Autonomní systémy

ω - limitní množina a její struktura

Petr Liška

Masarykova univerzita

30.3.2021

$$x' = f(x), \qquad f \in C(D, \mathbb{R}^m), D \subseteq \mathbb{R}^m \text{ je otevřená} \tag{1}$$

Definice

Množina $M \subseteq D$ se nazývá *invariantní*, jestliže pro každé řešení $x(t)$ rovnice (1) splňující $x(0) \in M$ platí $x(t) \in M$ pro $t \in (-\infty, \infty)$. Je-li tato vlastnost platná pouze pro $t \geq 0$ (resp. $t \leq 0$), nazývá se M *pozitivně* (resp. *negativně*) *invariantní.*

$$x' = f(x), \qquad f \in C(D, \mathbb{R}^m), D \subseteq \mathbb{R}^m \text{ je otevřená} \tag{1}$$

Definice

Množina $M \subseteq D$ se nazývá *invariantní*, jestliže pro každé řešení $x(t)$ rovnice (1) splňující $x(0) \in M$ platí $x(t) \in M$ pro $t \in (-\infty, \infty)$. Je-li tato vlastnost platná pouze pro $t \geq 0$ (resp. $t \leq 0$), nazývá se M *pozitivně* (resp. *negativně*) *invariantní.*

Označme C^+ trajektorii rovnice (1) odpovídající řešení $x(t)$, $t \geq t_0$.

$$x' = f(x), \qquad f \in C(D, \mathbb{R}^m), D \subseteq \mathbb{R}^m \text{ je otevřená} \tag{1}$$

Definice

Množina $M \subseteq D$ se nazývá *invariantní*, jestliže pro každé řešení $x(t)$ rovnice (1) splňující $x(0) \in M$ platí $x(t) \in M$ pro $t \in (-\infty, \infty)$. Je-li tato vlastnost platná pouze pro $t \geq 0$ (resp. $t \leq 0$), nazývá se M *pozitivně* (resp. *negativně*) *invariantní.*

Označme C^+ trajektorii rovnice (1) odpovídající řešení $x(t)$, $t \geq t_0$. A podobně C^- je trajektorie odpovídající řešení $x(t)$, $t \leq t_0$. C^+ a C^- nazýváme *polotrajektorie* (kladná a záporná).

Definice

Nechť C^+ je trajektorie řešení $x(t)$ rovnice (1). ω-limitním bodem trajektorie C^+ rozumíme libovolný bod $x_0 \in \mathbb{R}^m$ takový, že existuje posloupnost $\{t_n\}_{n=1}^{\infty}$, $t_n \to \infty$ tak, že $x(t_n) \to x_0$ pro $n \to \infty$. Množina $\Omega(C^+)$ všech ω-limitních bodů trajektorie C^+ se nazývá ω-limitní množina trajektorie C^+.

Definice

Nechť C^+ je trajektorie řešení $x(t)$ rovnice (1). ω-limitním bodem trajektorie C^+ rozumíme libovolný bod $x_0 \in \mathbb{R}^m$ takový, že existuje posloupnost $\{t_n\}_{n=1}^{\infty}$, $t_n \to \infty$ tak, že $x(t_n) \to x_0$ pro $n \to \infty$. Množina $\Omega(C^+)$ všech ω-limitních bodů trajektorie C^+ se nazývá ω-limitní množina trajektorie C^+.

Definice

Nechť C^- je trajektorie řešení $x(t)$ rovnice (1). α-limitním bodem trajektorie C^+ rozumíme libovolný bod $x_0 \in \mathbb{R}^m$ takový, že existuje posloupnost $\{t_n\}_{n=1}^{\infty}$, $t_n \to -\infty$ tak, že $x(t_n) \to x_0$ pro $n \to \infty$. Množina $A(C^+)$ všech α-limitních bodů trajektorie C^- se nazývá α-limitní množina trajektorie C^+.

Co plyne z definice?

1.
$$\Omega(C^+) = \{x_0 \in \mathbb{R}^m \mid \forall T \text{ a } \varepsilon > 0, \exists t > T : |x(t) - x_0| < \varepsilon\}$$
2.
$$\Omega(C^+) \subseteq \overline{C^+}, \qquad A(C^-) \subseteq \overline{C^-}$$
3. α-limitní množina je vlastně ω-limitní množina s časem běžícím pozpátku
4. Je-li $C = C^+ \cup C^-$ můžeme definovat limitní množinu
$$\Lambda(C) = A(C^-) \cup \Omega(C^+)$$

Věta

Množina $\Omega(C^+)$ je uzavřená. Má-li C^+ v D kompaktní uzávěr pak je množina $\Omega(C^+)$ kompaktní a souvislá.

Věta

Množina $\Omega(C^+)$ *je uzavřená. Má-li* C^+ *v* D *kompaktní uzávěr pak je množina* $\Omega(C^+)$ *kompaktní a souvislá.*

Věta

Nechť $x_0 \in D \cap \Omega(C^+)$. *Je-li* $x_0(t)$ *úplné řešení*

$$x' = f(x), \qquad x(0) = x_0$$

s maximálním intervalem existence (ω_-, ω_+), *pak* $x_0(t) \in \Omega(C^+)$ *pro* $t \in (\omega_-, \omega_+)$.
Má-li navíc C^+ *v* D *kompaktní uzávěr, existuje řešení* $x_0(t)$ *pro* $t \in (-\infty, \infty)$ *a pro jeho trajektorii* C_0 *platí*

$$C_0 \cup A(C_0^-) \cup \Omega(C_0^+) \subseteq \Omega(C^+).$$

Důsledek

Je-li $\Omega(C^+) \subseteq D$, *pak* $\Omega(C^+)$ *je invariantní množina.*

Důsledek

Je-li $\Omega(C^+) \subseteq D$, *pak* $\Omega(C^+)$ *je invariantní množina.*

Důsledek

Jestliže se množina $\Omega(C^+)$ *skládá z jediného bodu* $x_0 \in D$, *pak* x_0 *je stacionárním bodem a* $\lim_{t\to\infty} x(t) = x_0$ *pro řešení* $x(t)$ *jemuž odpovídá trajektorie* C^+.

Důsledek

Je-li $\Omega(C^+) \subseteq D$*, pak* $\Omega(C^+)$ *je invariantní množina.*

Důsledek

Jestliže se množina $\Omega(C^+)$ *skládá z jediného bodu* $x_0 \in D$*, pak* x_0 *je stacionárním bodem a* $\lim_{t\to\infty} x(t) = x_0$ *pro řešení* $x(t)$ *jemuž odpovídá trajektorie* C^+*.*

Věta

Nechť $V \subset D$ *je neprázdná pozitivně invariantní kompaktní konvexní množina rovnice* (1)*. Pak* (1) *má alespoň jeden singulární bod v množině* V*.*

Definice

Trajektorie odpovídající řešení $x(t)$, $t \in (-\infty, \infty)$, rovnice (1) takovému, že

$$\lim_{t\to\infty} x(t) = x_1, \qquad \lim_{t\to-\infty} x(t) = x_2, \qquad x_1 \neq x_2$$

kde x_1, x_2 jsou stacionární body rovnice (1), se nazývá *heteroklinická*.
Trajektorie odpovídající řešení $x(t)$ rovnice (1) takovému, že

$$\lim_{t\to\infty} x(t) = \lim_{t\to-\infty} x(t) = x_1,$$

kde x_1 je stacionární bod rovnice (1) se nazývá *homoklinická*.
Trajektorie C_0 odpovídající úplnému řešení $x_0(t)$, $t \in (\omega_-, \omega_+)$ taková, že $C_0 \subseteq \Omega(C^+)$, $C^+ \not\subseteq C_0$ pro nějakou polotrajektorii C^+, se nazývá *ω-limitní trajektorií*. Jestliže kromě toho je řešení $x_0(t)$ periodické, nazývá se trajektorie C_0 *ω-limitním cyklem*.

$$x' = f(x), \qquad f \in C(D, \mathbb{R}^2), D \subseteq \mathbb{R}^2 \text{ je otevřená} \tag{2}$$

Věta

Nechť $x(t)$, $t \in (-\infty, \infty)$, je periodické řešení rovnice (2), jehož trajektorie je cyklus C ležící v D i se svým vnitřkem Γ. Pak Γ obsahuje stacionární bod rovnice (2).

Věta (Poincaré–Bendixson)

Nechť C^+ je trajektorie řešení $x(t)$, $t \geq 0$, rovnice (2), mající kompaktní uzávěr v D. Předpokládejme, že ω-limitní množina $\Omega(C^+)$ neobsahuje stacionární body. Pak $\Omega(C^+)$ je cyklus.

Struktura ω-limitní množiny dvourozměrného autonomního systému obsahující stacionární body

Věta

Nechť C^+ *je trajektorie řešení* $x(t)$, $t \geq 0$, *rovnice* (2), *mající kompaktní uzávěr v* D. *Předpokládejme, že* ω*-limitní množina* $\Omega(C^+)$ *obsahuje konečný počet* $k \geq 1$ *stacionárních bodů.*
Jestliže se množina $\Omega(C^+)$ *skládá z jediného bodu* $x_0 \in D$, *pak* x_0 *je stacionárním bodem a* $\lim_{t\to\infty} x(t) = x_0$ *pro řešení* $x(t)$ *jemuž odpovídá trajektorie* C^+.
Je-li $\Omega(C^+)$ *tvořena více než jedním bodem, pak* $\Omega(C^+)$ *sestává ze stacionárních bodů* $x^{[1]}, x^{[2]}, \dots, x^{[k]}$ *a konečného nebo spočetného systému trajektorií* $C_0\colon x = x_0(t)$, $t \in (-\infty, \infty)$ *neprocházejících stacionárními body a mající vlastnost, že limity* $x_0(\pm\infty) = \lim_{t\to\pm\infty} x_0(t)$ *existují a splývají s jedním z bodů* $x^{[1]}, x^{[2]}, \dots, x^{[k]}$.

Slíbená $\varepsilon - \delta$ definice asymptotické orbitální stability

Definice

Nechť $C_\omega \colon x = x_\omega(t)$, $t \in (-\infty, \infty)$, je cyklus rovnice (2) odpovídající periodickému řešení $x_\omega(t)$ s periodou $w > 0$. Cyklus C_ω se nazývá *orbitálně stabilní* (orbitálně stabilní zvnějšku/zvnitřku) pro $t \to \infty$, jestliže ke každému $\varepsilon > 0$ existuje $\delta = \delta(\varepsilon) > 0$ takové, že jestliže bod x_0 leží ve vzdálenosti menší než δ od cyklu C_ω (a ve vnějšku/vnitřku cyklu), pak polotrajektorie $C_0^+ \colon x = x_0(t)$ řešení $x_0(t)$ počátečního problému $x' = f(x)$, $x(0) = x_0$ zůstává pro všechna $t \geq 0$ v ε-okolí cyklu C_ω.
Cyklus C_ω se nazývá *asymptoticky orbitálně stabilní* (zvnějšku/zvnitřku) pro $t \to \infty$, jestliže existuje $\delta > 0$ takové, že jestliže bod x_0 leží ve vzdálenosti menší než δ od cyklu C_ω (a ve vnějšku/vnitřku C_ω) pak pro polotrajektorii $C_0^+ \colon x = x_0(t)$ řešení $x_0(t)$ počátečního problému $x' = f(x)$, $x(0) = x_0$ platí $\Omega(C_0^+) = C_\omega$.

Věta

Nechť $C_\omega \colon x = x_\omega(t)$, $t \in (-\infty, \infty)$, *je cyklus rovnice* (2) *odpovídající periodickému řešení* $x_\omega(t)$ *s periodou* $w > 0$. *Pak*

- *i) pro to, aby* C_ω *byl cyklus asymptoticky orbitálně stabilní zvnějšku rovnice* (2) *pro* $t \to \infty$, *je nutné a stačí, aby trajektorie* C_ω *byla* ω*-limitní množinou pro polotrajektorii* C_0^+ *některého řešení* $x_0(t)$, $t \geq 0$, *ležícího ve vnějšku* C_ω;
- *ii) pro to, aby* C_ω *byl cyklus orbitálně stabilní zvnějšku pro* $t \to \infty$ *je nutné a stačí, aby trajektorie* C_ω *byla* ω*-limitní množinou pro některou polotrajektoroii* C_0^+ *ležící ve vnějšku* C_ω *nebo aby pro každé* $\varepsilon > 0$ *existovala uzavřená trajektorie rovnice* (2) *ležící ve vnější části* ε*-okolí trajektorie* C_ω.