ČASOVÉ ŘADY

MU
IBA

Mgr. et Mgr. Jiří Kalina, PhD.

prof. Ing. Jiří Holčík, CSc.

UKB, pavilon D29 (Recetox), kancelář 123
kalina@mail.muni.cz

IX. FREKVENČNÍ TRANSFORMACE

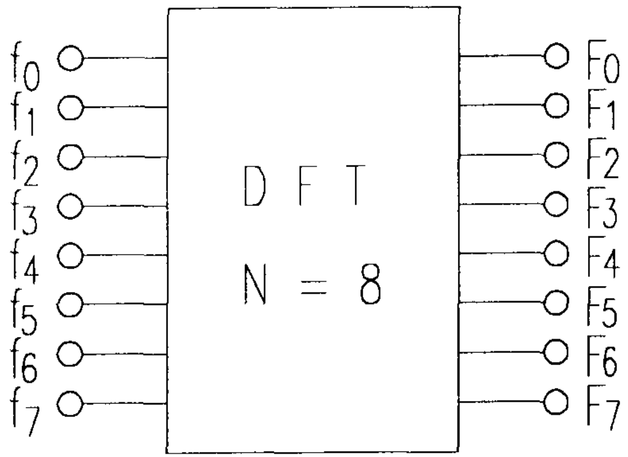
꧁ POKRAČOVÁNÍ ꧂

RYCHLÁ FOURIEROVA TRANSFORMACE - FFT

$$X(k\Omega)=\sum_{n=0}^{N-1}x(nT_{vz}).e^{-ik\Omega nT_{vz}}=\sum_{n=0}^{N-1}x(nT_{vz}).(\cos(k\Omega nT_{vz})-i\sin(k\Omega nT_{vz}))$$

$$X(k)=\sum_{n=0}^{N-1}x(n).e^{-i2\pi kn/N}=\sum_{n=0}^{N-1}x(n).(\cos(2\pi kn/N)-i\sin(2\pi kn/N))$$

- hodnoty funkcí cos a sin se používají z tabulek pro čtvrtinu periody;
- zrychlení výpočetního algoritmu se dosáhne využitím dříve vypočítaných mezivýsledků, resp. vynecháním zbytečných výpočtů – např. násobení nulou;



RYCHLÁ FOURIEROVA TRANSFORMACE - FFT

FFT – (Cooley, Tukey – 1965, ale před nimi již i mnozí další od 1903)

- rozklad v časové oblasti;
- rozklad ve frekvenční oblasti

jednotka pracnosti P – jedno komplexní násobení a sečítání

pracnost výpočtu jednoho vzorku spektra – N.P

pracnost celé transformace – N.N.P = N^2.P

FFT
ROZKLAD V ČASOVÉ OBLASTI

- vstupní posloupnost o sudém počtu vzorku rozdělíme na dvě dílčí posloupnosti

  $\{g_n\} = \{x_{2n}\}$ - sudé prvky původní posloupnosti,

  $\{h_n\} = \{x_{2n+1}\}$ - liché prvky původní posloupnosti,

  $n=0,1,\ldots, N/2-1$

  předpokládáme, že každá z posloupností (původní i obě dílčí), mají svou DFT

FFT
ROZKLAD V ČASOVÉ OBLASTI

$$G(k) = \sum_{n=0}^{N/2-1} g_n . e^{-\frac{i2\pi nk}{N/2}} = \sum_{n=0}^{N/2-1} g_n . e^{-\frac{i4\pi nk}{N}}$$

$$H(k) = \sum_{n=0}^{N/2-1} h_n . e^{-\frac{i2\pi nk}{N/2}} = \sum_{n=0}^{N/2-1} h_n . e^{-\frac{i4\pi nk}{N}}$$

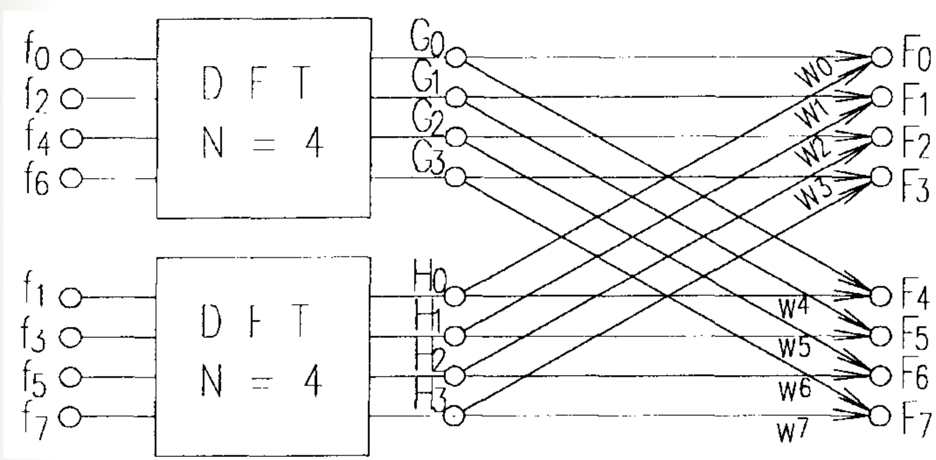
$$k \in \langle 0, N/2-1 \rangle$$

FFT
ROZKLAD V ČASOVÉ OBLASTI

$$X(k) = \sum_{n=0}^{N-1} x_n.e^{-\frac{i2\pi nk}{N}} = x_0.e^{-i\frac{2\pi}{N}0k} + x_1.e^{-i\frac{2\pi}{N}1k} + x_2.e^{-i\frac{2\pi}{N}2k} + \ldots + x_{N-1}.e^{-i\frac{2\pi}{N}(N-1)k} =$$

$$= \left| \begin{matrix} g_0 = x_0 & g_1 = x_2 & g_2 = x_4 & & g_7 = x_{14} \\ h_0 = x_1 & h_1 = x_3 & h_2 = x_5 & \ldots & h_7 = x_{15} \end{matrix} \right| = \sum_{n=0}^{N/2-1} \left(g_n.e^{-\frac{i2\pi 2nk}{N}} + h_n.e^{-\frac{i2\pi(2n+1)k}{N}} \right) =$$

$$= \sum_{n=0}^{N/2-1} \left(g_n.e^{-\frac{i2\pi 2nk}{N}} + h_n.e^{-\frac{i2\pi 2nk}{N}}.e^{-\frac{i2\pi k}{N}} \right) = G(k') + e^{-\frac{i2\pi k}{N}}.H(k') \qquad k' = k \bmod (N/2)$$



$$W^m = e^{-i\frac{2\pi}{N}m}$$

FFT
ROZKLAD V ČASOVÉ OBLASTI

$$X(k) = G(k') + e^{-\frac{i2\pi k}{N}}.H(k') \qquad k' = k \bmod (N/2)$$

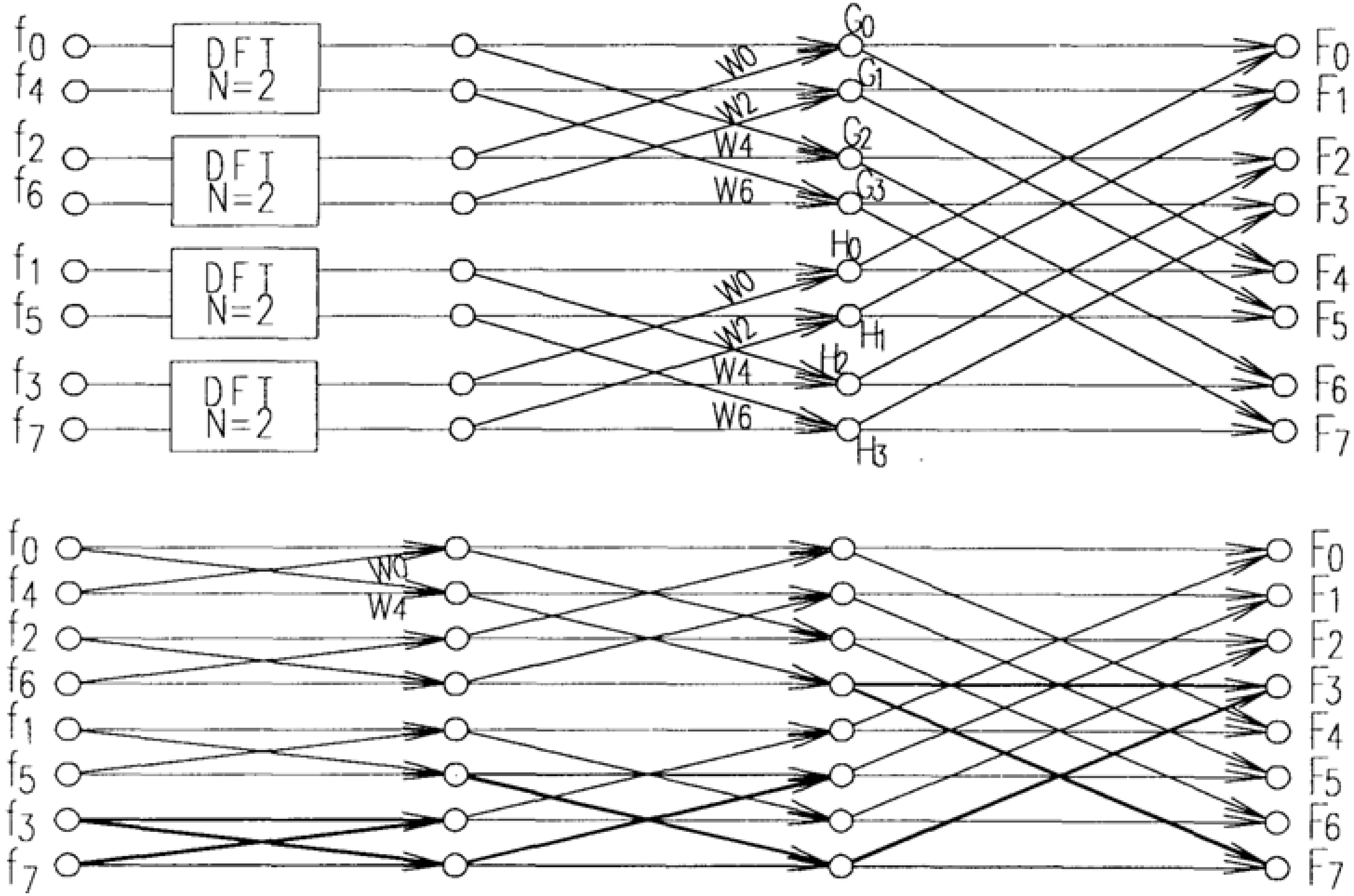
- ☑ výsledná pracnost bude součtem pracností výpočtu spekter obou posloupností

$$2.(N/2)^2.P+N.P$$

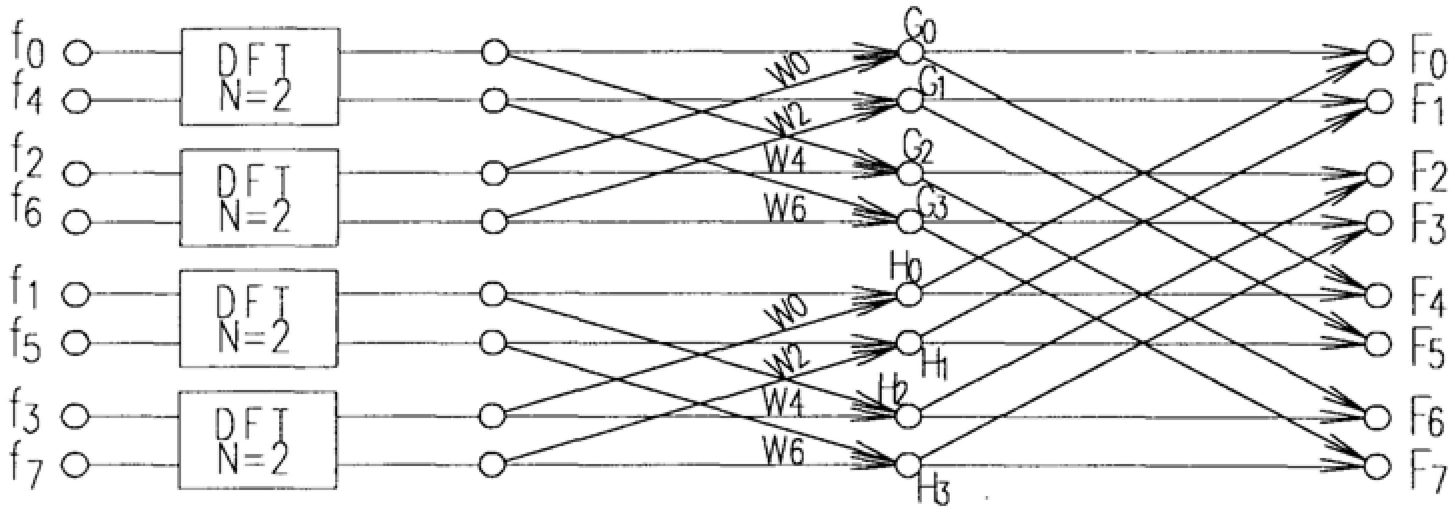
tzn. uspoření pracnosti téměř na polovinu;

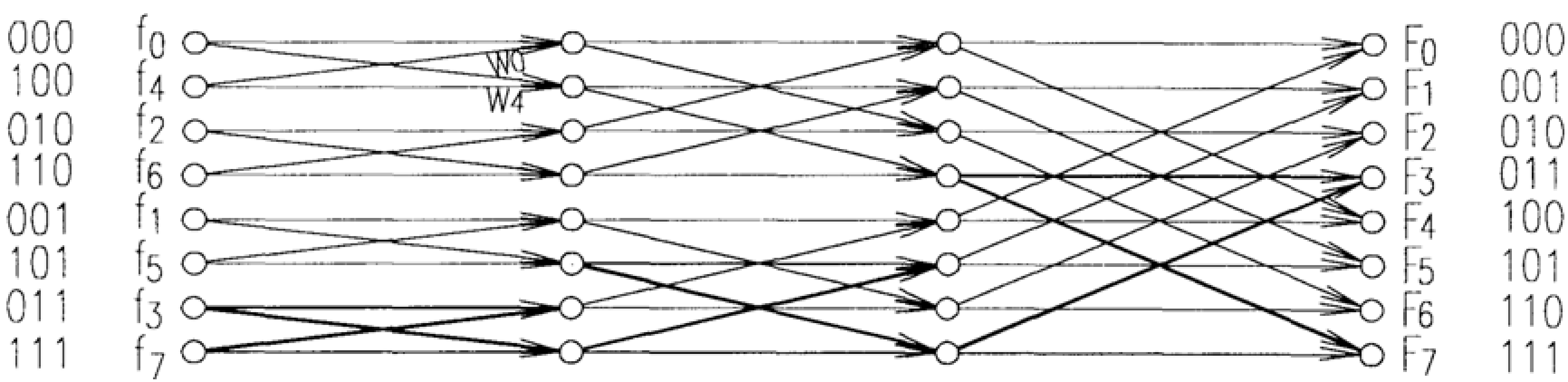
- ☑ je-li N/2 opět sudé, může se v dělení pokračovat – celkově je výhodné, je-li $N = 2^m$

FFT
ROZKLAD V ČASOVÉ OBLASTI



FFT
ROZKLAD V ČASOVÉ OBLASTI





FFT
ROZKLAD V ČASOVÉ OBLASTI

- ☑ každý uzel v grafu představuje jedno komplexní násobení a součet
- ☑ N uzlů ve vrstvě; celkem m vrstev $m=\log_2 N$
- ☑ celková pracnost:

$$P.N.m = P.N.\log_2 N$$

to představuje při N=8 úsporu 60%, při N=1024 již téměř 99% a při $N=131072=2^{17}$ dokonce 99,99%

FFT
ROZKLAD V ČASOVÉ OBLASTI

- výstup je uspořádán přirozeně; vstup je v bitově inverzním pořadí;
- opakující se struktury „motýlků“ obsahujících 4 uzly a 4 hrany

X. SYSTÉMY - ZÁKLADNÍ POJMY

MU
IBA

SYSTÉM - DEFINICE

SYSTÉM (řec.)

⇓

složené, seskupené (v celek)

- ☑ uzavřený, jednotně uspořádaný celek;
- ☑ soustava věcí, myšlenek, apod. uspořádaná podle určitého hlediska, určitou formou a metodou;
- ☑ záměrný, promyšlený, určitým způsobem uspořádaný postup, organizace, děj nebo vývoj;

SYSTÉM - DEFINICE

Ludwig von Bertalanffy
(1901-1972)

[Systém se skládá] z dynamicky uspořádaných prvků a vzájemně se ovlivňujících procesů. […] Základním úkolem biologie je odhalení zákonitostí biologických systémů.

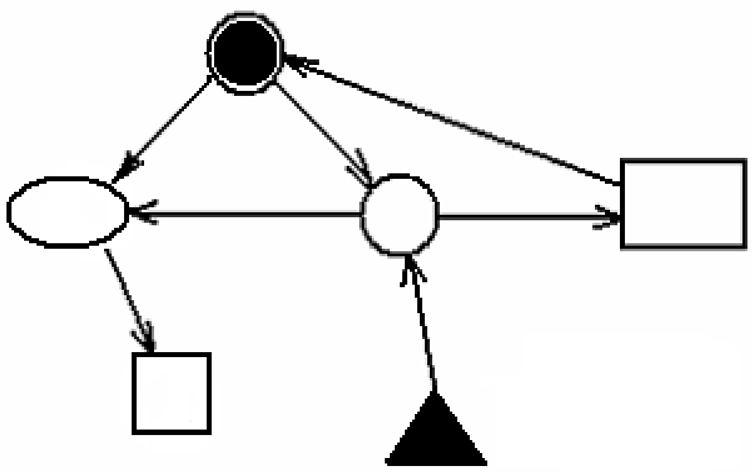
Kritische Theorie der Formbildung, Berlin 1928
General System Theory. Foundations, Development, Applications, NY1968

SYSTÉM - DEFINICE

- **Systém je komplex vzájemně na sebe působících elementů.** (L. von Bertalanffy)
- **Systém je soubor prvků a vazeb mezi nimi.** (R. L. Ackoff)
- **Systém je uspořádání určitých komponent, vzájemně propojených v celek** (G. J. Klir)

ZÁKLADNÍ ATRIBUTY SYSTÉMU

struktura – je dána množinou všech prvků a vazeb (vztahů, relací) mezi prvky, resp. dalšími různými podsystémy daného systému;



ZÁKLADNÍ ATRIBUTY SYSTÉMU

chování – je projevem dynamiky systému Dynamika je schopnost vyvolat změnu v systému, zejména jeho ***stavu***. Dynamika je vlastností prvků systému, vazby jsou jejími iniciátory (***vstupy***), resp. nositeli důsledků (***výstupy***).

ZÁKLADNÍ ATRIBUTY SYSTÉMU

stavem sytému rozumíme souhrn hodnot jeho vlastností, které lze rozpoznat v daném časovém okamžiku za přesně definovaných podmínek. Stavu systému lze v libovolném časovém okamžiku t (z nějakého daného či zvoleného časového intervalu) přiřadit vektor hodnot $\mathbf{s}(t) \in S$, který nazýváme *stavovým vektorem*, složky x_i vektoru **s** nazýváme *stavovými veličinami* (proměnnými) a prostor *S* všech možných hodnot stavových veličin nazýváme *stavovým prostorem*. Podle vývoje hodnot stavu systému lze systémy dělit na *statické* (nevykazují pohyb) a *dynamické*.

ZÁKLADNÍ ATRIBUTY SYSTÉMU

stabilita je schopnost systému udržovat si při změně vstupů a stavů svých prvků nezměněnou vnější formu (chování) i navzdory procesům probíhajícím uvnitř systému. Stabilitu chápeme jako vlastnost zaručující, že i po určité malé změně počátečních podmínek nastane v systému při nezměněných vstupech pohyb jen málo odlišný od původního. Pojem stability se neomezuje pouze na návrat do původního stavu po poruše, která způsobí vychýlení. Často je návrat do původního stavu nemožný, protože se změnily podmínky, v nichž systém existuje – pak si systém může najít stav odchylný od výchozího stavu, který je rovněž stabilní – tzv. *ultrastabilní systém*.

ZÁKLADNÍ ATRIBUTY SYSTÉMU

okolí systému je tvořeno množinou prvků, které nejsou součástí daného systému, ale jsou s ním významně svázány. Systém a jeho okolí jsou jednak objektivní skutečností, ale jsou dány i subjektivně, v závislosti na osobě zkoumající systém a na účelu zkoumání.

ZÁKLADNÍ ATRIBUTY SYSTÉMU

Veličiny (vazby), které zprostředkovávají vliv okolí na systém jsou **vstupy systému** a vnější projevy (vazby) systému, které reprezentují jeho vliv na okolí, jsou **výstupy systému**. Prvek systému, který má vazbu s okolím (vstupní nebo výstupní nebo vstupní i výstupní) nazýváme **hraničním prvkem systému** a množinu všech hraničních prvků nazýváme **hranice systému**.

ZÁKLADNÍ ATRIBUTY SYSTÉMU

otevřený systém je takový, u něhož dochází k energetické a informační výměně s jeho okolím.

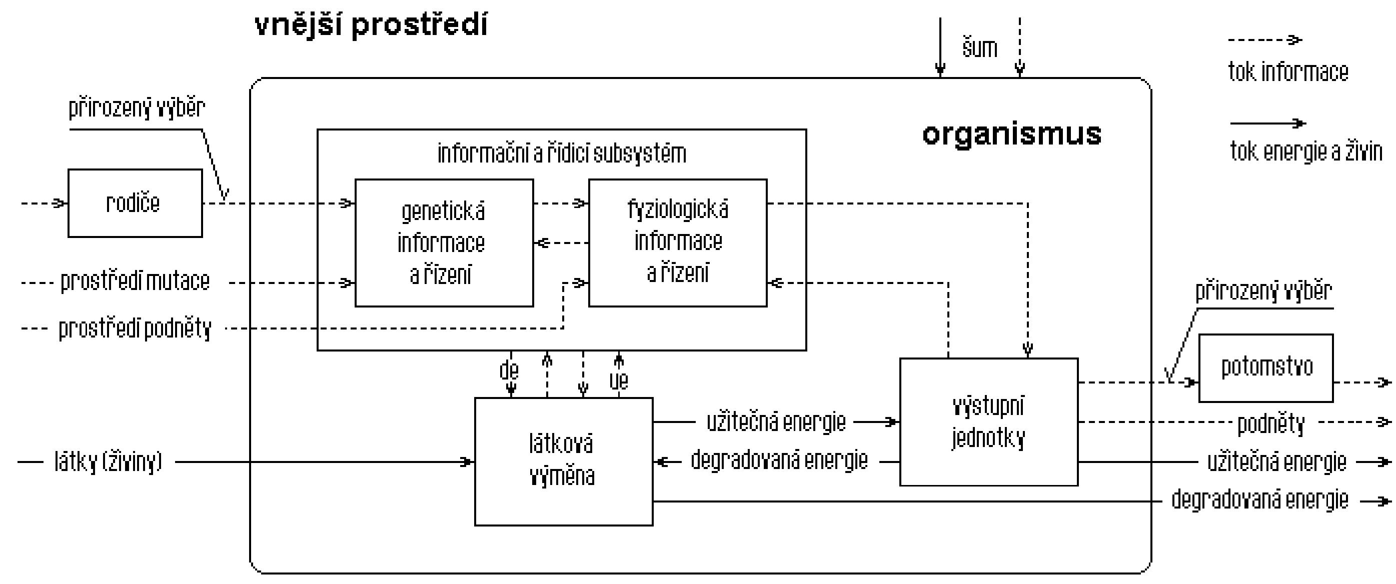
uzavřený (konzervativní) systém je naopak od svého okolí zcela izolován, nemá se svým okolím žádné vazby.

podmínka separability systému – systém je separabilní, jestliže jeho výstupy zpětně vlivem prostředí podstatně neovlivňují vstupy.

ZÁKLADNÍ ATRIBUTY SYSTÉMU

PŘÍKLADY

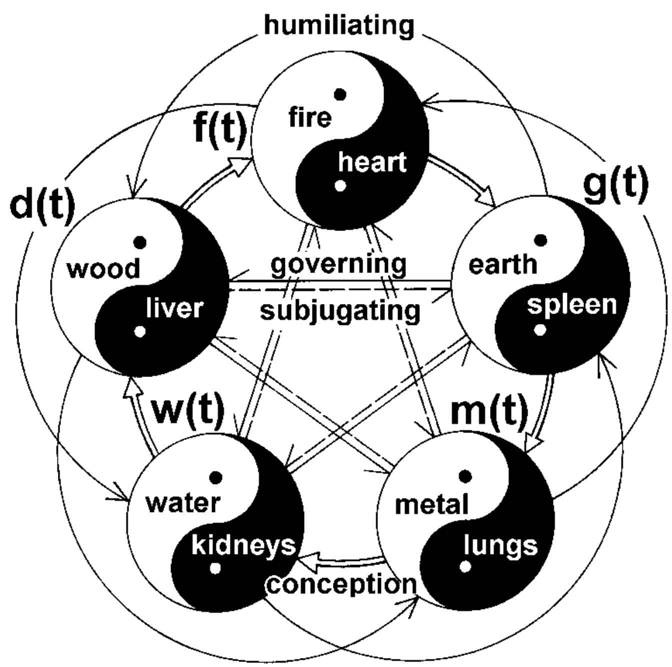
LIDSKÝ ORGANISMUS JAKO SYSTÉM



ZÁKLADNÍ ATRIBUTY SYSTÉMU

PŘÍKLADY

SYSTÉM PĚTI PRVKŮ KLASICKÉ ČÍNSKÉ MEDICÍNY A FILOSOFIE



NEFORMÁLNÍ ABSTRAKTNÍ POPIS SYSTÉMU

- ☑ **prvky** – části, ze kterých se systém skládá
- ☑ **proměnné** – slouží k popisu stavu prvků a jejich vývoje v čase;
- ☑ **vazby** – pravidla, dle kterých se prvky navzájem ovlivňují (případně mění své parametry) a tak určují vývoj chování v čase;
- ☑ **parametry** – zpravidla neproměnné (konstantní) charakteristiky prvků a vazeb systému;
- ☑ **základní předpoklady** (počáteční podmínky) – vyplývají ze specifikace;

NEFORMÁLNÍ ABSTRAKTNÍ POPIS SYSTÉMU

MODEL DRAVEC A KOŘIST

$$\Delta x_n - \Delta x_m = k_1.x(t).\Delta t - k_2.x(t).y(t).\Delta t = [k_1.x(t) - k_2.x(t).y(t)].\Delta t$$

$$\Delta y_n - \Delta y_m = [k_2.k_3.x(t).y(t) - k_4.y(t)].\Delta t$$

Prvky: populace dravce a populace kořisti

Proměnné: jejich četnosti, resp. hustoty - $x(t)$, $y(t)$

Vazby: výše uvedené rovnice

Parametry: $k_1, \ldots, k_4$

Základní předpoklady:

počáteční stavy obou populací

PROČ ABSTRAKTNÍ SYSTÉMY?

- ☑ modely zkoumaných reálných (biologických) objektů (procesů) -;
- ☑ popis algoritmů pro zpracování dat (technické, resp. matematické systémy);

FORMÁLNÍ (MATEMATICKÝ) POPIS SYSTÉMU

Matematické prostředky se různí podle:

- ☑ typu časové základny (spojité, diskrétní, nezávislé na časovém měřítku);
- ☑ charakteru proměnných (kvantitativní - spojité, diskrétní, logické; kvalitativní);
- ☑ determinovanosti proměnných a parametrů (deterministické, nedeterministické - pravděpodobnostní, fuzzy,…);
- ☑ vztahu k okolí (autonomní, neautonomní);
- ☑ proměnnosti parametrů (lineární, nelineární, časově proměnné);
- ☑ vztahu k minulosti (bez paměti, s pamětí);

FORMÁLNÍ (MATEMATICKÝ) POPIS SYSTÉMU

Matematické prostředky se různí podle:

- ☑ typu časové základny (spojité, diskrétní, nezávislé na časovém měřítku);
- ☑ charakteru proměnných (kvantitativní - spojité, diskrétní, logické; kvalitativní);
- ☑ determinovanosti proměnných a parametrů (deterministické, nedeterministické - pravděpodobnostní, fuzzy,…);
- ☑ vztahu k okolí (autonomní, neautonomní);
- ☑ proměnnosti parametrů (lineární, nelineární, časově proměnné);
- ☑ vztahu k minulosti (bez paměti, s pamětí);

LINEARITA

Systém je lineární, platí-li pro něj **princip superpozice**

Je-li y=f(x) převodní funkce systému, pak pro lineární systém musí platit

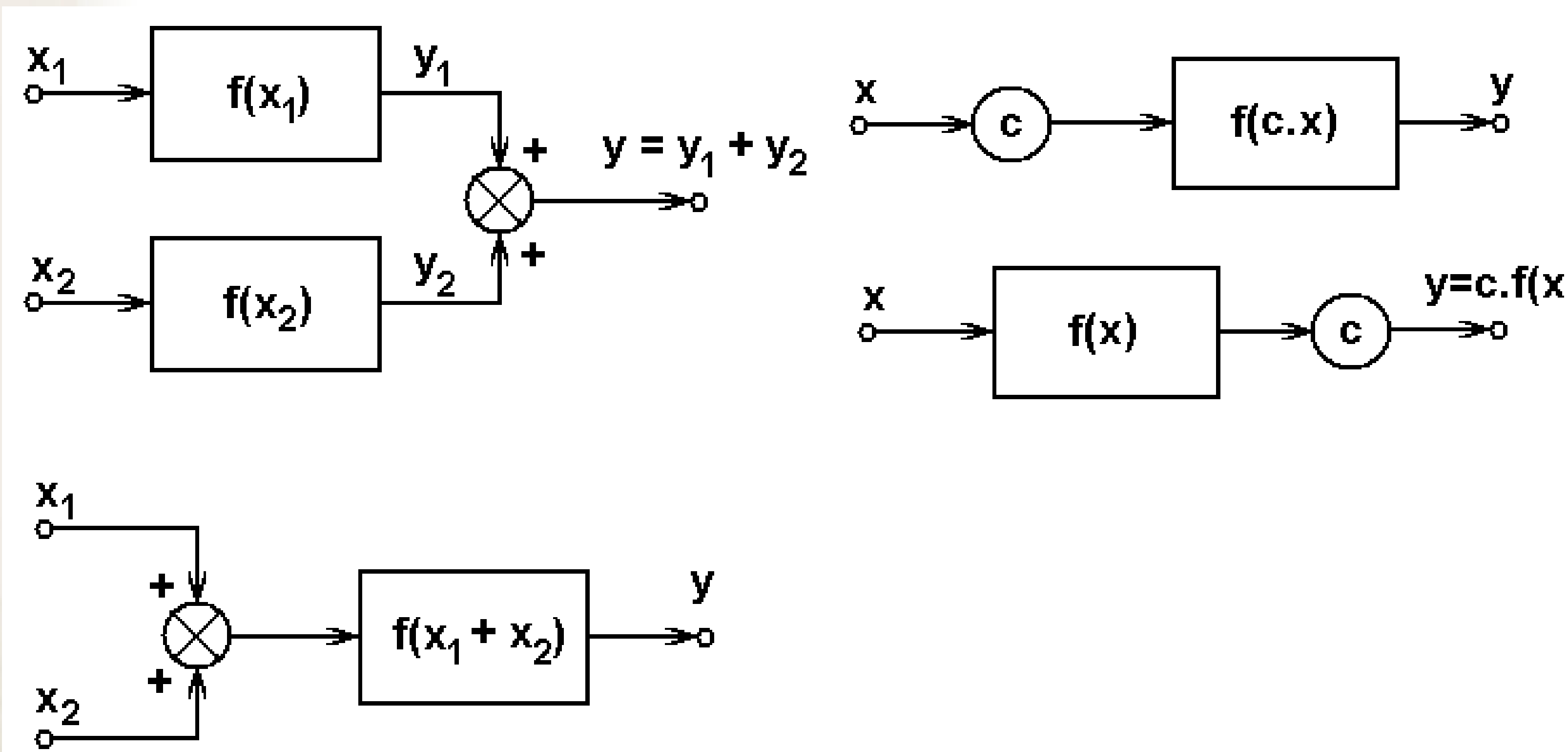
$$1)\ f(x_1) + f(x_2) = f(x_1 + x_2);$$

$$2)\ c.f(x) = f(c.x),\ c = \text{konst.}$$

LINEARITA

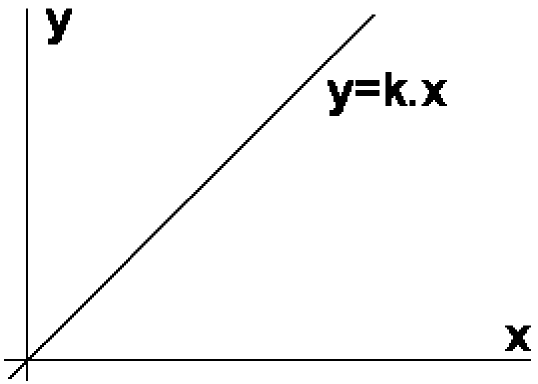
$$f(x_1) + f(x_2) = f(x_1 + x_2)$$

$$c.f(x) = f(c.x),\ c = \text{konst.}$$



LINEARITA

A to je jen tehdy, je-li $y=k.x$, kde k = konst.



1) $k.x_1 + k.x_2 = k.(x_1 + x_2)$

2) $c.k.x = k.c.x$

LINEARITA

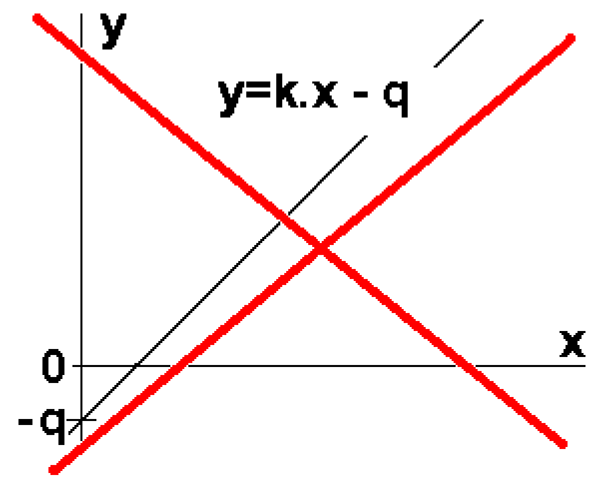
A neplatí to ani, když

$y=k.x-q$, kde k,q = konst.,

protože

1) $(k.x_1-q)+(k.x_2-q) \neq k.(x_1+x_2)-q$

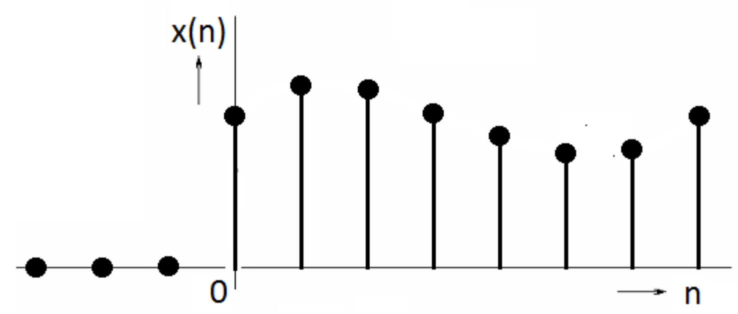
2) $c.(k.x-q) \neq (k.c.x-q)$



KAUZALITA

Kauzální (***příčinný***) je obecně takový systém, jehož výstup v každém časovém okamžiku t_0 závisí pouze na průběhu vstupní veličiny x(t) pro $t \leq t_0$ $\Rightarrow$ hodnota výstupu systému v každém okamžiku závisí pouze na vstupu v daném okamžiku a jeho průběhu v minulosti, nikoliv na budoucím průběhu vstupní veličiny. Systém, který tento požadavek nesplňuje, nazýváme ***nekauzální***, příp. ***anticipativní***. Nebo ještě jinak, systém je kauzální, pokud se výstup systému neobjeví dříve, než je na vstup přiveden vstupní veličina. Všechny rozumné reálné systémy jsou systémy kauzální.

Časové řady zpravidla začínají v určitém referenčním okamžiku, který nazýváme počátkem časové osy. Jako kauzální zprostředkovaně označujeme takové časové řady, pro které platí $x(n) = 0$ pro $n < 0$.



PŘÍKLAD
MODEL DYNAMIKY JEDNODRUHOVÉ POPULACE

stav populace je dán počtem jejích členů – s(n)

- ☑ autonomní lineární systém;
- ☑ neautonomní lineární systém;
- ☑ nelineární systém.

prvek systému/modelu jednodruhové populace je jediný $\Rightarrow$ systém je vždy 1. řádu.

je-li s(n) počet jedinců v populaci v čase n, je dána stavem populace s(n-1) v předešlém časovém okamžiku, modifikovaným procesy, které se v dané populaci odehrávají.

PŘÍKLAD
MODEL DYNAMIKY JEDNODRUHOVÉ POPULACE

AUTONOMNÍ LINEÁRNÍ SYSTÉM

dynamika jeho chování závislá pouze na vnitřních dějích

koeficient porodnosti **b** - definován podílem nově narozených jedinců ke všem jedincům populace za jednotkovou vzorkovací periodu ($b \geq 0$);

koeficient úmrtnosti **d** - podíl zemřelých jedinců vůči všem jedincům v populaci za jednotkovou vzorkovací periodu

PŘÍKLAD
MODEL DYNAMIKY JEDNODRUHOVÉ POPULACE

AUTONOMNÍ LINEÁRNÍ SYSTÉM

dynamika jeho chování závislá pouze na vnitřních dějích

koeficient porodnosti **b** - definován podílem nově narozených jedinců ke všem jedincům populace za jednotkovou vzorkovací periodu (musí platit $b \geq 0$)

koeficient úmrtnosti **d** - podíl zemřelých jedinců vůči všem jedincům v populaci za jednotkovou vzorkovací periodu ($d \in \langle 0; 1 \rangle$)

$$\mathbf{r} = b - d$$

počáteční stav populace s(0)

PŘÍKLAD
MODEL DYNAMIKY JEDNODRUHOVÉ POPULACE

počet nově narozených jedinců za čas $\langle n-1, n \rangle$ je úměrný stavu populace v čase n-1

$$s_b(n) = b.s(n-1)$$

počet zemřelých - $s_d(n) = d.s(n-1)$

$$s(n) = s(n-1)+s_b(n)-s_d(n) = s(n-1).(1+b-d) =$$
$$= s(n-1).(1+r)$$

při nulovém přírůstku (r = 0) stav populace v čase n roven stavu předchozí generace;

při r = 0,5 (jeden potomek na dva rodiče) je nový stav roven jeden a půl násobku stavu předchozí generace. To odpovídá situaci, kdy do další generace přežívají všichni jednotlivci z předchozí generace a navíc se objevují nově narození jedinci;

takto definovaný systém může být vhodný jako model populace, kdy délka života jejích členů je delší než doba dospívání, kterou reprezentuje vzorkovací krok;

PŘÍKLAD
MODEL DYNAMIKY JEDNODRUHOVÉ POPULACE

Dosadíme-li do definiční rovnice za s(n-1) podle ekvivalentního vztahu dostaneme

$$s(n) = s(n-1).(1+r) = s(n-2).(1+r)^2$$

atd., až z počáteční podmínky

$$s(n) = s(0).(1+r)^n$$

posloupnost {s(n)} je exponenciálně rostoucí pro $r>0$, exponenciálně klesající pro $r \in \langle -1, 0 \rangle$ a konstantní pro $r=0$.

Průběh řešení závisí pouze na hodnotách parametrů systému b, d, resp. r a na počáteční podmínce s(0).

Pro $r < -1$ má posloupnost {s(n)} kmitavý charakter, přičemž se mění polarita jejích hodnot. Tedy bez reálného praktického smyslu a významu.

PŘÍKLAD
MODEL DYNAMIKY JEDNODRUHOVÉ POPULACE

NEAUTONOMNÍ LINEÁRNÍ SYSTÉM

průběh stavové posloupnosti {s(n)} nebude závislý jen na dějích uvnitř populace, nýbrž i na změnách vyvolaných emigrací a imigrací z okolí systému

Pokud vyjádříme výměnu jedinců systémové populace s okolím proměnnou x(n), která představuje rozdíl počtu jedinců, kteří odešli, příp. přišli z okolního prostředí během časového intervalu ⟨n-1, n⟩, pak se definiční diferenční rovnice změní na

$$s(n) = s(n-1).(1+r) + x(n)$$

Průběh řešení už nebude záviset pouze na parametrech systému b, d, resp. r, nýbrž i na průběhu vstupní posloupnosti x(n).

PŘÍKLAD
MODEL DYNAMIKY JEDNODRUHOVÉ POPULACE

AUTONOMNÍ NELINEÁRNÍ SYSTÉM

Řešení diferenční rovnice lineárního autonomního systému $\{s(n)\}$ má exponenciální průběh. Pro $r>0$ je exponenciálně rostoucí.

Prostor, ve kterém populace existuje je ale omezený, stejně jako množství využitelné energie. Velikost populace se proto v reálných podmínkách nemůže exponenciálně zvyšovat do nekonečna.

Modifikujme definiční diferenční rovnici tak, že úmrtnost nebude konstantní, ale závislá na velikosti populace - čím větší populace, tím větší úmrtnost.

Uvažme tu nejjednodušší závislost - lineární. Parametr úmrtnosti je pak určen vztahem

$$d + c.s(n-1).$$

Diferenční rovnice se změní na

$$s(n)=s(n-1).(1+b-d-c.s(n-1))=s(n-1).(1+r-c.s(n-1))=$$
$$=(1+r).s(n-1)-c.s^2(n-1)=s(n-1).p(s,n)$$

PŘÍKLAD
MODEL DYNAMIKY JEDNODRUHOVÉ POPULACE

NEAUTONOMNÍ NELINEÁRNÍ SYSTÉM

do předchozí rovnice přibude člen x(n) před-stavující vstupní hodnotu

$$s(n)=s(n-1).(1+b-d-c.s(n-1))+x(n)=$$

$$= s(n-1).(1+r-c.s(n-1))+x(n) =$$

$$= s(n-1).p(s,n)+x(n)$$

resp. $s(n)-s(n-1).p(s,n) = x(n)$,

Protože parametr p(s,n) je funkcí stavu, který je v neautonomním případě současně i funkcí vstupu, nejsou vlastnosti takového systému určeny jen jeho vlastní strukturou (jako u lineárního systému), nýbrž závisí i na vlivu okolí.