3. TÝDEN

$\boxed{\text{Dokažte} \quad G_S(s) = G_N(G_M(s))}$

Využijeme, že platí $G_S(s) = E(s^S)$.

$$G_S(s) = E(s^S) \overset{\text{věta o celk. outr.}}{=} E[E(s^S|N)] \overset{\text{def. stř. h.}}{=} \sum_{n=0}^{\infty} E(s^S|N=n) \cdot P(N=n) =$$

$$= \sum_0^{\infty} E(s^{M_1+\dots+M_N} | N=n) \cdot P(N=n) \overset{\text{„}N=n \Rightarrow \text{známé"}}{=} \sum_0^{\infty} E(s^{M_1+\dots+M_n}) \cdot P(N=n) =$$

$$= \sum_0^{\infty} E[s^{M_1} \cdot s^{M_2} \cdot \dots \cdot s^{M_n}] \cdot P(N=n) \overset{\text{nezávislost } M_i}{=} \sum_0^{\infty} E(s^{M_1}) \cdot \dots \cdot E(s^{M_n}) \cdot P(N=n) =$$

$$= \sum_0^{\infty} \underbrace{E(s^M) \cdot \dots \cdot E(s^M)}_{n\text{ krát}} \cdot P(N=n) = \sum_0^{\infty} [\underbrace{E(s^M)}_{G_M(s)}]^n \cdot P(N=n) =$$

$$= \sum_0^{\infty} \underbrace{[G_M(s)]^n}_{\text{„}X\text{"}} \cdot \underbrace{P(N=n)}_{\text{„}P(X=i)\text{"}} = E[G_M(s)^N] = G_N[G_M(s)] \quad \square$$

$\boxed{\text{Dokažte větu ze slidu 30.}}$

Využijeme generujících fcí.

Platí, že $G_S(s) = e^{\lambda \cdot [G_M(s) - 1]}$ ← generující fce sekundárního rozdělení

S_i už je samotné složené Poissonovo rozdělení

$$G_S(s) = G_{S_1+\dots+S_n}(s) \overset{\text{nezávislé}}{=} G_{S_1}(s) \cdot \dots \cdot G_{S_n}(s) =$$

$$= e^{\lambda_1 \cdot [G_{M_1}(s)-1]} \cdot \dots \cdot e^{\lambda_n [G_{M_n}(s)-1]} \overset{\text{roznásobujeme}}{=}$$

$$= e^{\lambda_1 G_{M_1}(s) + \dots + \lambda_n G_{M_n}(s)} \cdot e^{-(\lambda_1+\dots+\lambda_n)} = \left| \lambda_1 + \dots + \lambda_n = \lambda \right|$$

$$= e^{\sum_{i=1}^{n} \lambda_i G_{M_i}(s)} \cdot e^{-\lambda} = e^{\frac{\lambda}{\lambda} \cdot \sum \lambda_i \cdot G_{M_i}(s)} \cdot e^{-\lambda} =$$

$$e^{\frac{\lambda}{\lambda}\cdot\sum\lambda_i G_{M_i}(s) - \lambda} = e^{\lambda\cdot\left[\frac{1}{\lambda}\cdot\sum^{n}\lambda_i\cdot G_{M_i}(s) - 1\right]} =$$

Porovnáme s $e^{\lambda\cdot[G_M(s)-1]}$ ← gen. fce slož. Poiss. rozdělení, $\lambda = \sum\lambda_i$

$$G_M(s) = \frac{1}{\lambda}\sum\lambda_i\cdot G_{M_i}(s)$$

↓ odpovídá

$$g_M(s) = \underbrace{\frac{1}{\lambda}\sum\lambda_i\, g_{M_i}(s)}_{\text{odpovídá sekundárnímu rozdělení}}$$

Z jednoznačnosti gen. fce plyne jednoznačnost vztahu.

Určete Var S a E(S) pro Neymarovo typu A, geom-Poiss.

Platí: $E(S) = EM\cdot EN$
$Var(S) = EN\cdot Var\,M + Var\,N\cdot[EM]^2$

a) Neymar

$Po(\lambda_1)$ … N primární
$Po(\lambda_2)$ … M sekundární

$E(S) = \lambda_1\cdot\lambda_2$

$Var(S) = \lambda_1\cdot\lambda_2 + \lambda_1\cdot\lambda_2^2$

c) geom. - Poissonovo

Prim. N… geom. $\quad EN = \frac{1-\theta}{\theta}$; $Var\,N = \frac{1-\theta}{\theta^2}$
Sek. M… Pois. $\quad EM = \lambda \quad Var\,M = \lambda$

$$E(S) = \frac{1-\theta}{\theta}\cdot\lambda$$

$$Var\,S = \frac{1-\theta}{\theta}\cdot\lambda + \frac{1-\theta}{\theta^2}\cdot\lambda^2$$

④ Najděte gen. fci binomického - Bernoulliho rozdělení; $Bi(n, \nu_1)$; $A(\nu_2)$.

binomické je primární... N
Bernoulli sekundární... M

Platí: $G_S(s) = G_N(G_M(s)) \Rightarrow$

$$G_M(s) = 1+\nu_2(s-1) \quad \left(G_M(s) = \sum^{\infty} p(i)\cdot s^i = (1-\nu_2)\cdot 1 + \nu_2 \cdot s = \right.$$
$$\left. = \nu_2\cdot(s-1)+1 \right).$$

binomické je n nezávislých altern.

$$G_N(s) = [1+\nu_1(s-1)]^n$$

$$\Rightarrow G_N[G_M(s)] = \Big[1 + \nu_1\cdot(\overbrace{1+\nu_2(s-1)}^{\text{"argument"}} - 1)\Big]^n =$$

$$= [1+\nu_1\cdot(\nu_2(s-1))]^n = [1+\nu_1\cdot\nu_2\cdot(s-1)]^n$$

⑤ Pomocí gen. fce dokažte, že složené Poissonovo - logaritmické je negativní binomické.

Budeme se snažit ukázat rovnost generujících fcí.

Máme primární - poissonovo roz. N
sekundární - logaritmické M

$$-\frac{(1-p)^k}{k\cdot \ln p}$$

$$G_M(s) = \sum_{k=1}^{\infty} \text{psť}\cdot s^k = \sum_{k=1}^{\infty} -\frac{(1-p)^k}{k\cdot \ln p}\cdot s^k = -\frac{1}{\ln p}\sum \frac{(1-p)^k}{k}\cdot s^k =$$

$$= -\frac{1}{\ln p}\cdot \underbrace{\sum_{k=1}^{\infty}\frac{[(1-p)\cdot s]^k}{k}} = -\frac{1}{\ln p}\, \cancel{\sum^{\infty}} \cdot (-\ln(1-(1-p)s))$$

Taylor: $-\ln(x) = \sum \frac{(1-x)^k}{k}$ $\quad x = 1-(1-p)s$

$$\Rightarrow G_n(s) = \frac{1}{\ln p} \cdot \ln[1-(1-p)s]$$

$$G_S(s) = \underset{\substack{\uparrow \\ \text{Poisson}}}{G_N}[G_n(s)] = e^{\lambda \cdot [G_n(s)-1]} = e^{\lambda \cdot \left[\frac{\ln[1-(1-p)s]}{\ln p} - 1\right]} =$$

$$= e^{\lambda \cdot \left[\frac{\ln[1-(1-p)\cdot s] - \ln p}{\ln p}\right]} = e^{\lambda \cdot \left[\frac{\ln \frac{1-(1-p)s}{p}}{\ln p}\right]} =$$

$$= e^{\frac{\lambda}{\ln p} \cdot \ln \frac{1-(1-p)s}{p}} = \cancel{e}^{\left[\cancel{\ln} \frac{1-(1-p)s}{p}\right]^{\frac{\lambda}{\ln p}}} =$$

$$= \left[\frac{1-(1-p)s}{p}\right]^{\frac{\lambda}{\ln p}}$$

Jak vypadá generující fce negativní binomického rozdělení?

$$\left(\frac{p}{1-(1-p)s}\right)^{n}$$

Upravíme proto:

$$\left[\frac{p}{1-(1-p)s}\right]^{\overset{= n}{-\frac{\lambda}{\ln p}}}$$

$\Rightarrow$ generující fce se rovnají!

$\Rightarrow$ složení poissonovo- log. je neg. bin.