Modelování celkové ztráty

– hlavní cíl modelování pro pojišťovnu

2 přístupy:

– Individuální model rizika

– Kolektivní model rizika

V kolektivním modelu uvažujeme počty pojistných událostí (čítací rozdělení) a jejich velikosti (nezáporná spojitá rozdělení)

Individuální model rizika

S ... náhodná veličina představující **úhrn škod** za období pevně zvolené délky T

n ... počet smluv v pojistném kmeni.

Individuální model:

- pracuje s riziky příslušejícími jednotlivým pojistným smlouvám v pojistném kmeni.
- zabývá se vlastnostmi **individuálních škodních nároků** $X_i, i = 1, ..., n$ připadajících na jednotlivé pojistné smlouvy.

- Pomocí modelu pro individuální nárok budeme modelovat **nárok pojišťovny** S, tedy součet $X_i, \ i = 1, 2, ..., n$,

$$S = \sum_{i=1}^{n} X_i$$

- Předpokládejme nezávislost jednotlivých nároků (ale nemusí být stejně rozdělené)
- Cílem je určit distribuční funkci, případně pst. funkci nebo hustotu pro S.

Uvažujme nejprve součet dvou nezávislých n.v.

$$S = X + Y.$$

Pak **distribuční funkce** veličiny S je

$$F_S(s) = \mathrm{P}(S \leq s) = \mathrm{P}(X + Y \leq s).$$

Pro dvě nezávislé, nezáporné diskrétní náhodné veličiny máme

$$\begin{aligned} F_S(s) &= \sum_{y \leq s} \mathrm{P}(X + Y \leq s | Y = y)\,\mathrm{P}(Y = y) \\ &= \sum_{y \leq s} \mathrm{P}(X \leq s - y | Y = y)\,\mathrm{P}(Y = y) \\ &= \sum_{y \leq s} F_X(s - y) p_Y(y). \end{aligned}$$

Pro pravděpodobnostní funkci pak platí

$$p_S(s) = \sum_{y \le s} p_X(s - y) p_y(y).$$

Pro spojité nezáporné náhodné veličiny můžeme psát podobně

$$\begin{aligned} F_S(s) &= \int_0^s \mathrm{P}(X \le s - y | Y = y) f_Y(y) \, \mathrm{d}y \\ &= \int_0^s F_X(s - y) f_Y(y) \, \mathrm{d}y. \end{aligned}$$

Hustota má tvar

$$f_S(s) = \int_0^s f_X(s - y) f_Y(y) \, \mathrm{d}y.$$

Pokud náhodné veličiny nabývají i záporných hodnot, pak sumy a integrály budou od $-\infty$ do ∞.

Operaci danou vztahy

$$
\begin{aligned}
F_S(s) &= \sum_{y \le s} F_X(s-y) p_Y(y) \\
F_S(s) &= \int_0^s F_X(s-y) f_Y(y)\, \mathrm{d}y
\end{aligned}
$$

nazýváme konvoluce distribučních funkcí F_X a F_Y a značíme ji $F_X * F_Y$.

Podobně pro hustoty nebo pravděpodobnostní funkce

$$\begin{aligned}(f_X * f_Y)(s) &= \int_0^s f_X(s-y) f_Y(y)\,\mathrm{d}y \\ (p_X * p_Y)(s) &= \sum_{y \le s} p_X(s-y) p_Y(y).\end{aligned}$$

Konečné součty

Pro součet více než 2 náhodných proměnných můžeme konvoluci použít iterativně.

- Uvažujme náhodnou veličinu S definovanou jako

$$S = X_1 + X_2 + \ldots + X_n,$$

- Označme F_i distribuční funkci X_i a $F^{(k)}$ distribuční funkci $X_1 + X_2 + \ldots + X_k$.
- Pak distribuční funkci S můžeme zapsat pomocí iterace

$$\begin{aligned} & F^{(2)} &=& F_2 * F^{(1)} = F_2 * F_1 \\ & F^{(3)} &=& F_3 * F^{(2)} \\ F_S = & F^{(n)} &=& F_n * F^{(n-1)} \end{aligned}$$

Momentová generující funkce

- Další způsob, jak lze určit rozdělení součtu náhodných veličin, využívá momentové generující funkce.
- Ta je definovaná vztahem

$$M_X(t) = \mathrm{E}(\mathrm{e}^{tX}).$$

- Je-li $\mathrm{E}(\mathrm{e}^{tX})$ konečná na otevřeném intervalu okolo počátku, pak je X touto funkcí jednoznačně určena.

Momentová vytvořující funkce veličiny $S = X_1 + X_2 + ... + X_n$ je

$$\begin{aligned} M_S(t) &= \mathrm{E}(\mathrm{e}^{tS}) = \mathrm{E}(\mathrm{e}^{t(X_1+X_2+...+X_n)}) \\ &= \mathrm{E}(\mathrm{e}^{tX_1}\,\mathrm{e}^{tX_2}\cdots\mathrm{e}^{tX_n}). \end{aligned}$$

Jestliže jsou veličiny $X_1, X_2, ..., X_n$ nezávislé, pak

$$\mathrm{E}(\mathrm{e}^{tX_1}\,\mathrm{e}^{tX_2}\cdots\mathrm{e}^{tX_n}) = \mathrm{E}(\mathrm{e}^{tX_1})\,\mathrm{E}(\mathrm{e}^{tX_2})\cdots\mathrm{E}(\mathrm{e}^{tX_n}).$$

Tedy

$$M_S(t) = M_{X_1}(t)M_{X_2}(t)\cdots M_{X_n}(t).$$

Příklad

Nechť nezávislé náhodné veličiny $X_1, \; X_2$ mají exponenciální rozložení s hustotami

$$\begin{aligned} f_1(x) &= \mathrm{e}^{-x} \quad x > 0, \\ f_2(x) &= 2\,\mathrm{e}^{-2x} \quad x > 0, \end{aligned}$$

Pomocí MGF najděte hustotu veličiny

$$S = X_1 + X_2.$$

Kolektivní model rizika

- Pro **kolektivní model rizika** uvažujeme proces, který generuje pojistné nároky pro portfolio smluv.
- Tento proces je charakterizován z hlediska portfolia jako celku, namísto hlediska jednotlivých pojistek.
- Matematicky lze tento proces charakterizovat takto:

N ... počet pojistných nároků, které vznikly za daný čas

X_j ... výše j-tého nároku

Pak

$$S = X_1 + X_2 + ... + X_N$$

je celkový pojistný nárok, který vznikl v portfoliu za dané období.

- Počet pojistných událostí N je náhodná veličina která souvisí s frekvencí pojistných nároků.
- Individuální pojistné nároky $X_1,\ X_2, ...$ jsou náhodné veličiny, které vyjadřují velikost jednotlivých pojistných událostí.
- Budeme uvažovat následující předpoklady:

1. $X_1,\ X_2, ...$ jsou náhodné veličiny se shodným rozložením,
2. $N,\ X_1,\ X_2, ...$ jsou vzájemně nezávislé.

– S je složená náhodná veličina

Označení

Rozdělení celkového pojistného nároku v daném období odvodíme z rozdělení počtu pojistných nároků a rozdělení jejich velikosti.

Nechť X je náhodná veličina s distribuční funkcí $F(x)$. Pak označíme

- $F(x)$ distribuční funkci nezávislých náhodných veličin X_i,
- $p_k = \mathrm{E}(X^k)$ k-tý moment veličiny X,
- $M_X(t) = \mathrm{E}(\mathrm{e}^{tX})$ momentovou generující funkci veličiny X.

Střední hodnota a rozptyl

Za uvedených předpokladů pro $N,\ X_1,\ X_2, \ldots$ dostaneme

$$\mathrm{E}(S) = \mathrm{E}(\,\mathrm{E}(S|N)) = \mathrm{E}(p_1 N) = p_1\,\mathrm{E}(N)$$

a také

$$\begin{aligned} \mathrm{Var}(S) &= \mathrm{E}(\,\mathrm{Var}(S|N)) + \mathrm{Var}(\,\mathrm{E}(S|N)) \\ &= \mathrm{E}(N\,\mathrm{Var}(X)) + \mathrm{Var}(p_1 N) \\ &= \mathrm{E}(N)\,\mathrm{Var}(X) + p_1^2\,\mathrm{Var}(N), \end{aligned}$$

kde $\mathrm{Var}(X) = p_2 - p_1^2$.

- Tedy střední hodnota celkového pojistného nároku je součinem střední hodnoty individuálního škodního nároku a očekávaného počtu pojistných nároků.
- Rozptyl celkového pojistného nároku je pak tvořen dvěma složkami.

  První složka je odvozena od rozptylu individuálního škodního nároku a druhá složka obsahuje rozptyl počtu nároků.

Momentová generující funkce

Podobně můžeme odvodit vztah pro **momentovou generující funkci** veličiny S:

$$\begin{aligned} M_S(t) &= \mathrm{E}(\,\mathrm{e}^{tS}) = \mathrm{E}(\,\mathrm{E}(\,\mathrm{e}^{tS}|N)) \\ &= \mathrm{E}(M_X(t)^N) = \mathrm{E}(\,\mathrm{e}^{N\log M_X(t)}) \\ &= M_N(\log M_X(t)). \end{aligned}$$

Distribuční funkce celkového pojistného nároku

K odvození **distribuční funkce** celkového pojistného nároku S využijeme větu o celkové pravděpodobnosti,

$$\begin{aligned} F_S(x) &= \mathrm{P}(S \leq x) = \sum_{n=0}^{\infty} \mathrm{P}(S \leq x | N = n)\,\mathrm{P}(N = n) \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} \mathrm{P}(X_1 + X_2 + \ldots + X_n \leq x)\,\mathrm{P}(N = n). \end{aligned}$$

Pomocí konvoluce, můžeme psát

$$\mathrm{P}(X_1 + X_2 + \ldots + X_n \leq x) = F * F * F * \ldots * F(x) = F^{*n}(x),$$

což je n-tá konvoluce F.

Připomeňme

$$F^{*0}(x) = \begin{cases} 1 & x \geq 0 \\ 0 & x < 0. \end{cases}$$

Pak tedy

$$F_S = \sum_{n=0}^{\infty} F^{*n}\,\mathrm{P}(N = n).$$

Distribuční funkce celkového pojistného nároku

Je-li individuální pojistný nárok diskrétní, tedy $p(x) = \mathrm{P}(X = x)$, pak také celkový pojistný nárok S je diskrétní. Podobně jako u spojitého případu dostaneme

$$p_S(x) = \sum_{n=0}^{\infty} p^{*n}(x)\, \mathrm{P}(N = n),$$

kde

$$p^{*n}(x) = p * p * \dots * p(x) = \mathrm{P}(X_1 + X_2 + \dots + X_n = x)$$

a

$$p^{*0}(x) = \begin{cases} 0 & x \neq 0 \\ 1 & x = 0. \end{cases}$$

Příklad

Předpokládejme, že N má geometrické rozložení,

$$\mathrm{P}(N = n) = pq^n \qquad n = 0, 1, 2, ...,$$

kde $0 < q < 1$ a $p = 1 - q$. Nechť individuální pojistný nárok má exponenciální rozložení se střední hodnotou 1,

$$F(x) = 1 - \mathrm{e}^{-x} \quad x > 0.$$

Ukažte, že

$$M_S(t) = p + q\frac{p}{p - t}.$$

Další metody výpočtu celkového nároku

– Panjerova rekurze

– Rozdělení pro velikost nároku můžeme diskretizovat (např. zaokrouhlit na celé tisíce).

Pokud je rozdělení počtu nároků N třídy $(a, b, 0)$ nebo $(a, b, 1)$, můžeme použít Panjerovu rekurzi v obvyklém tvaru.

S je v tom případě složená čítací veličina.

Inverzní Fourierova transformace

– charakteristickou funkci (příp. PGF, MGF) složeného rozdělení S je snadné vypočítat

– je to až na znaménko Fourierova transformace hustoty S

– musíme vypočítat inverzní transformaci, tedy hustotu S

Využívá se diskretizace a algorimus FFT (Fast Fourier Transform)