Rovnice s neznámou pod odmocninou[1]

Důležitá upozornění.

- Umocnění rovnice (na druhou) je obecně důsledkovou úpravou.
- Při použití důsledkové úpravy je zkouška nutnou součástí řešení rovnice. Není „jen“ numerickou kontrolou, může při ní dojít k vyloučení těch „kandidátů na kořeny“, které kořeny nejsou.
- V případě, že umocňujeme rovnici, jejíž obě strany jsou nezáporné, je tato úprava dokonce ekvivalentní.
- Lze tedy postupovat cestou stanovení podmínek, za nichž jsou všechny výrazy vystupující v rovnici definované a ve všech místech umocnění rovnice nezáporné. Při tomto postupu pak již není nutné provádět zkoušku.
- Dle konkrétní úlohy doporučuji řešiteli volit cestu určení všech potřebných podmínek, nebo variantu provedení zkoušky podle toho, co je v daném případě jednodušší.

Řešené příklady. V $\mathbb{R}$ řešte následující rovnice:

1. Kdybychom řešení rovnice
$$\sqrt{x-4}=\sqrt{3-x}$$
začali stanovením podmínek, viděli bychom, že má současně platit $x \geq 4$ a $x \leq 3$, což není možné splnit. Proto tato rovnice nemá řešení.
Umocníme-li (jako důsledkovou úpravu) zadanou rovnici, dostaneme
$$x-4=3-x \quad \Leftrightarrow \quad x=\frac{7}{2}\,.$$
Při provádění zkoušky, která je při tomto postupu nezbytnou součástí řešení, vidíme, že levá strana rovnice pro hodnotu 7/2 není definována, takže $K=\emptyset$.

2. Při řešení některých rovnic je potřeba je umocňovat opakovaně. Rovnici
$$\sqrt{3x+1}-\sqrt{2-x}=1$$
je výhodné před umocněním přepsat do tvaru
$$\sqrt{3x+1}=\sqrt{2-x}+1\,.$$
Pak platí (užitím důsledkových úprav)
$$\sqrt{3x+1}=\sqrt{2-x}+1 \quad \Rightarrow \quad 3x+1=\left(\sqrt{2-x}+1\right)^2 \quad \Leftrightarrow \quad 3x+1=2-x+2\sqrt{2-x}+1 \quad \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow \quad 2x-1=\sqrt{2-x} \quad \Rightarrow \quad 4x^2-4x+1=2-x \quad \Leftrightarrow \quad 4x^2-3x-1=0 \quad \Leftrightarrow \quad (4x+1)\,(x-1)=0\,,$$
takže $x_1=-1/4$ a $x_2=1$. Všimněte si, že při umocňování rovnice je vždy třeba umocnit celou její levou i celou její pravou stranu! Dále pokračujeme zkouškou:
$$L\left(-\frac{1}{4}\right)=\sqrt{-\frac{3}{4}+1}-\sqrt{2+\frac{1}{4}}=\sqrt{\frac{1}{4}}-\sqrt{\frac{9}{4}}=\frac{1}{2}-\frac{3}{2}=-1\neq 1=P\left(-\frac{1}{4}\right)\,,$$
$$L\,(1)=\sqrt{3+1}-\sqrt{2-1}=\sqrt{4}-\sqrt{1}=2-1=1=P\,(1)\,,$$
tudíž $K=\{1\}$. Pokud bychom se chtěli povinnosti dělat zkoušku vyhnout, museli bychom stanovit podmínky, a to

[1] Případné náměty k tomuto textu prosím adresujte na e-mail akob@jaroska.cz. Děkuji Aleš Kobza (autor materiálu).

a) k tomu, aby byly výrazy s odmocninami definovány: $3x+1 \geq 0$ a $2-x \geq 0$ (odmocňované výrazy musí být nezáporné),

b) k tomu, aby první umocnění bylo ekvivalentní úpravou: $\sqrt{3x+1} \geq 0$ a $\sqrt{2-x}+1 \geq 0$ (tyto požadavky jsou již zřejmě splněny podmínkami v části a)),

c) k tomu, aby druhé umocnění bylo ekvivalentní úpravou: $2x-1 \geq 0$ a $\sqrt{2-x} \geq 0$ (nová je pouze podmínka první).

Rozřešením uvedených podmínek dostaneme souhrnnou podmínku $x \in \langle 1/2; 2\rangle$, kterou x_1 nesplňuje, zatímco x_2 jí vyhovuje.

3. Také rovnici

$$\sqrt{x+25}-4=\frac{\sqrt{x^2+25x+4}}{\sqrt{x+25}+4}$$

je před umocněním upravit do - pro tento účel - vhodnějšího tvaru vynásobením rovnice jmenovatelem její pravé strany. Potom

$$\left(\sqrt{x+25}-4\right)\left(\sqrt{x+25}+4\right)=\sqrt{x^2+25x+4} \quad \Rightarrow \quad (x+25-16)^2=x^2+25x+4 \quad \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \quad x^2+18x+81=x^2+25x+4 \quad \Leftrightarrow \quad 77=7x \quad \Leftrightarrow \quad x=11\,.$$

Například provedením zkoušky zjišťujeme, že

$$L\,(11)=\sqrt{11+25}-4=\sqrt{36}-4=2 \quad \text{a} \quad P\,(11)=\frac{\sqrt{11^2+25\cdot 11+4}}{\sqrt{11+25}+4}=\frac{\sqrt{400}}{\sqrt{36}+4}=\frac{20}{10}=2\,,$$

takže $K=\{11\}$.

4. Rovnici

$$\sqrt{x+3-4\sqrt{x-1}}+\sqrt{x+8-6\sqrt{x-1}}=1$$

je výhodné formálně zjednodušit zavedením substituce $y=\sqrt{x-1}$. Odtud máme

$$y^2=x-1 \quad \Leftrightarrow \quad x=y^2+1\,,$$

takže pro řešenou rovnici v nové proměnné y platí

$$\sqrt{y^2+1+3-4y}+\sqrt{y^2+1+8-6y}=1 \quad \Leftrightarrow \quad \sqrt{y^2-4y+4}+\sqrt{y^2-6y+9}=1 \quad \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \quad \sqrt{(y-2)^2}+\sqrt{(y-3)^2}=1 \quad \Leftrightarrow \quad |y-2|+|y-3|=1\,.$$

Vyřešením této rovnice získáme, že

$$y \in \langle 2;3\rangle \quad \Rightarrow \quad x \in \langle 5;10\rangle\ ,$$

přičemž za podmínky $x \geq 1$ je tato úprava (a všechny předchozí také) dokonce ekvivalentní. Proto $K=\langle 5;10\rangle$. Povšimněte si, že u této rovnice, která má nekonečně mnoho řešení, není provedení zkoušky formálně možné a je tedy třeba stanovit podmínky.

5. Rovnici

$$\sqrt[3]{3x+28}-\sqrt[3]{3x-28}=2$$

bude třeba umocnit na třetí. Vzhledem k tomu, že se jedná o lichou odmocninu, lze zdůvodnit, že je tato úprava dokonce ekvivalentní. Pokud si tím však řešitel není jistý, není problém provést zkoušku. Před umocněním ale bude výhodné ji upravit do tvaru, ve kterém bude na každé straně rovnice jediná odmocnina. Počítejme

$$\left(\sqrt[3]{3x+28}\right)^3=\left(\sqrt[3]{3x-28}+2\right)^3 \quad \Leftrightarrow \quad 3x+28=3x-28+6\cdot\left(\sqrt[3]{3x-28}\right)^2+12\cdot\sqrt[3]{3x-28}+8\,.$$

Nepřehlédněme možnost výhodné substituce $z=\sqrt[3]{3x-28}$. Pak dostáváme

$$56=6z^2+12z+8 \quad \Leftrightarrow \quad z^2+2z-8=0 \quad \Leftrightarrow \quad (z+4)\,(z-2)=0 \quad \Leftrightarrow \quad z \in \{-4;2\}\ .$$

Dosazením do substituční rovnice pak dopočteme hodnoty hledané neznámé x. Vychází $K=\{\pm 12\}$.

Zadání úloh.

1. Zpaměti v $\mathbb{R}$ vyřešte následující rovnice a svá tvrzení zdůvodněte

   a)
$$\sqrt{3x-4}+\sqrt{2x+3}=-1\,,$$

   b)
$$\sqrt{2x+3}-\sqrt{2x+5}=1\,,$$

   c)
$$\sqrt{x^2-9}+\sqrt{x+3}=0\,,$$

   d)
$$\sqrt{4x-1}+\sqrt{4x+5}=2\,.$$

2. V $\mathbb{R}$ vyřešte rovnice

   a)
$$\sqrt{2x+1}+\sqrt{x}=5\,,$$

   b)
$$\sqrt{3x+6}+\sqrt{2-x}=2\,,$$

   c)
$$\sqrt{2x+3}+\sqrt{3-x}=3\,,$$

   d)
$$\sqrt{x-1}+\sqrt{x+4}=\sqrt{4x+5}\,,$$

   e)
$$\sqrt{1+x\sqrt{x^2+4}}=1-x\,,$$

   f)
$$3x^2+15x+2\sqrt{x^2+5x+1}=2\,,$$

   g)
$$\sqrt[3]{6+\sqrt[3]{x-2}}=2\,,$$

   h)
$$\frac{x\sqrt[3]{x}-1}{\sqrt[3]{x^2}-1}-\frac{\sqrt[3]{x^2}-1}{\sqrt[3]{x}-1}=12\,,$$

   i)
$$\sqrt{x^2+x+4}+\sqrt{x^2+x+1}=\sqrt{2x^2+2x+9}\,,$$

   j)
$$\sqrt{x+1}+x^2-2x-1=0\,.$$

Návody k řešení a výsledky úloh.

1. a) Součet druhých odmocnin je číslo nezáporné, proto se nemůže rovnat -1, $K = \emptyset$.

   b) Na levé straně odečítíme od menšího čísla větší, proto je záporná, $K = \emptyset$.

   c) Součet dvou nezáporných čísel je nulový právě tehdy, když jsou obě nulová. Druhý sčítanec může být nulový jedině, když $x = -3$. Pro tuto hodnotu je však nulový i sčítanec první, $K = \{-3\}$.

   d) Snadno nahlédneme, že k tomu, aby byla rovnice definovaná, je nutné a stačí, aby $x \geq 1/4$. Nejmenší možná hodnota prvního sčítance je 0 (pro $x = 1/4$). Druhý sčítanec je větší. S ohledem na podmínky pak jeho nejmenší možná hodnota bude $\sqrt{6}$ (pro $x = 1/4$). Levá strana rovnice je tedy vždy větší než 2, $K = \emptyset$.

2. a) $K = \{4\}$, (číslo 144 kořenem není),

   b) $K = \{-2\}$, (číslo 1 kořenem není),

   c) $K = \{-1; 3\}$,

   d) $K = \{5\}$,

   e) $K = \{0\}$,

   f) pomocí substituce $y = \sqrt{x^2 + 5x + 1}$ lze zadanou rovnici přepsat do tvaru $3y^2 + 2y - 5 = 0$, $K = \{-5; 0\}$,

   g) $K = \{10\}$,

   h) pomocí substituce $y = \sqrt[3]{x}$ lze zadanou rovnici postupně upravit do tvaru $y^2 - y - 12 = 0$,$K = \{-27; 64\}$,

   i) pomocí substituce $y = x^2 + x$ lze zadanou rovnici postupně upravit do tvaru $y^2 + 5y = 0$, $K = \{-1; 0\}$,

   j) standardním postupem při umocnění rovnice ve tvaru $\sqrt{x + 1} = 1 + 2x - x^2$ dostaneme rovnici čtvrtého stupně, kterou se ale podaří upravit do součinového tvaru:

$$x^4 - 4x^3 + 2x^2 + 3x = 0 \quad \Leftrightarrow \quad x\left[x^3 - 3x^2 - \left(x^2 - 2x - 3\right)\right] = 0 \quad \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \quad x\left[x^2(x-3) - (x-3)(x+1)\right] = 0 \quad \Leftrightarrow \quad x(x-3)\left(x^2 - x - 1\right) = 0\,,$$

   po dořešení a zohlednění podmínek či provedení zkoušky získáme závěr $K = \left\{0; \frac{1+\sqrt{5}}{2}\right\}$.