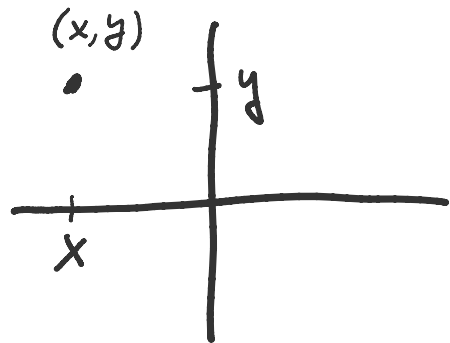


Komplexní
číslo: dvojice (x, y)
 $x, y \in \mathbb{R}$

Geometricky: bod v $\mathbb{R}^2$

Označme přes
 $z = (x, y)$



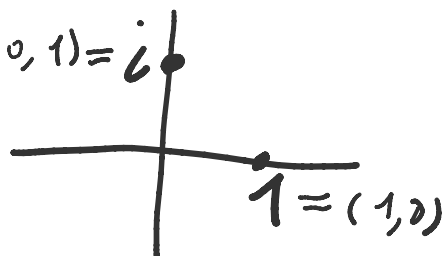
$\mathbb{C}$ -množina kompl. čísel
 $(\mathbb{C} \sim \mathbb{R}^2)$

Číslo ve tvaru $(x, 0)$
identifikujeme z resp. reálnými
čísly $x \in \mathbb{R}$

Takto, $\mathbb{R} \subset \mathbb{C}$ ($\begin{matrix} \text{osa } x \\ \text{rovina } (x, y) \end{matrix}$)

hvažujeme speciální číslo $i \in \mathbb{C}$,
imaginární

uvazujeme speciální číslo $z \in \mathbb{C}$,
 $i = (0, 1)$ — imaginární jednotka $(0, 1) = i$



$$z = (x, y) = x \cdot 1 + y \cdot i$$

Pišme $\boxed{z = x + iy}$

$x = \operatorname{Re} z$ — reálná část čísla z

$y = \operatorname{Im} z$ — imaginární část čísla z

Operace s kompl. čísly:

1) Sečítání: přesně jako pro vektory z $\mathbb{R}^2$

$$z = x + iy, w = u + iv \Rightarrow z + w = (x + u) + i(y + v)$$

2) Odčítání: analog. $z - w = (x - u) + i(y - v)$

3) Násobení: to už je delikátnější!

Formální definice: $z = x + iy, w = u + iv \Rightarrow$
 $z \cdot w = (xu - yv) + i(xv + yu)$

Ale lepší počítat jinak...

Hlavní pravidlo: $\boxed{i^2 = -1}$

Tedy: $(x + iy)(u + iv) = xu + xvi + yui + yvi^2 =$
 $= (xu - yv) + i(xv + yu)$

$$-(x-y)(x+iy)(x-iy)$$

Příklady

$$2+3i+i(3-i)=2+3i+3i+1=3+6i$$

$$(1+i)(1-i)=1+i-i+1=2$$

Komplexne sdružené číslo:

$$\overline{2-3i}=2+3i$$

$$z=x+iy$$

$$\bar{z}=x-iy \text{ — komplex. sdružené číslo}$$

Hlavní vlastnost: $z \cdot \bar{z} = (x+iy)(x-iy) = x^2 + y^2$

Zejména, $z \cdot \bar{z}$ je reálné číslo!

4) Dělení: $z=x+iy$, $w=u+iv$, $w \neq 0$

Jak vypočítat $\frac{z}{w}$? (A jak definovat?)

$$\frac{z}{w} = \frac{x+iy}{u+iv} = \frac{(x+iy)(u-iv)}{(u+iv)(u-iv)} = \frac{xu+yv+i(yu-xv)}{u^2+v^2}$$

Ale vzorec je fakt komplikován $\Rightarrow$

to je lepší vždy vypočítat podle

„nasobení sdružením čísel“, jako vyše

$$\frac{2+i}{1-i} = \frac{(2+i)(1+i)}{(1-i)(1+i)} = \frac{2-1+i+2i}{1+1} = \frac{1+3i}{2} = \frac{1}{2} + \frac{3}{2}i$$

Výsledek: definovali jsme množinu kompl

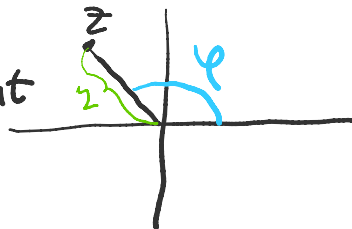
... π ^{-pole} ... všechny arifmeticki

Výsledek: definování $\mathbb{C}$ jako pole
 čísel $\mathbb{C}$; ve množině $\mathbb{C}$ máme vše aritmeticky
 operace, stejně jako v $\mathbb{R}$, a mají stejné vlastnosti!
 (je možné ověřit).

Jeden rozdíl: nemáme porovnání komplex. čísel
 (není možné definovat co je $z < w$, a mít
 obecní vlastnosti naopak).

Modul a Argument

$r = |z|$ - modul
 $\varphi = \text{Arg } z$ - argument



Používáme polární
 souřadnice z jako
 bodu v $\mathbb{R}^2$, (r, φ)

$$z = x + iy \Rightarrow$$

$$|z| = \sqrt{x^2 + y^2}$$

$$\varphi: \begin{cases} \cos \varphi = \frac{x}{r} \\ \sin \varphi = \frac{y}{r} \end{cases}$$

$$\begin{cases} x = r \cos \varphi \\ y = r \sin \varphi \end{cases}$$

$$z = r(\cos \varphi + i \sin \varphi)$$

geom. tvar komplex. čísla!

Existuje!
 taková
 reprezentace
 (přesně
 na
 $\varphi \in \varphi + 2\pi k$)

Poznámka: $\text{Arg } z$ není jednoznačný; je vždy

vypadá jak $\varphi_0 + 2\pi k$, $k \in \mathbb{Z}$, φ_0 - konkrétní uhlík

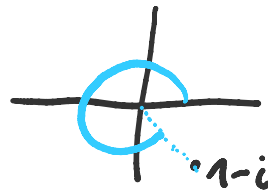
Možnost je uvažovat $\text{arg } z$ - právě jedna hodnota
 $\text{Arg } z$ uvnitř $[0, 2\pi)$.

... ..

$\arg z$ určuje $2\pi, 4\pi, \dots$

Poznámka: číslo $z=0$ nemá $\arg z$ (ale $|z|=0$).

Příklad: $z=1-i$



$$|z| = \sqrt{1+1} = \sqrt{2}$$

$$\arg z = \frac{7\pi}{4}; \quad \text{Arg } z = \frac{7\pi}{4} + 2\pi k = -\frac{\pi}{4} + 2\pi n$$

$$\begin{cases} \cos \varphi = \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \sin \varphi = -\frac{1}{\sqrt{2}} \end{cases}$$

Vlastnosti

$$1) |zw| = |z| \cdot |w|; \quad \left| \frac{z}{w} \right| = \frac{|z|}{|w|}$$

$$2) |z+w| \leq |z| + |w|; \quad ||z| - |w|| \leq |z-w|$$

$$3) \arg(zw) = \arg z + \arg w; \quad \arg\left(\frac{z}{w}\right) = \arg z - \arg w$$

Důkaz: $z = \rho(\cos \varphi + i \sin \varphi); w = \rho(\cos \theta + i \sin \theta)$

$$\Rightarrow z \cdot w = \rho \cdot \rho (\cos \varphi \cos \theta - \sin \varphi \sin \theta + i \sin \varphi \cos \theta + i \sin \theta \cos \varphi) = \rho^2 (\cos(\varphi + \theta) + i \sin(\varphi + \theta)) \Rightarrow$$

$$|z| \cdot |w| = |zw|; \quad \arg(zw) = \varphi + \theta + 2\pi k = \arg z + \arg w$$

$$\frac{1}{w} = \frac{\bar{w}}{w\bar{w}} = \frac{1}{\rho^2} \rho (\cos \theta - i \sin \theta) = \frac{1}{\rho} (\cos(-\theta) + i \sin(-\theta))$$

$$\Rightarrow \arg \frac{1}{w} = -\arg w; \quad \left| \frac{1}{w} \right| = \frac{1}{|w|} \Rightarrow \left| \frac{z}{w} \right| = \frac{|z|}{|w|};$$

$$\arg\left(\frac{z}{w}\right) = \arg z + \arg\left(\frac{1}{w}\right) = \arg z - \arg w$$

2) - je pouze nerovnice trojúhelníka.

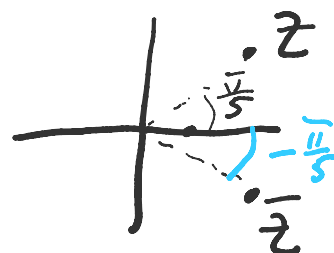


2) - je pouze rovnice $z^n = w$

Příklad: $|z|=2$, $\arg z = \frac{\pi}{5}$; $w = \frac{1}{\bar{z}}$

Učít $|w|$, $\arg w$.

$$|w| = \left| \frac{1}{\bar{z}} \right| = \frac{1}{|\bar{z}|} = \frac{1}{|z|} = \left(\frac{1}{2} \right)$$



$$\arg(\bar{z}) = -\frac{\pi}{5} + 2\pi k \Rightarrow$$

$$\arg\left(\frac{1}{\bar{z}}\right) = -\arg(\bar{z}) = \left(\frac{\pi}{5} \right) + 2\pi k$$

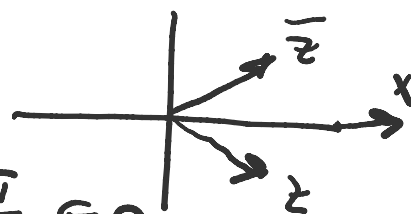
Příklad: $|z|=1$, $\arg z = -\frac{\pi}{10}$; $w = z + \bar{z}$

Učít $|w|$, $\arg w$

$$z = 1 \cdot \left(\cos \frac{\pi}{10} - i \sin \frac{\pi}{10} \right)$$

$$\bar{z} = \cos \frac{\pi}{10} + i \sin \frac{\pi}{10} \Rightarrow z + \bar{z} = 2 \cos \frac{\pi}{10} \in \mathbb{R}$$

$$|w| = 2 \cos \frac{\pi}{10}, \arg w = 0.$$



Výsledek pro mocnění: $z = r(\cos \varphi + i \sin \varphi)$

$$z^n = r^n (\cos n\varphi + i \sin n\varphi)$$

Příklad: $(1+i)^{1000} = ?$ $z = 1+i$
 $|z| = \sqrt{2}$



$$\begin{cases} \cos \varphi = \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \sin \varphi = \frac{1}{\sqrt{2}} \end{cases} \Rightarrow \arg z = \frac{\pi}{4}$$

$$\Rightarrow z^{1000} = (\sqrt{2})^{1000} (\cos 250\pi + i \sin 250\pi) = 2^{500}$$

Definice: $\forall z \in \mathbb{C}$, w je n -odmocnina z ,

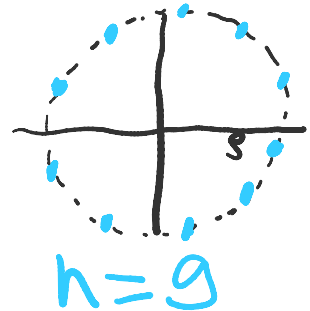
když $w^n = z$. Označíme $w \in \sqrt[n]{z}$

Věta: $\forall z \neq 0$ má přesně n různých n -odmocnin.

Věta: $\forall z \neq 0$ má přesně n různých n -odmocnin.
Množinu všech takových označíme $\sqrt[n]{z}$. Když

$z = r(\cos \varphi + i \sin \varphi)$, každá odmocnina $w = \rho(\cos \theta + i \sin \theta)$
může být zjištěna přes: $\begin{cases} \rho^n = r \\ n\theta = \varphi + 2\pi k, k \in \mathbb{Z} \end{cases}$

Prakticky, to stačí převzít přesně n hodnot k po sobě.
(např. $k = 0, 1, \dots, n-1$).



Důležitý případ: $\sqrt{-a}$, $a > 0$, $|-a| = a$,

$$\text{Arg}(-a) = \pi + 2\pi k \Rightarrow \sqrt{-a} = \begin{cases} i\sqrt{a} \\ -i\sqrt{a} \end{cases} \begin{matrix} \text{obecná} \\ \text{reálná} \\ \text{odmocnina} \end{matrix} \quad \begin{matrix} i\sqrt{a} \\ -a \\ -i\sqrt{a} \end{matrix}$$

Výsledek sdílejte!!

Příklad: $\sqrt{i} = ?$ Pro $z = i$: $r = 1$, $\varphi = \frac{\pi}{2} + 2\pi k$

$$\Rightarrow \begin{cases} \rho^2 = 1 \Rightarrow \rho = 1 \\ 2\theta = \frac{\pi}{2} + 2\pi k \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \theta = \frac{\pi}{4} \\ \theta = \frac{5\pi}{4} \end{cases}$$

$$w_1 = 1 \cdot (\cos \frac{\pi}{4} + i \sin \frac{\pi}{4}) = \frac{1}{\sqrt{2}} + i \cdot \frac{1}{\sqrt{2}}$$

$$w_2 = 1 \cdot (\cos \frac{5\pi}{4} + i \sin \frac{5\pi}{4}) = -\frac{1}{\sqrt{2}} - i \cdot \frac{1}{\sqrt{2}}$$



$$w^2 = i$$

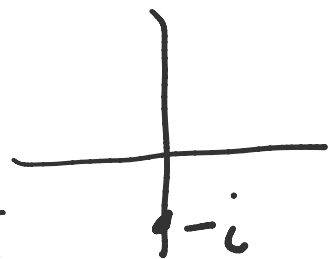
Příklad: $\sqrt[3]{-i} = ?$

$$|-i| = 1; \text{arg}(-i) = \frac{3\pi}{2}$$

$$\begin{cases} \rho^3 = 1, \rho = 1 \\ 3\theta = \frac{3\pi}{2} + 2\pi k \end{cases}$$

$$\theta = \begin{cases} \frac{\pi}{2} \\ \frac{7\pi}{6} \\ \frac{11\pi}{6} \end{cases}$$

$$w_1 = i; w_2 = \cos \frac{7\pi}{6} + i \sin \frac{7\pi}{6} = -\frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{1}{2}i$$



$$w_1 = i; w_2 = \cos \frac{7\pi}{6} + i \sin \frac{7\pi}{6} = -\frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{1}{2}i$$

$$w_3 = \cos \frac{11\pi}{6} + i \sin \frac{11\pi}{6} = \frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{1}{2}i$$

Řešení kvadratických rovnic

$$az^2 + bz + c = 0, a, b, c \in \mathbb{C}, a \neq 0$$

Ma 2 kořeni z_1, z_2 (může být $z_1 = z_2$),

a platí obecný vzorec:

$$z_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} \text{ - kompl. odmocnina!}$$

Příklad: $z^2 + 4 = 0; z^2 = -4, z = \sqrt{-4} = \begin{bmatrix} 2i \\ -2i \end{bmatrix}$

Příklad: Určete a_{1000} , když $a_0 = a_1 = 1$,

$$a_{n+1} = 2a_n - 4a_{n-1} \Leftarrow$$

V = prostor všech řešení

$(a_0, a_1) \xrightarrow{\varphi} \text{řešení } \{a_n\} \in V$

φ - bijekce $\Rightarrow$ prostor řešení

(reálných nebo kompl.) je 2-dimenz.

$\Rightarrow$ to stačí najít 2 lin. nezav.

Řešení $\{x_n\}, \{y_n\}, \{a_n\} = A\{x_n\} + B\{y_n\}$

Nahradíme $a_n = \lambda^n \Rightarrow$

Nahradíme $a_n = \lambda^n \Rightarrow$

$$\lambda^{n+1} = 2\lambda^n - 4\lambda^{n-1} \Leftrightarrow \lambda^2 - 2\lambda + 4 = 0$$

$$\lambda_{1,2} = \frac{2 \pm \sqrt{-12}}{2}, \lambda_{1,2} = 1 \pm i\sqrt{3}^{\text{real.}}$$

$$\Rightarrow a_n = C_1 (1+i\sqrt{3})^n + C_2 (1-i\sqrt{3})^n$$

Domácí úloha: dokončit řešení.

Příklad: $iz^2 - (1+2i)z + 2 = 0$

$$z = \frac{1+2i + \sqrt{1-4+4i-8i}}{2i} = \frac{1+2i + \sqrt{(1-2i)^2}}{2i} = \begin{cases} \frac{4i}{2i} = 2 \\ \frac{2}{2i} = \frac{i}{i^2} = -i \end{cases}$$

Geometrie $\mathbb{C}$

$$\mathbb{C} \simeq \mathbb{R}^2$$

* křivky

* oblasti

Křivky v $\mathbb{C}$

Křivka: zobrazení (spojité)

$$\gamma: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$$

$$\overline{[a, b]} \rightarrow \mathbb{C}$$

$$\{x(t), y(t)\}, t \in [a, b], (x, y) \in \mathbb{R}^2$$

$$t \rightarrow z(t)$$

„křivka“ $\neq$ „nosič křivky“

Příklad:

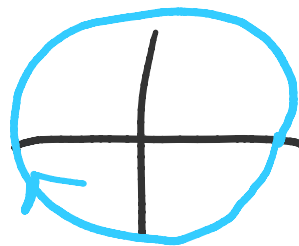
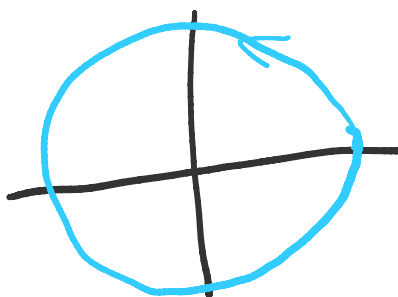
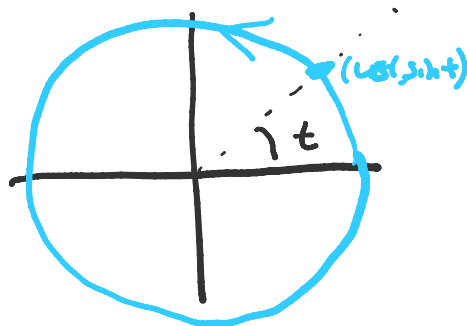
$$[0, 2\pi] \rightarrow \mathbb{C}$$

$$t \rightarrow (\cos t, \sin t)$$

$$[0, 4\pi] \rightarrow \mathbb{C}$$

$$t \rightarrow (\cos t, \sin t)$$

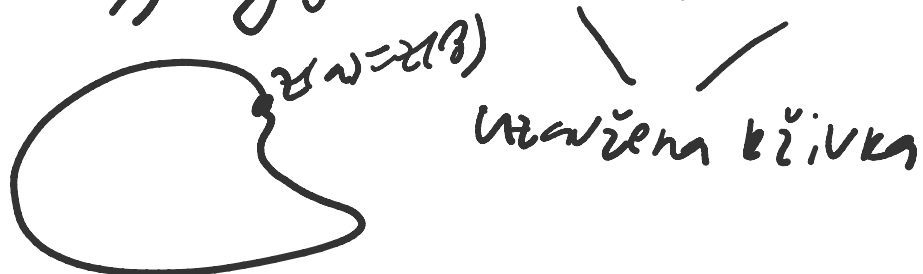
$$t \rightarrow (\cos t, -\sin t)$$



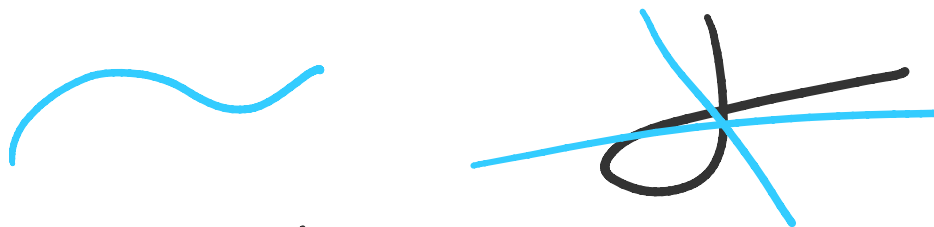
Normálně, používáme

takto křivku $z(t)$ pro $t \in [a, b]$

takovy kružnice, pro který
 $t \rightarrow z(t)$ je bijekce, nebo
 bijekce „vyjma“ $z(a) = z(b)$



nejde o samo křižovatky



když uvažujeme jen trasy
 křivky, pouze směr zůstává
 jako „nerozlišitelnost“

Poznámka: uvažujeme trasy

nekonečné křivky

$$[a, \infty) \rightarrow \mathbb{C} \quad z(t)$$

$$(-\infty, +\infty) \rightarrow \mathbb{C} \quad z(t)$$

Důležité typy křivek

1) kružnice

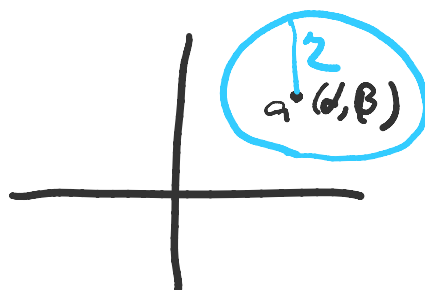
$$(x-\alpha)^2 + (y-\beta)^2 = r^2$$

$$a = \alpha + \beta i$$

$$|z - a| = r$$

komplexní
rovnice
kružnicí

$$C_r(a)$$

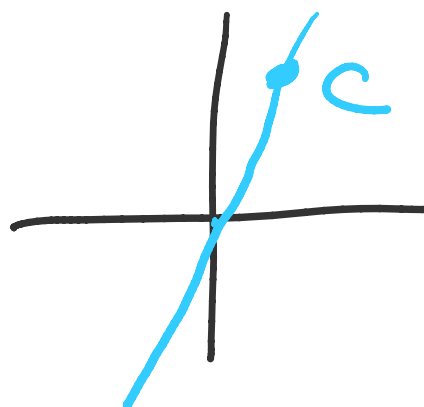


Param. popis: $z(t) = a + r(\cos t + i \sin t)$

2) Přímka L

a) Prochází přes 0

$$L = \{tc\}, t \in \mathbb{R}$$

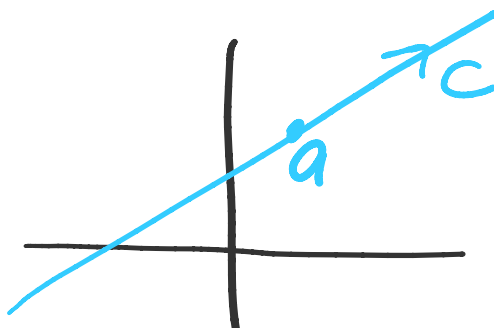


b) Obecná přímka: $L = \{a + ct\}, t \in \mathbb{R}$

c) Důležité spec.

případ: $L \parallel OX$

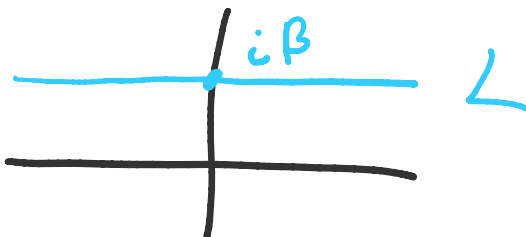
nebo $L \parallel OY$



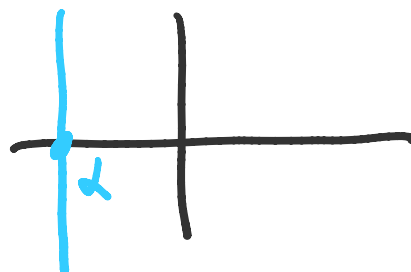
nebo $\angle \parallel OX$



$$L = \{ \operatorname{Im} z = \beta \}$$

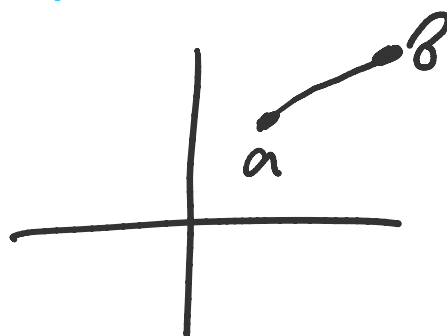


$$L = \{ \operatorname{Re} z = \alpha \}$$



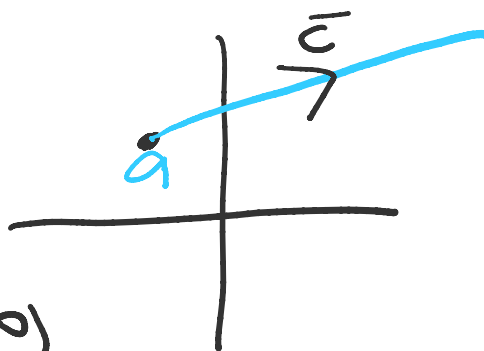
3) Segment

$$\{ z(t) = a + t(b-a) \}$$
$$0 \leq t \leq 1$$



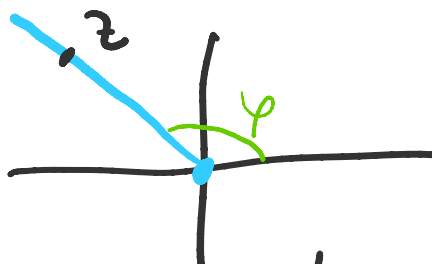
4) Paprsek

$$P = \{ a + ct \}, t \in [0, \infty)$$



Jiná možnost: nechť P znějí v O

$$P = \{ \arg z = \varphi \}$$

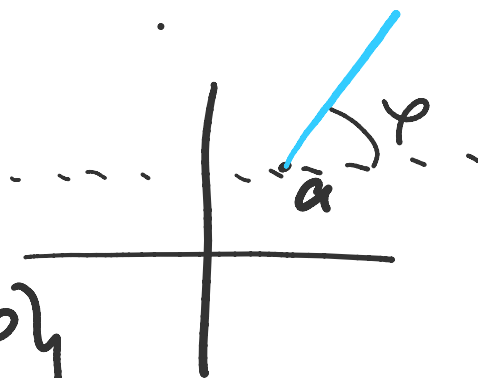


komplexne rovnice paprsek

komplexne rovnice paprsek!

Pro obecný
paprsek:

$$P = \{ \operatorname{Arg}(z-a) = \varphi \}$$



Oblasti v $\mathbb{C}$

Def: oblast v $\mathbb{R}^n$ - otevřená
souviselá množina

Veta: $\mathcal{D}$ oblast v $\mathbb{R}^n$
je lineárně souvislá:
oblast



$\forall a, b \in \mathcal{D}, \exists$ křivka $\gamma(t): t \in [0, 1],$
 $\gamma(0) = a, \gamma(1) = b, \gamma(t) \in \mathcal{D} \forall t.$

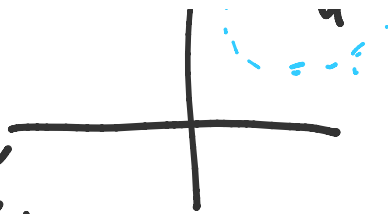
Typy oblastí v $\mathbb{C}$

1) kruh: $B_z(a) =$



1) Kružnice $B_2(a)$ —

$$= \{ |z-a| < r \} - \text{otevř. kruh}$$



$$\partial B_2(a) = C_2(a)$$

zavřený kruh (není oblast!)

$$\overline{B_2(a)} = \{ z : |z-a| \leq r \}$$

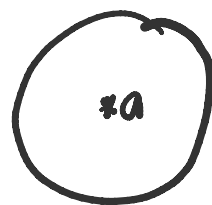
$B_r(a)$ se nazývá také r -okolí a
 r -okolí (vše) dávají báze topologie $\mathbb{C}$.

2) Mezikruží

$$B_{r,R}(a) = \{ r < |z-a| < R \}$$



Důležit. případ: $r=0$



$$B_{0,R}(a) = \{ 0 < |z-a| < R \} =$$

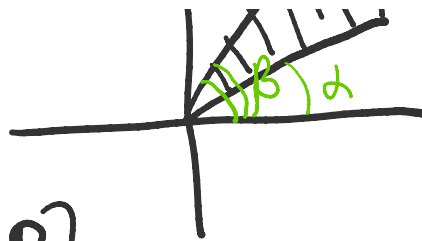
$$= B_R(a) \setminus \{a\} - \text{„propíchnutý kruh“}$$

$$\text{„} B_R^*(a) \text{ nebo } B_R'(a) \text{“}$$

3) Sektor

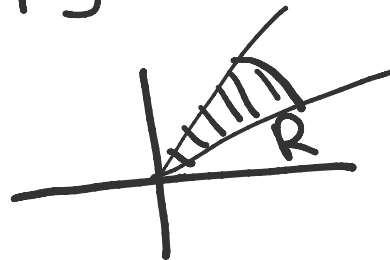


3) Sektor



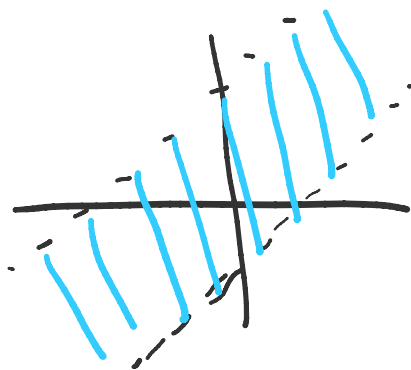
$$S_{\alpha, \beta} = \{z: \alpha < \arg z < \beta\}$$

korčový sektor:



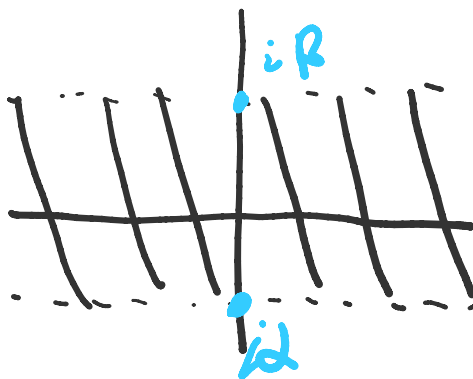
$$S_{\alpha, \beta}(R) = \{z: \alpha < \arg z < \beta, |z| < R\}$$

4) Pasy



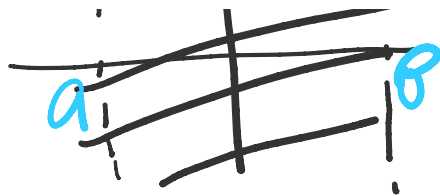
důležitý případy: $\text{pas} \parallel OX$; $\text{pas} \parallel OY$

$$P = \{z: \alpha < \operatorname{Im} z < \beta\}$$



$$P = \{z: \alpha < \operatorname{Re} z < \beta\}$$

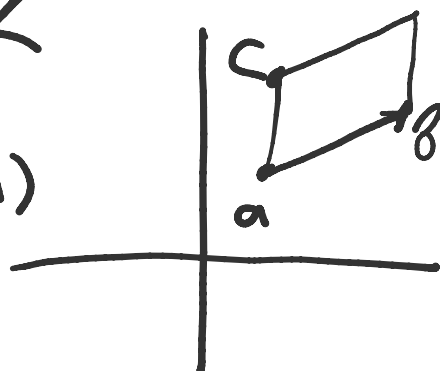




5) Rovzobezník

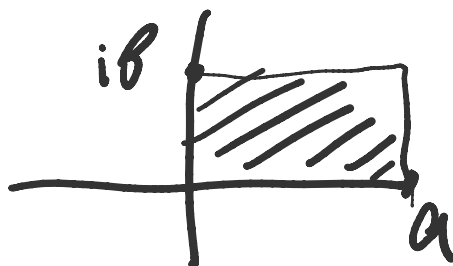
$$R = a + s(b-a) + t(c-a)$$

$$0 < s, t < 1$$



důležitý příklad: obdélník
strany $\parallel OX$ nebo $\parallel OY$

Například:



$$R = \{0 < \operatorname{Re} z < a, 0 < \operatorname{Im} z < b\}$$

Rozšířená komplexní rovina

Definujeme spec. zobrazení od
sféry v $\mathbb{R}^3$ do $\mathbb{R}^2 \simeq \mathbb{C}$

M' - obraz M

$$M' = NM \cap OXY$$

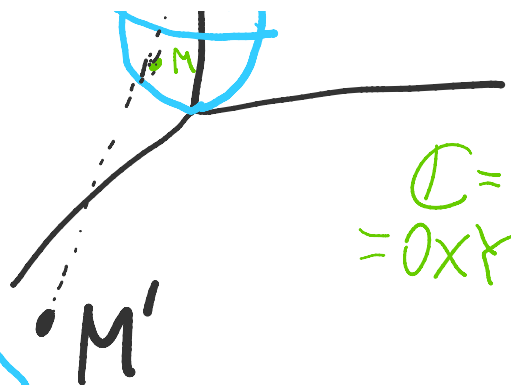


$$M' = NM \cap U \cap V$$

M' je stereografická
projekce M .

($M \neq N$).

$$S(M) = M'$$



$$C = 0x1$$

DU: dokázat vzorec:

$$M' = \frac{1}{1-z} \cdot (x+iy), \quad M = (x, y, z).$$

Veta: S zobrazí kružnice v S^2 , která
reprochází přes N , do kružnice v
rovine; každá kružnice v rovine vypadá
tak. Tak, S zobrazí kružnice v S^2 ,
která prochází přes N , do přímky
v rovine; každá přímka v rovine
vypadá tak.

Důkaz: $C \subset S^2$ -kružnice

$\bigcup_{M \in C} NM =$ kužel k ;
počn přímky



pak k protíná se s rovinou $\Rightarrow$ kružnice

Pro K platí: K je rovina se ∞ bodymi $= \mathbb{C} \cup \{\infty\}$

Když $C \ni N \Rightarrow K$ bude rovina

(přel. roviny), průsečík z rovinou bude
přímka.

Poznámka: S - bijekce $\Rightarrow S$ dává

bijekce kružnic na přímky a kružnice
v rovině.

Otázka: co bude když $\overset{S^2}{M} \rightarrow N$?

Odpověď: $M' \rightarrow \infty$

To motivuje pojem rozšířenou
komplexní rovinu: $\overline{\mathbb{C}} = \mathbb{C} \cup \{\infty\}$
 $\infty = S(N)$

V $\overline{\mathbb{C}}$ máme přirozenou topologii:

pokud S je bijekce S^2 do $\overline{\mathbb{C}}$,

$\Rightarrow$ topologie v $\overline{\mathbb{C}}$:= topologie v S^2

(množina $E \subset \overline{\mathbb{C}}$ je otevřená $\Leftrightarrow$
 $S^{-1}(E)$ - otevřená v S^2).

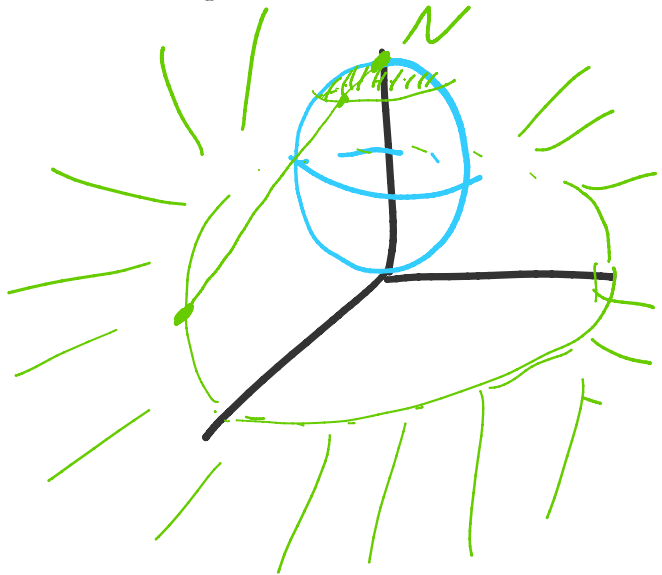
Báze takové topologie v $\overline{\mathbb{C}}$ vypadá

Báze takové topologie v $\mathbb{C}$ vypadá
tak: $[\cup B_r(a)] \cup [\cup B_r(\infty)]$,

$$\text{kte } B_r(\infty) = \{ |z| > \frac{1}{r} \} \cup \{\infty\}$$

Ovol: ∞

$\forall$ otevř. množina
v $\overline{\mathbb{C}}$ je spojení
 $\{B_r(a)\}$, $a \in \overline{\mathbb{C}}$



$$\text{jasné } a_n \rightarrow \infty \iff$$

$$|a_n| \longrightarrow \infty$$

ve smyslu reálné analýzy.

$$\text{Pokud } \overline{\mathbb{C}} \stackrel{S}{\cong} S^2 \Rightarrow$$

$\overline{\mathbb{C}}$ se nazývá Riemannova sféra

Poznámka: ∞ je užitečná
pro nekonečné problémy!

Doplnění: používat vzorec pro
stejnou dimenzi d a d různých

Stež. proj pro přímý důkaz
že kružnice na sféře $\cong \mathbb{N}$
odpovídá kružnice na $\mathbb{C}$.

Funkce komplexní proměnné

$$\mathbb{R}^2 \cong \mathbb{C}; \quad f: \mathcal{D} \rightarrow \mathbb{C}$$

$$\underbrace{W = F(z)}_{u+iv} \quad \underbrace{\left(\begin{matrix} \mathcal{D} \\ \mathbb{C} \end{matrix} \right)}_{x+iy} \rightarrow \mathbb{C}$$

$$f \leftrightarrow \begin{cases} u = u(x, y) \\ v = v(x, y) \end{cases}$$

holomorfní funkce

$\forall W = F(z)$ nám dává
transformace oblasti $\mathcal{D}$

do $\mathcal{D}'$ ($\mathcal{D}'$ obecně je kraj oblast)

Elementární funkce

Elementarne funkcije kompl. prom.

Bude nas zanimati takova
vlastnost: bijektivita

$(f: \mathcal{D} \rightarrow \mathcal{D}' \text{ je } 1\text{-to-1})$

1) kompl. lih. funkcije

$$w = az \quad (a \neq 0)$$

$\exists$ inverzne funkcije: $z = \frac{1}{a}w \Rightarrow$

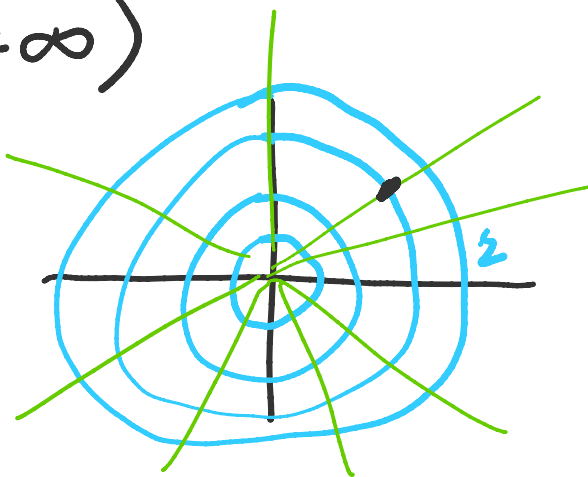
f je bijekcija $\mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$

Fakt, f je bijekcija $\overline{\mathbb{C}} \rightarrow \overline{\mathbb{C}}$!

$$(f(\infty) = \infty)$$

Polarna sit':

- $\text{Arg} = \text{const}$
- $\text{mod} = \text{const}$



Co $f(z)$ dela z sit'i?

$|z| = r$: necht' $a = \rho(\cos\theta + i\sin\theta)$
 $z = r(\cos\varphi + i\sin\varphi)$

$$|z|=r, \quad \forall \varphi \in [0, 2\pi)$$

$$\Rightarrow z = r(\cos \varphi + i \sin \varphi)$$

$$\Rightarrow W = az; \quad W = \rho z (\cos(\theta + \varphi) + i \sin(\theta + \varphi))$$

$$\Rightarrow \begin{cases} r \rightarrow \rho \cdot r \\ \varphi \rightarrow \varphi + \theta \end{cases}$$

$\Rightarrow$ obraz kružnice $\{|z|=r\}$ je kružnice $\{|z|=\rho r\}$

obraz polopřímky $\{\operatorname{Arg} z = \varphi\}$

je polopřímka $\{\operatorname{Arg} z = \varphi + \theta\} \Rightarrow$

polaru $z \mapsto \rho z$ polaru $z \mapsto z e^{i\theta}$;

$f(z)$ je složením stejnorodosti

$z \mapsto \rho z$ a otocení uhlím θ !

Důsledek: $\mathbb{C}$ -lineární zobr.

jsou moc speciální lin

zobr $\mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$!

$$2) f(z) = az + b, \quad a \neq 0$$

($\mathbb{C}$ -afiní zobrazení)

($\mathbb{C}$ -afinne zobrazení)

f je složení $\mathbb{C}$ -lin. zobr.

$z \rightarrow az$, a posunutí $z \rightarrow z+b$

$\Rightarrow f$ je složení stejnorod. ($k=1$),

otčení úhlem θ , a posunutí
číslem b .

bijekce $\mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$, $\overline{\mathbb{C}} \rightarrow \overline{\mathbb{C}}$

3) $w = \frac{1}{z}$ (inverze)

$f: \mathbb{C} \setminus \{0\} = \mathbb{C}^* \rightarrow \mathbb{C}$

$\exists$ inverzní zobr: $z = \frac{1}{w}$ $\mathbb{C}^* \rightarrow \mathbb{C}$

$\Rightarrow f$ je bijekce $\mathbb{C}^* \rightarrow \mathbb{C}^*$

Definujeme: $f(0) = \infty$, $f(\infty) = 0$

$\Rightarrow f$ je bijekce $\overline{\mathbb{C}} \rightarrow \overline{\mathbb{C}}$

(o f dle s polárnou síťí)

kružnice $\{ |z|=1 \} \rightarrow \{ |w|=1 \}$

($\operatorname{Arg} z \rightarrow -\operatorname{Arg} z$)

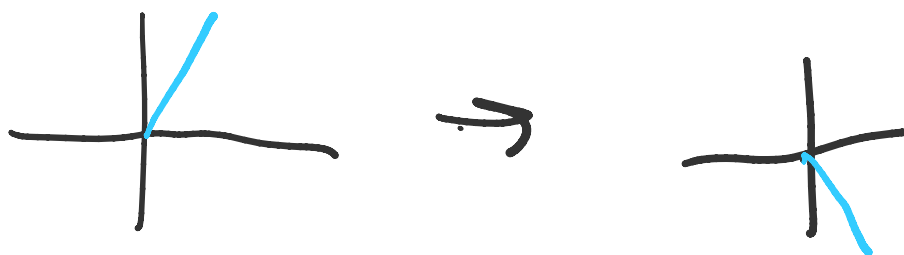
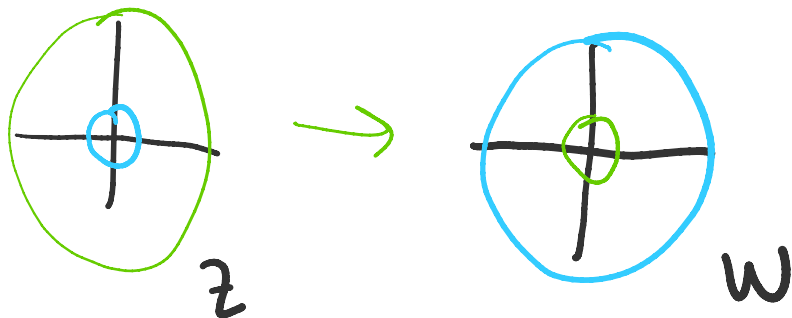
$\operatorname{Arg} \frac{1}{z} = -\operatorname{Arg} z$

polární úhel α $\rightarrow -\alpha$

o .

...7

polopřímka $\{Arg z = \varphi\} \rightarrow \{Arg z = -\varphi\}$
 $\Rightarrow$ polární síť $\rightarrow$ sebe



4) $W = \mathbb{C}^n$, $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 2$
 (omocnovani)

$f: \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$, ale není bijekce!

$\forall w \neq 0$ má n odmocnin $\sqrt[n]{w}$

$\{z_1, \dots, z_n\} \rightarrow w$

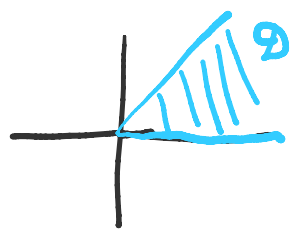
$|z|=1$, $Arg z = \varphi + 2\pi k$; $z \rightarrow z^n$
 $\varphi \rightarrow n\varphi$

$\Rightarrow f$ bude bijekce v oblasti kde

$$\varphi_1 - \varphi_2 \neq \frac{2\pi}{n}$$

(pokud $z_1 = z_2$, $\varphi_1 - \varphi_2 = \frac{2\pi}{n} \Rightarrow z_1^n = z_2^n$)

(pokud $z_1 = z_2$, $\varphi_1 - \varphi_2 = \frac{2\pi}{n} \Rightarrow z_1^n = z_2^n$)



$\int_0, \frac{2\pi}{n}$

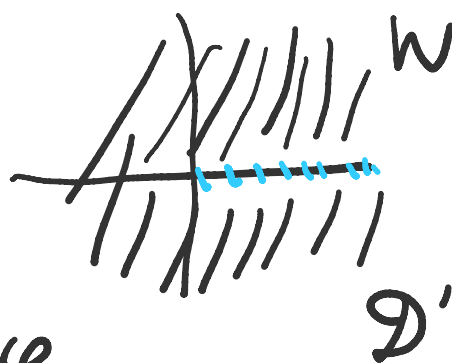
$$f(D) = ?$$

$$D: \{0 < \arg z < \frac{2\pi}{n}\} \Rightarrow$$

$$F(D): \{0 < \arg w < 2\pi\}$$

$$\mathbb{C} \setminus [0, +\infty)$$

"horizna s řezem"

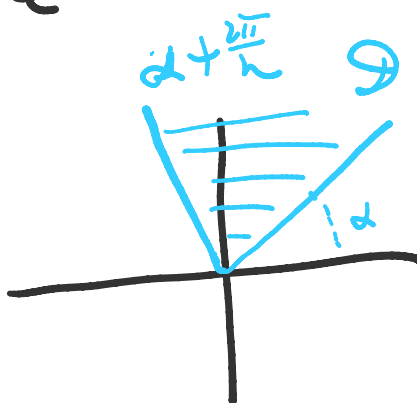


$F: D \rightarrow D'$ je bijekce

u son jiny možnosti:

$$F: D \rightarrow \mathbb{C} \setminus \{ \arg w = n\alpha + \frac{2\pi k}{n} \}$$

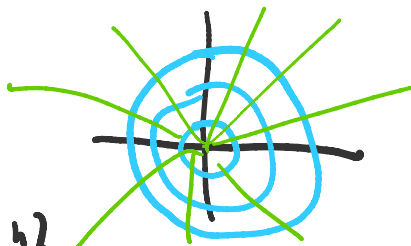
tedy rovina s řezem



$z \xrightarrow{F(w)} E_z \subset \mathbb{C}$
horizna

Polarna síť?

$$w = z^n, \quad z \rightarrow z^n, \quad \varphi \rightarrow n\varphi$$



$$\text{kružnice } \{ |z| = r_0 \} \rightarrow \{ |w| = r_0^n \}$$

ale ta kružnice je n-krát procházena!

$$\int \text{Anz} = \int \varphi \cdot z = r(\cos \varphi + i \sin \varphi) \Rightarrow$$

$$\{ \operatorname{Arg} z = 2\pi k \}; \quad z = r(\cos \varphi + i \sin \varphi) \Rightarrow \\ z^n = r^n(\cos n\varphi + i \sin n\varphi)$$

$$\Rightarrow \text{obraz} \quad \{ \operatorname{Arg} w = n\varphi + 2\pi k \}$$

Definice: Necht' $F(z)$ je mnohoznačná funkce v oblasti $\mathcal{D}$; regulární větv $F(z)$ je funkce (jednoznačná) $f(z)$ v $\Omega \subset \mathcal{D}$, taková že f je spojitá a $\forall z, f(z) \in F(z)$

5) $W = \sqrt[n]{z} = F(z)$ - mnohoznačná funkce F $\mathbb{C} \setminus \{0\}$!
 $\begin{pmatrix} n\text{-značná, } z \neq 0 \\ 1\text{-značná, } z = 0 \end{pmatrix}$

$F(z)$ je inverzní funkce pro

$$W = z^n: \quad (\sqrt[n]{z})^n = z$$

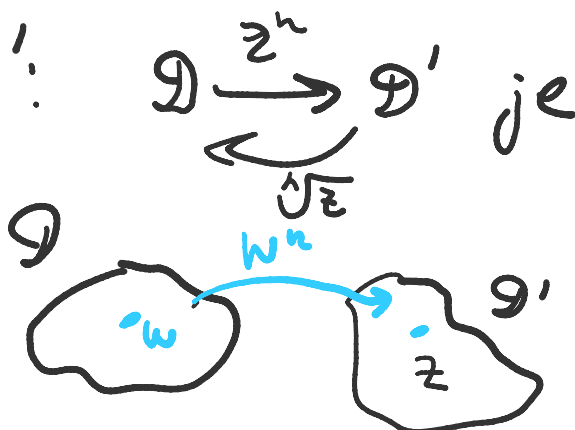
$$W = z^n \Leftrightarrow z = \sqrt[n]{W}$$

$\Rightarrow \sqrt[n]{z}$ bude mít regulární větv

v každé oblasti $\mathcal{D}'$: $\mathcal{D} \xrightarrow{z^n} \mathcal{D}'$ je bijekce.

zejména,

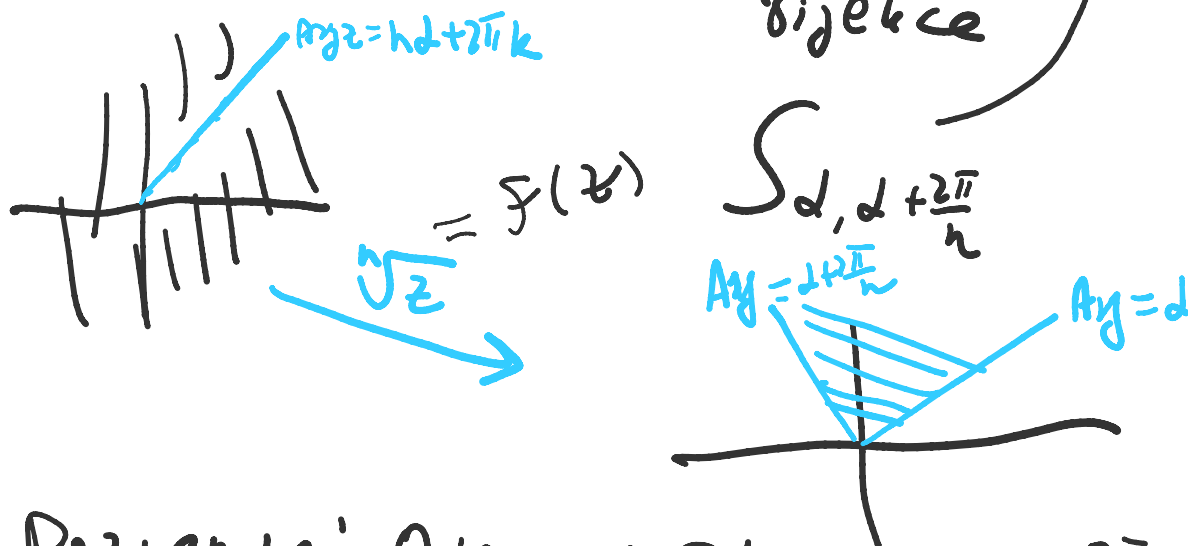
$$\forall \mathcal{D}' = \mathbb{C} \setminus \{ \operatorname{Arg} z = n\varphi + 2\pi k \} \quad W = F(z)$$



$$\forall \mathcal{D}' = \mathbb{C} \setminus \{Arg z = \alpha + 2\pi k\}, \quad W = \overline{F(z)}$$

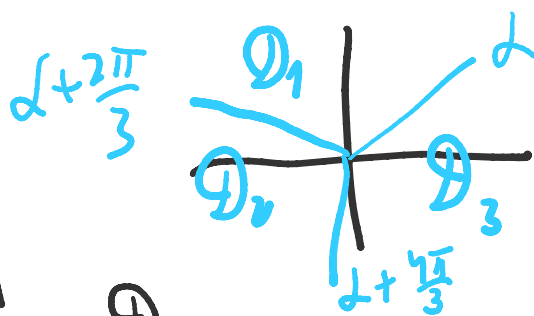
$$\exists \text{ vetvi } \sqrt[n]{z} = f(z), \quad f: \mathcal{D}' \rightarrow \mathcal{D}$$

bijekce



Poznámka: Otvorení $\mathcal{D}'$ o uhol $\frac{2\pi}{n}$ dává ještě $(n-1)$ rovnou oblast kde $\exists$ vetvi $\sqrt[n]{z}$

$$\underline{n=3: \sqrt[3]{z}}$$



máme 3 vetvi: $f_j: \mathcal{D}' \rightarrow \mathcal{D}_j$
 $(j=1, 2, 3)$

$$\mathcal{D}': \mathbb{C} \setminus \{Arg w = 3\alpha + 2\pi k\}$$



6) komplexní exponenciální funkce

o / kompleksni eksponencialni funkcije

$$W = e^z - ?$$

$$z = x + iy \Rightarrow \boxed{e^z := e^x (\cos y + i \sin y)}$$

* $z \in \mathbb{R} \Rightarrow e^z = e^x$ Euler je realna eksponenta

$$* \operatorname{Re}(e^z) = e^x \cos y, \operatorname{Im}(e^z) = e^x \sin y$$

$$* |e^z| = e^x; \operatorname{Arg}(e^z) = y + 2\pi k \Rightarrow$$

$$* |e^z| > 0; \operatorname{Arg}(e^z) - \text{cokolič} \Rightarrow$$

$$e^z: \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}^* = \mathbb{C} \setminus \{0\}$$

Primer: $e^{ia} = \cos a + i \sin a$ (a ∈ ℝ)

$$e^{\pi i} = -1$$

$$e^{2n\pi i} = 1 \quad (n \in \mathbb{Z})$$

$$\boxed{e^z \neq 0}$$

$$* e^{z+2\pi i} = e^x (\cos(y+2\pi) + i \sin(y+2\pi)) = e^z$$

$\Rightarrow e^z$ je periodična!

$$T = 2\pi i$$

$$T = 2\pi i$$

* e^z má vše vlastosti e^x (vše vzorci platí): $e^{z_1+z_2} = e^{z_1} \cdot e^{z_2}$

$$e^{-z} = \frac{1}{e^z}, a + 1.$$

(ted' bez dokazů)

* kdy $e^{z_1} = e^{z_2}$?

Používáme: $e^{z_1-z_2} = 1$

$$\Rightarrow \operatorname{Re}(z_1 - z_2) = 0; \operatorname{Im}(z_1 - z_2) = 2\pi k$$

$$\Leftrightarrow z_2 = z_1 + 2\pi k i$$

Připomínám: $e^{i\varphi} = \cos\varphi + i\sin\varphi \Rightarrow$

$$z = x + iy = r(\cos\varphi + i\sin\varphi) = r e^{i\varphi}$$

$$z = r e^{i\varphi} \text{ — exponenciální tvar komplex. čísla (!)}$$

Ted' vidíme: $z_1 \cdot z_2 = r_1 \cdot r_2 \cdot e^{i\varphi_1} \cdot e^{i\varphi_2} = r_1 r_2 e^{i(\varphi_1 + \varphi_2)}$

$$z^n = r^n e^{in\varphi}; \sqrt[n]{z} = (z^{\frac{1}{n}}) = \sqrt[n]{r} e^{\frac{i\varphi}{n}}$$

Expon. zobrazení: $w = f(z) = e^z$

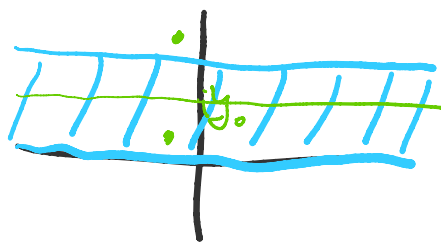
period. | $T = 2\pi i \Rightarrow$ všechny hodnoty

f už přinejmenším ve $\{0 \leq \operatorname{Im} z < 2\pi\}$

Γ už přinehmáji ve $\{0 \leq \text{Im} z \leq 2\pi\}$

$\Rightarrow$ uvažujme e^z

$\forall \{0 < \text{Im} z < 2\pi\}$

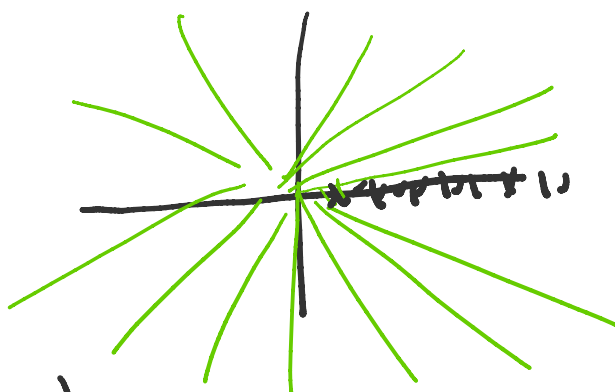


$$w = e^z; |w| = e^x; \text{Arg} w = y + 2\pi k$$

$\Rightarrow$ přílnka $\{z = x + iy_0\} \rightarrow \{\text{Arg} w = y_0 + 2\pi k\}$
 $\text{Im} z = y_0$

$0 < y_0 < 2\pi \Rightarrow$

obraz pásu



je $\mathbb{C} \setminus [0, +\infty)$ (rovina s řezem)

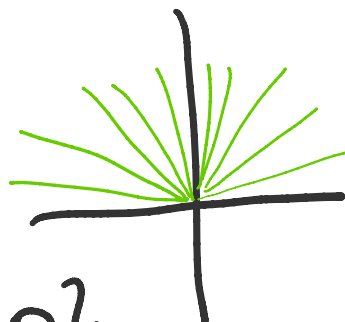
když použijeme pás $\{2 < \text{Im} z < 2 + 2\pi\}$

$\Rightarrow$ obraz $\mathbb{C} \setminus \{\text{Arg} w = 2 + 2\pi k\}$

rovina s řezem

bijekce

$\{0 < \text{Im} z < \pi\} \xrightarrow{e^z}$



$\{\text{Im} w > 0\}$

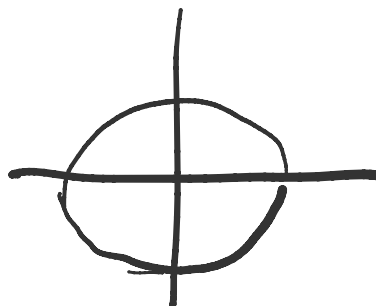
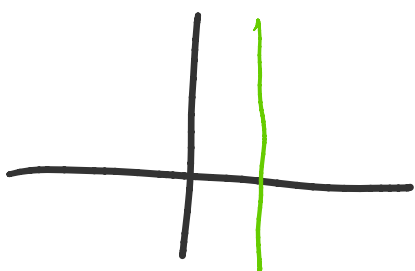
Otrazky: Co e^z dola s Γ ...

Otázky: Co e^z dělá s $\{ \operatorname{Re} z = a \}$?

$$z = a + iy, y \in \mathbb{R} \Rightarrow e^z = e^a e^{iy}$$

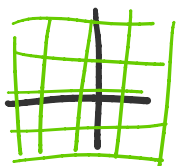
$\Rightarrow |w| = e^a = \text{const}$; $\forall y w$ - libovolný $\Rightarrow$

dostaneme kružnice $\{|w| = e^a\}$,
procházena ∞ -krát!

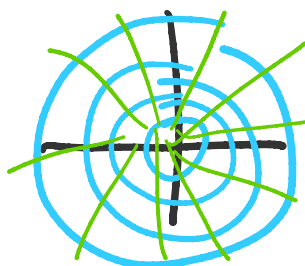


Důsledek: e^z převede Dekartovu

Sít'



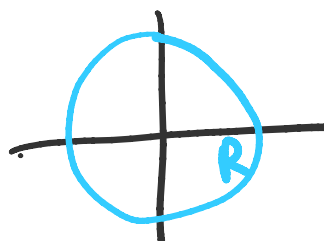
Polaru sít'



Parametrizace
kružnice

$$C_R(a) = \{ z(t) = a + R e^{it} \}_{t \in [0, 2\pi]}$$

$C_R(0)$



7) komplexn: ~~logaritmus~~

7) komplexní logaritmus

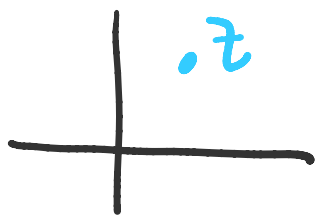
$W = \operatorname{Ln} z$ - inverzní funkce

pro $W = e^z$,

definice

$$W = \operatorname{Ln} z \Leftrightarrow z = e^W \quad (z \neq 0)$$

$$W = W_0 + 2\pi i k, k \in \mathbb{Z} \Rightarrow \operatorname{Ln} z - \infty \text{ - značka}$$



$$e^W = z \Rightarrow e^u = |z|, v = \operatorname{Arg} z \Rightarrow$$

$u = \ln |z|$

$$\Rightarrow \operatorname{Ln} z = \ln |z| + i \operatorname{Arg} z$$

Re - jednotka, Im - ∞ - značka

Příklad: $\operatorname{Ln}(-1) = \ln 1 + i(\pi + 2\pi k) = i\pi + 2\pi i k$
mnohoznační!!!

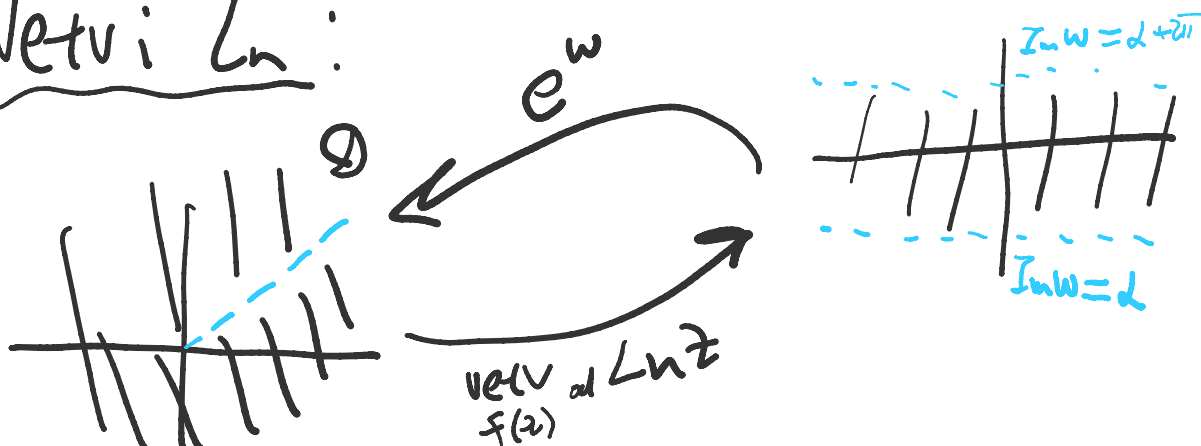
Vše v rámci platí: ...

Vše vzorci platí: např. $\ln(z_1 z_2) = \ln(z_1) + \ln(z_2)$
(se šňůly)
atd.

$$\ln z := \ln|z| + i \arg z \quad (\text{definice})$$

~ prodloužení reálného log.

Vetvi $\ln$:



$$f_0(z) = F(z)$$

$$f_k(z) := f_0(z) + 2\pi i k$$

$$\Rightarrow \{f_k(z)\}_{k=-\infty}^{+\infty} \text{ zobrazí}$$

$$D \text{ na oblasti: } \{z + 2\pi i k \mid 2 + \pi i < \operatorname{Im} z < 2 + \pi i + 2\pi i k\}_{k=-\infty}^{+\infty}$$

TA

Poznámka: Fakt, že může být
komplikovanější
(později)



8) $\sin z, \cos z$

$$\sin z := \frac{e^{iz} - e^{-iz}}{2i}, \quad \cos z := \frac{e^{iz} + e^{-iz}}{2}$$

$$\boxed{\sin z := \frac{e^{iz} - e^{-iz}}{2i}, \cos z := \frac{e^{iz} + e^{-iz}}{2}}$$

Enter - define

Proč? Necht' $z = x \in \mathbb{R}$,

$$\begin{cases} e^{ix} = \cos x + i \sin x \\ e^{-ix} = \cos x - i \sin x \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \sin x = \frac{1}{2i}(e^{ix} - e^{-ix}) \\ \cos x = \frac{1}{2}(e^{ix} + e^{-ix}) \end{cases}$$

$\Rightarrow \sin z, \cos z$ jsou prodloužení

$\sin x, \cos x$ z $\mathbb{R}$ do $\mathbb{C}$
($a \in \mathbb{R}$)

Příklad: $\cos(ia) = \frac{e^{-a} + e^a}{2} = \cosh a$

$$\sin(ia) = \frac{e^{-a} - e^a}{2i} = i \sinh a$$

Jaké hodnoty? Např. $\cos z$

$$\cos z = w, w = ? \quad \frac{e^{iz} + e^{-iz}}{2} = w, e^{iz} = p \Rightarrow$$

$$p + \frac{1}{p} = 2w \Rightarrow p^2 - 2wp + 1 = 0, \text{ má řešení}$$

$$p_{1,2}, p_{1,2} \neq 0 \Rightarrow e^{iz} = p_{1,2}, z = \frac{1}{i} \ln p_{1,2}$$

$$\Rightarrow \forall w \exists \text{ řeš} \Rightarrow \boxed{\cos(\mathbb{C}) = \mathbb{C}}$$

Analog. $\boxed{\sin(\mathbb{C}) = \mathbb{C}}$

Vše trigon vzorci platí!

$$\cos(z + \pi) = -\cos z$$

zejména: $\sin z = \cos(z - \frac{\pi}{2}) \Rightarrow$

Fakt to stačí vyskládat $\cos(z)$

zejména: $\sin z, \cos z$ jsou period.

$$T = 2\pi$$

Otázka: kdy $\cos z_1 = \cos z_2$?

Výsledek: $\begin{cases} z_2 = z_1 + 2\pi k \\ z_2 = -z_1 + 2\pi k \end{cases} \quad \forall k \in \mathbb{Z}$

Důkaz: $\cos z_1 = \cos z_2 = w$; $\frac{e^{iz_1} + e^{-iz_1}}{2} = w$

(podobně pro z_2); $e^{iz_1} = p \Rightarrow$ jako výše:

$p^2 - 2pw + 1 = 0$; oba dva e^{iz_1}, e^{iz_2} - řešení

$\Rightarrow \begin{cases} \text{stejný} \\ \text{řazený} \\ \text{součin} = 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} e^{iz_1} = e^{iz_2} \\ e^{iz_1} \cdot e^{iz_2} = 1 \end{cases} \quad \leftarrow$

$\begin{cases} e^{iz_1 - iz_2} = 1 \\ e^{iz_1 + iz_2} = 1 \end{cases} \quad \begin{cases} z_1 - z_2 = 2\pi k \\ z_1 + z_2 = 2\pi k \end{cases} \quad \text{— jako pátý!}$

Důsledek: ve pásu $\{0 < \operatorname{Re} z < \pi\}$

$\cos z$ dává bijekt. zobrazení.

ve pásu $\{-\frac{\pi}{2} < \operatorname{Re} z < \frac{\pi}{2}\}$ $\sin z$

dává bijekt. zobrazení.

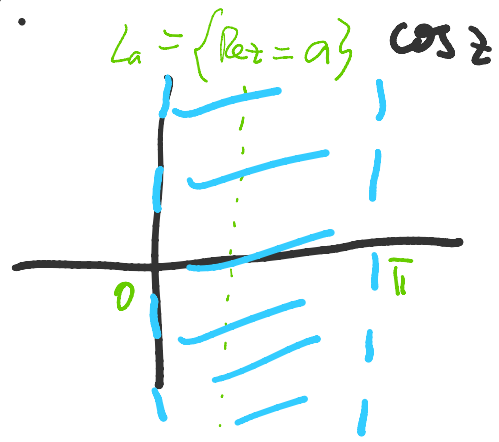
$L_a = \{ \operatorname{Re} z = a \} \quad \cos z$

dava Bijert. 2007.

Co je oznaka?

$$F(L_a) = ?$$

$$z \in L_a, z = a + iy, y \in \mathbb{R}$$

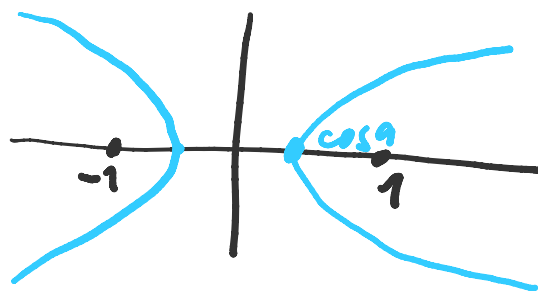


$$\Rightarrow \cos z = \frac{1}{2} (e^{ia} e^{-y} + e^{-ia} e^y) =$$

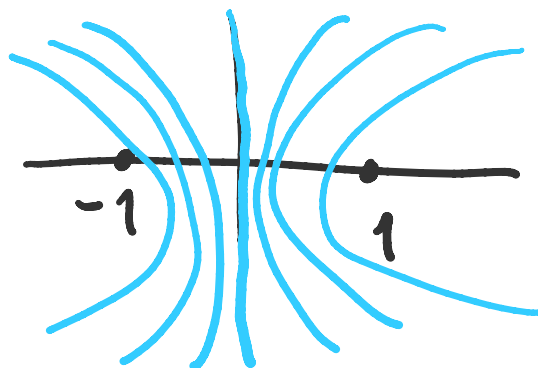
$$= \left[\cos a \cdot \frac{1}{2} (e^{-y} + e^y) + i \sin a \cdot \frac{1}{2} (e^{-y} - e^y) \right]$$

$$\cos z = w = u + iv \Rightarrow \left(\frac{u^2}{\cos^2 a} - \frac{v^2}{\sin^2 a} = 1 \right) \text{ - pulka hiperboli}$$

$$(e^y + e^{-y}) = 2 + e^{2y} + e^{-2y}$$



Spojenci
oznaki L_a



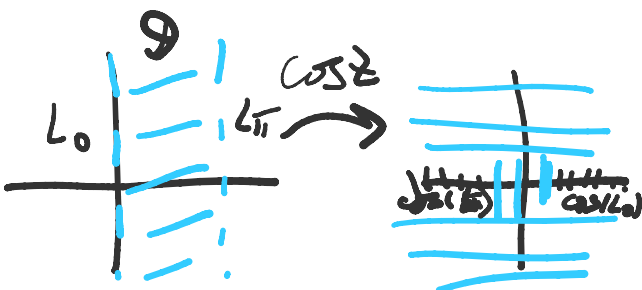
$$(pzi a = \frac{\pi}{2} \text{ osa } y) \Rightarrow$$

$$\text{Spojeni} = \mathbb{C} \setminus \{(-\infty, -1] \cup [1, +\infty)\}$$





$\sin z$ dává bijekce $\{\frac{-\pi}{2} < \operatorname{Re} z < \frac{\pi}{2}\}$ do stejné oblasti

Aletrahivhi
(topologicki) dukt: 

$$\cos(\{ \operatorname{Re} z = 0 \}) = \{ z = iy \} = \{ w = \frac{1}{2}(e^{-y} + e^y) \} = \\ = \{ w \in \mathbb{R} : w \geq 1 \}$$

$$\cos(\{ \operatorname{Re} z = \pi i \}) \stackrel{\text{analogs}}{=} \{ w \in \mathbb{R} : w \leq -1 \}$$

$\Rightarrow F(\mathcal{D})$ má hranice $[-\infty, -1]$

$$\text{a } [1, +\infty) \Rightarrow F(\mathcal{D}) = \mathbb{C} \setminus \{ (-\infty, -1] \cup [1, +\infty) \}$$

(používáme, jsme Frakt: $F(\mathcal{D}) = \mathcal{D}'$ - oblast;
 $F^{-1}(\partial \mathcal{D}') \subset \partial \mathcal{D}$ \ dokážeme později)

g) tg , ctg

$$\operatorname{tg} z := \frac{\sin z}{\cos z}, \quad \operatorname{ctg} z := \frac{\cos z}{\sin z}$$

$$\operatorname{tg} z = \frac{\frac{1}{2i}(e^{iz} - e^{-iz})}{\frac{1}{2}(e^{iz} + e^{-iz})} = \frac{1}{i} \frac{e^{iz} - e^{-iz}}{e^{iz} + e^{-iz}}$$

$$\tanh z = \frac{\frac{1}{2i}(e^z - e^{-z})}{\frac{1}{2}(e^{iz} + e^{-iz})} = \frac{1}{i} \frac{e^{2iz} - 1}{e^{2iz} + 1}$$

$$\coth z = i \frac{e^{2iz} + 1}{e^{2iz} - 1}$$

exp je period $T = 2\pi i \Rightarrow \tanh, \coth$ sion
period, $T = \pi$

Uzky hodnoti $\tanh, \coth$ maji

$$\tanh z = w; e^{2iz} = p; \frac{p-1}{p+1} = iw, p-1 = iwp + iw,$$

$$p = \frac{1+iw}{1-iw}, e^{2iz} = \frac{1+iw}{1-iw} \Leftrightarrow$$

$$z = \frac{1}{2i} \ln \frac{1+iw}{1-iw}, \exists \Leftrightarrow \begin{cases} w \neq i \\ w \neq -i \end{cases}$$

$$\Rightarrow \tanh: \mathbb{C} \setminus \{\frac{\pi}{2} + \pi k\} \rightarrow \mathbb{C} \setminus \{-i, i\}$$

$$\text{Fakt, } \tanh\left(\frac{\pi}{2} + \pi k\right) = \infty \Rightarrow$$

$$\tanh: \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C} \setminus \{-i, i\}$$

Analog pro $\coth$

Vše školni
vzorci platí!

$$\Rightarrow \coth z = \tanh\left(\frac{\pi}{2} - z\right)$$

$$\coth: \mathbb{C} \setminus \{\pi k\} \rightarrow \mathbb{C} \setminus \{+i\}$$

$$c.f.: \mathbb{C} \setminus \{\pm i\} \rightarrow \mathbb{C} \setminus \{\pm i\}$$

$$\mathbb{C} \rightarrow \overline{\mathbb{C}} \setminus \{\pm i\}$$

Analog. silnice pro $\sin, \cos$, můžeme

dokázat, že $\operatorname{tg} z_1 = \operatorname{tg} z_2 \Leftrightarrow$

$z_2 = z_1 + \pi k \Rightarrow \operatorname{tg} z$ má bijektivní

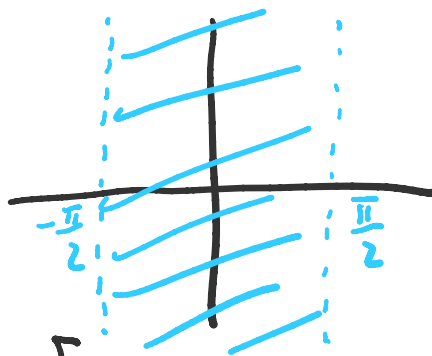
zobrazení: ve vertik. pásu šířky

π , tedy $\exists \{\frac{\pi}{2} + \pi k\}; \Rightarrow$ pásy

$$\left\{ \frac{\pi}{2} + \pi k < \operatorname{Re} z < \frac{\pi}{2} + \pi(k+1) \right\} = \Pi_k$$

$$\operatorname{tg}(\Pi_i) = \operatorname{tg}(\Pi_j) \text{ (period.)}$$

$$\operatorname{tg}(\Pi_0) = ?$$



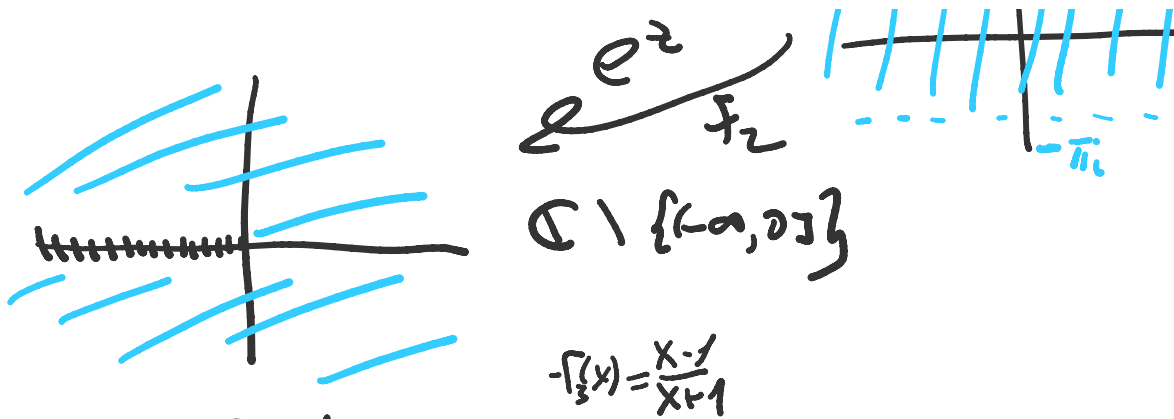
$$\operatorname{tg} z = \frac{1}{i} \frac{e^{zi} - 1}{e^{zi} + 1} = f_4 \circ f_3 \circ f_2 \circ f_1$$

$$f_1: z \rightarrow zi; f_2: z \rightarrow e^z; f_3: z \rightarrow \frac{z-1}{z+1}; f_4: z \rightarrow \frac{1}{i} z = -iz$$

$$f_1: \left\{ -\frac{\pi}{2} < \operatorname{Re} z < \frac{\pi}{2} \right\} \xrightarrow[\text{skl. } k]{\text{otčení } \frac{\pi}{2}}$$

$$e^z$$





$$f_3(x) = \frac{x-1}{x+1}$$

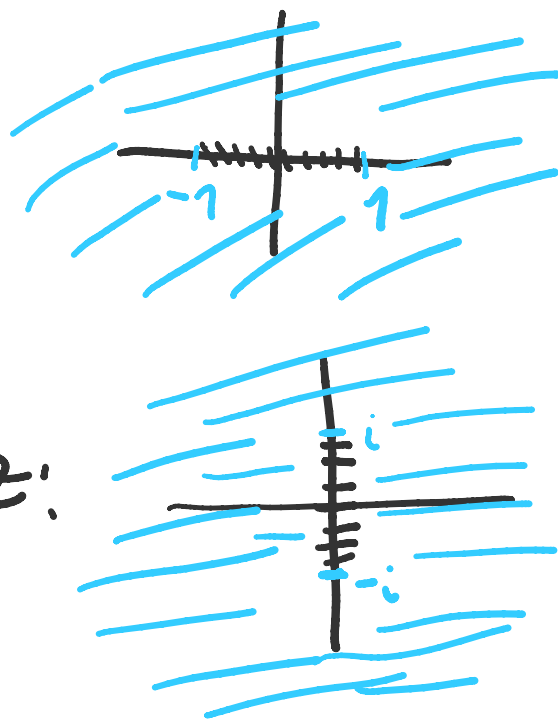
$$f_3(z) = \frac{z-1}{z+1}; f_3((-\infty, 0]) = \{z \in \mathbb{R} : |z| \geq 1\}$$

$$\Rightarrow f_3(\mathbb{C} \setminus \{(-\infty, 0]\}) = \mathbb{C} \setminus [-1, 1]$$

$$f_4: z \rightarrow -iz$$

$$\text{otočení o uhol } -\frac{\pi}{2}$$

$$\Rightarrow \text{konečni obraz:}$$



10) Obecná exponen. funkce

$$W = z^a, a \in \mathbb{C} \quad \text{co to je???$$

$$(\text{sp. školy: } z^a = e^{a \ln z}) \Rightarrow \text{definice:}$$

$$z^a := e^{a \ln z}$$

$$z \neq 0$$

obecně je mnohoznačná funkce

obecně je mnohoznačná funkce

Případy:

$$\begin{aligned} a) a \in \mathbb{N} &\Rightarrow e^{a(\ln|z| + i \cdot \text{Arg} z)} = |z|^a e^{i a \cdot \text{Arg} z} = \\ &= z^a = \underbrace{z \cdot z \cdot \dots \cdot z}_{a\text{-krát}} \quad \underline{\text{jednoznačná}} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} b) a = -b, b \in \mathbb{N} &\Rightarrow e^{-b(\ln|z| + i \cdot \text{Arg} z)} = \\ &= \frac{1}{z^b} = \frac{1}{\underbrace{z \cdot z \cdot \dots \cdot z}_{b\text{-krát}}} \quad \underline{\text{jednoznačná}} \end{aligned}$$

$$c) z^0 = 1$$

$$d) a \in \mathbb{Q}; a = \frac{p}{q}, q \in \mathbb{N}, p \in \mathbb{Z}$$

$$(z^a)^q = e^{p(\ln|z| + i \cdot \text{Arg} z)} = z^p \Rightarrow$$

$$\boxed{z^a = \sqrt[q]{z^p}} \quad \underline{q\text{-značná}}$$

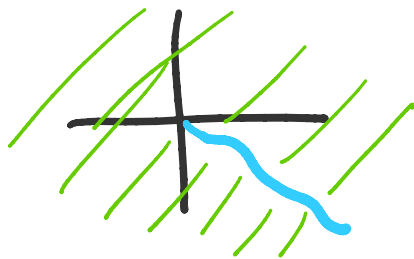
(když $(p, q) = 1$)

$$e) a \notin \mathbb{Q} \Rightarrow \underline{\infty\text{-značná}}$$

Regulární vzt. $\exists$ přesně
v oblasti kde $\exists$ pro $\ln z$

✓ / ✓ / ✓

(rovina s řezem)



nebo, užitě, pro $a \in \mathbb{N}$ $\mathbb{C}$

pro $a \in -\mathbb{N}$ $\mathbb{C} \setminus \{0\}$

$$\text{že ške } \exists \operatorname{sh} z := \frac{e^z - e^{-z}}{2}$$

$$\operatorname{ch} z = \frac{e^z + e^{-z}}{2}$$

$\exists \operatorname{Arcsin}, \operatorname{Arccos}, \operatorname{Arctg}, \operatorname{Arccotg}$
jako inverzní funkce

Poznámka: $\exists$ jediná inverzní funkce:

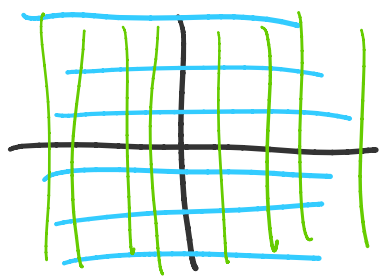
$w = e^z$, a vše ostatní dostaneme
přes e^z , alg operace, inverzní
zobrazení

Úlohy

1) Najít obraz Dekartovy síti

$\{\operatorname{Im} z = \text{const}, \operatorname{Re} z = \text{const}\}$ při

$\{ \operatorname{Im} z = \text{const}, \operatorname{Re} z = \text{const} \}$ při
zobrazení $w = z^2$.



$$w = z^2$$

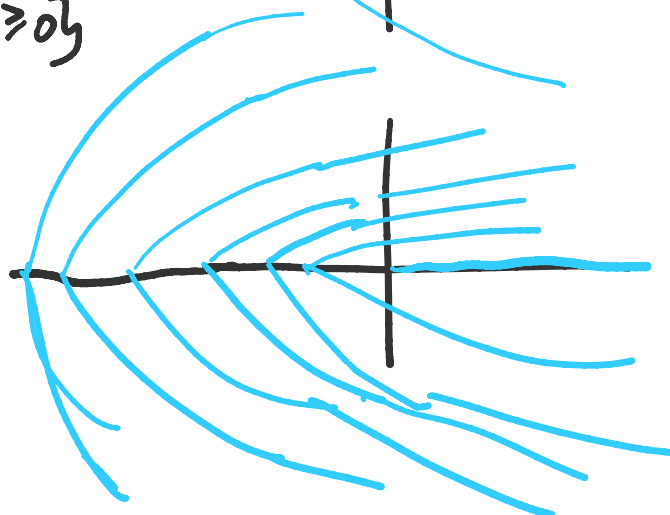
$$w = u + iv = (x + iy)^2 = x^2 - y^2 + i \cdot 2xy$$

$\{ \operatorname{Im} z = b = \text{const} \}: y = b \Rightarrow \begin{cases} u = x^2 - b^2 \\ v = 2xb \end{cases} \Leftrightarrow$

$y = \frac{x^2}{100}$ $\checkmark$ $\checkmark$ $\checkmark$
 $y = 100x^2$

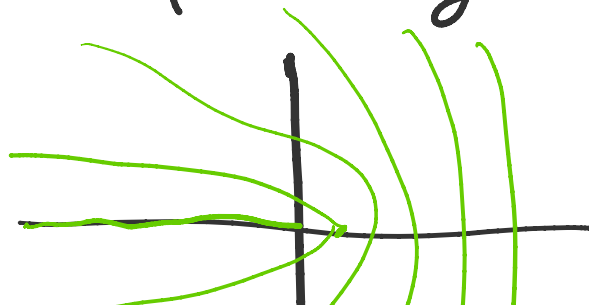
$$u = \frac{v^2}{4b^2} - b^2$$

$b = 0$: $v = 0 - 0 \leq u$ $\checkmark$
 $\{ u = 0, u \geq 0 \}$
polopřímka $\mathbb{R}^+$



$\{ \operatorname{Re} z = a \} z = a + iy \quad \begin{cases} u = a^2 - y^2 \\ v = 2ay \end{cases}$

$$u = a^2 - \frac{v^2}{4a^2}$$



2) Naleziť obraz oblasti $\mathcal{D} = \{\operatorname{Re} z > 0, \operatorname{Im} z > 0\}$
 podľa zobrazení $w = e^z$

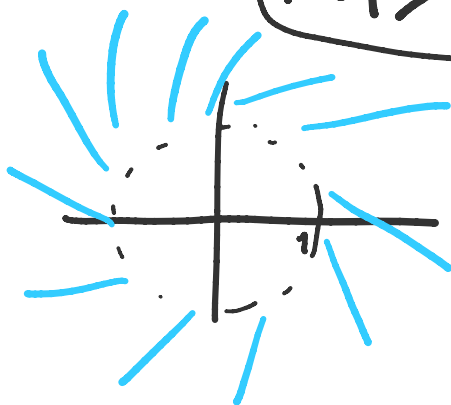
e^z je period. $T = 2\pi i$

$$\Rightarrow F(\mathcal{D}) = f(\{ \operatorname{Re} z > 0 \})$$

$x > 0, y \in \mathbb{R}$

$$e^z = e^x e^{iy} \Leftrightarrow |w| > 1$$

obraz:



3) $f(z) = \sqrt{z}$ - vetv ve oblasti
 $\mathbb{C} \setminus \{ \operatorname{Arg} z = \pi + 2\pi n \}$

Najít $F(\mathcal{D})$, $\mathcal{D} = \{0 < \operatorname{Im} z < 1\}$

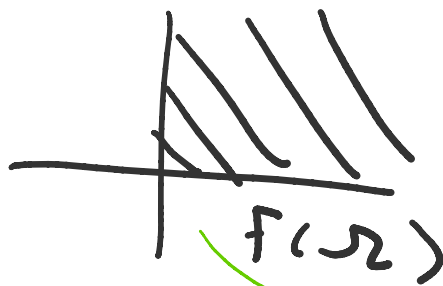
Nechť $\mathcal{D} = \{ \operatorname{Im} z > 0 \}$
 $0 < \operatorname{arg} z < \pi$



$$\sqrt{z} = \sqrt{r} \cdot e^{\frac{i\varphi}{2}} \Rightarrow \sqrt{r} \in [0, \infty) \quad \varphi \in (0, \pi)$$

$$\sqrt{z} = \sqrt{r} \cdot e^{\frac{i}{2}} \Rightarrow f(\Omega) = \{0 < \operatorname{Arg} w < \frac{\pi}{2}\}$$

He polířeb. $f(\Omega)$!



$$f(\operatorname{Im} z = 1) = ?$$

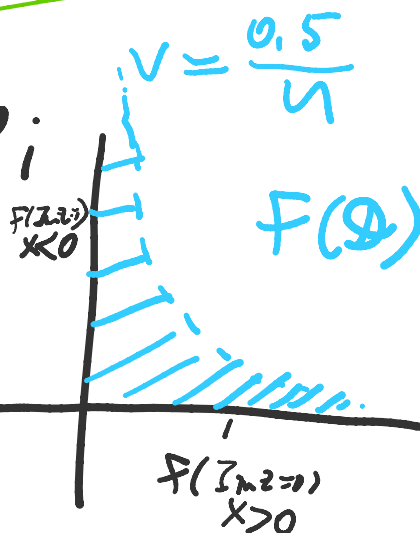
$$z = x + iy, w = \sqrt{z} \Leftrightarrow z = w^2 = (u + iv)^2 = u^2 - v^2 + i \cdot 2uv \Rightarrow$$

$$\text{ob } uz: \begin{cases} 2uv = 1 \\ u, v > 0 \end{cases}$$

$$v = \frac{1/2}{u}$$

$u > 0$ — pólka hiperbol;

(nebo přímka $f(\operatorname{Im} z = a), a \in (0, 1)$ hiperbol;



$$4) w = \ln z, (\ln z \text{ je vetv } \operatorname{Ln} z, -\pi < \operatorname{Arg} z \leq \pi)$$

$$\Omega = \{0 < \operatorname{Re} z < 1\}; f(\Omega) = ?$$

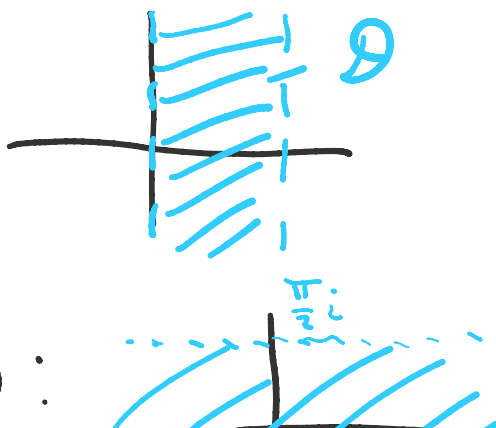
$$\Omega: \{\operatorname{Re} z > 0\}$$

$$\ln|z| = \ln|z| + i \operatorname{Arg} z$$

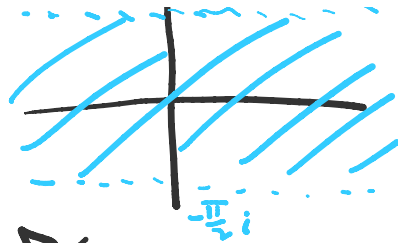


$$\frac{\pi}{2} < \operatorname{Arg} z < \frac{3\pi}{2}$$

$$\Rightarrow f(\Omega):$$



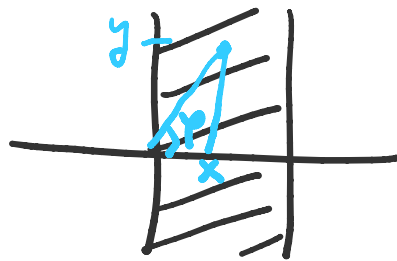
$$z \in \mathbb{D} \Rightarrow f(z):$$



$$f(\mathbb{D}) = ?$$

$$f(\mathbb{D}) \subset f(\mathbb{R})$$

$$\tanh \varphi = \frac{y}{x} \Rightarrow \varphi = \operatorname{arctg} \frac{y}{x}$$



Najdeme obraz hranicni

Přímky $\{x=1\}$, $\varphi = \operatorname{arctg} y$ ($x=1$)

$$\rho = |z| = \sqrt{x^2 + y^2} = \sqrt{1 + y^2}$$

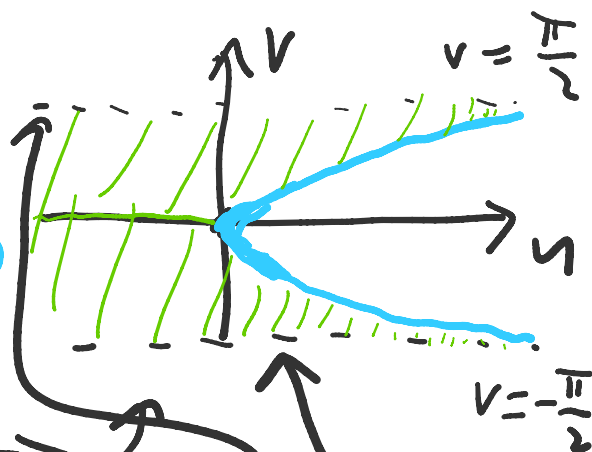
$$\Rightarrow w = \ln z = \ln \rho + i\varphi = \frac{1}{2} \ln(1 + y^2) + i \operatorname{arctg} y$$

$$\begin{cases} u = \frac{1}{2} \ln(1 + y^2) \\ v = \operatorname{arctg} y, \quad y \in \mathbb{R}; \quad y = \tanh v \end{cases}$$

$$u = \frac{1}{2} \ln(1 + \tanh^2 v) = \frac{1}{2} \ln \frac{1}{\cosh^2 v} = -\ln \cosh v$$

$$u = -\ln \cosh v$$

obraz přímky $x=1$



$$f(0,1) = (-\infty, 0) \Rightarrow$$

$$f(\operatorname{Re} z = 0, \operatorname{Im} z > 0) = \{ \operatorname{Im} w = \frac{\pi}{2} \}$$

$$f(\operatorname{Re} z = 0, \operatorname{Im} z < 0) = \{ \operatorname{Im} w = -\frac{\pi}{2} \}$$

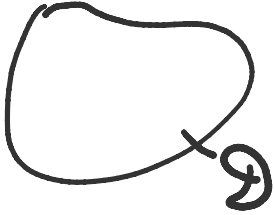
$$F(\operatorname{Re} z = 0, \operatorname{Im} z < 0) = \{ \operatorname{Im} w = -\frac{\pi}{2} \}$$

Analýza kompl. zobrazení

$$W = F(z), \quad \begin{matrix} z = x + iy \\ w = u + iv \end{matrix} \quad z \in D$$

$$F: D \rightarrow \mathbb{C} (=) D \rightarrow \mathbb{R}^2$$

D - oblast



Spojité funkce (zobraz.), diferencovatelné zobrazení, limit, atd
- bereme z $\mathbb{R}^2$

$$\text{Např. } A = \alpha + \beta i = \lim_{z \rightarrow z_0} F(z)$$

$$\Leftrightarrow \alpha = \lim_{z \rightarrow z_0 = (x_0, y_0)} u(x, y), \quad \beta = \lim_{z \rightarrow z_0} v(x, y)$$

Příklad: $\lim_{z \rightarrow 0} |z| = \lim_{(x, y) \rightarrow (0, 0)} \sqrt{x^2 + y^2} = 0$

Velký rozdíl: $\begin{cases} \mathbb{R}\text{-difer.} & \text{stačí!} \\ \mathbb{C}\text{-difer.} & \text{náročně!} \end{cases}$

Začínáme z l.h. algebry: $f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ R-
lin

Začínáme z l.h. algebry: $\begin{cases} L: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^2 & \text{R-} \\ L: \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C} & \text{C-} \\ & \text{l.h.} \end{cases}$

C-linearity: $L(z) = az, a \in \mathbb{C}$

R-linearity: $\begin{cases} l_1(x, y) = p_1 x + q_1 y \\ l_2(x, y) = p_2 x + q_2 y \end{cases}, L = l_1 + i l_2 = (l_1, l_2)$

$$L(x, y) = px + qy, \quad p := p_1 + i p_2, \quad q = q_1 + i q_2$$

$$L_x := p, \quad L_y := q$$

Připom.: $z = x + iy, \bar{z} = x - iy \Rightarrow \begin{cases} x = \frac{z + \bar{z}}{2} \\ y = \frac{z - \bar{z}}{2i} \end{cases} \Rightarrow$

$$\Rightarrow L(z) = Az + B\bar{z} \quad \begin{aligned} A &:= \frac{1}{2}(p - iq) \\ B &:= \frac{1}{2}(p + iq) \end{aligned}$$

Teď, označme: $L_z := A, L_{\bar{z}} := B; \Rightarrow$

$$L_z = \frac{1}{2}(L_x - i L_y) \quad \left| \quad L_x = L_z + L_{\bar{z}} \right.$$

$$L_{\bar{z}} = \frac{1}{2}(L_x + i L_y) \quad \left| \quad L_y = i(L_z - L_{\bar{z}}) \right.$$

$\Rightarrow$ kdy je $L(z)$ C-lin?

Pokud $\boxed{B=0} \quad \boxed{L_{\bar{z}}=0}$
($\Leftrightarrow$)

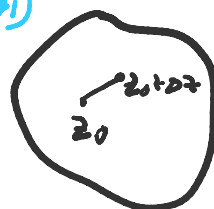
Připom.: diferenciální funkce $\mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$

$$\Delta f = d_x f + d_y f + o(\sqrt{dx^2 + dy^2})$$

$dz = dx + i dy \quad \vec{o}(\sqrt{dx^2 + dy^2}) = \vec{o}(\sqrt{dx^2}) + \vec{o}(\sqrt{dy^2})$

$$dz = dx + i dy \quad \bar{z} = \overline{1+ix} + i \overline{1+iy} = 1-ix + i(1-iy)$$

$$\alpha = \frac{\partial F}{\partial x} = f_x(z_0); \quad \beta = f_y(z_0)$$



$$\bar{0}(1) - \text{funkce } z \text{ lim}_{z \rightarrow 0} = 0$$

$dF := \alpha dx + \beta dy$ - diferenciál

$$\Delta F = dF + \text{"malé"}$$

Ted' , nechť $f: D \rightarrow \mathbb{R}^2; f = (u, v)$
 $dF = (du, dv) = du + i dv$ $u = u(x, y)$
 $v = v(x, y)$

$$\Delta F = dF + \bar{0}(10z)$$

"malá" $\mathbb{C}$ -známá funkce

$dF = dF(dz)$ - $\mathbb{R}$ -lin. funkce $\mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$

$$dF = A dz + B d\bar{z}; dF \text{ } \mathbb{C}\text{-lin.} \Leftrightarrow B = 0$$

Def: $\mathbb{R}$ -dif-ne zobr. $f: D \rightarrow \mathbb{C}$ se nazývá

$\mathbb{C}$ -difer. v bodu $z_0 \in D$, když $dF|_{z_0}$ je $\mathbb{C}$ -lin. ($\Leftrightarrow B = 0$ v z_0).

Jak to můžeme ověřit? Výpočet!

$$B = f_{\bar{z}}; \quad f_{\bar{z}} := \frac{1}{2} (f_x + i f_y), \quad f_x = u_x + i v_x, \quad f_y = u_y + i v_y$$

$$\Rightarrow f_{\bar{z}} = 0 \Leftrightarrow (u_x - v_y) + i(v_x + u_y)$$

$$\Rightarrow f_{\bar{z}} = 0 \Rightarrow \int u_x = v_y \quad \text{--- Rovnice}$$

$$\Rightarrow f_{\bar{z}} = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} u_x = v_y \\ u_y = -v_x \end{cases} \quad \text{-- Růvnice Cauchy-Riemanna}$$

(rovnice D'Alembert-Euler)

Veta: $\mathbb{R}$ -dif. zobr. $f: D \rightarrow \mathbb{C}$

je $\mathbb{C}$ -dif. v bodu $z_0 \in D \Leftrightarrow$ platí:

$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial x}(z_0) = \frac{\partial v}{\partial y}(z_0) \\ \frac{\partial u}{\partial y}(z_0) = -\frac{\partial v}{\partial x}(z_0) \end{cases} \quad \left(\begin{array}{l} \text{Cauchy-Riemannov.} \\ \text{rovnice} \end{array} \right)$$

Def: Funkce $f: D \rightarrow \mathbb{C}$ se nazývá holomorfní v D , pokud je $\mathbb{C}$ -dif. $\forall z_0 \in D$.

Příklady

a) $f(z) = \bar{z}$ -- nš lm. funkce $\Rightarrow f_{\bar{z}} \equiv 1$
 $\Rightarrow$ CR-rovnice neplatí $\forall z_0 \in D$
 (není $\mathbb{C}$ -dif $\forall z_0$)

b) $f(z) = |z|^2$; $|z|^2 = (\sqrt{x^2+y^2})^2 = x^2 + y^2$
 CR: $\begin{cases} 2x = 0 \\ 2y = 0 \end{cases} \Rightarrow f$ je

$$\begin{aligned} u &= x^2 + y^2 \\ v &= 0 \end{aligned}$$

$\mathbb{C}$ -dif jen v bodu $(0,0)$
 (není holm $\forall D \subset \mathbb{C}$)

c) $f(z) = z^2 = (x+iy)^2 = \underbrace{x^2 - y^2}_{u} + \underbrace{2xyi}_{v}$

$$c) f(z) = z = (x+iy) = \underbrace{x-y}_{u} + \underbrace{2xy}_{v}i$$

$$\begin{cases} 2x = 2x \\ -2y = -2y \end{cases} \Rightarrow \text{platí } \forall z \Rightarrow f \text{ je hol. v } \mathbb{C}$$

$$d) f(z) = e^z = e^x(\cos y + i \sin y) \quad \begin{matrix} u = e^x \cos y \\ v = e^x \sin y \end{matrix}$$

$$\begin{cases} e^x \cos y = e^x \cos y \\ -e^x \sin y = -e^x \sin y \end{cases} \Rightarrow \text{platí } \forall z \Rightarrow$$

$$\boxed{e^z \text{ je hol. v } \mathbb{C}}$$

Definice hol. na $\mathbb{C}$ -dif-t':

Def: $f: D \rightarrow \mathbb{C}$, $z_0 \in D$; $\Rightarrow$ číslo $A = \lim_{\Delta z \rightarrow 0} \frac{\Delta f}{\Delta z}$

(pokud $\exists$) se nazývá komp. derivace f
v bodu z_0 ; označíme $f'(z_0)$.

Popíšeme to: $A = \lim_{\Delta z \rightarrow 0} \frac{\Delta f}{\Delta z}$, $\Leftrightarrow$

$$\frac{\Delta f}{\Delta z} = A + \bar{o}(1); \Leftrightarrow \Delta f = A \Delta z + \bar{o}(\Delta z) =$$

$$= A \Delta z + \bar{o}(1) \cdot |\Delta z| \cdot \frac{\Delta z}{|\Delta z|};$$

$$\text{ale } \left| \frac{\Delta z}{|\Delta z|} \right| = 1 \Rightarrow \lim_{\Delta z \rightarrow 0} \bar{o}(1) \cdot \frac{\Delta z}{|\Delta z|} = 0 \Rightarrow$$

$$f'(z_0) \exists \Leftrightarrow \Delta f = A \Delta z + \bar{o}(|\Delta z|) \Leftrightarrow$$

$$f \text{ je } \mathbb{R}\text{-dif v } z_0, \text{ a } \frac{\partial f}{\partial \bar{z}}(z_0) = 0$$

F je $\mathbb{R}$ -dif v z_0 , a $\frac{\partial F}{\partial \bar{z}}(z_0) = 0$

Výsledek: F je $\mathbb{C}$ -dif v $z_0 \Leftrightarrow$

$\exists F'(z_0)$; a v tom

případe, $F'(z_0) = F_z(z_0) = \frac{\partial F}{\partial z}(z_0)$

Důstředek: $F: D \rightarrow \mathbb{C}$ je hol. v D
 $\Leftrightarrow \exists F'(z_0) \forall z_0 \in D$.

$\exists F'(z_0) \Leftrightarrow \mathbb{C}\mathbb{R}$ rovnice platí v z_0 .

Fakt: (div kompl. analýzy) pokud
 F je hol. v $D (\Leftrightarrow \exists F'(z_0) \forall z_0 \in D) \Rightarrow$

$\exists$ vše $F^{(n)}(z_0) \forall z_0 \in D$.

zejména, jako zob. $\mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$,

F je C^∞ .

\ dokážeme

trochu pořadí.

Označení: $O(D)$ - prostor všech hol.

funke v oblasti D ; píšeme $F \in O(D)$

Zakladny vlastnosti hol. funkce

Veta: Necht' $f, g \in O(D)$; $p \in K$,

$f \pm g, f \cdot g \in O(D)$, a platí:

$$(f \pm g)' = f' \pm g'$$

$$(f \cdot g)' = f'g + g'f$$

Pokud $g(z_0) \neq 0 \quad \forall z_0 \in D$, tak $\frac{f}{g} \in O(D)$

$$\text{a} \quad \left(\frac{f}{g}\right)' = \frac{f'g - g'f}{g^2}$$

Důkaz: prostě slovo-v-slovo

identické důkazy v reálné analýze!

Např.: $f \cdot g$

$\Delta f = f(z_0 + \Delta z) - f(z_0)$; $f(z_0 + \Delta z) = \Delta f + f(z_0)$
stejně pro $g \Rightarrow$

$$\Delta(f \cdot g) = (f(z_0) + \Delta f)(g(z_0) + \Delta g) - f(z_0)g(z_0)$$

$$\Rightarrow g(z_0)\Delta f + f(z_0)\Delta g =$$

$$\lim_{\Delta z \rightarrow 0} \frac{\Delta(fg)}{\Delta z} = \lim_{\Delta z \rightarrow 0} \left(g(z_0) \frac{\Delta f}{\Delta z} + f(z_0) \frac{\Delta g}{\Delta z} \right) =$$

$$= g(z_0)f'(z_0) + f(z_0)g'(z_0)$$

$$= g(z)f'(z_0) + f(z)g'(z_0)$$

Stejne (kopie důkazů z 1 semestru)
 pro ostatní alg. operace. 

$f(z)=z$ je hol. v $\mathbb{C}$ (protože je $\mathbb{C}$ -lin.)

a $f'(z_0)=1$; $f(z)=\text{const} \in O(\mathbb{C})$

$\Rightarrow$ podle def. $f'(z_0)$

$(\lambda f)' = \lambda f'$

Důsledek: $\forall$ polynom

$P(z) = a_0 + a_1 z + \dots + a_n z^n \in O(\mathbb{C})$

a $P'(z) = a_1 + 2a_2 z + \dots + n a_n z^{n-1}$

indukčně

Důsledek: $\forall$ racionální funkce

$R(z) = \frac{P(z)}{Q(z)} \in O(\mathcal{D})$, kde $\mathcal{D}$ je

oblast, kde $Q(z)$ nemá nuly.

$\left(A \quad R' = \frac{P'Q - Q'P}{Q^2} \right)$

Ověření: $(e^z)' = ?$

$u = e^x \cos y$
 $v = e^x \sin y$



$$F'(z) = \lim_{\Delta z \rightarrow 0} \frac{F(z+\Delta z) - F(z)}{\Delta z} = f_z = \frac{1}{2}(f_x - i f_y) =$$

$$= \frac{1}{2}((u_x + v_y) + i(u_y - v_x)) = |h'(z)| = e^z$$

$$(e^z)' = e^z$$

Důsledek z věty: $O(D)$ - lineární
prostor, a navíc je algebra funkcí.

Věta: Necht' $f: D \xrightarrow{\text{hol}} \Omega$; $g: \Omega \xrightarrow{\text{hol}} \mathbb{C}$

Takto, $h(z) := g(f(z)) = g \circ f \in O(D)$,
a navíc, $h'(z) = g'(f(z)) \cdot f'(z)$

Důkaz: Fakt, stejný jako v analýze;

$z \in D$, $w \in \Omega$;
 $w_0 = f(z_0)$



$$\Delta g = g'(w_0) \cdot \Delta w + \bar{o}(|\Delta w|)$$

$$\Delta f = f'(z_0) \cdot \Delta z + \bar{o}(|\Delta z|) \stackrel{h=g \circ f}{=} \Delta w$$

može být ukázkové

$$\Rightarrow \Delta h = g'(w_0) \cdot f'(z_0) \cdot \Delta z + \bar{o}(|\Delta z|)$$

$$\Rightarrow h'(z_0) = g'(f(z_0)) \cdot f'(z_0)$$

$$\Rightarrow h'(z_0) = g'(f(z_0)) \cdot f'(z_0)$$

Důsledek: $\sin z, \cos z \in O(\mathbb{C})$ 
^{a platí obecní vzorce pro f'}
 $\tanh z \in O(\mathbb{C} \setminus \{\frac{\pi}{2} + \pi k\})$ — platí
 $\coth z \in O(\mathbb{C} \setminus \{\pi k\})$ — f'

Důkaz: $\sin z = \frac{1}{2i} (e^{iz} - e^{-iz}) \Rightarrow$
 $\begin{matrix} \text{hol} & \text{hol} \\ \text{přile} & \text{přile} \\ \text{věty} & \text{věty} \end{matrix}$

$$\sin z \in O(\mathbb{C}), (\sin z)' = \frac{1}{2i} (ie^{iz} + ie^{-iz}) = \cos z$$

A stejně pro ostatní funkce. 

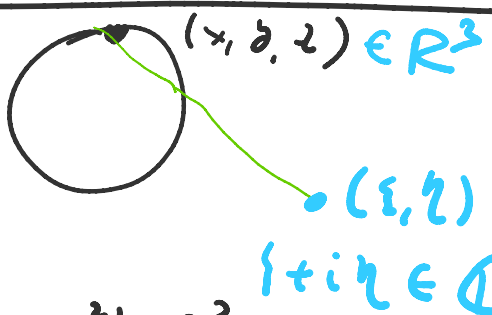
Podobně, $e^{\sin z}$, $\tanh^5 z$, atd budou hol.

Ně vime hodně hol. funkce!

$\sqrt[n]{z}, \ln z, \dots?$

Přiznají se „smezu“ inverzní funkce..

tvary $\mathbb{R}^n$ je stále invertovatelné.

$$\xi = \frac{x}{1-z}, \eta = \frac{y}{1-z}$$


$(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$
 (ξ, η)
 $1 + i\eta \in \mathbb{C}$

kružnice v $\mathbb{C}$: $(\xi - \alpha)^2 + (\eta - \beta)^2 = R^2 \iff$

$$\xi^2 + \eta^2 + a\xi + b\eta + c = 0$$

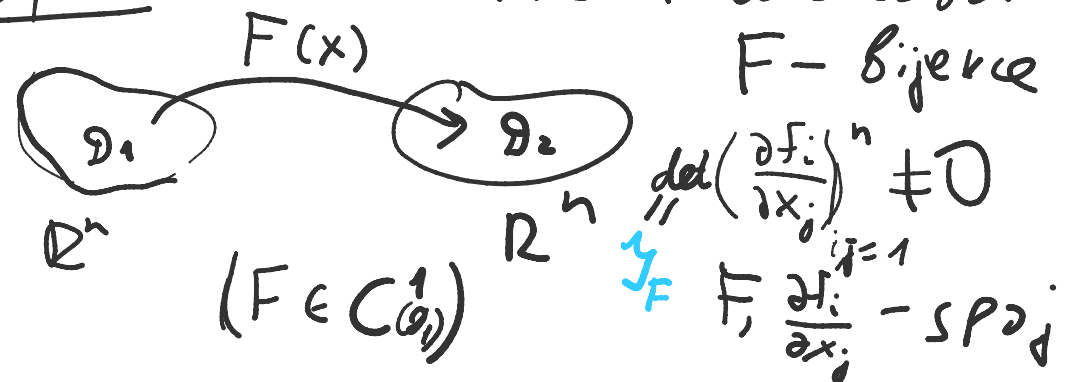
$$\begin{cases} X^2 + Y^2 + aX(1-z) + bY(1-z) + c(1-z)^2 = 0 \\ X^2 + Y^2 + Z^2 = 1, \quad X^2 + Y^2 = 1 - Z^2 \end{cases}$$

$$(1-z)(1+z) + aX(1-z) + bY(1-z) + c(1-z)(1-z) = 0$$

af-čln. rovnice $Ax + By + Cz + D = 0$

$\Rightarrow$ kružnice v $\mathbb{C}$ odpovídá $S^2 \cap \Pi$
 rovina

Příklad: Reálna věta o inverze zobrazení



$\Rightarrow \exists$ inv. zobrazení $G: D_2 \rightarrow D_1, G \in C^1(D_2)$
 $F \circ G = Id$

Otázka: necht' $f: D_1 \rightarrow D_2$ - hol

Otvorke: necht' $f: D_1 \rightarrow D_2$ - hol
 $z \in D_2$
 (o je y_f ?) $z = x + iy$
 $w = u + iv$

$$y_f = \begin{vmatrix} u_x & u_y \\ v_x & v_y \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} u_x & u_y \\ -u_y & u_x \end{vmatrix} = u_x^2 + u_y^2$$

polle
def

$$f'(z) = \frac{\partial F}{\partial z} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial F}{\partial x} - i \frac{\partial F}{\partial y} \right) =$$

$$= \frac{1}{2} \left(\left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} \right) + i \left(\frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y} \right) \right) = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y} + i \left(\frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} \right) \right) = \frac{\partial u}{\partial x} + i \frac{\partial v}{\partial x}$$

$$\Rightarrow y_f = |f'(z)|^2$$

Dusledek: $y_f \neq 0 \Leftrightarrow f' \neq 0$

Veta (o inv hol zobz): necht' $f: D \rightarrow \Omega$
 je bijekt. hol. zobz, a $f' \neq 0$ v D .

Pak, $\exists$ inv zobz $g: \Omega \rightarrow D$, $g \in O(\Omega)$

$$g'(w) = \frac{1}{f'(z)}, \quad w = f(z)$$

Dukaz: Necht', $h \in C^1(D)$

$\Rightarrow$ mžeme postvat veta o
 inv. zobz. v $\mathbb{R}^n$ + dusledek $\Rightarrow$

$\exists$ inv. zobz. $g: \Omega \rightarrow D$, $g \in C^1(\Omega)$

Ted' col

to fakt
 plat,
 automatic;
 pro hol
 funkce
 ale dokazimo
 parsoji

... $g \in O(\Omega)$...



Ted, cel
je dokazat
že $g \in O(\Omega)$

Fakt že $f \in C(D)$, $g \in C(\Omega)$ znamená:

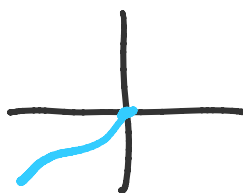
$$\Delta z \rightarrow 0 \Leftrightarrow \Delta w \rightarrow 0$$

$$g'(w_0) = \lim_{\Delta w \rightarrow 0} \frac{\Delta g}{\Delta w} = \lim_{\Delta w \rightarrow 0} \frac{\Delta g}{\Delta z} \frac{\Delta z}{\Delta w} =$$

$$= \frac{1}{\lim_{\Delta z \rightarrow 0} \frac{\Delta w}{\Delta z}} = \frac{1}{f'(z_0)}.$$



Důsledek: V vetvi $\mathcal{L}_n z$, $f(z)$ je hol
a $f'(z) = \frac{1}{z}$



Důkaz: $e^{f(z)} = z \Rightarrow f = \ln z \Rightarrow e^z = z$

$w = f(z)$
 $e^w = z$

$$f \text{ je hol, } f'(z) = \frac{1}{(e^w)'} = \frac{1}{e^w} = \frac{1}{z}$$

Výsledek: V vetvi $\sqrt[n]{z}$, $\sqrt[n]{z}$ je hol, a derivace = $\frac{\sqrt[n]{z}}{nz}$

Důkaz: $w = f(z)$; $z = w^n$, f - hol,

$$a \quad f'(z) = \frac{1}{(w^n)'} = \frac{1}{nw^{n-1}} = \frac{w}{nw^n} = \frac{\sqrt[n]{z}}{nz}$$

Důsledek: V vetvi z^a je hol a derivace = az^{a-1}

Důsledek: Všechny z^a je hol, a $dz = a z^{a-1}$

$$(z^a)' = (e^{a \ln z})' = e^{a \ln z} (a \ln z)' = z^a \cdot a \cdot \frac{1}{z} = a z^{a-1}$$

Podobně, ^{všech} $\text{Arcsin}, \text{Arccos}, \text{Arctg}, \text{Arccotg}$ jsou hol, a platí obecní vztahy pro derivaci!

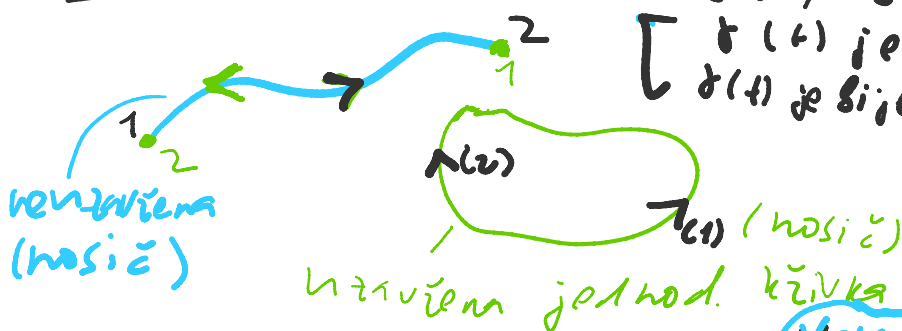
Výsledek: * Algebra $O(\mathbb{D})$
* Vše element funkce

jsou hol v všech přiroz. oblastech,
a platí obecní pravidla pro derivace

Integrovaná Věta Cauchy

Křivky: $\gamma(t): [a, b] \rightarrow \mathbb{C}$ ($z(t)$)
obraz $\gamma(t)$: nosič $[\gamma] \subset \mathbb{C}$

Jednoduchá křivka: křivka která neprotíná se sama sebou, nebo jen $\gamma(a) = \gamma(b)$



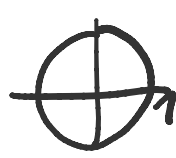
$\gamma(t)$ je bijekce
 $\gamma(t)$ je bijekce s výjimkou
 $\gamma(a) = \gamma(b)$

Věta z topologie

V jednot. kruhu, $\exists$ 2 třídy parametrizací, které geom. odpovídají "směru" $\Rightarrow$

Příklad:  $\begin{bmatrix} x(t)=t \\ y(t)=t \end{bmatrix}_{t \in [0,1]}$ $\begin{bmatrix} x(t)=t^2 \\ y(t)=t^2 \end{bmatrix}_{t \in [0,1]}$ — třídy

$\begin{bmatrix} x(t)=1-t \\ y(t)=1-t \end{bmatrix}_{t \in [0,1]}$ $\begin{bmatrix} x(t)=\cos t \\ y(t)=\cos t \end{bmatrix}_{t \in [0, \frac{\pi}{2}]}$ — 2 třídy

Příklad:  (1) $z(t) = e^{it}$, $0 \leq t \leq 2\pi$

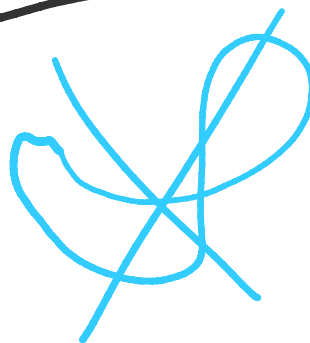
(1) $\nrightarrow$ (2) (2) $z(t) = e^{-it}$, $0 \leq t \leq 2\pi$

(1) $\sim$ (3) (3) $z(t) = ie^{it}$, $0 \leq t \leq 2\pi$

(2) $\nrightarrow$ (3)

Budeme hovořit jet jednoduchí křivky

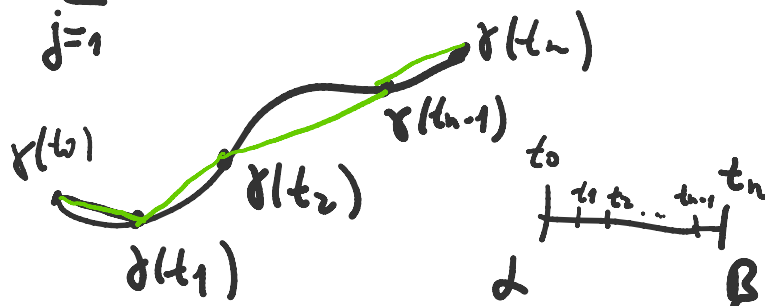
Napravitelná křivka: mají konečný počet



$$|\gamma| := \sup \sum_{j=1}^n |\gamma(t_j) - \gamma(t_{j-1})| < \infty$$

Příklad:

$+ y = x \sin \frac{1}{x}$



$$\delta(t_1) \quad \alpha \quad \beta$$

Uvažujeme jen napr. křivky

Důležitá třída: počáteční hladké křivky mají koneč. delku

$$\gamma(t): \quad \alpha \quad d_1 \quad d_{n-1} \quad \beta$$

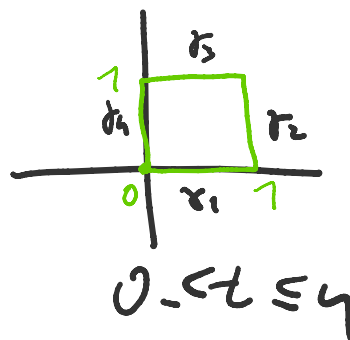


Vn hladkých $\gamma(t) = \begin{cases} \gamma_1(t), d_0 \leq t \leq d_1 & n \text{ částí} \\ \gamma_2(t), d_1 \leq t \leq d_2 & (\text{hladké}) \\ \gamma_n(t), d_{n-1} \leq t \leq \beta = d_n \end{cases}$

$\forall \gamma_j(t)$ - hladká: $\exists \gamma_j'(t)$, a $\gamma_j'(t) \in [d_{j-1}, d_j]$

Příklad: mnohoúhelník!

$$\gamma(t) = \begin{cases} t, & 0 \leq t \leq 1 \\ 1 + i(t-1), & 1 \leq t \leq 2 \\ i + (3-t), & 2 \leq t \leq 3 \\ i(4-t), & 3 \leq t \leq 4 \end{cases}$$



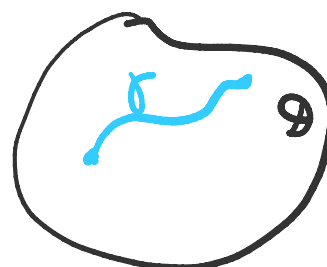
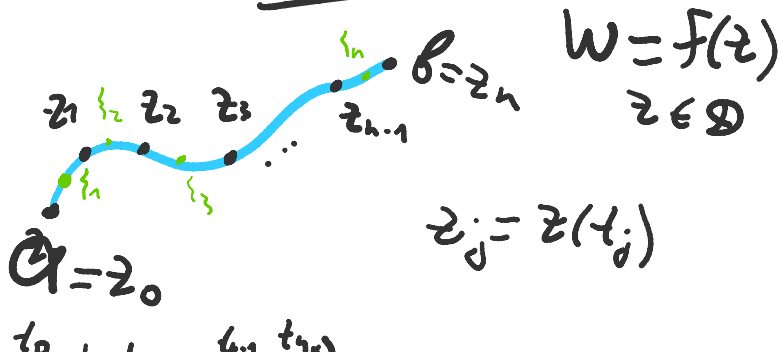
(nebo lomení čar)



$$\gamma(t) = e^{it} \Rightarrow |\gamma| = \int_0^{2\pi} |e^{it}| dt = 2\pi$$

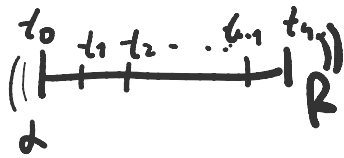
Integrál

$$|\gamma| = \int_{\alpha}^{\beta} |\gamma'(t)| dt$$



$$\gamma: z = z(t)$$

$$\gamma = z_0$$



integrální součty:

$$\sum_{j=1}^n f(\xi_j) (z_j - z_{j-1})$$

$$\gamma: \overline{z} = z(t)$$

$$\lim_{\max |z_j - z_{j-1}| \rightarrow 0} (\text{int součtu}) := \int_{\gamma} f(z) dz$$

(integral od $f(z)$ podle γ)

Vlastnost I: integral nezávisí od parametrizace, ale závisí od třídi

parametrizace:

Smer +
integr. cesta

$$\int_{\gamma^+} f(z) dz = - \int_{\gamma^-} f(z) dz$$

Důkaz: když změním parametrizaci $\Rightarrow$

$$\{z_0, z_1, z_2, \dots, z_n\} \rightarrow \{z_n, z_{n-1}, \dots, z_1, z_0\}$$

to je důvod, proč změna γ

Proč integral nezmění pro parametr. se stejnou třídou: množina integrálních součtů je stejná!

$$\max |z_j - z_{j-1}| \rightarrow 0 \Leftrightarrow |\tilde{z}_j - \tilde{z}_{j-1}| \rightarrow 0$$

$$(\max |t_j - t_{j-1}| \rightarrow 0)$$



$$(\max |z_j - z_{j-1}| \rightarrow 0)$$



II) Zankladny mez:

$$\left| \int_{\gamma} f dz \right| \leq \underbrace{M}_{\sup |f|} \cdot |\gamma| \quad (|f| \leq M)$$

$$\text{III)} \int_{\gamma} c dz = c \cdot (\underbrace{\sigma(\beta) - \sigma(\alpha)}_{\sigma(\gamma)})$$

Dokaz pro II): $f: [\alpha, \beta] \rightarrow \mathbb{C}$

$$\left| \sum_{j=1}^n f(\xi_j) (z_j - z_{j-1}) \right| \leq \sum_{j=1}^n |f(\xi_j)| \cdot |z_j - z_{j-1}| \leq M \cdot \sum_{j=1}^n |z_j - z_{j-1}| \leq M \cdot |\gamma| \Rightarrow$$

p. 100 def 181

Stejni mez $\left| \int_{\gamma} f(z) dz \right| \leq M \cdot |\gamma|$
plati pro integral.

Dokaz pro III): Vmt. součet =

$$= \sum_{j=1}^n c \cdot (z_j - z_{j-1}) = c \cdot (z_n - z_0) = c \cdot (\sigma(\beta) - \sigma(\alpha))$$

Zp. znam. $\int c dz = c \cdot (z_n - z_0)$

Zejmeha: $\int_{\gamma} f dz = 0$, když f je nezrušena

IV Redukce k

Průměr $z = x + iy$

křivkovému int

$$f = u + iv \Rightarrow$$

(matem. analýza): $f dz = (u + iv)(dx + i dy) =$
 $= (u dx - v dy) + i(v dx + u dy)$

$$\int_{\gamma} f dz = \int_{\gamma} (u dx - v dy) + i \int_{\gamma} (v dx + u dy)$$

Důkaz: $\sum_{j=1}^n f(z_j)(z_j - z_{j-1}) = \int_{\gamma} f dz$

$$= \sum_{j=1}^n u(z_j)(x_j - x_{j-1}) - \sum_{j=1}^n v(z_j)(y_j - y_{j-1}) +$$
$$+ i \sum_{j=1}^n v(z_j)(x_j - x_{j-1}) + i \sum_{j=1}^n u(z_j)(y_j - y_{j-1})$$

Tedy používáme vlastnosti
křivkového int, a dostaneme:

1) Spojitá funkce je integrovatelná
(protože f -spojitá $\Rightarrow u, v$ -spojití)

Itak platí když, např., f je
omezená a spojitá po částech)

$\Rightarrow$ lineární (1.1.1) (1.1.2) (1.1.3) (1.1.4)

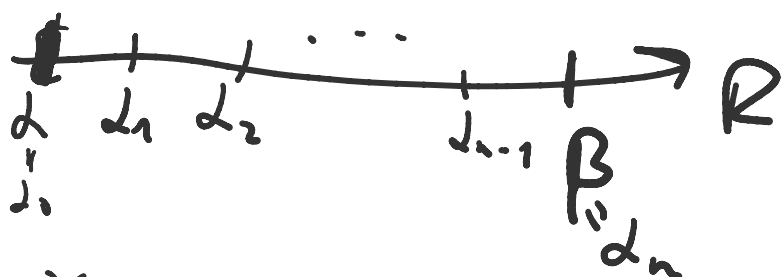
Unědělá a splyňá pro ústředí)

2) Linearity: $\int_{\gamma} (f \pm g) dz = \int_{\gamma} f dz \pm \int_{\gamma} g dz$
 $\int_{\gamma} \lambda f dz = \lambda \cdot \int_{\gamma} f dz$

(jednoduché cvičení pro ústředí - proč to je důstředí vl. IV).

Důležité: směr je stejný pro všechny n !

3) Additivita: když $\gamma = \bigcup_{j=1}^n \gamma_j$



$\gamma_j: [a_{j-1}, a_j] \rightarrow \mathbb{R}$, stejné vzorec $\gamma(t)$

$$\int_{\gamma} f dz = \sum_{j=1}^n \int_{\gamma_j} f dz$$

(směr / orientace musí souhlasit
 druh & druhem !!!)

$$\int_{\Delta^+} f dz = \int_{AC} f dz + \int_{CB} f dz + \int_{BA} f dz$$



4) Výpočet z parametizace

$$\int_{\gamma} f(z) dz = \int_a^b f(\gamma(t)) \gamma'(t) dt$$

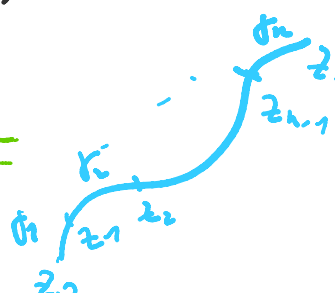
7/ vyjádřit z rovnice
parametrizace:

$$\int_{\gamma} f(z) dz = \int_a^b f(\gamma(t)) \gamma'(t) dt$$

(γ -křivka, hledat po částech, f -spojitá)

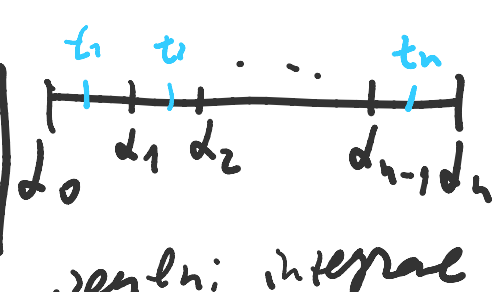
Důkaz: oba integ $\exists$, pro číson
vzhledem

uvážejeme $\sum_{j=1}^n f(\zeta_j)(z_j - z_{j-1}) - \int_a^b f(\gamma(t)) \gamma'(t) dt =$

$$= \sum_{j=1}^n \int_{\gamma_j} f(\zeta_j) dz - \int_{d_{j-1}}^{d_j} f(\gamma(t)) \gamma'(t) dt =$$


$$= \sum_{j=1}^n \left[\int_{\gamma_j} f(\zeta_j) dz - \int_{d_{j-1}}^{d_j} f(\gamma(t)) \gamma'(t) dt \right]$$

additivita



reální integrál

$$\int_{\gamma_j} f(\zeta_j) dz = \int_{d_{j-1}}^{d_j} f(\zeta_j) \gamma'(t) dt = f(\zeta_j) \cdot (\gamma(d_j) - \gamma(d_{j-1}))$$

Podle Newton-Leibnizova Věty

$$\Rightarrow \sum_{j=1}^n \int_{d_{j-1}}^{d_j} (f(\zeta_j) - f(\gamma(t))) \gamma'(t) dt$$

Ale: když $n \rightarrow \infty$, $\max_{t \in [t_{j-1}, t_j]} |\gamma(t) - \zeta_j| \rightarrow 0$

$\Rightarrow (f\text{-spojitá}) \max |f(\gamma(t)) - f(\zeta_j)| \rightarrow 0$

$$\Rightarrow (F\text{-spajita}) \max |F(\sigma(t)) - F(\xi_j)| \rightarrow 0$$

$$\Rightarrow \text{hais rozdil na modul} \leq$$

$$\leq \sum_{j=1}^n \varepsilon \cdot \max_{t \in [a, b]} |\sigma'(t)| \cdot (d_j - d_{j-1}) = \varepsilon \cdot \underset{0}{C} \cdot (b - a)$$

$$\Rightarrow \int_a^b F(\sigma(t)) \sigma'(t) dt = \int_a^b F(x) dx$$

