Zákony zkreslení

Matematická kartografie

Osnova

1. Pojem zkreslení
2. Délkové zkreslení
3. Úhlové zkreslení
4. Plošné zkreslení
5. Zákony zkreslení při použití polárních souřadnic
6. Vizualizace zkreslení

1

POJEM ZKRESLENÍ

Pojem zkreslení

- rovinný obraz referenční plochy je vždy zkreslen
- obecně jsou deformovány jak vzájemné polohy bodů, tak tvary (křivosti) čar
- zkreslení (distortion) roste se zvětšujícím se rozsahem zobrazovaného území, pokud je zobrazováno do roviny jako celek
- některé charakteristiky zkreslení jsou společné pro celou skupinu zobrazení
- při odvozování jednotlivých zobrazení se uvažují požadavky na průběh a celkový charakter zkreslení rovinného obrazu

- základní odvození vždy pro pólovou polohu z referenčního elipsoidu
- případ při použití koule se odvodí následně
- v případě jiné než pólové polohy se dosazují kartografické souřadnice

2

DÉLKOVÉ ZKRESLENÍ

Délkové zkreslení

- základní posuzované zkreslení – z něj se odvozují ostatní
- délkové zkreslení souvisí s měřítkem zobrazeného území na mapě
- Co je měřítko mapy?

Poměr délky na mapě a ve skutečnosti.

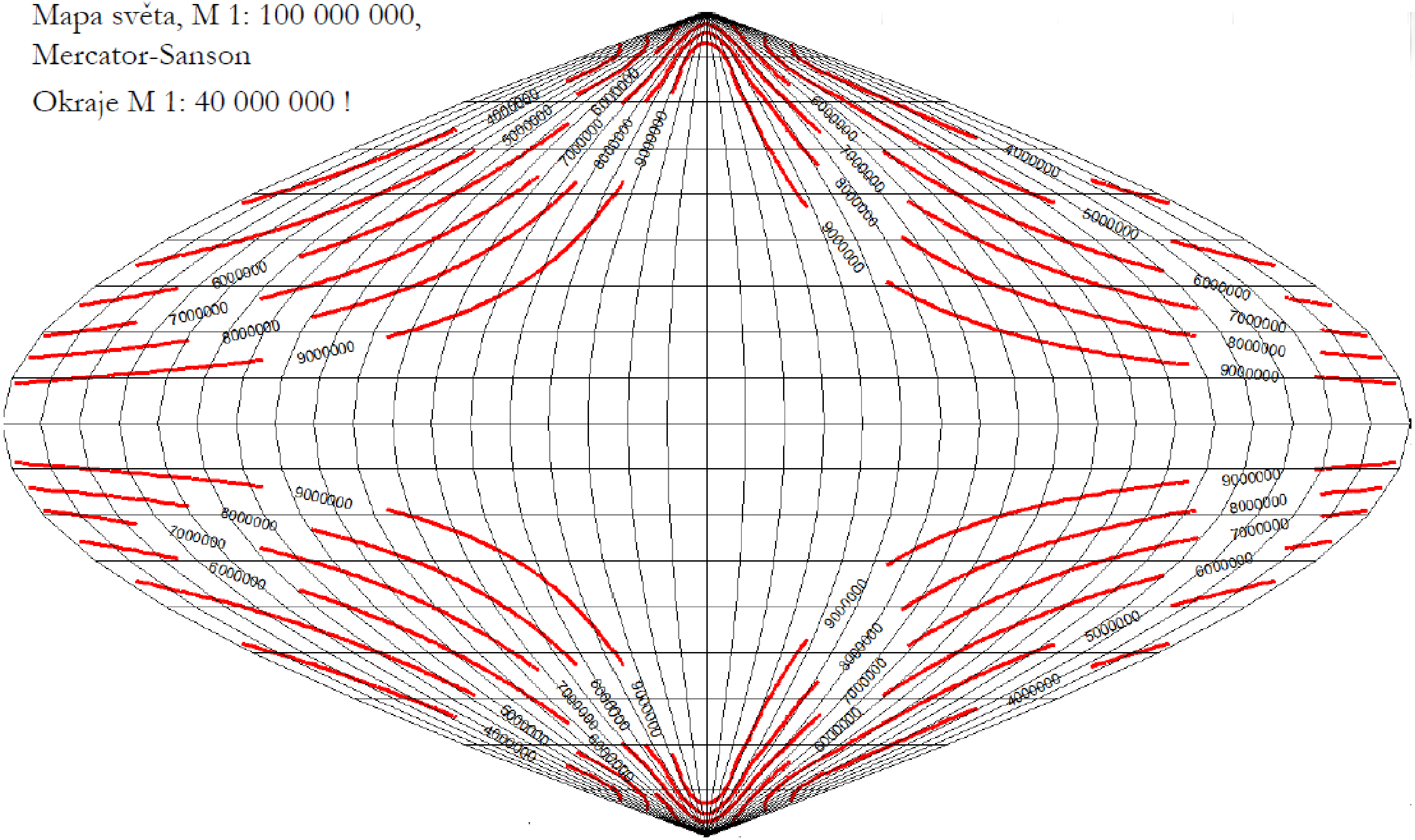
- je uváděno jako konstantní pro celou mapu
- jedná se však pouze o hlavní měřítko, které je vztaženo k určité poloze nebo k určitým směrům

Přesněji: Poměr zmenšení nezkreslené délky v mapě k odpovídající délce ve skutečnosti.

Délkové zkreslení

Mapa světa, M 1: 100 000 000,
Mercator-Sanson

Okraje M 1: 40 000 000 !



Délkové zkreslení

- skutečné měřítko v určitém místě závisí na délkovém zkreslení **m**

- hodnota m se většinou blíží k 1
- m > 1 - zobrazení prodlužuje délky
- m < 1 - zobrazení zkracuje délky

„Ekvidistantní zobrazení nezkresluje délky.“

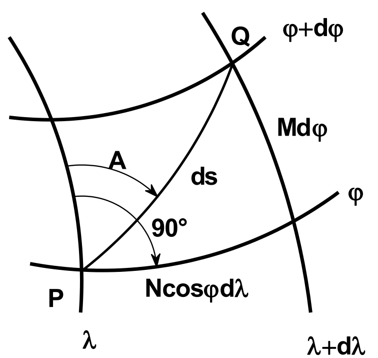
Každé zobrazení zkresluje aspoň nějaké délky.

Délkové zkreslení je poměr nekonečně malé délky v obraze a originále.
Proto se při odvození používá element mezi „diferenciálně blízkými body P a Q“.

Délkové zkreslení

- délkový element v zobrazovací rovině / délkový element na referenční ploše
- zeměpisný (geodetický) azimut elementu je A (na ploše) nebo A' (v rovině)

$$m = \frac{dS}{ds}$$



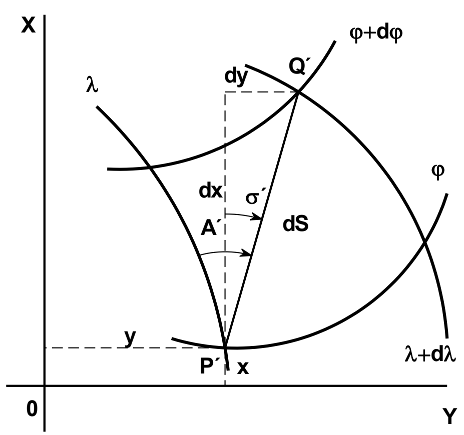
$$\sin(90° - A) = \frac{Md\varphi}{ds} \qquad d\varphi = \frac{\cos A}{M} ds$$

$$\cos(90° - A) = \frac{N\cos\varphi d\lambda}{ds} \qquad d\lambda = \frac{\sin A}{N\cos\varphi} ds$$

$$ds^2 = M^2 d\varphi^2 + N^2 \cos^2 \varphi d\lambda^2$$

poledník: A = 0° nebo 180° $ds_p = Md\varphi$

rovnoběžka: A = 90° nebo 270° $ds_r = N\cos\varphi d\lambda$



$$dS^2 = dx^2 + dy^2$$

Délkové zkreslení

$$dS^2 = dx^2 + dy^2$$

$$x = f(\varphi, \lambda)$$
$$y = f(\varphi, \lambda)$$

$$dx = \frac{\partial x}{\partial \varphi} d\varphi + \frac{\partial x}{\partial \lambda} d\lambda \quad dy = \frac{\partial y}{\partial \varphi} d\varphi + \frac{\partial y}{\partial \lambda} d\lambda$$

totální diferenciály z obecných zobrazovacích rovnic

$$dS^2 = \left[\left(\frac{\partial x}{\partial \varphi}\right)^2 + \left(\frac{\partial y}{\partial \varphi}\right)^2\right] d\varphi^2 + \left(\frac{\partial x \partial x}{\partial \varphi \partial \lambda} + \frac{\partial y \partial y}{\partial \varphi \partial \lambda}\right) 2 d\varphi d\lambda + \left[\left(\frac{\partial x}{\partial \lambda}\right)^2 + \left(\frac{\partial y}{\partial \lambda}\right)^2\right] d\lambda^2$$

součty kvadrátů a součinů parciálních derivací = Gaussovy koeficienty

$$\boxed{E = \left(\frac{\partial x}{\partial \varphi}\right)^2 + \left(\frac{\partial y}{\partial \varphi}\right)^2} \quad \boxed{F = \frac{\partial x \partial x}{\partial \varphi \partial \lambda} + \frac{\partial y \partial y}{\partial \varphi \partial \lambda}} \quad \boxed{G = \left(\frac{\partial x}{\partial \lambda}\right)^2 + \left(\frac{\partial y}{\partial \lambda}\right)^2}$$

$$dS^2 = E d\varphi^2 + 2F d\varphi d\lambda + G d\lambda^2$$

dosazení do původního vzorce:

$$m = \frac{dS}{ds} \qquad ds^2 = M^2 d\varphi^2 + N^2 \cos^2 \varphi d\lambda^2$$

$$m^2 = \frac{E d\varphi^2 + 2F d\varphi d\lambda + G d\lambda^2}{M^2 d\varphi^2 + N^2 \cos^2 \varphi d\lambda^2}$$

Délkové zkreslení

$$m^2 = \frac{Ed\varphi^2 + 2Fd\varphi d\lambda + Gd\lambda^2}{M^2 d\varphi^2 + N^2 \cos^2\varphi d\lambda^2}$$ dosadíme

vztahy z obrázku a goniometrické funkce

$$\sin(90° - A) = \frac{Md\varphi}{ds}$$

$$\cos(90° - A) = \frac{N\cos\varphi d\lambda}{ds}$$

$$2\sin A\cos A = \sin 2A$$

$$\cos^2 A + \sin^2 A = 1$$

$$m^2 = \frac{E}{M^2}\cos^2 A + \frac{F}{MN\cos\varphi}\sin 2A + \frac{G}{N^2\cos^2\varphi}\sin^2 A$$

poledník: A = 0° nebo 180°

$$m_p = \frac{\sqrt{E}}{M}$$ $$ds_p = Md\varphi$$

rovnoběžka: A = 90° nebo 270°

$$m_r = \frac{\sqrt{G}}{N\cos\varphi}$$ $$ds_r = N\cos\varphi d\lambda$$

$$m^2 = m_p^2\cos^2 A + \frac{F}{MN\cos\varphi}\sin 2A + m_r^2\sin^2 A$$

Délkové zkreslení je tedy závislé na poloze bodu (φ, λ) a azimutu A (směru).

Délkové zkreslení na referenční kouli

pozmění se Gaussovy koeficienty:

$$E=\left(\frac{\partial x}{\partial U}\right)^2+\left(\frac{\partial y}{\partial U}\right)^2 \qquad F=\frac{\partial x\partial x}{\partial U\partial V}+\frac{\partial y\partial y}{\partial U\partial V} \qquad G=\left(\frac{\partial x}{\partial V}\right)^2+\left(\frac{\partial y}{\partial V}\right)^2$$

zkreslení v polednících:

$$m_p=\frac{\sqrt{E}}{R}$$

zkreslení v rovnoběžkách:

$$m_r=\frac{\sqrt{G}}{R\cos U}$$

zkreslení v obecném azimutu:

$$m^2=m_p^2\cos^2 A+\frac{F}{R^2\cos U}\sin 2A+m_r^2\sin^2 A$$

Extrémní délkové zkreslení

Hledání extrému funkce: derivace funkce a položení rovno 0.

$$\frac{dm^2}{dA} = 2m\frac{dm}{dA} = -m_p^2 2\sin A_a \cos A_a + \frac{F}{MN\cos\varphi} 2\cos 2A_a + m_r^2 2\sin A_a \cos A_a = 0$$

$$tg2A_a = \frac{2F}{\left(m_p^2 - m_r^2\right)MN\cos\varphi}$$

funkce tg je dvojznačná – vztah platí pro 2 azimuty:

A_a

$A_b = 90° - A_a$

Extrémní délková zkreslení m_a a m_b ve dvou vzájemně kolmých směrech – **hlavní paprsky zkreslení**:

$$m_a^2 = m_p^2 \cos^2 A_a + \frac{F}{MN\cos\varphi}\sin 2A_a + m_r^2 \sin^2 A_a$$

$$m_b^2 = m_p^2 \cos^2 A_b + \frac{F}{MN\cos\varphi}\sin 2A_b + m_r^2 \sin^2 A_b$$

příp.

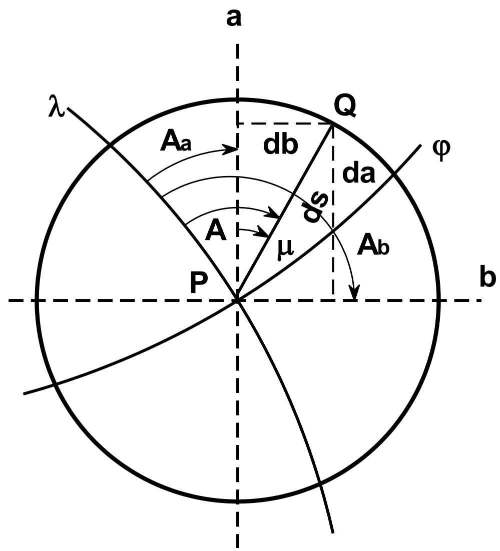
$$m_b^2 = m_p^2 \sin^2 A_a + \frac{F}{MN\cos\varphi}\sin 2A_a + m_r^2 \cos^2 A_a$$

Extrémní délkové zkreslení

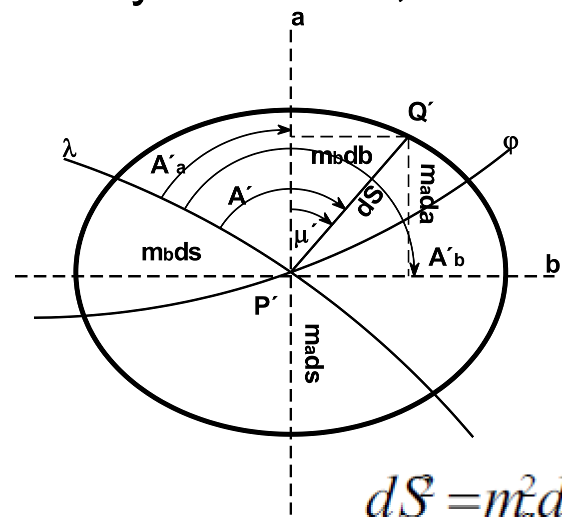
Hlavní paprsky zkreslení = směry extrémů, zůstávají na sebe ve všech zobrazeních kolmé i po zobrazení do roviny.

kružnice o poloměru ds

elipsa zkreslení = Tissotova indikatrix
poloosy a = m_a ds, b = m_b ds



$$da = ds \cos \mu$$
$$db = ds \sin \mu$$



$$dS^2 = m_a^2 da^2 + m_b^2 db^2$$

Další vzorec pro výpočet délkového zkreslení:

$$m^2 = m_a^2 \cos^2 \mu + m_b^2 \sin^2 \mu \qquad \mu = A - A_a$$

směrník uvažovaný od hlavního paprsku zkreslení

Extrémní délkové zkreslení na referenční kouli

Extrémní délková zkreslení ve dvou vzájemně kolmých směrech:

$$tg2A_a = \frac{2F}{\left(m_p^2 - m_r^2\right)R^2 \cos U}$$

$$m_a^2 = m_p^2 \cos^2 A_a + \frac{F}{R^2 \cos U} \sin 2A_a + m_r^2 \sin^2 A_a$$

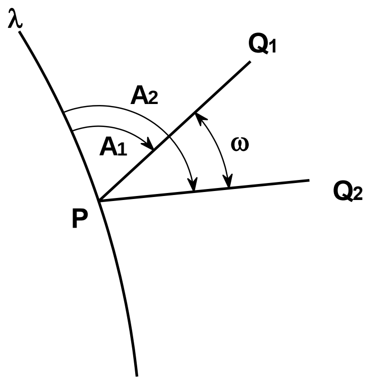
$$m_b^2 = m_p^2 \sin^2 A_a + \frac{F}{R^2 \cos U} \sin 2A_a + m_r^2 \cos^2 A_a$$

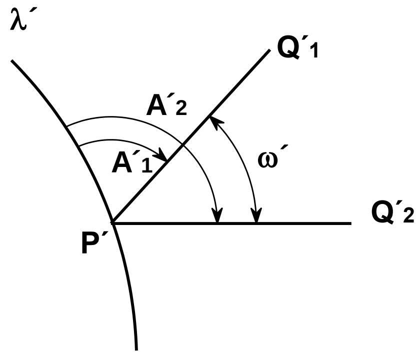
3

ÚHLOVÉ ZKRESLENÍ

Úhlové zkreslení

Úhlové zkreslení Δω = rozdíl velikosti úhlu v rovině a velikosti odpovídajícího úhlu na referenční ploše.

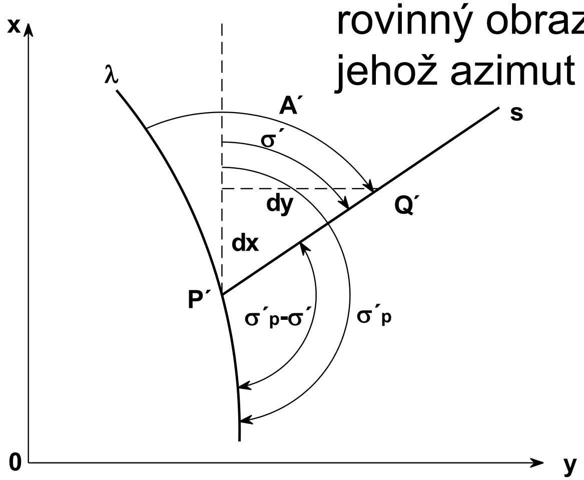




$$\Delta\omega = \omega' - \omega$$ zkreslení úhlu

$$\Delta\omega = (A'_2 - A'_1) - (A_2 - A_1)$$
$$= (A'_2 - A_2) - (A'_1 - A_1)$$
$$= \Delta A_2 - \Delta A_1$$

$$\Delta A = A' - A$$ zkreslení azimutu

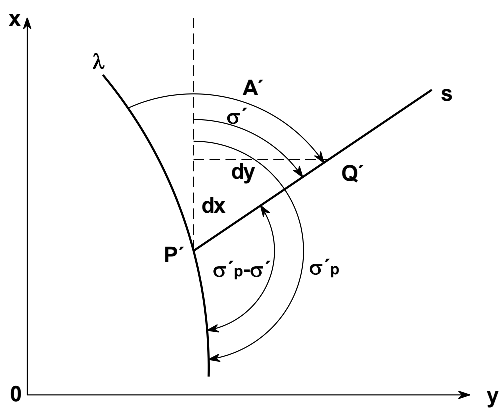


rovinný obraz zeměpisného poledníku λ a libovolného směru s, jehož azimut v zobrazovací rovině je A´ a směrník je σ´

$$A' = 180° - (\sigma'_p - \sigma')$$
$$tgA' = -tg(\sigma'_p - \sigma')$$
$$tgA' = \frac{tg\sigma' - tg\sigma'_p}{1 + tg\sigma'_p \, tg\sigma'}$$

Pro určení azimutu je tedy nutné stanovit tangenty směrníků.

Úhlové zkreslení



$$tg\sigma' = \frac{dy}{dx} \qquad tg\sigma' = \frac{\frac{\partial y}{\partial \varphi} d\varphi + \frac{\partial y}{\partial \lambda} d\lambda}{\frac{\partial x}{\partial \varphi} d\varphi + \frac{\partial x}{\partial \lambda} d\lambda}$$

$$tg\sigma' = \frac{\frac{\partial y}{\partial \varphi}\frac{\cos A}{M} ds + \frac{\partial y}{\partial \lambda}\frac{\sin A}{N\cos\varphi} ds}{\frac{\partial x}{\partial \varphi}\frac{\cos A}{M} ds + \frac{\partial x}{\partial \lambda}\frac{\sin A}{N\cos\varphi} ds} = \frac{\frac{\partial y}{\partial \varphi} N\cos\varphi\cos A + \frac{\partial y}{\partial \lambda} M\sin A}{\frac{\partial x}{\partial \varphi} N\cos\varphi\cos A + \frac{\partial x}{\partial \lambda} M\sin A}$$

Dosadí se Gaussovy koeficienty:

$$tg\sigma_p' = \frac{\frac{\partial y}{\partial \varphi}}{\frac{\partial x}{\partial \varphi}} \qquad tgA' = \frac{\frac{\partial x}{\partial \varphi}\frac{\partial y}{\partial \lambda} - \frac{\partial x}{\partial \lambda}\frac{\partial y}{\partial \varphi}}{\left[\left(\frac{\partial x}{\partial \varphi}\right)^2 + \left(\frac{\partial y}{\partial \varphi}\right)^2\right]\frac{M}{N}\cos\varphi\cot gA + \frac{\partial x}{\partial \varphi}\frac{\partial x}{\partial \lambda} + \frac{\partial y}{\partial \varphi}\frac{\partial y}{\partial \lambda}}$$

$$E = \left(\frac{\partial x}{\partial \varphi}\right)^2 + \left(\frac{\partial y}{\partial \varphi}\right)^2$$

$$F = \frac{\partial x \partial x}{\partial \varphi \partial \lambda} + \frac{\partial y \partial y}{\partial \varphi \partial \lambda}$$

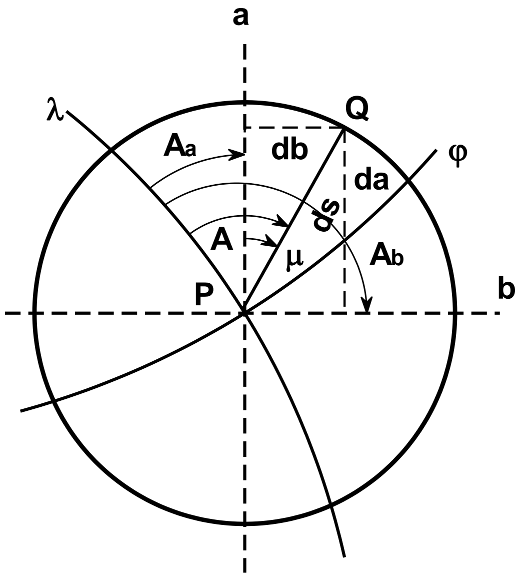
$$H = \frac{\partial x}{\partial \varphi}\frac{\partial y}{\partial \lambda} - \frac{\partial x}{\partial \lambda}\frac{\partial y}{\partial \varphi}$$

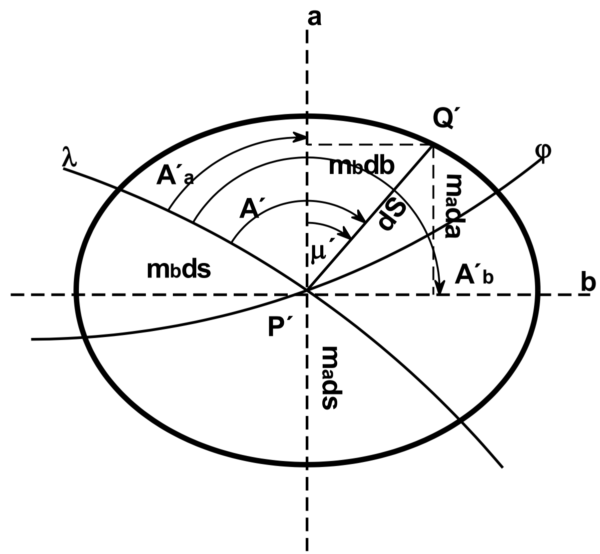
$$tgA' = \frac{H}{E\frac{M}{N}\cos\varphi\cot gA + F}$$

známe A’, známe A, vypočítáme úhlové zkreslení ω

Úhlové zkreslení

Zkreslení azimutu je možné vypočítat i z extrémních hodnot délkového zkreslení.
Konformní zobrazení – kružnice zůstane kružnicí.





$$tg\mu = \frac{db}{da}$$

$$tg\mu' = \frac{m_b}{m_a} tg\mu$$

$$tg\mu' = \frac{m_b db}{m_a da}$$

zkreslení směrníku: $\Delta\mu = \mu' - \mu$

zkreslení azimutu: $\Delta A = A' - A = \Delta\mu + A'_a - A_a$ Úhlové zkreslení je tedy funkcí azimutu.

známe A’, známe A, vypočítáme úhlové zkreslení ω

Úhlové zkreslení na kouli

Tvar Gaussova koeficientu:

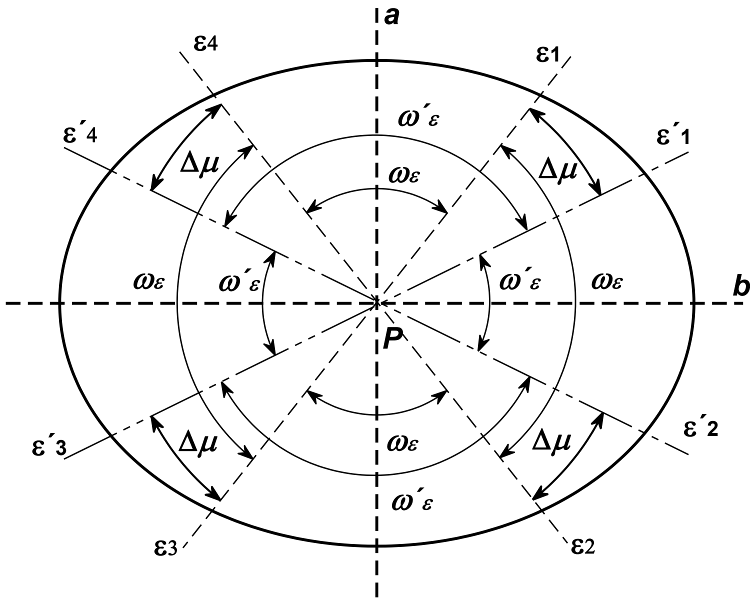
$$H = \frac{\partial x}{\partial U}\frac{\partial y}{\partial V} - \frac{\partial x}{\partial V}\frac{\partial y}{\partial U}$$

Výpočet azimutu ve zobrazovací rovině:

$$\mathrm{tg}\,A' = \frac{H}{E\cos U\,\mathrm{cotg}\,A + F}$$

Extrémní úhlové zkreslení

- v elipse zkreslení existují symetrické směry, ve kterých **úhlové zkreslení dosahuje extrému**
- označují se symbolem ε
- jejich směrníky v ortogonální soustavě hlavních paprsků zkreslení budou μ_ε a μ'_ε a jim odpovídající azimuty A_ε a A'_ε



velikost extrémního zkreslení azimutu –
$\Delta A = A'_\varepsilon - A_\varepsilon$

velikost extrémního zkreslení směrníku –
$\Delta\mu_\varepsilon = \mu'_\varepsilon - \mu_\varepsilon$

$$\sin \Delta\mu_\varepsilon = \frac{m_b - m_a}{m_b + m_a}$$

$$\sin \frac{\Delta\omega_\varepsilon}{2} = \frac{m_b - m_a}{m_b + m_a}$$

Extrémní úhlové zkreslení na kouli?

Vzorec se nemění, mění se jen dosazená extrémní délková zkreslení.

4

PLOŠNÉ ZKRESLENÍ

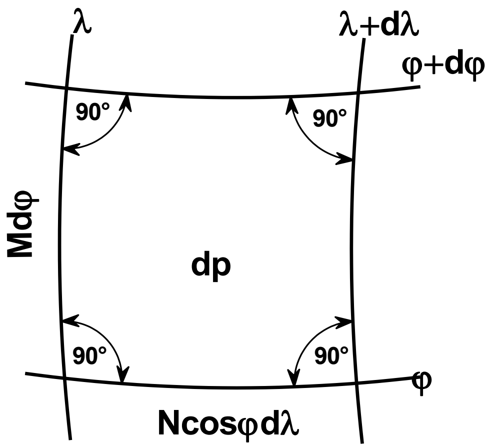
Plošné zkreslení

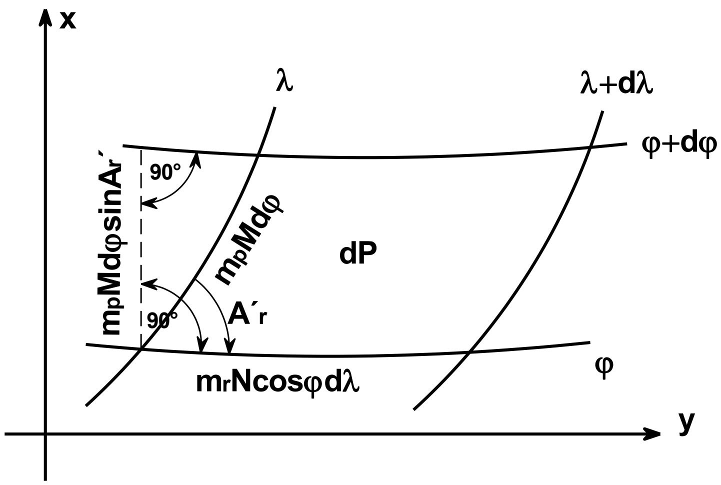
základní vztah:

dp - diferenciální (= nekonečně malá) plocha na referenční ploše

dP - odpovídající diferenciální plocha v zobrazovací rovině

$$m_{pl} = \frac{dP}{dp}$$





$$dp = MN\cos\varphi d\varphi d\lambda$$

vzorec plochy kosodélníku:

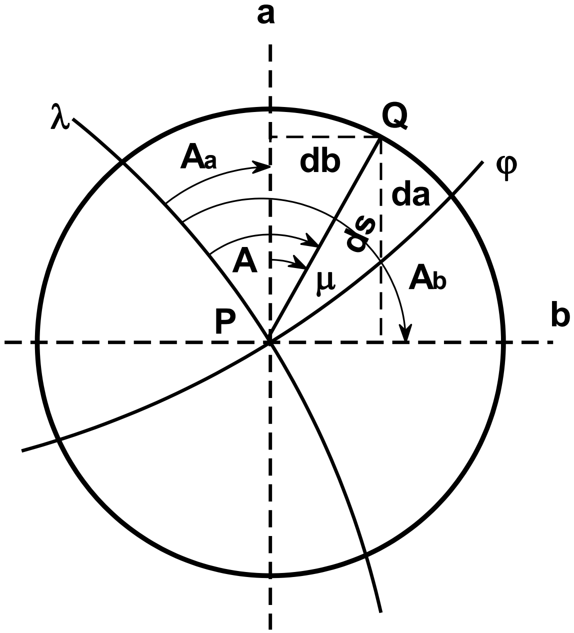
$$dP = m_p m_r MN\cos\varphi d\varphi d\lambda \sin A_r'$$

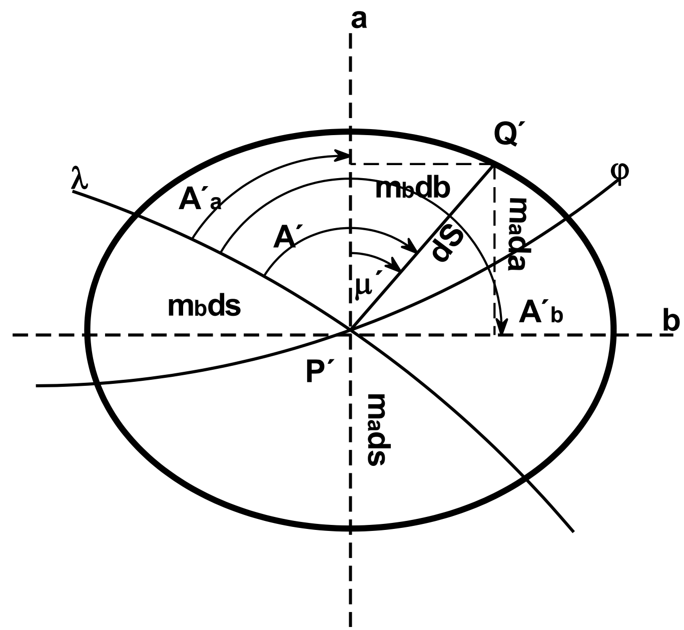
$$m_{pl} = m_p m_r \sin A_r'$$

Plošné zkreslení

využití elipsy zkreslení:

$$m_{pl} = \frac{dP}{dp}$$





$$dp = \pi ds^2$$

$$dP = \pi m_a ds m_b ds$$

$$m_{pl} = m_a m_b$$

5

ZÁKONY ZKRESLENÍ PŘI POUŽITÍ POLÁRNÍCH SOUŘADNIC

Zákony zkreslení při použití polárních souřadnic

Doposud vše na základě rovnic:
$$x = f(\varphi,\lambda)$$
$$y = f(\varphi,\lambda)$$

V případě zobrazení kuželového nebo azimutálního:
$$\rho = f(\varphi,\lambda) \qquad x = x_v - \rho\cos\varepsilon$$
$$\varepsilon = f(\varphi,\lambda) \qquad y = \rho\sin\varepsilon$$

$$\begin{array}{llllllll}
x & \rightarrow x_v & \rightarrow \varphi & & y & \rightarrow \rho & \rightarrow & \varphi \\
 & \rightarrow \rho & \rightarrow \varphi & & & & \rightarrow & \lambda \\
 & & \rightarrow \lambda & & & \rightarrow \varepsilon & \rightarrow & \varphi \\
 & \rightarrow \varepsilon & \rightarrow \varphi & & & & \rightarrow & \lambda \\
 & & \rightarrow \lambda & & & & &
\end{array}$$

Změní se Gaussovy symboly, jinak zůstanou vzorce zkreslení stejné.

$$E = \left(\frac{\partial x_v}{\partial\varphi}\right)^2 + \left(\rho\sin\varepsilon\frac{\partial\varepsilon}{\partial\varphi} - \cos\varepsilon\frac{\partial\rho}{\partial\varphi}\right)2\frac{\partial x_v}{\partial\varphi} + \left(\frac{\partial\rho}{\partial\varphi}\right)^2 + \rho^2\left(\frac{\partial\varepsilon}{\partial\varphi}\right)^2$$

$$F = \left(\rho\sin\varepsilon\frac{\partial\varepsilon}{\partial\lambda} - \cos\varepsilon\frac{\partial\rho}{\partial\lambda}\right)\frac{\partial x_v}{\partial\varphi} + \frac{\partial\rho}{\partial\varphi}\frac{\partial\rho}{\partial\lambda} + \rho^2\frac{\partial\varepsilon}{\partial\varphi}\frac{\partial\varepsilon}{\partial\lambda}$$

$$G = \left(\frac{\partial\rho}{\partial\lambda}\right)^2 + \rho^2\left(\frac{\partial\varepsilon}{\partial\lambda}\right)^2$$

$$H = \left(\sin\varepsilon\frac{\partial\rho}{\partial\lambda} + \rho\cos\varepsilon\frac{\partial\varepsilon}{\partial\lambda}\right)\frac{\partial x_v}{\partial\varphi} + \left(\frac{\partial\rho}{\partial\lambda}\frac{\partial\varepsilon}{\partial\varphi} - \frac{\partial\rho}{\partial\varphi}\frac{\partial\varepsilon}{\partial\lambda}\right)\rho$$

Zákony zkreslení při použití polárních souřadnic na kouli

Změní se Gaussovy symboly, jinak zůstanou vzorce zkreslení stejné.

$$E=\left(\frac{\partial x_v}{\partial U}\right)^2+\left(\rho\sin\varepsilon\frac{\partial\varepsilon}{\partial U}-\cos\varepsilon\frac{\partial\rho}{\partial U}\right)2\frac{\partial x_v}{\partial U}+\left(\frac{\partial\rho}{\partial U}\right)^2+\rho^2\left(\frac{\partial\varepsilon}{\partial U}\right)^2$$

$$F=\left(\rho\sin\varepsilon\frac{\partial\varepsilon}{\partial V}-\cos\varepsilon\frac{\partial\rho}{\partial V}\right)\frac{\partial x_v}{\partial U}+\frac{\partial\rho}{\partial U}\frac{\partial\rho}{\partial V}+\rho^2\frac{\partial\varepsilon}{\partial U}\frac{\partial\varepsilon}{\partial V}$$

$$G=\left(\frac{\partial\rho}{\partial V}\right)^2+\rho^2\left(\frac{\partial\varepsilon}{\partial V}\right)^2$$

$$H=\left(\sin\varepsilon\frac{\partial\rho}{\partial V}+\rho\cos\varepsilon\frac{\partial\varepsilon}{\partial V}\right)\frac{\partial x_v}{\partial U}+\left(\frac{\partial\rho}{\partial V}\frac{\partial\varepsilon}{\partial U}-\frac{\partial\rho}{\partial U}\frac{\partial\varepsilon}{\partial V}\right)\rho$$

6

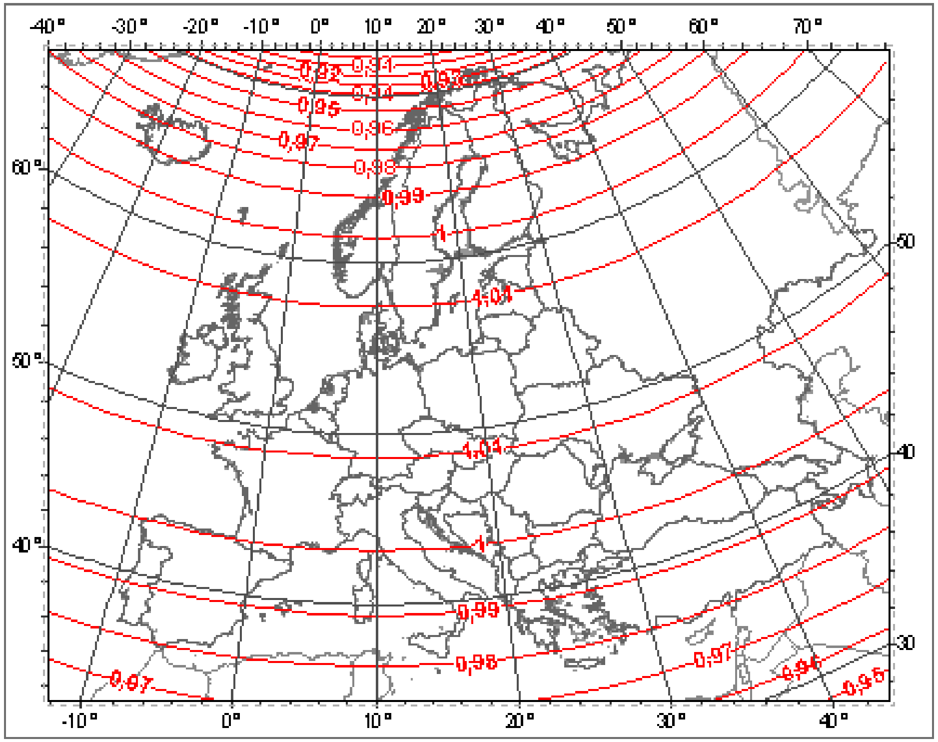
VIZUALIZACE ZKRESLENÍ

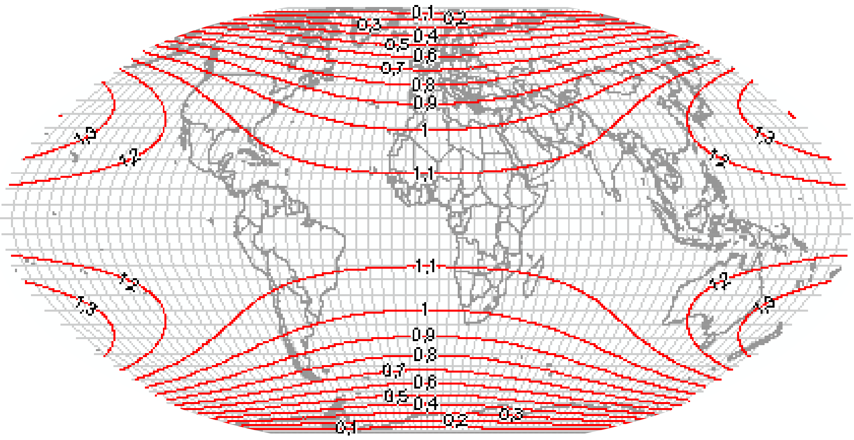
Vizualizace zkreslení

- charakter průběhu zkreslení je možné vizualizovat pomocí čar stejných hodnot zkreslení, tzv. ekvideformát
- ekvideformáty mohou být konstruovány pro průběh všech druhů zkreslení
- vzhledem ke skutečnosti, že plošné a úhlové zkreslení je možné vyjádřit i pomocí délkového zkreslení m, jsou nejčastěji zobrazovány ekvideformáty délkových zkreslení (izometrické čáry)

Vizualizace zkreslení

- Zkreslení se nejvíce mění v kolmém směru na směr **ekvideformát**.
- U jednoduchých zobrazení jsou ekvideformáty totožné s obrazem rovnoběžek - zeměpisných nebo kartografických.
- U nepravých a obecných zobrazení je tvar ekvideformát složitější.





Vizualizace zkreslení

- vyjádření zkreslení číslem - poměrovou formou

poměrová forma
délkového zkreslení:

$$v_m = m - 1$$

$$v_m = \frac{dS - ds}{ds}$$

Při m = 1 by tedy bylo v_m= 0.
Zkreslení není.

poměrová forma
plošného zkreslení:

$$v_{pl}\,\% = (m_{pl} - 1)100\,\%$$

Při m_{pl} = 1 není zkreslení.
v = 0%

Vizualizace zkreslení

elipsy zkreslení (Tissotovy indikatrix)
zobrazené v uzlových bodech zeměpisné sítě:

- velikosti délkového zkreslení,
- orientace hlavních paprsků zkreslení vůči obrazu poledníků a rovnoběžek,
- plošné zkreslení.