$\dim \mathbb{R}^n = n \neq n + 1 = \dim \mathbb{R}_n[x]$$

7.1.B9 f)

Rozhodněte, zda prostory $V = \mathrm{Mat}_{22}(\mathbb{R})$ a $V' = \{(x_1, x_2, x_3, x_4, x_5) \in \mathbb{R}^5 \mid x_1 + 2x_3 = x_4\}$ jsou izomorfní.

7.1.B9 d)

Rozhodněte, zda prostory $V = \mathbb{R}^n$ a $V' = \mathbb{R}_n[x]$ jsou izomorfní.

Řešení: Ne, jelikož

$$\dim \mathbb{R}^n = n \neq n + 1 = \dim \mathbb{R}_n[x]$$

7.1.B9 f)

Rozhodněte, zda prostory $V = \mathrm{Mat}_{22}(\mathbb{R})$ a $V' = \{(x_1, x_2, x_3, x_4, x_5) \in \mathbb{R}^5 \mid x_1 + 2x_3 = x_4\}$ jsou izomorfní.

Řešení: Ano, jelikož

$$\dim \mathrm{Mat}_{22}(\mathbb{R}) = 4 = \dim V'$$

Domácí úkol

První příklad

Rozhodněte, zda $\varphi\colon \mathbb{R}_2[x] \to \mathbb{R}_3[x]$, kde

$$\varphi(ax^2 + bx + c) = 3ax^3 + 2bx^2 + cx$$

je lineární zobrazení, resp. injektivní LZ, resp. surjektivní LZ.

Druhý příklad

Nalezněte jádro a obraz zobrazení $\varphi\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$, kde

$$\varphi((x_1, x_2, x_3)) = (x_1 + x_2, x_2 + x_3).$$

Třetí příklad

Rozhodněte, zda prostory $V = \mathbb{R}^3$ a $V' = \mathbb{Q}^3$ jsou izomorfní.