Témata pro kolokviální projekt

1. Vytvořte interaktivní prostředí pro simulaci maticových modelů s konstantní maticí.
   Vstupem by mělo být: počet tříd, projekční matice, délka projekce.
   Výstupy numerické: růstový koeficient, vektor stabilizované struktury, vektor reprodukčních hodnot, matice citlivosti a pružnosti.
   Výstupy grafické: Průběh velikosti populace a jednotlivých tříd, grafické znázornění vektorů stabilizované struktury a reprodukčních hodnot, znázornění matic citlivosti a pružnosti.
   Je možné využít např. prostředí RShiny.

   Toto není práce pro jednotlivce, ale pro team; jeho členové se mohou podělit o vytvoření jednotlivých procedur.

2. Uvažujte populaci, jejíž vývoj je popsán Leslieho projekční maticí s plodnostmi a pravděpodobností přežívání daných tabulkou

i	F_i	P_i
1	0	0.99670
2	0.00102	0.99837
3	0.08515	0.99780
4	0.30574	0.99672
5	0.40002	0.99607
6	0.28061	0.99472
7	0.15260	0.99240
8	0.06420	0.98867
9	0.01483	0.98274
10	0.00089	

   (populace amerických žen mladších než 50 let).
   „Stabilizujte“ populaci změnou (zmenšením) právě jednoho z koeficientů a vypočítejte setrvačnost populace.
   Výpočet proveďte pro každý z 18 koeficientů a pokuste se najít závislost setrvačnosti populace na jednotlivých koeficientech.

3. Zvolte si nějakou projekční matici a pomocí ní simulujte vývoj příslušné populace. K simulovaným datům přidejte šum (náhodnou složku) aditivní a/nebo multiplikativní. Z takto vygenerovaných dat identifikujte původní parametry modelu. parametry.
   Celý postup zopakujte několikrát. Pokuste se najít souvislost mezi rozptylem náhodné složky a přesností identifikace parametrů.

4. Alternativní model se sezónní variabilitou.
   Hraboši rodí mláďata dvakrát ročně, na jaře a na podzim. Jarní novorozenci rodí již na podzim téhož roku, podzimní novorozenci na jaře roku následujícího. Hraboši se dožívají nejvýše dvou let. Jedinci narození na jaře mají jinou kondici (tj. plodnost a pravděpodobnost přežívání), než jedinci narození na podzim.
   Sestavte a analyzujte model vývoje takové populace.

5. Uvažujte maticový model $\boldsymbol{n}(t+1) = \mathsf{A}(t)\boldsymbol{n}(t)$ s periodickou maticí A, tj. $\mathsf{A}(t+m) = \mathsf{A}(t)$ pro všechna $t \in \mathbb{R}$ a nějaké $m \in \mathbb{N}$. Každá z matic $\mathsf{A}(t)$ je primitivní.
   Rozhodněte, zda je matice $\mathsf{A}_0 = \mathsf{A}(m-1)\mathsf{A}(m-2)\cdots\mathsf{A}(1)\mathsf{A}(0)$ primitivní, imprimitivní, nebo reducibilní; své rozhodnutí dokažte.

6. Dokažte, že pro Birkhoffův kontrakční koeficient τ kladné matice A platí $\tau(\mathsf{A}) < 1$.

7. Navrhněte (nebo někde najděte) proceduru nebo algoritmus výpočtu Birkhoffova kontrakčního koeficientu nezáporné matice.

Uvažujte posloupnost matic

$$\mathsf{H}_t = \prod_{j=0}^{t-1} \mathsf{A}(j), \quad \text{kde } \mathsf{A}(t) = \begin{pmatrix} 0 & 1 + 0{,}9 \sin\left(\frac{1}{2}t - 3\right) & 5 + \sin\left(\frac{1}{10}t + 1\right) \\ 0{,}3 + 0{,}15 \sin t & 0 & 0 \\ 0 & 0{,}5 + 0{,}2 \sin(2t - 1) & 0 \end{pmatrix}.$$

Simulujte průběh posloupnosti $\tau(H_t)$ a ukažte/dokažte, že tato posloupnost je ergodická.