MUC31 Lineární algebra a geometrie
Ukázková písemka

První část

Příklad 1: U.p. dvou různých podprostorů W_1, W_2 ve vektorovém prostoru $\mathbb{R}^4$ tak, že $W_1 \cup W_2 = W_1 \dot{+} W_2$.

Příklad 2: U.p. dvou regulárních matic A, B, které jsou děliteli nuly v okruhu $\mathrm{Mat}_{33}(\mathbb{R}, +, \cdot)$

Příklad 3: U.p. homogenní soustavy lineárních rovnic nad $\mathbb{R}$ tak, aby bází jejího podprostoru řešení byly vektory $(1, 1, 0, 0, 0)$ a $(0, 0, 0, 0, 1)$.

Příklad 4: U.p. netriviálního podprostoru W euklidovského prostoru $\mathbb{R}^4$ (s obvyklým skalárním součinem) tak, aby platilo, že $\dim W^{\perp} < \dim W$.

Příklad 5: U.p. ortogonální transformace φ euklidovského prostoru $\mathbb{R}^4$ (s obvyklým skalárním součinem), která není surjektivním zobrazením.

Každý příklad je za jeden bod. V případě negativní odpovědi u příkladu „U.p.“ podejte zdůvodnění!

Druhá část

Příklad 1: Určete všechny hodnoty parametru a, pro které vektory (tzn. polynomy) $\mathbf{f}_1$, $\mathbf{f}_2$, $\mathbf{f}_3$ tvoří bázi vektorového prostoru $\mathbb{R}_2[x]$ je–li:

$$\mathbf{f}_1 = x^2 + x - a, \qquad \mathbf{f}_2 = 4x^2 - 6x - 3, \qquad \mathbf{f}_3 = ax^2 - 4x - 1.$$

Příklad 2: Nechť A_n značí matici řádu n (nad $\mathbb{R}$). Dokažte, že pro každé $n \in \mathbb{N}$ platí:

$$|\, A_n \,| = \frac{1}{3}\left(5^{n+1} - 2^{n+1}\right).$$

Přitom

$$A_n = \begin{pmatrix} 7 & 5 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 7 & 5 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 7 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ \vdots & & & & & & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 7 & 5 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 2 & 7 & 5 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 2 & 7 \end{pmatrix}.$$

Příklad 3: Řešte soustavu lineárních rovnic nad $\mathbb{R}$ v závislosti na parametru $a \in \mathbb{R}$ (tzn. zjistěte pro která a je soustava řešitelná, resp. neřešitelná a u řešitelné soustavy vždy vypište všechna řešení) :

$$\begin{aligned} ax_1 + x_2 + x_3 &= 1 \\ x_1 + ax_2 + x_3 &= a \\ x_1 + x_2 + ax_3 &= a^2 \end{aligned}$$

Příklad 4: V euklidovském prostoru $\mathbb{R}^4$ (s obvyklým skalárním součinem) nalezněte ortogonální projekci vektoru $\mathbf{w}$ do podprostoru $U = [\,\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \mathbf{u}_3\,]$. Přitom:

$$\mathbf{w} = (-2, 2, 2, 5), \qquad \mathbf{u}_1 = (1, 1, -1, 2), \qquad \mathbf{u}_2 = (3, 1, 0, 1), \qquad \mathbf{u}_3 = (2, 0, 1, -1).$$

Příklad 5: Je dáno lineární zobrazení $\varphi \colon \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^3$ takto:

$$\varphi((x_1, x_2, x_3, x_4)) \ = \ (3x_1 - x_2 + 2x_3 - x_4\,,\ \ 5x_1 + 2x_2 + 3x_3\,,\ \ 2x_1 + 3x_2 + x_3 + x_4\,)\,.$$

Nalezněte bázi jádra $\mathrm{Ker}\,\varphi$ a bázi obrazu $\mathrm{Im}\,\varphi$.

Každý příklad je za tři body.