

Homogenní lineární pásek s buzením a izolací

Obecná rovnice vedení tepla v materiálu hustoty $\rho[\text{kg}\cdot\text{m}^{-3}]$ o tepelné kapacitě $c_p[\text{J}\cdot\text{kg}^{-1}\cdot\text{K}^{-1}]$ a tepelné vodivosti $\lambda[\text{W}\cdot\text{m}^{-1}\cdot\text{K}^{-1}]$ má tvar

$$\rho c_p \frac{\partial T}{\partial t} = \nabla(\lambda \nabla T) + q, \quad (1)$$

kde $q[\text{W}\cdot\text{m}^{-3}]$ je objemová hustota pohlcovaného výkonu.

Pravá strana rovnice (1) vyjadřuje tepelnou bilanci elementárního objemu (včetně vnějších vlivů), kdežto levá strana zahrnuje vyrovnání případného hromadění energie.

Nás bude v rámci budování testovacího řešení zajímat zjednodušený případ jednorozměrného homogenního ($\lambda = \text{konst}$) materiálu v ustáleném stavu, potom

$$\frac{\partial T}{\partial t} := 0 \Rightarrow \lambda \Delta T + q = 0 \quad (2)$$

představuje mírné zobecnění Laplaceovy rovnice, rovnici Poissonovu.

Za okrajové podmínky zvolíme jeden konec pásku v kontaktu s termostatem (Dirichletova podmínka, $T[N] \equiv T_N$) a druhý pod vlivem např. excitačního laseru (předpokládáme osvit pouze prvního elementu, tedy pouze $q[0] \neq 0$). Podstatné je, že přítomnost q na konci pásku nepředstavuje okrajovou podmínku, tu musíme explicitně doplnit – zvolíme např., že osvětlený konec pásku je tepelně izolován od okolí (homogenní Neumannova podmínka, $T[-1] = T[1]$).

Budeme úlohu pro jednoduchost řešit v 1D, s rovnoměrnou diskretizací o kroku h . Pro všechny uzly kromě krajních tedy máme Laplaceovu rovnici ve tvaru

$$1 \leq i \leq N-1 : \quad \frac{T[i-1] - 2T[i] + T[i+1]}{h^2} = 0. \quad (3)$$

Tuto soustavu si můžeme přepsat do tvaru $2T[i] = T[i-1] + T[i+1]$, a vypsát explicitně v prvních dvou vnitřních uzlech:

$$i = 1 : \quad 2T[1] = T[0] + T[2]$$

$$i = 2 : \quad 2T[2] = T[1] + T[3].$$

Rovnici s nižším indexem můžeme použít k vyloučení $T[1]$ z rovnice pro $i=2$:

$$i = 2 : \quad 3T[2] = T[0] + 2T[3],$$

čímž se nám podařilo v rovnici pro dané i nahradit posloupnost třech po sobě jdoucích uzlů uzlem aktuálním, o jedno vyšším a nultým. Tímto způsobem můžeme postupovat uzel za uzlem, až $T[0]$ vložíme do všech rovnic:

$$1 \leq i \leq N-1 : \quad T[0] = (i+1)T[i] - iT[i+1] \quad (4)$$

Vypíšeme-li nyní získané vztahy (4) v nejvyšších dvou vnitřních uzlech,

$$i = N-1 : \quad T[0] = NT[N-1] - (N-1)T[N]$$

$$i = N-2 : \quad T[0] = (N-1)T[N-2] - (N-2)T[N-1],$$

můžeme první z rovnic využít k elimiaci $T[N-1]$ z rovnice druhé:

$$i = N-2 : \quad 2T[0] = NT[N-2] - (N-2)T[N],$$

čímž jsme v dané rovnici dosáhli výskytu pouze prvního, posledního a aktuálního uzlu. Takto můžeme postupovat pro všechny další nižší rovnice, až obecně obdržíme

$$1 \leq i \leq N-1 : \quad T[i] = \frac{N-i}{N}T[0] + \frac{i}{N}T[N] \quad (5),$$

takže řešení Laplaceovy rovnice nutně spojuje okrajové hodnoty lineárně.

Hodnotu na ozářeném konci pásku neznáme, víme ale, že ozářený kousek pásku je tepelně izolován. Můžeme tedy psát

$$i = 0 : \quad \frac{T[-1] - 2T[0] + T[1]}{h^2} = \frac{-2T[0] + 2T[1]}{h^2} = -\frac{q[0]}{\lambda}$$

odkud již přímo s využitím (5) pro $i=1$ dostáváme

$$T[0] - T[N] = \frac{q[0]h^2N}{2\lambda}$$

kde na pravé straně stojí přímo hledaná tepelná oprava získaná působením laseru. Získaný vztah je však na první pohled závadný: hledaná oprava podle něj explicitně závisí na počtu elementů diskretizace - takové chování je nepřijatelné. Jistou pomocí vnést do získaného vztahu fyzikální veličiny, v našem případě délku vzorku $l=hN$:

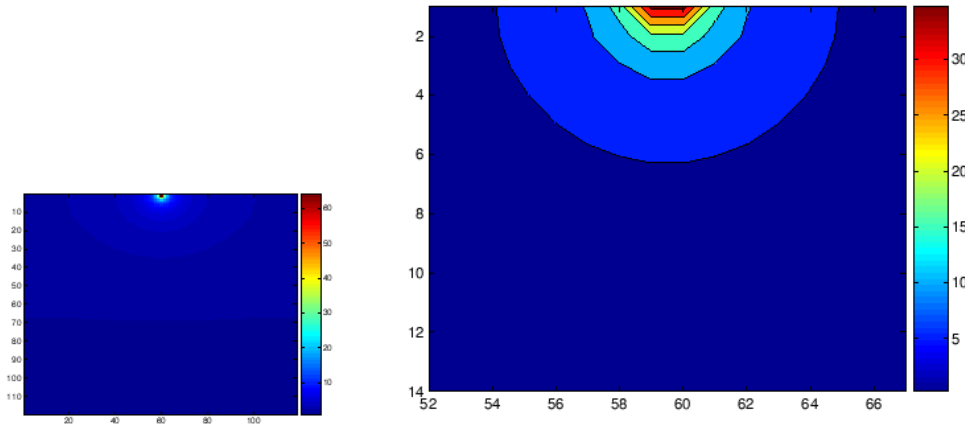
$$T[0] - T[N] = \frac{q[0]hl}{2\lambda}$$

Nyní je ovšem jasné, že krok sítě se nám proti počtu elementů nikdy nepodaří zcela vyvážit a tepelný excés stále nepřijatelně závisí na parametrech simulace. Zde je potřebný fyzikální vhléd: výkon laseru při fokusaci na vzorek zpravidla popisujeme plošným výkonem P soustředěným na povrchu, $P[\text{W.m}^{-2}]$, přičemž samozřejmě pro osvit pouze prvního elementu $P=q[0]h$. Nyní již snadno

$$T[0] - T[N] = \frac{Pl}{2\lambda} \tag{6}$$

Přítomnost h při použití plného výkonu laseru tak byla vlastně v pořádku: jelikož se u q jedná o objemový výkon, zmenšování diskretizačního kroku vedlo nutně k celkově menšímu množství pohlcené energie a tepelný excés tedy musel na h záviset.

Po provedení plné simulace můžeme v rámci kontroly řešení porovnat teplotní excés v místě buzení s hodnotou získanou analyticky ve vztahu (6). Ukázka reálné simulace (metodou konečných prvků) vedení tepla podle předchozí úlohy, ve 2D:



(a) $P_0T_r/\lambda = 5 \times 10^{-4}$ - celek

(b) $P_0T_r/\lambda = 5 \times 10^{-4}$ - detail

Ohřátí vzorku GaAs tloušťky 0.2 mm při Ramanské spektroskopii s laserem He-Ne 50 mW fokusovaného do stopy cca $4 \mu\text{m}$. Krychlová oblast o hraně 120 dílků s výběrem omezeným symetrií. Doba výpočtu cca 1 hod. Barevná škála odpovídá změně teploty oproti údaji termostatu (připojen k dolní části vzorku). Vpravo výřez v okolí místa excitace.