

# C2142 Návrh algoritmů pro přírodovědce

## 12. Těžké problémy.

Tomáš Raček

Jaro 2021

# Typy problémů

---

V rámci teoretické analýzy nejčastěji rozlišujeme dva typy problémů:

## Rozhodovací problém

- ověření, zdali něco platí, nebo ne
- př. Existuje v grafu  $G$  cesta mezi vrcholy  $s$  a  $t$  délky nejvýše 10?
- odpověď: ANO  $\times$  NE

## Optimalizační problém

- cílem je nalezení nejlepšího řešení z množiny přípustných řešení
- př. Jaká je nejkratší cesta v grafu  $G$  mezi vrcholy  $s$  a  $t$ ?
- odpověď: konkrétní nejkratší cesta  $\times$  cesta neexistuje

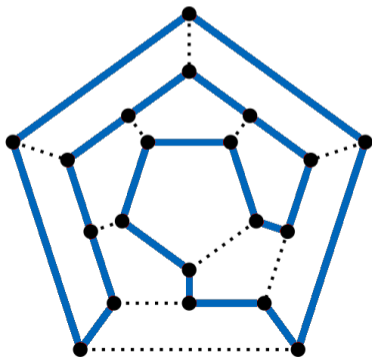
**Poznámka.** Pokud existuje polynomiální algoritmus pro rozhodovací problém, existuje i pro jeho optimalizační variantu (a naopak).

# Problém obchodního cestujícího (TSP)

---

**Problém.** Nalezněte nejkratší cestu, která prochází všemi zadanými městy a začíná a končí ve stejném městě.

**Alternativní definice.** Nalezněte v hranově ohodnoceném grafu Hamiltonovskou kružnici (= obsahující všechny vrcholy) minimální délky.



# TSP – možnosti řešení

---

**Hrubá síla.** Vygeneruji a ověřím délky všech možných cest.

- složitost přístupu  $O(n!)$
- v praxi nepoužitelné

**Dynamické programování**

- výrazně netriviální
- složitost  $O(n^2 2^n)$

**Aktuální stav řešení TSP.**

- nevíme, zdali existuje algoritmus se složitostí nižší než  $O(2^n)$
- v roce 2006 se podařilo najít řešení pro instanci problému o velikosti 85 900 měst  
→ 136 CPU let výpočtů

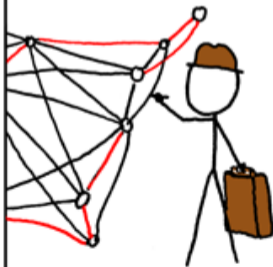
BRUTE-FORCE  
SOLUTION:

$$O(n!)$$



DYNAMIC  
PROGRAMMING  
ALGORITHMS:

$$O(n^2 2^n)$$



SELLING ON EBAY:

$$O(1)$$

STILL WORKING  
ON YOUR ROUTE?

SHUT THE  
HELL UP.



# Třídy problémů

---

**Pozorování.** Velká část dosud prezentovaných problémů byla bez větších problémů prakticky řešitelná. Opakem je například TSP.

V rámci teorie pak můžeme přemýšlet, zdali lze problémy dělit do kategorií podle složitosti jejich řešení.

Nejčastěji rozlišujeme dvě třídy problémů:

- P** třída problémů řešitelných v polynomiálním čase
- NP** třída problémů, pro které lze ověřit řešení v polynomiálním čase

**Poznámka.** V rámci zařazování problémů do těchto tříd vždy uvažujeme jejich rozhodovací varianty.

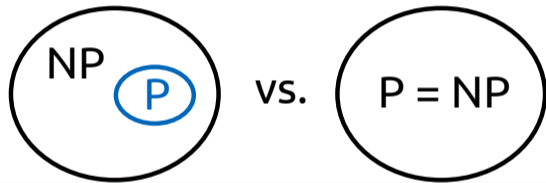
**Příklad.** TSP je ve třídě NP, nejkratší vzdálenost v grafu je v P i v NP.

## P vs. NP

---

**Zamyšlení.** Zjevně platí, že každý problém ve třídě P patří i do třídy NP, tedy  $P \subseteq NP$ .

**Otázka.** Platí to ale i naopak ( $NP \subseteq P$ )? Pokud ano, pak  $P = NP$ .



## P vs. NP

- otevřený problém, jeden z největších v matematice a informatice
- jeden ze sedmi problémů milénia (Millennium Prize Problem → odměna 1 milion dolarů)

# P = NP

---

If  $P = NP$ , then the world would be a profoundly different place than we usually assume it to be. There would be no special value in 'creative leaps,' no fundamental gap between solving a problem and recognizing the solution once it's found. Everyone who could appreciate a symphony would be Mozart; everyone who could follow a step-by-step argument would be Gauss...

Scott Aaronson, MIT



# NP-úplné problémy

---

**Pozorování.** I v rámci třídy NP jsou problémy, které jsou různě těžké.

**NP-úplné problémy** jsou nejtěžší problémy ve třídě NP.

- každý problém v NP lze převést na NP-úplný problém v polynomiálním čase (existuje polynomiální redukce)
- rozhodovací varianta TSP je NP-úplný problém
- pro žádný NP-úplný problém není znám polynomiální algoritmus

## Možnosti řešení P vs. NP

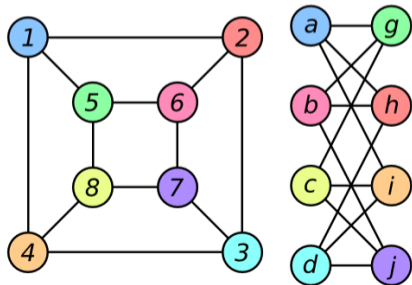
1. Ukázat, že pro některý NP-úplný problém nelze zkonstruovat polynomiální algoritmus. Pak  $P \neq NP$ .
2. Nalézt polynomiální algoritmus pro libovolný NP-úplný problém. Pak  $P = NP$ .

# Problémy v NP – příklady

**Zamyšlení.** Předpokládejme  $P \neq NP$ . Existují problémy, které jsou v NP, ale nejsou NP-úplné?

Pravděpodobně následující:

- prvočíselný rozklad
- izomorfismus grafů



# Prvočíselný rozklad

---

Úkol. Rozložte následující číslo na prvočísla:

135066410865995223349603216278805969938881475605  
667027524485143851526510604859533833940287150571  
909441798207282164471551373680419703964191743046  
496589274256239341020864383202110372958725762358  
509643110564073501508187510676594629205563685529  
475213500852879416377328533906109750544334999811  
150056977236890927563

- ekvivalentní rozluštění RSA-1024
- odměna 100 000 dolarů
- soutěž skončila v roce 2007

# Travelling salesman (2012)



## Travelling Salesman

Drama / Mysteriózní / Thriller / Sci-Fi  
USA, 2012, 80 min

Hrají: **Steve West**

### Obsah

Čtveřice geniálních matematiků objeví v průběhu úspěšného výzkumu problému P versus NP algoritmus rapidně zrychlující výpočetní operace. Jejich objev může mít obrovské důsledky. Jak pozitivní, v podobě mohutné akcelerace biologického a medicínského vývoje, tak negativní, neboť nový algoritmus mj. umožňuje překonat moderní šifrování během několika vteřin. Poté, co vláda Spojených států nabídne každému z nich 10 milion dolarů za exkluzivní přístup k jejich části algoritmu, musí se čtveřice vypořádat s morálními i praktickými problémy, které jejich rozhodnutí přináší. (*Slaboproud*)

# Vybrané příklady NP-úplných problémů I

---

## Problém splnitelnosti výrokových formulí

- formule výrokové logiky s proměnnými  $A_1, \dots, A_n$
- Existuje přiřazení proměnných takové, že se zadaná formule vyhodnotí na TRUE?
- Příklad:  $(\neg A_1 \vee A_2) \wedge A_3 \wedge \neg A_1$  je splnitelná např. pro  $A_1 = 0, A_2 = 0, A_3 = 1$ ,

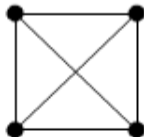
## Klika

- Existuje v grafu klika (= podgraf, který je úplným grafem) o  $k$  vrcholech?

$K_3$



$K_4$



$K_5$



# Vybrané příklady NP-úplných problémů II

---

## Problém dvou loupežníků

- Lze rozdělit multimnožinu nezáporných čísel na dvě tak, že v obou bude součet obsažených čísel stejný?

## Izomorfismus podgrafu

- Je graf  $H$  izomorfní nějakému podgrafu grafu  $G$ ?

## Problém batohu

- mějme batoh o nosnosti  $W$  a  $n$  předmětů, každý o hmotnosti  $w_i$  a hodnotě  $v_i$
- Lze do batohu umístit předměty o celkové hodnotě alespoň  $V$ ?

## Součet podmnožiny

- Lze najít podmnožinu zadané množiny celých čísel takovou, že součet jejích prvků je nula?

MY HOBBY:  
EMBEDDING NP-COMPLETE PROBLEMS IN RESTAURANT ORDERS

CHOTCHKIES RESTAURANT

APPETIZERS

MIXED FRUIT	2.15
FRENCH FRIES	2.75
SIDE SALAD	3.35
HOT WINGS	3.55
MOZZARELLA STICKS	4.20
SAMPLER PLATE	5.80

SANDWICHES

BARBECUE	6.55
----------	------



General solutions get you a 50% tip.

# P vs. NP – poznámky

---

## Možné výsledky

- $P = NP$ , ale nejlepší algoritmus pro TSP se složitostí  $\Omega(n^{100})$
- $P \neq NP$ , ale algoritmus pro TSP se složitostí  $O(2^{0,00\dots01 \cdot n})$

## Možnosti řešení

1. přijmout exponenciální algoritmus
2. omezit se na speciální případy (př. izomorfismus stromů je v P)
3. přijmout suboptimální řešení (užitím hladových algoritmů, heuristik)