Cvičení 3.

Upozornění: Funkce implementované v MATLABu pro práci s exponenciálním rozložením vyžadují zadávat převrácenou hodnotu parametru λ.

Příklad 1.: Doba do ukončení opravy v opravně obuvi je náhodná veličina, která se řídí exponenciálním rozložením se střední hodnotou 3 dny. Jaká je pravděpodobnost, že oprava bude ukončena do dvou dnů?
Řešení: X ~ Ex(1/3),

$$P(X \leq 2) = \int_0^2 \frac{1}{3} e^{-\frac{x}{3}} dx = \left[-e^{-\frac{x}{3}} \right]_0^2 = 1 - e^{-\frac{2}{3}} = 0{,}4866$$

V MATLABu: p = expcdf(2,3)

Příklad 2.: Životnost žárovky má exponenciální rozložení se střední hodnotou 600 h. Jaká je pravděpodobnost, že žárovka bude svítit dalších aspoň 200 h, jestliže již svítila aspoň 800 h?
Řešení: X ~ Ex(1/600), podle věty 3.4 dostáváme

$$P(X \geq 800 + 200 / X \geq 800) = P(X \geq 200) = 1 - P(X \leq 200) + P(X = 200)$$

$$= 1 - \int_0^{200} \frac{1}{600} e^{-\frac{x}{600}} dx = 1 - \left[-e^{-\frac{x}{600}} \right]_0^{200} = e^{-\frac{200}{600}} = e^{-\frac{1}{3}} = 0{,}7165$$

V MATLABu: p = 1- expcdf(200,600)

Příklad 3.: Doba (v hodinách), která uplyne mezi dvěma naléhavými příjmy v jisté nemocnici, se řídí exponenciálním rozložením se střední hodnotou 2 h. Jaká je pravděpodobnost, že uplyne více než 5 h bez naléhavého příjmu?
Řešení: X ~ Ex(1/2),

$$P(X > 5) = 1 - P(X \leq 5) = 1 - \int_0^5 \frac{1}{2} e^{-\frac{x}{2}} dx = 1 - \left[-e^{-\frac{x}{2}} \right]_0^5 = e^{-2{,}5} = 0{,}082$$

V MATLABu: p = 1- expcdf(5,2)

Příklad 4.: Zkoumá se funkce dvou nezávisle na sobě pracujících přístrojů. Doba bezporuchové funkce i-tého přístroje je náhodná veličina $X_i \sim Ex(\lambda_i)$, i = 1, 2. Jaká je pravděpodobnost, že za dobu $t_0 > 0$ a) ani jeden přístroj neselže, b) selže aspoň jeden přístroj?
Řešení: ad a)

$$P(X_1 > t_0 \wedge X_2 > t_0) = P(X_1 > t_0)P(X_2 > t_0) = [1 - P(X_1 \leq t_0)][1 - P(X_2 \leq t_0)] =$$

$$= [1 - \Phi_1(t_0)][1 - \Phi_2(t_0)] = e^{-\lambda_1 t_0} e^{-\lambda_2 t_0} = e^{-t_0(\lambda_1 + \lambda_2)}$$

ad b) $P(X_1 \leq t_0 \vee X_2 \leq t_0) = 1 - e^{-t_0(\lambda_1 + \lambda_2)}$ (jde o jev opačný k jevu z bodu (a))

Příklad 5.: Najděte 5. percentil náhodné veličiny X ~ Ex(0,1).
Řešení:

$$0{,}05 = \Phi(K_{0{,}05}(X)) = 1 - \exp(-0{,}1 K_{0{,}05}(X)) \Rightarrow K_{0{,}05}(X) =$$

$$= -10 \ln 0{,}95 = 0{,}5129$$

V MATLABu: K = expinv(0.05,10)

Příklad 6.: Jistý přístroj má poruchu v průměru jednou za 2000 hodin. Doba čekání na poruchu se řídí exponenciálním rozložením. Stanovte dobu t tak, aby pravděpodobnost, že přístroj bude pracovat po dobu delší než t, byla 0,99.

Řešení: X … doba čekání na poruchu, X ~ Ex(1/2000)

$$0{,}99 = P(X > t) = 1 - P(X \le t) = 1 - \Phi(t) = e^{-\frac{t}{2000}} \Rightarrow$$

$$t = -2000 \cdot \ln 0{,}99 = 20{,}1\mathrm{h}$$

V MATLABu: t=expinv(0.01,2000)

Příklad 7.: Zákazník prochází třemi nezávislými stanicemi obsluhy, přičemž v každé z nich se doba obsluhy řídí exponenciálním rozložením se střední hodnotou 1 minuta. Jaká je pravděpodobnost, že celková doba obsluhy nepřesáhne 2 minuty?

Řešení: Označme X_i dobu obsluhy na i-té stanici, $X_i \sim Ex(1)$, i = 1, 2, 3 a $Y = X_1 + X_2 + X_3$ celkovou dobu obsluhy. Podle poznámky 3.13. se celková doba obsluhy řídí rozložením Er(3,1), tedy hustota $\varphi(y) = \frac{y^2}{2} e^{-y}$ pro $y > 0$. Počítáme:

$$P(Y \le 2) = \int_0^2 \frac{y^2}{2} e^{-y} dy = \ldots = 1 - 5e^{-2} = 0{,}3233$$

Pravděpodobnost, že celková doba obsluhy nepřesáhne 2 minuty, je 0,3233.

Příklad 8.: Ve společnosti, která prodává letenky, zjistili na základě náhodného výběru 100 zákazníků, že zákazníci kupují letenky průměrně 15 dní před odletem. Za předpokladu, že tato doba se řídí exponenciálním rozložením, vypočtěte meze 95% empirického intervalu spolehlivosti pro střední hodnotu doby od nákupu letenky do odletu.

Řešení: n = 100, m = 15, α = 0,05

$$d = \frac{2nm}{\chi^2_{1-\alpha/2}(2n)} = \frac{2 \cdot 100 \cdot 15}{\chi^2_{0{,}975}(200)} = \frac{3000}{241{,}06} = 12{,}45$$

$$h = \frac{2nm}{\chi^2_{\alpha/2}(2n)} = \frac{2 \cdot 100 \cdot 15}{\chi^2_{0{,}025}(200)} = \frac{3000}{162{,}73} = 18{,}44$$

Střední hodnota doby od nákupu letenky do odletu se s pravděpodobností aspoň 0,95 nachází v intervalu 12,45 dne až 18,44 dne.

Příklad 9.: Pro údaje z příkladu 8 spočtěte meze 95% asymptotického empirického intervalu spolehlivosti pro střední hodnotu doby od nákupu letenky do odletu.

Řešení: n = 100, m = 15, α = 0,05

$$d = m - \frac{m}{\sqrt{n}} u_{1-\alpha/2} = 15 - \frac{15}{\sqrt{100}} 1{,}96 = 12{,}06$$

$$h = m + \frac{m}{\sqrt{n}} u_{1-\alpha/2} = 15 + \frac{15}{\sqrt{100}} 1{,}96 = 17{,}94$$

Střední hodnota doby od nákupu letenek do odletu se s pravděpodobností aspoň 0,95 nachází v intervalu 12,06 dne až 17,94 dne.

Příklad 10.: Náhodná veličina X se řídí rozložením Ex(0,5). Pomocí MATLABu vyřešte následující úkoly:

a) Nakreslete graf hustoty a distribuční funkce.

b) Nakreslete graf kvantilové funkce.
c) Vypočtěte střední hodnotu a rozptyl této náhodné veličiny.
d) Vygenerujte 100 realizací této náhodné veličiny a nakreslete jejich histogram (s 10 třídicími intervaly).

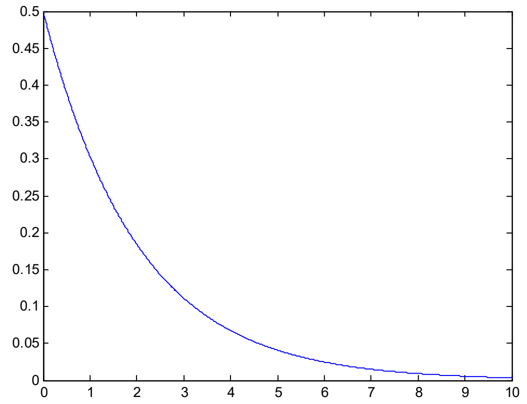
e) Na základě vygenerovaných 100 realizací odhadněte parametrickou funkci $\frac{1}{\lambda}$ (tj. střední hodnotu) a meze 95% intervalu spolehlivosti pro střední hodnotu.

Řešení:

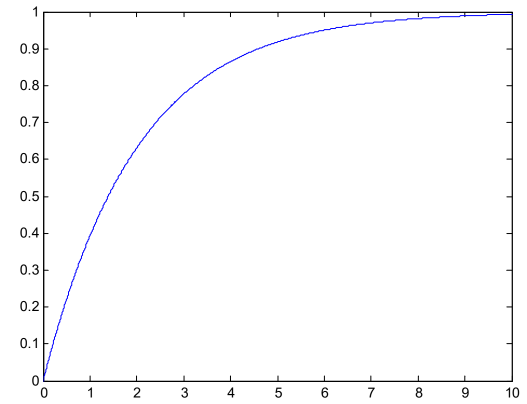
Ad a) Kreslení grafu hustoty a distribuční funkce rozložení Ex(1/2)

```
x=[0:0.01:10]';
f=exppdf(x,2);
plot(x,f)
df=expcdf(x,2);
figure
plot(x,df)
```

Graf hustoty



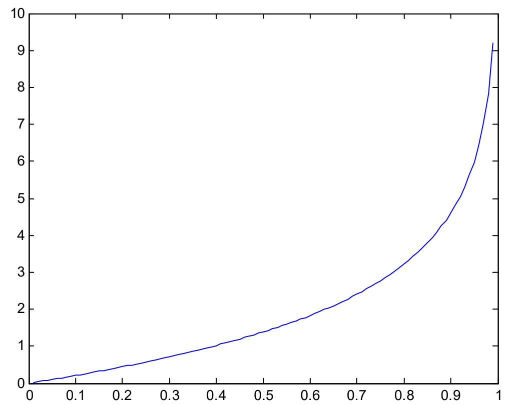
Graf distribuční funkce



Ad b) Kreslení grafu kvantilové funkce rozložení Ex(1/2)

```
alfa=[0.01:0.01:0.99]';
kv=expinv(alfa,2);
plot(alfa,kv)
```

Graf kvantilové funkce



Ad c) Výpočet střední hodnoty a rozptylu rozložení Ex(1/2)
[m,v]=expstat(2)

Ad d) Generování 100 realizací náhodné veličiny s rozložením Ex(1/2) a kreslení histogramu s 10 třídicími intervaly
r=exprnd(2,100,1);
hist(r)

Ad e) Odhad střední hodnoty a mezí 95% intervalu spolehlivosti pro střední hodnotu na základě proměnné r
Hodnoty uložené v proměnné r považujeme za realizace náhodného výběru rozsahu 100 z rozložení Ex(1/2)
[m,meze]=expfit(r)

Příklady k samostatnému řešení:

Příklad 11.: Na základě znalosti 100(1-α)% intervalu spolehlivosti pro střední hodnotu exponenciálního rozložení (viz věta 3.18.) odvoďte 100(1-α)% interval spolehlivosti pro hodnotu funkce přežití v bodě x.
Výsledek: 100(1-α)% interval spolehlivosti pro Ψ(x) má meze:

$$D = \exp(\frac{-x\chi^2_{1-\alpha/2}(2n)}{2nM},\ H = \exp(\frac{-x\chi^2_{\alpha/2}(2n)}{2nM}$$

Příklad 12.: Při zkouškách životnosti určitého elektronického prvku byly zjištěny následující doby života (ve dnech): 4, 13, 26, 36, 51, 75, 100, 111, 162, 174. Uvedené hodnoty považujeme za realizace náhodného výběru rozsahu 10 z rozložení Ex(λ). Najděte 95% pravostranný interval spolehlivosti pro pravděpodobnost, že náhodně vybraný elektronický prvek přežije 50 dnů.
Výsledek: Se spolehlivostí 95 % lze očekávat, že pravděpodobnost přežití 50 dnů je nejvýše 0,7.